

リーマン多様体の正規座標と計量のテーラー展開

本間 泰史（早稲田理工 郡研究室）*

Abstract

このノートはリーマン多様体の正規座標についての基本的な性質を述べたものである．また，リーマン計量のテーラー展開を「Heat Kernels and Dirac operators」のテキストに基づいて証明した．また，最後に正規座標を直感的につかむために球面の正規座標を具体的にもとめてある．

0.1 測地線

(M, g) をリーマン多様体とする．我々は $g(X, X) = \|X\|^2$ と書くことにする．また，リーマン計量から導かれたレビチビタ接続を ∇ とする．このとき測地線とは次のような M 内の曲線 $\gamma(t)$ のことである．

$$\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0 \quad (0.1)$$

つまり $\gamma'(t)$ が曲線 $\gamma(t)$ に沿って平行であること．

Lemma 0.1. $\gamma(t)$ が測地線なら $\|\gamma'(t)\|$ は定数である（つまり速さ一定）．

Proof.

$$\frac{d}{dt} g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 2g(\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), \gamma'(t)) = 0. \quad (0.2)$$

ここでレビチビタ接続が計量を保つことを用いた．よって $\|\gamma'(t)\|$ は定数． ■

*Department of Mathematical Science, Waseda University, Tokyo 169, Japan.

Remark 0.1. この補題は重要である．なぜなら測地線が arclength に proportional なパラメータ付けをもつことが分かるからである（注意：あとで述べるが $\gamma(t)$ が測地線なら $\gamma(ct)$ や $\gamma(t+c)$ も測地線である．ただし前者の初期値ベクトルは異なる．また $\gamma(t)$ が測地線だからといって $\gamma(f(t))$ が測地線になるわけではない．例えば $\gamma(t^2)$ 測地線ではない． $\mathbb{R}^2$ の場合に $(x, y) = (t^2, t^2)$ は測地線でない．つまり見かけが測地線だからといって，安易に測地線といっているとはいけない．）

測地線の定義から局所座標系 $(x^1, \dots, x^n)$ において，測地線は次のような 2 階の非線形常微分方程式系の解であることがわかる．

$$\frac{d^2\gamma^i(t)}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i(\gamma(t)) \frac{d\gamma^j(t)}{dt} \frac{d\gamma^k(t)}{dt} = 0 \quad \text{for any } i \quad (0.3)$$

ただし $\gamma^i(t) := x^i(\gamma(t))$ ．常微分方程式の解の存在，一意性，初期条件に関する微分可能性から次の性質がわかる

Proposition 0.2. 1. 任意の点 $p \in M$ 及び任意のベクトル $X \in T_p(M)$ に対して，0 を含む開区間 I 及び測地線 $\gamma : I \rightarrow M$ で $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$ となるものが存在

2. $\gamma_1 : I_1 \rightarrow M$, $\gamma_2 : I_2 \rightarrow M$ 測地線で $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) = X$ となるものが存在するなら $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ for $t \in I_1 \cap I_2$

3. 各点 p に対して，閉区間 $I = [-a, a]$, $T_p(M)$ 内の開円板 $D = D(0, r_0) = \{X \in T_p(M) \mid \|X\| < r_0\}$ 及び，滑らかな写像 $\Psi : I \times D \rightarrow M$ で次のようなものが存在する：

任意の $X \in D$ に対して $\gamma_X(t) := \Psi(t, X)$ が $\gamma_X(0) = p$, $\gamma_X'(0) = X$ となる測地線となる．

4. $\gamma(t)$ 測地線なら $\gamma(ct)$ も測地線である．ここで c はゼロでない定数．

Proof. 最後の主張は $\gamma(t)$ が測地線の方程式を満たせば $\gamma(ct)$ も明らかに測地線の方程式をみたすことからわかる（ c^2 が前にでるだけ）．その他は常微分方程式の理論からしたがう． ■

命題における $I = [-a, a]$ の a は，各点により異なるが我々は円板 D の方を小さくとることにより $I = [-1, 1]$ とすることが可能である．例えば X に対する測地線 $\gamma_X(t)$ が $t = a < 1$ まで伸ばせたとする．このとき $\tilde{\gamma}(t) := \gamma_X(at)$ を考えるとこれは測地線であり，さらに $t = 1$ まで伸ばせる，しかし $\tilde{\gamma}'(0) = aX$ である（つまり $\gamma_{aX}(t) = \gamma_X(at)$ ）．よって開円板を小さくすれば $I = [-1, 1]$ としてよい．

0.2 指数写像と正規座標

以上から，次の指数写像を定義する：

Definition 0.1. 点 p における指数写像とは，上のような開円板 $D \subset T_p(M)$ をとり

$$\exp_p : D \ni X \rightarrow \gamma_X(1) \in M \quad (0.4)$$

特に，このとき $\gamma(t) := \exp_p(tX)$ は $\gamma(0) = p$ かつ $\gamma'(0) = X$ の測地線である．

Proof. $\exp_p(tX) = \gamma_{tX}(1) = \gamma_X(t)$ であるので． ■

この指数写像の T_pM の原点 0 における微分を考えると

$$(\exp_p)_*0(X) = \frac{d}{dt}(\exp_p(tX))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma_X(t)|_{t=0} = X$$

よって $(\exp_p)_*0 = \text{id}$ である．そこで逆関数定理から開円板 D をさらに小さくすることで

$$\exp_p : D \rightarrow \exp_p(D) \subset M$$

を微分同相写像とできる．これを用いて，次のように p の近傍 $\exp_p(D)$ 上で局所座標をつくる： $\{e_i\}_{i=1}^n$ を $T_p(M)$ の正規直交基底とする． $y \in \exp_p(D)$ に対して $\exp_p(\sum x^i e_i) = y$ となるようなベクトル $\sum x^i e_i \in T_p(M)$ が唯一つ存在するので $x^i(y) = x^i$ として局所座標をいれる．つまり

$$x^i = x^i(\exp_p(\sum x^i e_i)) \quad (0.5)$$

この $(\exp_p(D), x^1, \dots, x^n)$ を点 p での正規座標系とよぶ．より詳しく言えば $T_p(M)$ のある正規直交基底 $\{e_i\}$ を固定して

$$\mathbb{R}^n \rightarrow T_p(M) \rightarrow X \quad (0.6)$$

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto \sum x_i e_i \mapsto \exp_p(\sum x_i e_i) \quad (0.7)$$

という写像が正規座標である．特に，正規直交基底 $\{e_i\}$ を用いているので，

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad (0.8)$$

成立する（ここで g_{ij} は g の正規座標に関する成分である）．この式の意味することは $X = \sum X^i \partial_i \in T_p(M)$ をとったとき， $\|X\|^2 = \sum (X^i)^2$ となることを意味する（原点でのリーマン計量はユークリッド計量とみてよい）．

さらに次のことが成立．

$$\Gamma_{jk}^i(0) = 0, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0 \quad (0.9)$$

Proof. 正規座標では $\gamma(t) = tv$ ($v \in \mathbf{R}^n = T_p(M)$) が測地線である (原点から放射状に伸びる直線)。これを測地線の方程式に代入すれば

$$\Gamma_{jk}^i(\gamma(t))v^jv^k = 0 \quad \text{for any } v \in \mathbf{R}^n.$$

さらに, 捩れ率ゼロから $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ が (どんな座標においても) 成立する。よって $v = \frac{1}{2}(e_l + e_m)$ とすれば

$$\Gamma_{lm}^i(0) = 0 \quad \text{for any } i.$$

以上から $\Gamma_{jk}^i(0) = 0$ である。さて Γ_{jk}^i は g_{ij} の微分多項式として書けるのであった。特に次をえる:

$$g^{il}(0)\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(0) + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}(0) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(0)\right) = 0$$

よって

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(0) + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}(0) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(0) = 0$$

この式は任意の添え字 j, k, l について成立するので, cyclic にまわして $g_{ij} = g_{ji}$ を使って, 計算すれば $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0$ を得る。■

Remark 0.2. リーマン計量 g_{ij} のテーラー展開において一次の項が消えることを意味する。

以上まとめて

Proposition 0.3. 正規座標において, 次を得る

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} \tag{0.10}$$

$$\Gamma_{jk}^i(0) = 0 \tag{0.11}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0 \tag{0.12}$$

この命題に関して注意すべきは, 正規座標において $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ は正規直交フレームになるわけではない。原点 0 においてのみ正規直交基底になる。

また我々はこの局所座標を用いて接束 TM または正規直交フレーム束 $SO(M)$ の局所自明化を与えることが多い。つまり測地線 (原点から出る放射線状の直線) にそって $T_p(M)$ の平行移動を行い $T_p(M)$ と $T_{\exp_p(X)}(M)$ の同一視を行う。このときレビチビタ接続による平行移動なので正規直交基底は正規直交基底にうつる。そこで $T_p(M)$ の正規直交基底 $\{e_i\}_i$ を平行移動して, 正規直交フレーム $\{e_i(x)\}_i$ を得る。このときよく知られたように $(\nabla_{e_i} e_j)_p = 0$ が成立する。

Proof. $(\nabla_{e_i} e_j)_p$ をもとめるのであるが、接続の性質 $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ により、 $\nabla_{(e_i)_p} e_j$ を計算すればよい。 e_i の定義により $(e_i)_p = (\partial_i)_p$ である。我々の正規直交フレームは点 p からの平行移動により定義したので $\nabla_{(\partial_i)_p} e_i = 0$ は明らか。ここで注意すべき点は正規座標をとったとしても勝手な正規直交フレームに関して $(\nabla_{e_i} e_j)_p = 0$ が成立するわけではない。また $(\nabla_{e_i} e_j) = 0$ となる正規直交フレームの存在だけなら、正規座標をとる必要はなく、放射線上に平行移動するということだけでよい。つまり $(\nabla_{e_i} e_j)_p = 0$ となる正規直交フレームの存在と正規座標は全く独立したものである。 ■

さて、正規座標に関して次が成立する

Proposition 0.4. 1. 任意のベクトル $X \in D$ に対して

$$d(p, \exp_p(X)) = \|X\| \quad (0.13)$$

ただし d の定義は次のよう

$$d(p, q) = \inf \{L(c) \mid c \text{ は } p \text{ と } q \text{ を結ぶ区分的に滑らかな曲線}\} \quad (0.14)$$

2.

$$\exp_p(D) = \{q \in M \mid d(q, p) < (D \text{ の半径})\}$$

3. D の半径 r を十分小さくすれば $\exp_p(D)$ は凸集合である。つまり $q, q' \in \exp_p(D)$ は $\exp_p(D)$ 内で唯一つの測地線 γ で結べる。さらに $L(\gamma) = d(q, q')$ (このように $L(\gamma) = d(q, q')$ が成り立つような測地線を最短測地線と呼ぶ)

Remark 0.3. 上の命題から d が距離になることがわかる。 $d(p, q) = 0$ とすると $q \in \exp_p(D(r))$ となる。よって $q = \exp_p(X)$ となる X が存在するが $d(p, q) = \|X\| = 0$ であるので $p = q$ となる。

この命題を証明する前に補題を二つ用意する。

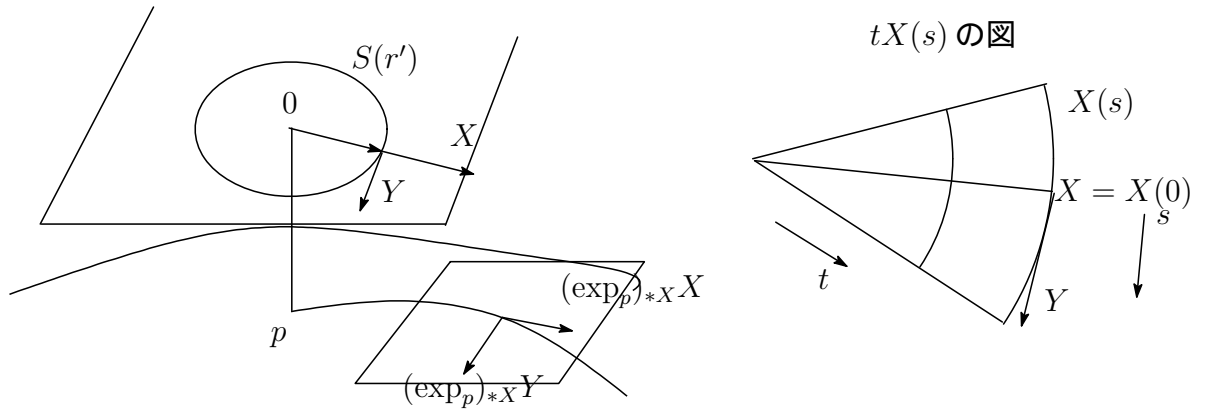
Lemma 0.5. 円板 D の半径 r として $0 < r' < r$ となる r' に対して次のことが成立： $T_p(M)$ 内の半径 r' の球を

$$S(r') := \{X \in T_p(M) \mid \|X\| = r'\}$$

とする。このとき $X \in S(r')$, $Y \in T_X(S(r'))$ に対して

$$g_{\exp_p(X)}((\exp_p)_* X, (\exp_p)_* Y) = 0$$

つまり指数写像で移したときリーマン計量に関して X と Y は直交している。



Proof. 球面 $S'(r)$ 内の曲線 $X(s)$ で $X(0) = X$ かつ $X'(0) = Y$ となるものをとる．さらに

$$\phi(t, s) := \exp_p(tX(s)) \in M$$

とする．つまり s を固定して t を動かせば測地線である．さて

$$g_{\phi(t,s)}(\phi_t, \phi_t) = g_p(X(s), X(s)) = r'^2$$

である（ここで測地線は長さを変えないことを用いた．また ϕ_t は t に関しての微分）．さらに両辺を s で微分して

$$\begin{aligned} 0 &= 2g(\phi_t, \nabla_{\partial/\partial s} \phi_t) \\ &= 2g(\phi_t, \nabla_{\partial/\partial t} \phi_s + \phi_*([\partial/\partial s, \partial/\partial t])) \quad (\text{括れゼロから}) \\ &= 2g(\phi_t, \nabla_{\partial/\partial t} \phi_s) \\ &= 2\left\{ \frac{\partial}{\partial t} g(\phi_t, \phi_s) - g(\nabla_{\partial/\partial t} \phi_t, \phi_s) \right\} \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial t} g(\phi_t, \phi_s) \quad (\text{測地線より}) \end{aligned}$$

となるので $g(\phi_t, \phi_s)$ は t に関して定数である．特に $t = 0$ の時を考えると $\phi_s(0, s) = 0$ であるので $g(\phi_t, \phi_s) = 0$ を得る．また

$$\phi_t(1, 0) = (\exp_p)_*X X, \quad \phi_s(1, 0) = (\exp_p)_*X Y$$

であるので補題が証明できた（あとで別証明を与える） ■

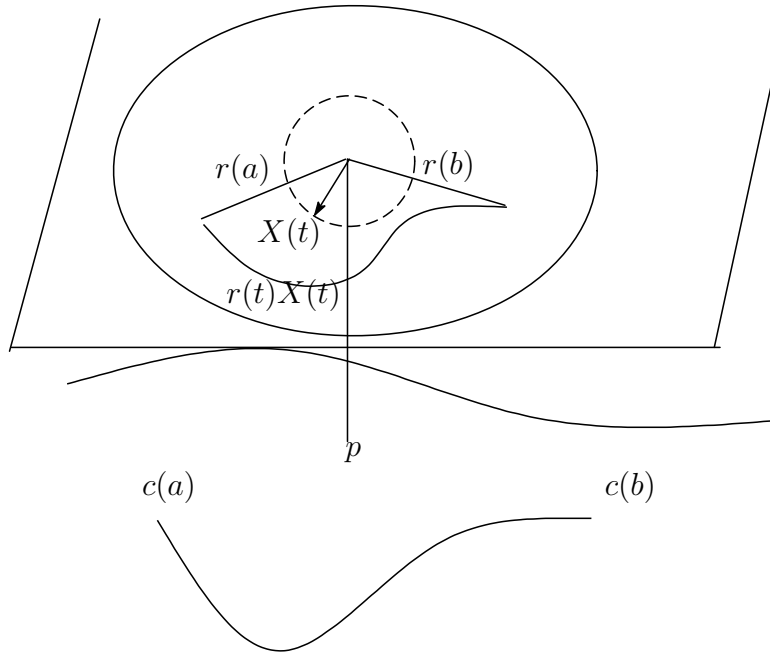
Lemma 0.6. $\exp_p(D)$ 内の滑らかな曲線 $c(t)$ を考える ($a \leq t \leq b$)．この曲線を極座標表示する

$$c(t) = \exp_p(r(t)X(t)) \quad , \quad \|X(t)\| = 1, \quad r(t) \in \mathbb{R}$$

このとき

$$\int_a^b \|c'(t)\| dt \geq |r(b) - r(a)| \quad (0.15)$$

(左辺は曲線の M 内での長さ) . さらに等号成立は $r(t)$ が単調増加で $X(t)$ が定ベクトルのとき .



Proof. $\phi(r, t) = \exp_p(rX(t))$ とすると , $c(t) = \phi(r(t), t)$ である . さて

$$c'(t) = \frac{dr}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

となる . よって先ほどの補題を用いれば

$$\|c'(t)\|^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 g\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + g\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

となるが $g\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = \|X(t)\|^2 = 1$ となるので

$$\|c'(t)\|^2 \geq \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

を得る (等号成立は $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, つまり $X(t)$ が定ベクトル) . よって

$$\int_a^b \|c'(t)\| dt \geq \int_a^b \left|\frac{dr}{dt}\right| dt \geq \left|\int_a^b \frac{dr}{dt} dt\right| \geq |r(b) - r(a)|$$

となる（ここで等号成立は $r(t)$ が単調増加）． ■

Proof of Proposition. 第一の主張を示そう．上の補題において $c(0) = p, c(b) = \exp_p(X)$ となる任意の曲線を選ぶ（ $a = 0$ としている）．特に $r(0) = 0$ である．よって

$$\int_a^b \|c'(t)\| dt \geq r(b)$$

となる．このように p と $\exp_p(X)$ を結ぶ曲線は $r(b)$ で抑えることができる．我々は p から $c(b)$ への曲線として $c(t) = \exp_p(tX)$ をとれば， $r(b) = \|X\| = \int_0^b \|\gamma'_X(t)\| dt$ となる．

第二の主張は第一の主張から言える．

第三の主張を考える． p に関する開円板を D_p とかく．この円板の半径 r を十分小さくにとって $\exp_q(D(r'))$ 内に q' が入るようにすれば q と q' は測地線で結べる．さらに微分同相 $\exp_p: D(r) \mapsto \exp_p(D(r))$ において，半径 r は p に対して連続的に変化することがわかる．つまり p と p' が十分近ければ r と r' も十分近い．よって r を十分小さくとれば主張がいえる． ■

0.3 リーマン極座標

補題 0.5 はもう少しよい形で書くことができる．まず $T_p(M) \simeq \mathbb{R}^n$ 上で極座標

$$(r, \phi) = (r, \phi^1, \dots, \phi^{n-1})$$

をとる．ここで $(\phi^1, \dots, \phi^{n-1})$ は単位球面 $S(1)$ を表示している．このような座標をリーマン極座標という．

Proposition 0.7. リーマン極座標においてリーマン計量は次のように表示される（これはこの正規座標の任意の点においてである）．

$$\begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\phi^1} & \cdots & g_{r\phi^{n-1}} \\ g_{r\phi^1} & & & \\ \cdot & & g_{\phi^i\phi^j} & \\ g_{r\phi^{n-1}} & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdot & g_{\phi^i\phi^j}(r, \phi) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (0.16)$$

Proof. $g_{r\phi^i} = 0$ であることは先ほどの補題から従うが，もう一度証明する．まず原点 $0 \in T_p(M)$ においては $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ であったので，

$$g_{rr}(0) = 1, \quad g_{r\phi^i}(0) = 0$$

を得る．さて， $\phi = \text{const}$ は直線であり，arclength によりパラメータ付けられるときには測地線になる．つまり $\gamma(t) = (t, \phi_0)$ が測地線である．測地線の方程式に代入すれば ($\nabla_{\partial_r} \partial_r = 0$)

$$\Gamma_{rr}^r = 0, \quad \Gamma_{rr}^{\phi^i} = 0$$

が成立 (任意の点で)．よって

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n-1} g^{r\phi^l} \left(2 \frac{\partial g_{r\phi^l}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial \phi^l} \right) + g^{rr} \left(2 \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) &= 0 \\ \sum_{l=1}^{n-1} g^{\phi^i \phi^l} \left(2 \frac{\partial g_{r\phi^l}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial \phi^l} \right) + g^{\phi^i r} \left(2 \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) &= 0 \end{aligned}$$

よって特に

$$2 \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} = 0, \quad 2 \frac{\partial g_{r\phi^l}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial \phi^l} = 0$$

以上から g_{rr} は一定であり，初期条件から $g_{rr} \equiv 1$ である．よって $g_{r\phi^i} \equiv 0$ も従う． ■

0.4 計量のテーラー展開

さて「Heat Kernels and Dirac operators」に必要な事実を証明していこう．リーマン極座標をもう少し詳しく調べる． $R = r\partial_r = \sum x^i \partial_i$ というベクトル場を考える．つまりオイラー微分である，特に r^m をこの R で微分したら mr^m となる．このように R は r についての次数を図る作用素である．上の命題から

$$g_x(R, R) = r^2 g_x(\partial_r, \partial_r) = r^2 g_{rr} = r^2 = \sum (x^i)^2 \quad (0.17)$$

が任意の点 $x \in \exp_p(D)$ に対して成立する．

次に $\partial_i = \frac{x^i}{r} \partial_r + \sum f^i \partial_{\phi^i}$ となるが，このベクトルと R との内積をとれば

$$g(R, \partial_i) = rg(\partial_r, \partial_i) = x^i g_{rr} = x^i \quad (0.18)$$

となる．

次に $\nabla_R R$ を考える．

$$\nabla_R R = r \nabla_{\partial_r} r \partial_r = r \partial_r + r^2 \nabla_{\partial_r} \partial_r = R \quad (0.19)$$

(ベクトル場 ∂_r に沿った点 p から出る曲線は測地線であった．つまり $\nabla_{\partial_r} \partial_r = 0$ が成立した．しかしベクトル場 R に沿った曲線は上のように測地線ではない)

次に再び TM の平行移動による局所自明化を考える．そのとき得られる正規直交フレームを $\{e_i(x)\}_i$ としていた．我々は放射状に平行移動を行ったので(ここでの放射線とは ∂_r に沿った曲線のことである) $\nabla_{\partial_r} e_i = 0$ である．よって $\nabla_R e_i = 0$ も従う．

また $e_i = \partial_i + O(r)$ と書ける．まずこの式の意味を考える． ∂_i と正確なことを言えば $\mathbb{R}^n \simeq T_p(M)$ 上のベクトル場 ∂_i を $\exp_p$ により M 上のベクトル場として考えたものである．つまり $(\partial_i)_{(\exp_p)(v)} = (\exp_p)_* \partial_i$ のことである．一方 e_i は $\gamma(t) = (t, \phi_0)$ に沿った平行移動により定義される正規直交フレームである．(前に述べたがこの平行移動と正規座標はなんら関わりがない．関係しているのは，平行移動を測地線に沿ってすることだけである)． $e_i(x) = \sum f_i^k(x) \partial_k$ と書けるが，これを x についてテーラー展開すると

$$e_i(x) = \sum_k \{f_i^k(0) + \sum_l \frac{\partial f_i^k}{\partial x^l}(0)x^l + \frac{1}{2} \sum_{pq} \frac{\partial^2 f_i^k}{\partial x^p \partial x^q}(0)x^p x^q + \cdots\} \partial_k$$

となる(∂_i は正規座標での標準ベクトル場であるので x には依存しない)．さて e_i の定義から $f_i^k(0) = \delta_{ki}$ となる．よって

$$e_i(x) = \partial_i + \sum_k \left\{ \sum_l \frac{\partial f_i^k}{\partial x^l}(0)x^l + \frac{1}{2} \sum_{pq} \frac{\partial^2 f_i^k}{\partial x^p \partial x^q}(0)x^p x^q + \cdots \right\} \partial_k$$

この式が $e_i = \partial_i + O(r)$ の意味である．

Remark 0.4. 実は次が分かる

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{\partial_k} e_l)_0 = \left\{ \sum \nabla_{\partial_k} f_l^i \partial_i \right\}_0 \\ &= \left\{ \sum \left(\frac{\partial f_l^i}{\partial x^k} \partial_i + f_l^i \nabla_{\partial_k} \partial_i \right) \right\}_0 \\ &= \sum \frac{\partial f_l^i}{\partial x^k}(0) (\partial_i)_0 \end{aligned}$$

よって $\frac{\partial f_l^i}{\partial x^k}(0) = 0$ を得る．これより実は $e_i = \partial_i + O(r^2)$ となる．より詳しい展開公式はあとで述べる．

さて

$$Rg(R, e_i) = g(\nabla_R R, e_i) + g(R, \nabla_R e_i) = (R, e_i)$$

となるので $g(R, e_i)$ は r について次数が 1 である．一方

$$g(R, e_i) = \sum x^j g(\partial_j, e_i) = \sum x^j g(e_j - O(r), e_i) = x^i + O(r^2)$$

となる．よって $g(R, e_i) = x^i$ を得る．特に $R = \sum x^i e_i$ 以上まとめて

Proposition 0.8. 正規座標系をとり，さらに TM も平行移動により局所自明化しておく．このとき次を得る

$$\nabla_R R = R \quad (0.20)$$

$$R = \sum x^i e_i = \sum x^i \partial_i, \quad g(R, R) = r^2 \quad (0.21)$$

$$g(R, \partial_i) = x^i \quad (0.22)$$

$$\nabla_{\partial_r} e_i = 0, \quad \nabla_R e_i = 0 \quad (0.23)$$

このノートの目的は次である

Proposition 0.9. 点 p における正規座標におけるリーマン計量 $g_{ij}(x) = g(\partial_i, \partial_j)$ は p のまわりで次のようになる

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} \sum R_{ikjl}(p) x^k x^l + \sum_{|\alpha| \geq 3} (\partial^\alpha g_{ij})(p) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \quad (0.24)$$

これを証明する前に二つ補題を証明する

Lemma 0.10. ある座標近傍 U において，放射線の平行移動によって局所自明化をした場合に，その近傍 U において

$$\iota_R \omega = 0 \quad L(R)\omega = \iota_R F \quad (0.25)$$

となる．ただし ω, F はこの局所自明化に関する接続形式と曲率形式であり U 上行列値一次微分形式及び 2 次微分形式と見なしている．

Proof. 自明化の定義から平行移動によるフレーム e_i に関して $0 = \nabla_R e_i = \sum \omega_i^j(R) e_j$ である．よって $\iota_R \omega = 0$ となる．

$$L(R)\omega = (\iota_R d + d\iota_R)\omega = \iota_R d\omega = \iota_R (d\omega + \omega \wedge \omega) = \iota_R F$$

■

Lemma 0.11. $\theta(x) = \sum \theta(x)_i dx^i$ という一次微分形式を考える．このとき

$$L(R)\theta = \sum (L(R)\theta)_i dx^i = \sum_i \left(\sum_k x_k \frac{\partial \theta_i}{\partial x^k} + \theta_i \right) dx^i \quad (0.26)$$

特に，このテーラー展開を考えると

$$(L(R)\theta)_i(x) \sim \sum_{\alpha} (|\alpha| + 1) \partial^{\alpha} \theta_i(0) \frac{\mathbf{x}^{\alpha}}{\alpha!} \quad (0.27)$$

特に，上の補題のような $L(R)\omega = \iota_R F$ となる一次微分形式に対して

$$\omega_i(x) = -\frac{1}{2} \sum_j F(\partial_i, \partial_j)(0) x^j + O(r^2) \quad (0.28)$$

(これは放射線上の平行移動による自明化に関するもので，正規座標は関係ない)

Proof. まず $[R, \partial_i] = -\partial_i$ であることに注意すれば，最初の式を得る（微分形式のリー微分の定義を思い出せ）．2 番目の式を証明するには．

$$(L(R)\theta)_i = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) \theta_i$$

において θ_i をテーラー展開をして $r \frac{\partial}{\partial r}$ がオイラー微分であるので $\mathbf{x}^{\alpha}$ にあてると $|\alpha| x^{\alpha}$ になることを用いればよい．次に $L(R)\omega = \iota_R F$ となる場合を考えると

$$\sum_{\alpha} (|\alpha| + 1) \partial^{\alpha} \omega_l(0) \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} = \sum \partial^{\alpha} F(\partial_k, \partial_l)(0) x^k \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \quad (0.29)$$

となるここで $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$.

■

Proof of Proposition. まず今までのようにして TM の正規座標からのフレーム ∂_i 及び正規直交フレーム $\{e_i\}$ を用意する．これらの関係を

$$\partial_i = \sum \theta_i^j e_j$$

と書く．さらに e_i に双対な一次微分形式の組を $\theta^j = \sum \theta_i^j dx^i$ とする．このとき

$$\theta = \sum dx^i \partial_i = \sum \theta^j e_j \in A^1(M, TM)$$

を基本 1 次形式という．この $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 値微分一次形式である．
 (ここで $\mathbb{R}^n$ は $\{e_i\}$ を基底としたときの座標．つまり接束の局所自明化)．このときフレーム $\{e_i\}$ に関する接続形式は

$$\omega_j^i = \sum \Gamma_{kj}^i \theta^k$$

となり $\omega = (\omega_j^i)$ は $\mathfrak{so}(n)$ 値一次微分形式となる．リーマン多様体上の基本 1 次形式は次の構造方程式を満たす

$$d\theta + \omega \wedge \theta = 0 \iff d\theta^i = - \sum \omega_{k\wedge}^i \theta^k \quad (0.30)$$

さてまず次がわかる $\iota_R \theta = R = (x^1, \dots, x^m) = \mathbf{x}$ つまり，各成分でみれば

$$\iota_R \theta^a = \sum \theta_i^a \iota_R dx^i = \sum \theta_i^a x^i = x^a$$

(ここで $R = \sum x^i e_i = \sum x^i \partial_i = \sum x^i \theta_i^j e_j$ ．よって $\sum x^i \theta_i^j = x^j$ である)．さてこの局所座標及び局所自明化での曲率形式を Ω とする．

$$\begin{aligned} 0 &= \iota_R(d\theta + \omega \wedge \theta) = L(R)\theta - d\iota_R \theta + (\iota_R \omega)\theta - \omega \iota_R \theta \\ &= L(R)\theta - \sum dx^i e_i - \omega \iota_R \theta \\ &= L(R)\theta - \sum dx^i e_i - \omega \mathbf{x} \end{aligned}$$

(ここで重要な注意: θ は基本一次形式であり，ベクトル場に値をもつ微分一次形式であるがリー微分などを行うときは注意が必要である．例えば $L(R)\theta = L(R)(\theta^a e_a)$ を計算するわけであるが， e_a の方は今回は微分しない．つまり $\mathbb{R}^n$ 値の微分形式と思って各成分を微分する．間違っても e_a の方も微分すると計算がぜんぜん合わなくなってしまう．以上のことから $L(R) = d\iota_R + \iota_R d$ などを使ってもよい)．よって

$$\begin{aligned} (L(R) - 1)L(R)\theta &= L(R)L(R)\theta - L(R)\theta \\ &= L(R)(\omega \mathbf{x}) + L(R) \sum dx^i e_i - \sum dx^i e_i - \omega \mathbf{x} \\ &= (L(R)\omega) \mathbf{x} + \omega L(R) \mathbf{x} + \sum dx^i e_i - \sum dx^i e_i - \omega \mathbf{x} \\ &= (L(R)\omega) \mathbf{x} + \omega \mathbf{x} - \omega \mathbf{x} = (\iota_R \Omega) \mathbf{x} \end{aligned}$$

つまり，各成分でみれば

$$\begin{aligned}
(L(R) - 1)L(R)\theta^a &= \sum (\iota_R \Omega)_i^a x^l \\
&= \frac{1}{2} \sum_{ija} g(\Omega(\partial_i, \partial_j)e_l, e_a) x^l \iota_R(dx^i \wedge dx^j) \\
&= \frac{1}{2} \sum x^l g(\Omega(\partial_i, \partial_j)e_l, e_a) (x^i dx^j - x^j dx^i)
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
\iota(\partial_k)((L(R) - 1)L(R)\theta^a) &= \frac{1}{2} \sum x^l x^i g(\Omega(\partial_i, \partial_k)e_l, e_a) - \frac{1}{2} \sum x^l g(\Omega(\partial_k, \partial_j)e_l, e_a) x^j \\
&= \sum x^l x^i g(\Omega(\partial_i, \partial_k)e_l, e_a) \\
&= \sum x^l x^i g(\Omega(\partial_i, \partial_k)\partial_l, e_a)
\end{aligned}$$

最後のところで $R = \sum x^i \partial_i = \sum x^i e_i$ を用いた．

上の式をテーラー展開する．まず $\theta^a = \sum \theta_k^a dx^k$ の成分 θ_k^a にテーラー展開をする． $\theta_k^a(0) = \delta_k^a$ であることはすでに知っている．

$$\theta_k^a = \delta_k^a + \sum_{|\alpha| \geq 1} \partial^\alpha \theta_k^a(0) \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!}$$

補題からこの R によるリー微分を考えれば

$$((L(R) - 1)L(R)\theta^a)_k = \sum_{|\alpha| \geq 0} (|\alpha| + 1) |\alpha| \partial^\alpha \theta_k^a(0) \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!}$$

よって

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha| \geq 0} (|\alpha| + 1) |\alpha| \partial^\alpha \theta_k^a(0) \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!} &= \sum x^l x^i g(\Omega(\partial_i, \partial_k)\partial_l, e_a) \\
&= \sum x^l x^i g(\Omega(\partial_i, \partial_k)\partial_l, \partial_a)(0) + O(r^3)
\end{aligned}$$

最後の式で $g(\Omega(\partial_i, \partial_k)\partial_l, e_a)$ をテーラー展開している．この式から θ のテーラー展開において一次の項はない（この事実はかなり前に述べた）．さらに 2 次の項については

$$\sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha \theta_k^a(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} = \frac{1}{(2+1)2} \sum_{il} g(\Omega(\partial_i, \partial_k)\partial_l, \partial_a)(0) x^l x^i = -\frac{1}{6} \sum R_{laik} x^l x^i$$

以上から

$$\theta_b^a = \delta_b^a - \frac{1}{6} \sum x^i x^j R_{jaib} + O(r^3) \quad (0.31)$$

となる．この式を $g_{ij} = \sum \theta_i^k \theta_j^k$ に代入すれば命題が証明できる． ■

Remark 0.5. この命題は，上記のように証明するほかにクリストッフェル記号を使って証明する方法もある（そっちの方が，普通．たとえば酒井「リーマン幾何学」）．

0.5 Hopf-Rinow の定理

さて指数写像 $\exp_p$ の定義域である開円板 D_p を $T_p(M)$ 全体へと拡張できるであろうか？これに対しては次の結果が知られている．

Proposition 0.12 (Hopf-Rinow, [1]). 連結なリーマン多様体に対して以下は同値

1. d を距離として M は完備である（コーシー列が収束）
2. ある点 $p \in M$ で $D_p = T_p(M)$ となるものが存在
3. 任意の点 $p \in M$ に対して $D_p = T_p(M)$
4. 任意の点 $p \in M$ と任意の $r > 0$ に対して $\{q \in M | d(p, q) < r\}$ が相対コンパクト
5. M 内の有界閉集合はコンパクト

さらにこのようなときに (M, g) を完備リーマン多様体とよぶ．またそのとき任意の点 p, q に対して，それらを結ぶ最短測地線が存在する．

Remark 0.6. 1. (M, g) を距離空間とみなしたときに入る位相はもともとある M の位相と一致する．

2. $T_p(M)$ 全体で $\exp_p$ が拡張できるわけだが，単射性は（一般に）明らかに崩れることに注意する．よって座標系になるわけではない．このため下で定義する単射半径という概念がある．リーマン幾何においてはこの単射半径は重要な概念の一つである．

最後に単射半径の定義をしておく

Definition 0.2. M をリーマン多様体とする．点 p における単射半径とは

$$i(p) := \sup\{\rho > 0 | \exp_p \text{ is defined on } D(0, \rho) \subset T_p(M) \text{ and injective}\} \quad (0.32)$$

(よって, これは正規座標を拡張した座標のうちもっとも大きいものである)．
さらに M の単射半径とは各点の単射半径の $\inf$ のこと:

$$i(M) := \inf_{p \in M} i(p) \quad (0.33)$$

Example 0.1. 例えば単位球面の単射半径は π である．なぜなら各点 p において半径 π の開集合上から $M \xrightarrow{\exp_p}$ を定めることができ, 単射になる．

2次元球面の正規座標を具体的に書いてみよう (ふと思いついた方法なので, 本当に正規座標になるかは証明していないけど, 多分あってると思う)

まず2次元単位球面を極座標表示すると (下図参照)

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \phi \\ y = \sin \theta \sin \phi \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad (0.34)$$

ここで $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．また θ は北極 p から出発している． ϕ を固定して θ を動かせば北極を通る大円になるので, この θ, ϕ を用いれば, 正規座標をつくれる．そこで $r := \theta$ とすれば,

$$\mathbb{R}^2 \supset D(\pi) \ni (r, \phi) \mapsto (\sin r \cos \phi, \sin r \sin \phi, \cos r) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad (0.35)$$

が指数写像つまり正規座標になる．さらに計量を計算すれば,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + \sin^2 r d\phi^2 \quad (0.36)$$

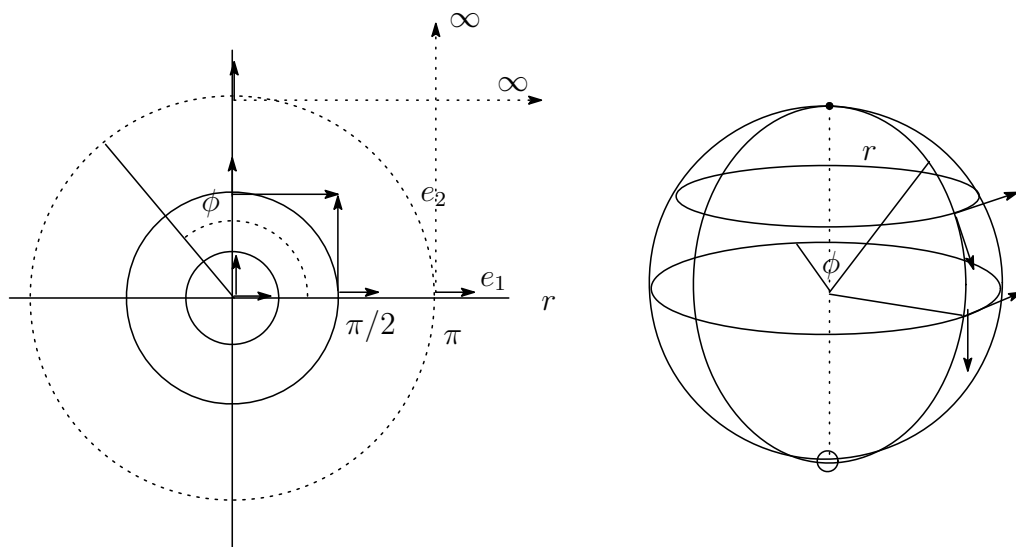
となる．つまり

$$(\mathbb{R}^2, dr^2 + \sin^2 r d\phi^2) \quad 0 \leq r < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi \quad (0.37)$$

が球面の正規座標表示となる．また計量は次のようにも書ける．

$$\begin{aligned} & dr^2 + \sin^2 r d\phi^2 \\ = & (\cos^2 \phi + \frac{\sin^2 r \sin^2 \phi}{r^2}) dx^2 + (\sin^2 \phi + \frac{\sin^2 r \cos^2 \phi}{r^2}) dy^2 + 2 \sin \phi \cos \phi (1 - \frac{\sin^2 r}{r^2}) dx dy \end{aligned}$$

(ここで $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$) . とくに原点においてはユークリッド計量に一致していることがわかる .



この方法は一般次元の球面でも同様である .

References

- [1] Jürgen Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis, Third edition* Springer