

2012年度 幾何学A
多様体上の楕円型微分作用素 -Hodge theorem-

本間 泰史（早稲田基幹理工）

このノートは Warner GTM94 「Foundation of differential manifolds and Lie groups」の Hodge theorem の章の解説です．講義ノートなので，タイプミスなどの間違いは多々あります．本質的な間違いなどもあつたりするかもしれません．ミスがあつたら知らせてくれればと思います．

第一章は多様体の復習です．おもに，Hitchin のレクチャーノートを参考にしています．多様体の知識としては，関数の微分やベクトル場ぐらいまで知っていればよいです．一の分割・外積代数・外微分・積分・ドラムコホモロジーについては詳しく解説してあります（1 の分割の詳しい証明は，適当な多様体の参考書を見てください）．また，微分形式の応用として写像度について述べてあります．

第二章以降が本論です．（微分幾何での）Hodge の定理とは調和 p 形式の全体が $H_{DR}^p(M)$ と同型というもの．よって，各 $H_{DR}^p(M)$ の代表元として調和なものが取れることになります．応用としては，ポアンカレ双対性（ $H^p(M) \cong (H^{n-p}(M))^*$ ）などがあります．ラプラス作用素という 2 階楕円型微分作用素の解析することにより Hodge の定理は証明できますが，多様体上の楕円型微分作用素の理論のもっとも基本的な話であり，他の楕円型微分作用素に対しても，不等式などはほとんど同じように成立します．証明方法は，まず，局所的（というかトーラス上）な解析をフーリエ変換を利用して行い，ソボレフの補題や楕円型評価，正則性定理などを定式化・証明します．さらに，リースの表現定理により弱解の存在を示して，正則性定理から真の解の存在を示します．そして，1 の分割を使ってコンパクト多様体上でも成立することを示すという方法です（なお，弱解の存在は，エネルギーの最小化列で示す方法もあり，幾何学（多分，解析学でも）ではそちらのほうが有用）．

また，応用として，ラプラス作用素に対する固有値展開や Peter-Weyl の定理（コンパクトリー群上の関数空間の既約分解）の話題を解説します．

2012/09/24 本間泰史

半年講義して，あいまいな部分の補足，誤植と間違った部分などを訂正しました（それでもまだ間違いはあると思うが）．謝辞：研究室の大橋さん（学部 4 年）にはいろいろと指摘して頂きました．この場をかりて感謝します．

2013/01/23 本間泰史

目次

第 1 章	多様体ショートコース	5
1.1	多様体	5
1.2	テンソル積	15
1.3	微分形式	27
1.4	微分形式の積分	43
1.5	写像度	55
1.6	写像度の応用	58
第 2 章	リーマン多様体と Laplace-Beltrami 作用素	65
2.1	リーマン計量	65
2.2	star 作用素	68
2.3	ラプラス作用素	72
2.4	Hodge 理論概論	75
第 3 章	必要な解析学	87
3.1	記号	87
3.2	フーリエ級数	88
3.3	ソボレフ空間・ソボレフの補題・レリッヒの補題	92
3.4	楕円型微分作用素	114
第 4 章	Regularity の証明	121
4.1	準備	121
4.2	定理 2.4.1 の証明	123
4.3	定理 2.4.2 の証明	130
4.4	Laplace-Beltrami 作用素の楕円型性	131
4.5	一般の楕円型微分作用素	134
4.6	楕円複体	137

第 5 章	応用	143
5.1	固有値問題	143
5.2	Peter-Weyl の定理	147
5.3	Overdetermined elliptic, Underdetermined elliptic	154
参考文献		159
索引		160

第 1 章

多様体ショートコース

1.1 多様体

1.1.1 多様体

Definition 1.1.1. 位相空間 X が n 次元位相多様体とは次をみたすこと：

1. X はハウスドルフ空間
2. X の任意の点 p に対して, p を含む座標近傍 (U, ϕ) (**coordinate chart, coordinate neighborhood**) が存在.

ここで座標近傍とは, 開集合 $U \subset X$ と同相写像 $\phi: U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ の組のこと. また, このとき $x \in U$ を n 個のパラメータで書くことができる：

$$\phi(x) = (x_1, \dots, x_n)$$

これを点 x の局所座標 (local coordinate) という.

さらに, 位相多様体 X が n 次元 C^∞ 級微分可能多様体とは, 座標近傍の族 $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ で,

$$X = \cup_\alpha U_\alpha$$

かつ, 座標変換

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が C^∞ 級微分同相であること. さらに, 微積分を行うために第二可算公理を課す (つまり, 可算開基をもつこと). 上のような, 座標近傍の族 $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ を, X 上の n 次元座標近傍系 (**system of coordinate neighborhoods**) または n 次元アトラス (**atlas**) とよぶ.

Remark 1.1.1. アトラスは極大なものをとっておく．つまり，局所座標 (U, ϕ) で， $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$ ($\forall \alpha$) が滑らかなら， $(U, \phi) = (U_\gamma, \phi_\gamma)$ となる γ が存在．つまり，そのような局所座標があれば，初めからアトラスに入れてしまうことにする．

また，このノートでは C^∞ 級微分可能多様体を単に多様体とよぶ．

Definition 1.1.2. M, N を多様体とする．写像 $F : M \rightarrow N$ が滑らかな写像とは，各点 $x \in M$ に対して， x の近くの M の座標近傍 (U_α, ϕ_α) ($x \in U_\alpha$) と $F(x)$ の近くの N の座標近傍 (V_i, ψ_i) に対して，合成関数

$$\psi_i \circ F \circ \phi_\alpha^{-1}$$

が $\phi_\alpha(U_\alpha)$ で C^∞ 級であること．

多様体の間の写像の中で，もっとも基本的なものは，滑らかな関数

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

である．

Definition 1.1.3. M 上の滑らかな関数全体を

$$C^\infty(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は滑らか} \}$$

と書く．

1.1.2 接ベクトル

M は n 次元多様体とする．

Definition 1.1.4. $a \in M$ での接ベクトル X_a とは，写像 $X_a : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ で次を満たすもの

- $X_a(\lambda f + \mu g) = \lambda X_a(f) + \mu X_a(g)$
- $X_a(fg) = f(a)X_a(g) + g(a)X_a(f)$

(最初は線形性，2番目はライプニッツ法則)．

Exercise 1.1.1. $\{X_a \mid X_a \text{ は接ベクトル} \}$ がベクトル空間となることを証明せよ．

Example 1.1.2. 点 a のまわりの座標近傍 (U, ϕ) ，局所座標を $(x_1, \dots, x_n)$ とする．このとき，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_a : C^\infty(M) \ni f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$$

とすれば、接ベクトルである。ここで $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(a))$$

としている。

Example 1.1.3.

$$\gamma(t) : I = (-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$$

が滑らかな写像（滑らかな曲線）とし、 $c(0) = a$ とする。点 a の座標近傍 $(x_1, \dots, x_n)$ を使えば、曲線の局所表示は

$$c(t) = \phi_\alpha \circ \gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

となる。このとき

$$c'(0) = \phi_\alpha \circ \gamma'(0) = \left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = (x'_1(0), \dots, x'_n(0))$$

が接ベクトル $c'(0)$ の局所表示になりそうである。そこで $\gamma'(0) \in T_a(M)$ となることを確かめる必要がある。

$$\gamma'(0) : C^\infty(M) \ni f \mapsto \left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0} \in \mathbb{R}$$

とすれば、これは接ベクトルになる。ここで、左辺の $f(\gamma(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}$ は普通の滑らかな関数である。

$$x_i(\gamma(t)) = x_i(t)$$

であり、

$$\left. \frac{dx_i(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0} = x'_i(0)$$

となるので、 $\gamma'(0)$ の局所表示は

$$\sum_i x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_a$$

となる。

Exercise 1.1.4. $\gamma'(0)$ が接ベクトルとなることを確かめよ。

Exercise 1.1.5. $\xi \in T_a(M)$ に対して、 M 内の曲線

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$$

で、 $\gamma'(0) = \xi$ となるものが存在することを示せ。

Proposition 1.1.6. 点 a における接ベクトル全体を $T_a(M)$ として, これを接ベクトル空間とよぶ. このとき,

1. $T_a(M)$ は n 次元ベクトル空間である.

2. 次は基底になる.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a$$

3. 別の局所座標 $(y_1, \dots, y_n)$ を取ったとき,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_a, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_a$$

も基底になるが, このとき基底の変換は,

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_a, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_a\right) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}(a) \end{pmatrix}$$

が基底の変換となる. つまり

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_a = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(a) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a$$

Proof. 1, 2 はそれほど明らかではない. 多様体の本を参照してほしい. $\square$

Definition 1.1.5. $T_a^*(M)$ を $T_a(M)$ の双対空間として, 余接空間とよぶ. また, 局所座標 $(x_1, \dots, x_n)$ に基底

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a$$

の双対基底を

$$(dx_1)_a, \dots, (dx_n)_a$$

とする. 先ほどのように局所座標を変えたときの変換則は,

$$(dy_i)_a = \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\phi_\alpha(a)) (dx_j)_a$$

となる.

1.1.3 微分

次に関数の微分を定義する.

Definition 1.1.6. $f \in C^\infty(M)$, $a \in M$ とする. このとき $df_a \in T_a^*(M)$ を,

$$df_a(X_a) = X_a(f) \quad \forall X_a \in T_a M$$

として定義する.

Exercise 1.1.7. $df_a \in T_a^*(M)$ となることをしめせ.

局所座標 $(x_1, \dots, x_n)$ において,

$$(df)_a = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(dx_i)_a$$

そこで, 多様体の間の関数 $F: M \rightarrow N$ も上のように定義すればよいことになる.

Definition 1.1.7. $F: M \rightarrow N$ を滑らかな写像とする. F の点 $a \in M$ における微分とは, 接空間の間の線形写像

$$DF_a: T_a M \rightarrow T_{F(a)} N$$

であり, 次で定義されるもの. $X_a \in T_a(M)$ に対して,

$$DF_a(X_a)f = X_a(f \circ F), \quad \forall f \in C^\infty(N)$$

ここで, $f \circ F \in C^\infty(M)$ となることに注意.

Exercise 1.1.8. $DF_a(X_a) \in T_{F(a)}(N)$ および DF_a が線形写像となることを確かめよ.

1.1.4 ベクトル場

Definition 1.1.8. $x \in M$ に対して, $T_x M$ をその点での接空間とする. そして,

$$TM = \cup_{x \in M} T_x M$$

という集合を考える (これは disjoint union であることに注意). これを M の接束 (tangent bundle) とよぶ.

M の多様体構造から TM の多様体構造を導くことができる.

Theorem 1.1.9. M を n 次元の多様体とする. このとき TM は $2n$ 次元の多様体となる. また, 自然な射影 $p: TM \ni X_x \rightarrow x \in M$ は滑らかな写像.

Proof. M の座標近傍を (U_α, ϕ_α) とする. $x \in U_\alpha$ に対して,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_x$$

は $T_x(M)$ の基底となる. このとき全単射写像

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \ni (x, y_1, \dots, y_n) \mapsto \sum y_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \in \bigcup_{x \in U_\alpha} T_x(M)$$

を考え, さらに,

$$\Phi_\alpha = (\phi_\alpha, \text{id}) \circ \psi_\alpha^{-1} : \bigcup_{x \in U_\alpha} T_x(M) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$$

を考えれば

$$V_\alpha = \bigcup_{x \in U_\alpha} T_x(M)$$

の座標近傍となる. 位相は Φ_α が同相であるようにいれておくことにする.

変換関数を考えてみる.

$$\Phi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) = \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

は $\mathbb{R}^{2n}$ の開集合となることに注意. $(x_1, \dots, x_n)$ を U_α の局所座標として, $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ を U_β の局所座標とすれば,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \right)_x$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} \Phi_\beta \Phi_\alpha^{-1}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= (\phi_\beta, \text{id}) \circ \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha \circ (\phi_\alpha^{-1}, \text{id})(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \\ &= (\phi_\beta, \text{id}) \circ \psi_\beta^{-1} \psi_\alpha (\phi_\alpha^{-1}(x_1, \dots, x_n), y_1, \dots, y_n) \\ &= (\phi_\beta, \text{id}) \circ \psi_\beta^{-1} \left(\sum y_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\phi_\alpha^{-1}(x)} \right) \\ &= (\phi_\beta, \text{id}) \circ \psi_\beta^{-1} \left(\sum_{i,j} y_i \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \right)_{\phi_\alpha^{-1}(x)} \right) = (\phi_\beta, \text{id}) \circ \psi_\beta^{-1} \left(\sum_j \left(\sum_i y_i \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \right)_{\phi_\alpha^{-1}(x)} \right) \\ &= (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \sum \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_i} y_i, \dots, \sum \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_i} y_i) \end{aligned}$$

となる. ここで

$$(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x_1, \dots, x_n)$$

としている. 上の変換関数をみてわかるように C^∞ 級であるので滑らかな写像である. また逆写像が滑らかであることも同様である.

以上から (V_α, Φ_α) は TM のアトラスとなる.

次にハウスドルフ性を確かめる.

$$p : TM \ni X_a \rightarrow a \in M$$

を自然な射影とする。局所座標では、

$$p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)$$

となるので、これは滑らかな写像であり、全射である。 $X_a \in T_a, X_b \in T_b$ ($a \neq b$) とすれば、 M がハウスドルフであるので、 a, b を分離する開集合 U, U' がとれる。そして、開集合 $p^{-1}(U), p^{-1}(U')$ は X_a, X_b を分離する開集合となる。 $X_a \neq Y_a \in T_a$ とすると、 T_a のまわりの局所座標をとれば、 $\mathbb{R}^{2n}$ の開集合に同相であるので、これらを分離する開集合が存在する。よって、 TM もハウスドルフである。

また、 M が第二可算公理をみたし $\mathbb{R}^n$ も第二可算公理を満たすので、 TM も第二可算公理をみたす。 $\square$

Exercise 1.1.10. 上の変換関数 $\Phi_\beta \Phi_\alpha^{-1}$ のヤコビ行列を計算せよ。

次に M 上のベクトル場を定義しよう。

Definition 1.1.9. $p : TM \rightarrow M$ を接束とする。 M 上のベクトル場 X とは、滑らかな写像

$$X : M \rightarrow TM$$

で $p \circ X = \text{id}_M$ となるもの。また M 上のベクトル場全体を $\mathfrak{X}(M)$ と書くことにする。

局所座標系をつかうともう少しわかりやすい。 $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ を局所座標とする。 $p \circ X = \text{id}_M$ より、

$$p \circ X(x) = p(x_1(x), \dots, x_n(x), y_1(x), \dots, y_n(x)) = (x_1(x), \dots, x_n(x)) = (x_1, \dots, x_n)$$

となるので、

$$X(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, y(x), \dots, y_n(x))$$

と書ける。なめらかな写像であるので、 $y_i(x)$ は滑らかな関数である。そこで、

$$X(x) = \sum y_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \in T_x(M)$$

となる。このように、ベクトル場とは各点 $x \in M$ に接ベクトル $X(x) \in T_x(M)$ を対応させる滑らかな写像であることがわかる。点 x を省いて、

$$X = \sum y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と書くことが多い、 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ は座標近傍 U 上の局所的に定義されたベクトル場である。

もっとも簡単なベクトル場は、各点に零ベクトルを対応させる

$$X(x) = 0 \in T_x(M) \quad \forall x \in M$$

は明らかに滑らかなベクトル場である。また、それ以外にも bump 関数を使えば、たくさんベクトル場が存在することもわかる。つまり、ある局所座標系で、なめらかな関数 $y_1(x), \dots, y_n(x)$ に対して

$$X(x) = \sum y_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x$$

とすれば局所的には定義でき、これを bump 関数 (U に support をもつ関数) で M 全体へ拡張できる。

1.1.5 1 次微分形式

さて、 $TM = \bigcup_{x \in M} T_x(M)$ として接束を定義したが、接空間 $T_x(M)$ の代わりに余接空間 $T_x^*(M)$ を使って

$$T^*M := \bigcup_{x \in M} T_x^*(M)$$

は $2n$ 次元多様体となることがわかる。

Definition 1.1.10. T^*M を M 上の余接束 (cotangent bundle) とよぶ。なめらかな写像 $\phi: M \rightarrow T^*M$ で、 $p \circ \phi = \text{id}_M$ をみたすものを一次微分形式 (1-form) とよぶ。 M 上の一次微分形式の全体を $\Omega^1(M)$ と書くことにする。

一次微分形式は局所的には次のようにかける。 $x_1, \dots, x_n$ を局所座標とすれば、

$$(dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x \in T_x^*M$$

が基底となるのであった。そこで、1-form $\phi: M \rightarrow T^*M$ を局所的座標で書けば、

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x) (dx_i)_x$$

と書ける。そして $\Omega^1(M)$ も $C^\infty(M)$ 加群である。

Example 1.1.11. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな関数とすれば、

$$df: M \ni a \mapsto (df)_a \in T_a^*(M)$$

は一次微分形式である。実際、 $(df)_a \in T_a^*(M)$ であるので、 $\pi \circ df = \text{id}_M$ である。さらに、局所座標 $(x_1, \dots, x_n)$ に対して、

$$(df)_a = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) (dx_i)_a$$

と書け、 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ は局所的に滑らかな関数である。よって $df: M \rightarrow T^*M$ は滑らかな写像である。

Remark 1.1.2. すべての一次微分形式が df のようにかけるわけではない．実際，bump 関数などを使って作った 1-form ϕ に対して， $df = \phi$ となる f が存在するかわからない．

$F : M \rightarrow N$ を滑らかな写像として， $f \in C^\infty(N)$ とする．このとき $f \circ F \in C^\infty(M)$ となる．また， df は N 上の 1 次微分形式で， $d(f \circ F)$ は M 上の 1 次微分形式となる．これらは F によって関係しているのであるが，ちゃんと定式化しておこう．

Proposition 1.1.12. $F : M \rightarrow N$ を滑らかな写像とする． $\phi \in \Omega^1(N)$ ．つまり N 上の 1 次微分形式とする．このとき， $F^*\phi$ を次のように定義すれば， $F^*\phi \in \Omega^1(M)$ となる．これを F による引き戻しとよぶ：

任意の点 $a \in M$ に対して， $(F^*\phi)_a$ を

$$(F^*\phi)_a(X_a) := \phi_{F(a)}(DF_a(X_a)) \quad \forall X_a \in T_a(M)$$

として， $F^*\phi \in \Omega^1(M)$ を定義．

このとき， $f \in C^\infty(N)$ に対して， $F^*df = d(f \circ F)$ となる．

Proof. 確かめるべきは次の事柄である．

- $(F^*\phi)_a \in T_a^*(M)$ となるか？
- $F^*\phi$ は滑らかか？
- この二つがわかれば， $F^*\phi$ は M 上の 1 次微分形式となることがわかる．そこで， $f \in C^\infty(N)$ に対して， $F^*df = d(f \circ F)$ となるか？

□

Exercise 1.1.13. 上を確かめよ．

Definition 1.1.11. $F : M \rightarrow N$ を滑らかな写像として， $f \in C^\infty(N)$ とする．このとき

$$F^*f := f \circ F \in C^\infty(M)$$

と書くことにする．先ほどのことを書き直せば $F^*(df) = d(f \circ F) = d(F^*f)$ となる．

$\Omega^1(M)$ は $C^\infty(M)$ 加群であり， $\Omega^1(N)$ は $C^\infty(N)$ 加群であることを思い出す．このとき次が成立する．

Proposition 1.1.14. $F : M \rightarrow N$ を多様体の間の滑らかな写像とする．このとき $F^* : \Omega^1(N) \rightarrow \Omega^1(M)$ は次を満たす．

$$F^*(f\phi) = (F^*f)F^*\phi, \quad \forall \phi \in \Omega^1(N), f \in C^\infty(N)$$

Proof. $\phi \in \Omega^1(N)$ として, $f \in C^\infty(N)$ とする. このとき, $f\phi \in \Omega^1(N)$ となる. そして,

$$F^*(f\phi)(X_a) = (f\phi)_{F(a)}(DF_a(X_a)) = f(F(a))\phi_{F(a)}DF_a(X_a) = (F^*f)(a)(F^*\phi)_a(X_a)$$

となるので, $F^*(f\phi) = (F^*f)F^*\phi$ となる. $\square$

Exercise 1.1.15. $F : M \rightarrow N$ を多様体の間の滑らかな写像. さらに, $G : N \rightarrow Q$ も多様体間の滑らかな写像とすると, $(G \circ F)^* = F^*G^*$ となることを示せ.

次のように考えてもよい. 先ほどの局所座標をとったとき,

$$F^*dy_i = d(y_i \circ F) = dF_i = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j$$

となる. よって, $\phi = \sum \xi^i(y)dy_i$ の F による引き戻しは

$$F^*\phi = \sum (F^*\xi^i)(x)F^*dy_i = \sum_{ij} \xi^i(F(x)) \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j$$

となるのである.

1.1.6 ベクトル束

M から TM , T^*M を作ったが, これらは一般にベクトル束とよばれるものの例である. ベクトル束を定義しておこう.

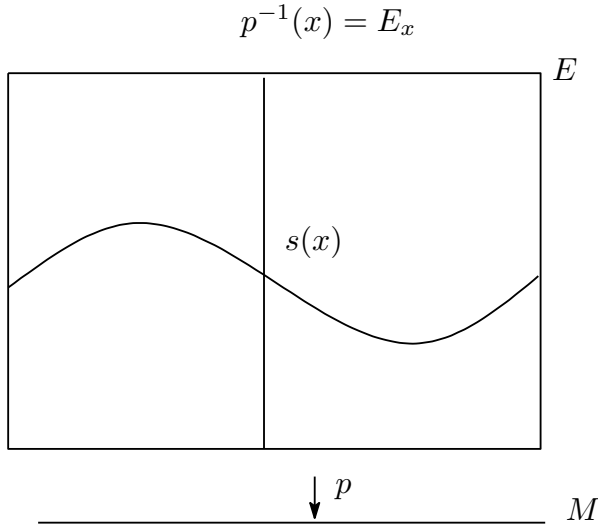
Definition 1.1.12. M 上のランク m の実ベクトル束とは, 多様体 E および滑らかな全射 (射影) $p : E \rightarrow M$ で次をみたすもの.

- $p^{-1}(x) \subset E$ を x 上のファイバーとよぶ. 各ファイバー $p^{-1}(x)$ は実 m 次元ベクトル空間の構造をもつ.
- 各点 $x \in M$ に対して, その近傍 U および微分同相写像

$$\psi_U : p^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^m$$

が存在し, ψ_U はファイバーをたもつ. つまり $\psi_U|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^m$ となり, さらに線形同型写像. この ψ_U を E の局所自明化とよぶ.

また, $s : M \rightarrow E$ が滑らかな写像で, $p \circ s = \text{id}$ となるものを E の **section** (切断) とよぶ.



また、定義から二つの局所自明化 ψ_U, ψ_V に対して、

$$\psi_U^{-1} \circ \psi_V : (U \cap V) \times \mathbb{R}^m \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^m$$

は

$$(x, v) \rightarrow (x, g_{UV}(x)v)$$

と書ける．ここで $g_{UV}(x)$ は $U \cap V$ 上の滑らかな関数であり、 $g_{UV}(x) \in GL(m, \mathbb{R})$ となる．ここで $GL(m, \mathbb{R}) = \{A \in M(m, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ ．この $\{g_{UV}(x)\}_{U,V}$ を E の推移関数 (**transition function**) とよぶ．そこで、ベクトル束とは、 $M = \bigcup U_\alpha$ として、 $U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ と $U_\beta \times \mathbb{R}^m$ が推移関数 $g_{\alpha\beta}(x)$ で張り合っていたものがベクトル束なのである．

複素ベクトル束も同様に定義できる．

1.2 テンソル積

ベクトル場や1次微分形式を学んだが、それらをより一般化した概念であるテンソル場というものがある．特に、 k 次微分形式といわれるものが重要であり、 M の次元が n なら n 次微分形式は M 上で積分することができる．これらの概念を導入するためには、各点の接ベクトル空間から新しいベクトル空間を構成する必要がある．

V を n 次元実ベクトル空間としたとき、 V からその双対空間 V^* という新しいベクトル空間を作ることができた．つまり、

$$V^* := \{f : V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は線形} \}$$

とすれば、 n 次元実ベクトル空間となる．また、

$$\text{Hom}(V, V) := \{f : V \rightarrow V \mid f \text{ は線形} \}$$

とすれば、これは $n \times n$ 次元のベクトル空間であり、基底をとれば $n \times n$ 次行列全体と同一視できる。このように、ベクトル空間から新しいベクトル空間を作ることができるのである。以下では、これらの一般論であるベクトル空間のテンソル積について学ぶ。

1.2.1 テンソル代数

V, W を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。我々の目的は、新しいベクトル空間 $V \otimes W$ で、次のような性質をみたすものを構成することである。

- $v \in V, w \in W$ なら、積が作れて $v \otimes w \in V \otimes W$ となる。
- その積について双線形

$$\begin{aligned} (\lambda v_1 + \mu v_2) \otimes w &= \lambda v_1 \otimes w + \mu v_2 \otimes w \\ v \otimes (\lambda w_1 + \mu w_2) &= \lambda v \otimes w_1 + \mu v \otimes w_2 \end{aligned}$$

- $V \otimes W$ の次元は $\dim V \times \dim W$ 。

Definition 1.2.1. $B : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ が双線形形式とは、次を見たすこと、

- $B(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda B(v_1, w) + \mu B(v_2, w)$ 。
- $B(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda B(v, w_1) + \mu B(v, w_2)$ 。

つまり、各成分について線形。さらに、 $V \times W$ に対する双線形形式全体を

$$B_{V,W} := \{B \mid B : V \times W \rightarrow \mathbb{R} \text{ は bilinear}\}$$

とする。

Exercise 1.2.1. 双線形形式全体 $B_{V,W}$ は $\dim V \dim W$ 次元の実ベクトル空間となることを証明せよ。(ヒント： V, W の基底をとれば、 $B(V, W)$ は $B(e_i, f_j)$ で定まる)

Remark 1.2.1. 内積はこの双線形形式に対称性 $B(v, w) = B(w, v)$ を課したもの。

Definition 1.2.2. V, W に対する双線形形式全体のベクトル空間の双対空間 $B_{V,W}^*$ を $V \otimes W$ と書き、 V, W のテンソル積空間とよぶ。また、 $v \in V, w \in W$ に対して、積 $v \otimes w \in V \otimes W$ を、

$$(v \otimes w)(B) = B(v, w) \quad \forall B \in B_{V,W}$$

として定義する。

Exercise 1.2.2. 積について双線形

$$\begin{aligned} (\lambda v_1 + \mu v_2) \otimes w &= \lambda v_1 \otimes w + \mu v_2 \otimes w \\ v \otimes (\lambda w_1 + \mu w_2) &= \lambda v \otimes w_1 + \mu v \otimes w_2 \end{aligned}$$

であることを証明せよ.

より具体的には, 次のように考えればよい. V の基底を $v_1, \dots, v_n$, W の基底を $w_1, \dots, w_m$ とすれば, $B : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ は, 線形性から nm 個の $B(v_i, w_j)$ により唯一つに定まる. 言い換えると, $B_{kl}(v_i, w_j) = \delta_{ki}\delta_{lj}$ として双線形に拡張すれば, $B_{kl} : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ が定まるが, 任意の $B \in B_{V,W}$ は,

$$B = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} B(v_i, w_j) B_{ij}$$

となる. このように, $B_{V,W}$ の次元は $\dim V \dim W = nm$ である. よって, $V \otimes W$ は nm 次元となる. そして, $V \otimes W$ の基底として,

$$\{v_i \otimes w_j \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$$

をとることができる. よって, $V \otimes W$ の定義としては,

$$V \otimes W = \left\{ \sum \lambda_{ij} v_i \otimes w_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \right\}$$

であり, 積について双線形となるものとしてもよい.

Proof. 基底になることを見ていこう. 次元についてはすでに分かっているので, 一次独立であることを証明すればよい.

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} v_i \otimes w_j = 0$$

とする. 先ほどの $B_{kl} \in B_{V,W}$ に対して,

$$0 = \left(\sum_{i,j} \lambda_{ij} v_i \otimes w_j \right) (B_{kl}) = \sum \lambda_{ij} B_{kl}(v_i, w_j) = \sum \lambda_{ij} \delta_{ki} \delta_{lj} = \lambda_{kl}$$

を得る. よって, $\{v_i \otimes w_j\}_{i,j}$ は $V \otimes W$ の基底である. □

Proposition 1.2.3. $V \otimes W$ は次の普遍性 (*universal property*) を満たす. $B : V \times W \rightarrow U$ をベクトル空間 U への双線形形式とすれば, 双線形形式

$$\beta : V \otimes W \rightarrow U$$

で $B(v, w) = \beta(v \otimes w)$ を満たすものが唯一つ存在する.

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\quad \otimes \quad} & V \otimes W \\ B \downarrow & & \downarrow \beta \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

Proof. $B : V \times W \rightarrow U$ に対して, $\xi \in U^*$ とすれば, $\xi \circ B : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ は双線形である. よって,

$${}^t\beta : U^* \ni \xi \mapsto \xi \circ B \in B_{V,W}$$

となる. この双対写像を取れば,

$$\beta : V \otimes W \rightarrow (U^*)^* = U$$

という線形写像を得る. このとき $v \otimes w \in V \otimes W$ に対して,

$$\langle \beta(v \otimes w), \xi \rangle = \langle \xi \circ B, v \otimes w \rangle = \langle \xi, B(v, w) \rangle \quad \forall \xi \in U^*$$

となるので,

$$\beta(v \otimes w) = B(v, w)$$

となる.

一意性は, v_i, w_j を V, W の基底とすれば, B は双線形性より, これら基底の行先で決まってしまう. よって, $B(v_i, w_j)$ で定まる. そして, $v_i \otimes w_j$ は $V \otimes W$ の基底であるので, β も $\beta(v_i \otimes w_j)$ で定まる. $\beta(v_i \otimes w_j) = B(v_i, w_j)$ となるので, β は一意的に定まる. $\square$

Proposition 1.2.4. 次のような標準的な同型が成立する.

1. $V \otimes W \cong W \otimes V$. ($v \otimes w \mapsto w \otimes v$)
2. $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ (写像は $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \mapsto v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$). これより, このテンソル積空間を $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ としてよい.
3. $V \otimes (W_1 \oplus W_2) \cong (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2)$.
4. $\mathbb{R} \otimes V \cong V \otimes \mathbb{R} \cong V$.

Proof. 双線形写像 $\Phi : V \times W \ni (v, w) \mapsto w \otimes v \in W \otimes V$ に対して, $F : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ で $\Phi = F \circ \iota$ ($F(v \otimes w) = w \otimes v$) となるものが存在. 同様に, $G : W \otimes V \rightarrow V \otimes W$ で $G(w \otimes v) = v \otimes w$ となるものが存在. また, $G \circ F(v \otimes w) = v \otimes w$ であるので $G \circ F = \text{id}$. 同様に $F \circ G = \text{id}$. ほかは略. $\square$

Exercise 1.2.5. 上の命題を証明せよ.

Proposition 1.2.6. $V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V, W)$. 同型写像は $\phi \otimes w$ に対して, $F_{\phi, w}(v) = \phi(v)w$.

Proof. $F_{\phi, w}(v) = \phi(v)w$ とすれば, $F_{\phi, w} \in \text{Hom}(V, W)$ となる.

$\Phi : V^* \times W \ni (\phi, w) \mapsto F_{\phi, w} \in \text{Hom}(V, W)$ は双線形写像であるので, $F : V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$ で $F \circ \iota = \Phi$ となるものが存在する. これが同型写像であることを見てみよ

う. V^*, W の基底を ϕ_i, w_j とする. $F(\sum \alpha_{ij} \phi_i \otimes w_j) = 0$ とすると, $\sum \alpha_{ij} F_{\phi_i, w_j}(v) = 0$ ($\forall v \in V$) となる.

$$\sum \alpha_{ij} \phi_i(v) w_j = 0$$

となり, $\sum_i \alpha_{ij} \phi_i(v) = 0$ となる. v として ϕ_i の双対基底をとれば, $\alpha_{ij} = 0$ を得るので, $\sum \alpha_{ij} \phi_i \otimes w_j = 0$ となる. つまり F は単射である. $\dim V^* \otimes W = \dim \text{Hom}(V, W)$ なので F は同型写像となる. $\square$

$(V \otimes V) \otimes V = V \otimes (V \otimes V)$ より, $V \otimes V \otimes V$ と書いてよいことがわかる. そこで,

$$\otimes^k V := \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_k$$

とする.

Remark 1.2.2. $\otimes^k V$ は $V \times V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を k 重線形写像全体がなすベクトル空間と自然に同一視できる.

Definition 1.2.3. V を実ベクトル空間としたとき,

$$T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k V, \quad \otimes^0 V = \mathbb{R}$$

をテンソル代数という. $\mathbb{R}$ 上の代数構造は

$$\phi = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in \otimes^k V, \quad \psi = w_1 \otimes \cdots \otimes w_l \in \otimes^l V$$

としたとき,

$$\phi \otimes \psi = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_l \in \otimes^{k+l} V$$

を線形に拡張したものを入れればよい.

1.2.2 外積代数

テンソル代数に対して, 次のイデアルで割った商代数である外積代数を考えたい.

$$S = \{v \otimes v \mid v \in V\}$$

とする. そして, S から生成されるイデアルを $I(V)$ とする. つまり, S の元に両側から $T(V)$ の元をかけて, それらの線形結合をとったものの全体.

Definition 1.2.4. V の外積代数とは, 商代数

$$\Lambda^* V := T(V)/I(V)$$

また $\pi : T(V) \rightarrow \Lambda^*V$ を自然な射影としたとき,

$$\Lambda^p V := \pi(\otimes^p V)$$

を V の p 重外テンソル積空間とよぶ. また, 記号として, $\alpha = \pi(a) \in \Lambda^p(V)$, $\beta = \pi(b) \in \Lambda^q(V)$ に対して外積を

$$\alpha \wedge \beta := \pi(a \otimes b)$$

とする.

Remark 1.2.3. π および $\otimes$ の線形性から,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) \wedge \beta &= \lambda_1 \alpha_1 \wedge \beta + \lambda_2 \alpha_2 \wedge \beta \\ \alpha \wedge (\mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2) &= \mu_1 \alpha \wedge \beta + \mu_2 \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

となる.

Example 1.2.7. $I(V)$ は2次以上のテンソル積のイデアルであるので, $p = 0, 1$ の場合には, $I(V)$ は影響しない. $\otimes^0 V = \mathbb{R}$, $\otimes^1 V = V$ であるので, $\pi(\otimes \mathbb{R}) = \Lambda^0(V) = \mathbb{R}$, $\pi(\otimes^1 V) = V = \Lambda^1(V)$ となる.

よって,

Proposition 1.2.8. $\Lambda^0 V = \mathbb{R}$, $\Lambda^1 V = V$. そこで, $v \in V$ に対して $\pi(v) \in \Lambda^*V$ を, そのまま v と書くことにする.

$\forall a \in \otimes^p V$ は,

$$a = \sum_I \lambda_I v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p}$$

と書けるのであった. π は線形であるので,

$$\alpha = \pi(a) = \sum_I \lambda_I v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}$$

と $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}$ の線形結合として書けることに注意しよう.

Example 1.2.9. 問題になってくるのは, $p \geq 2$ の場合である. $\Lambda^2(V) = \pi(\otimes^2 V)$ を考えてみよう. $v = \pi(v)$, $v \in V$ とすれば,

$$v \wedge v = \pi(v \otimes v)$$

となるのだが, $v \otimes v \in I(V)$ であるので, $v \wedge v = 0$ となる. また, $v, w \in V$ とすれば,

$$v \wedge w = \pi(v \otimes w)$$

となるが, $(v+w) \otimes (v+w) \in I(V)$ であり,

$$(v+w) \otimes (v+w) = v \otimes v + v \otimes w + w \otimes v + w \otimes w \in I(V)$$

であるので,

$$v \wedge w = \pi(v \otimes w) = \pi(-v \otimes v - w \otimes v - w \otimes w) = -\pi(w \otimes v) = -w \wedge v$$

を得る. 特に,

$$v \wedge w = \frac{1}{2} \pi(v \otimes w - w \otimes v)$$

となる.

そこで, $v_1, \dots, v_n$ を V の基底としたとき,

$$v_i \wedge v_i = 0, \quad v_i \wedge v_j = -v_j \wedge v_i \quad (i \neq j)$$

となる. 実は, この $v_i \wedge v_j$ ($1 \leq i < j \leq n$) が $\Lambda^2(V)$ の基底となることがわかる.

外積代数を上で定義で理解するのはちょっと難しいかもしれないが, 具体的に計算し, なることで理解できてくるであろう.

Proposition 1.2.10. $\alpha \in \Lambda^p V, \beta \in \Lambda^q V$ とすれば,

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$$

特に, $\alpha \in \Lambda^{2k+1} V$ ならば, $\alpha \wedge \alpha = 0$.

Proof. さきほど見たように, $v_1, v_2 \in V$ なら,

$$v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$$

を得る. そこで,

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k$$

に対して, 任意の二つの成分を入れ替えると, 符号がマイナスになることがわかる. つまり,

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_k = -v_1 \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_k$$

となる. $\alpha \in \Lambda^p V, \beta \in \Lambda^q V$ はそれぞれ $v_1 \wedge \dots \wedge v_p, w_1 \wedge \dots \wedge w_q$ の線形結合として書ける. $\wedge$ の線形性から, これらの積について命題を確かめればよい. そこで,

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge \dots \wedge w_q) = (-1)^p w_1 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_p \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_q$$

であり, これを w_q まで繰返せば,

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge \dots \wedge w_q) = (-1)^{pq} w_1 \wedge \dots \wedge w_q \wedge (v_1 \wedge \dots \wedge v_p)$$

□

上の証明と同様にして、次がわかる

Proposition 1.2.11.

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

となる。よって、これらを $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ としてよい。

Proposition 1.2.12. $W \subset V$ を部分空間として、

$$W^0 = \{f \in V^* \mid f(w) = 0, \forall w \in W\} \subset V^*$$

とする。このとき、標準的な同型

$$(V/W)^* = W^0$$

を得る。

この命題を $T^p(V)/I(V) \cap T^p(V)$ に適用すると、

$$(T^p(V)/I(V) \cap T^p(V))^* = (I(V) \cap T^p(V))^0 = \{B \mid B \text{ は } p \text{ 重線形写像で } I(V) \text{ で消える}\}$$

となる。 $\phi \otimes v \otimes v \otimes \psi \in I(V)$ であるので、

$$B(v_1, \dots, v, v, \dots, v_p) = 0$$

となり、線形性から

$$B(v_1, \dots, v, w, \dots, v_p) = -B(v_1, \dots, w, v, \dots, v_p)$$

となり、隣同士を入れ替えたら符号が変わる。そして、

$$B(v_1, \dots, v, w, v, \dots, v_p) = -B(v_1, \dots, v, v, w, \dots, v_p) = 0$$

となり、これを繰返せば、

$$B(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_p) = 0$$

を得る。そして、

$$B(v_1, \dots, v, \dots, w, \dots, v_p) = -B(v_1, \dots, w, \dots, v, \dots, v_p)$$

となり、 $B \in (I(V) \cap T^p(V))^0$ は p 重交代形式となることがわかる。

そして、 $v_1 \otimes \dots \otimes v_p \in T^p(V)$ および p 重線形形式 B に対して、

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_p)(B) = B(v_1, \dots, v_p)$$

として定義したので、 $v_1 \wedge \dots \wedge v_p \in \Lambda^p(V)$ および p 重交代形式 B に対して、

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_p)(B) = B(v_1, \dots, v_p)$$

とすれば、well-defined となる。つまり、 $B \in (\Lambda^p(V))^*$ となる。

Example 1.2.13. $v \wedge w = \frac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v)$, $B \in (\Lambda^2(V))^*$ とすれば,

$$B(v \wedge w) = \frac{1}{2}(B(v, w) - B(w, v)) = B(v, w)$$

となる.

Definition 1.2.5. p 重線形写像

$$M : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

で成分に対して交代となるもの, つまり,

$$M(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) = -M(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots)$$

を p 重交代形式という. p 重交代形式全体はベクトル空間となることに注意 (また, それは p 重線形形式全体の部分ベクトル空間となる).

Proposition 1.2.14. $(\Lambda^p(V))^*$ は p 重交代形式全体のベクトル空間と同一視できる.

Proposition 1.2.15. $\dim V = n$ ならば, $\Lambda^n V = 1$ となる. 特に, $v_1, \cdots, v_n$ を V の基底とすれば,

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$$

が基底となる.

Proof. $w_1, \cdots, w_n \in V$ に対して, M を $n \times n$ 行列で, 各行が $w_1, \cdots, w_n$ となるものとする. このとき,

$$\det : V \times \cdots \times V \ni (w_1, \cdots, w_n) \rightarrow \det M \in \mathbb{R}$$

とすれば, n 重線形交代形式である. (ここで, 適当な基底をとって $w_1, \cdots, w_n$ を成分表示している. 基底の取り方に依存している. 一方, 線形写像 $F : V \rightarrow V$ の行列式は,

$$\det P^{-1} F P = \det P^{-1} \det F \det P = \det F$$

なので基底の取り方に依らない).

そこで, $\det$ は $\Lambda^n V$ の双対空間の元であり, 明らかに零でない. よって, $\Lambda^n V$ の双対空間は 1 次元以上であり, $\Lambda^n V$ も 1 次元以上である.

一方, $v_1, \cdots, v_n \in V$ を V の基底とすると, $\Lambda^n V$ は $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}$ の線形結合であるが, 先ほどの交代性から, $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ の線形結合となる. つまり, $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ の定数倍となるので, $\Lambda^n V$ は高々 1 次元である.

以上を合わせれば, $\dim \Lambda^n V = 1$ となる. □

Proposition 1.2.16. $v_1, \dots, v_n$ を V の基底とする. $\binom{n}{p}$ 個の元

$$v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$$

が $\Lambda^p V$ の基底になる. 特に, $\dim \Lambda^p V = \binom{n}{p}$.

Proof. $\otimes^p V$ の基底 ($\dim \otimes^p V = np$) として,

$$v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_p}, \quad i_1, \dots, i_p = 1, \dots, n$$

が取れたので, $\Lambda^p V$ が,

$$v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}, \quad i_1, \dots, i_p = 1, \dots, n$$

で張られることがわかる. さらに交代性より,

$$v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$$

で張られる. これらが一次独立であることを証明すればよい.

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} a_{i_1 \dots i_p} v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_p} = 0$$

と仮定する. $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ として,

$$v_I := v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}$$

とする. そして,

$$I' = \{1, \dots, n\} \setminus I$$

とする. このとき,

$$v_I \wedge v_{I'} = \pm v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$$

となる. そこで,

$$\sum_I a_I v_I = 0$$

としたとき,

$$0 = \left(\sum_I a_I v_I \right) \wedge v_{I'} = \pm a_I v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \in \Lambda^n V$$

となり, $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ は $\Lambda^n V$ の基底であるので, $a_I = 0$ を得る. よって, $a_I = 0$ ($\forall I$).

次元が $\binom{n}{p}$ になることは, n 個の中から p 個を選ぶ組み合わせであるので. $\square$

Corollary 1.2.17. V を n 次元ベクトル空間としたとき, p 重交代形式全体がなすベクトル空間の次元は $\binom{n}{p}$ である.

Corollary 1.2.18. $\dim V = n$ とすれば, $p > n$ ならば $\Lambda^p V = \{0\}$ となる.

Example 1.2.19. $V = \mathbb{R}^3$ の標準基底を e_1, e_2, e_3 としたとき, $\Lambda^p V$ のそれぞれの基底として, 次が取れる.

$$\begin{aligned} 1 &\in \Lambda^0 V = \mathbb{R} \\ e_1, e_2, e_3 &\in \Lambda^1 V = V = \mathbb{R}^3 \\ e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1 &\in \Lambda^2 V \\ e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 &\in \Lambda^3 V \end{aligned}$$

外積はベクトルの一次独立性と関連している.

Proposition 1.2.20. $v \in V$ が, $v_1, \dots, v_p$ と一次従属であるための必要十分条件は

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge v = 0$$

Proof. v が $v_1, \dots, v_p$ と従属なら $v = \sum a_i v_i$ と書ける. このとき

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge \left(\sum a_i v_i \right) = \sum a_i v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge v_i = 0$$

となる. $v_1, v_2, \dots, v$ が独立なら, 先ほどの命題から,

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge v$$

が $\Lambda^{p+1} V$ は基底を成すベクトルの一つであり, 零でない. □

Proposition 1.2.21. $A : V \rightarrow W$ を線形写像とする. このとき,

$$\Lambda^p A : \Lambda^p V \rightarrow \Lambda^p W$$

で,

$$\Lambda^p A(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = Av_1 \wedge \cdots \wedge Av_p$$

となるものが存在する.

Proof. $v_1, \dots, v_n$ が基底とすれば,

$$\Lambda^p A(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}) = Av_{i_1} \wedge \cdots \wedge Av_{i_p}$$

を満たす写像 $\Lambda^p A$ は $\Lambda^p V$ の基底の行き先を決定している. よって, $\Lambda^p A$ は, これらを線形に拡張した写像として定義すればよい.

しかし, この決め方は, 基底を取って考えているので, 他の基底をとった場合でも同じ写像となることを示す必要がある. つまり, 基底の取り方によらないことを示す必要がある.

テンソル積の普遍性を思い出す． $A : V \times V \rightarrow W \otimes W$ という写像を

$$A(v_1, v_2) = Av_1 \otimes Av_2$$

とすれば双線形であるので,

$$\otimes^2 A : V \otimes V \rightarrow W \otimes W$$

という線形写像で $\otimes^2 A(v_1 \otimes v_2) = Av_1 \otimes Av_2$ を満たすものが唯一つ存在する．これを繰返せば,

$$\otimes^p A : \otimes^p V \rightarrow \otimes^p W$$

という線形写像で,

$$\otimes^p A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = Av_1 \otimes \cdots \otimes Av_p$$

を満たすものが唯一つ存在する．これを, 商空間 $\Lambda^p V \rightarrow \Lambda^p W$ へ落とせばよい．それには, $\otimes^p A(I(V) \cap T^p(V)) \subset I(W) \cap T^p(W)$ となることを見ればよい.

$$\otimes^p A(\phi^k \otimes v \otimes v \otimes \psi^{p-k-2}) = (\otimes^p A)(\phi^p) \otimes Av \otimes Av \otimes (\otimes^{p-k-2} A)(\psi^{p-k-2})$$

となるので,

$$\Lambda^p A : \Lambda^p V \rightarrow \Lambda^p W$$

であって,

$$\Lambda^p A(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = Av_1 \wedge \cdots \wedge Av_p$$

となるものが存在する. □

Proposition 1.2.22. $\dim V = n$ ならば, 線形変換 $\Lambda^n A : \Lambda^n V \rightarrow \Lambda^n V$ は $\det A$ 倍として与えられる.

Proof. $\Lambda^n V$ は 1 次元であるので, $\Lambda^n A = \lambda(A)$ とスカラーでかけるはずである. $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ を基底とする.

$$Av_i = \sum A_{ji} v_j$$

とする. $\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群とすれば,

$$\begin{aligned} Av_1 \wedge Av_2 \wedge \cdots \wedge Av_n &= \sum_{j_1, \dots, j_n=1, \dots, n} A_{j_1,1} v_{j_1} \wedge A_{j_2,2} v_{j_2} \wedge \cdots \wedge A_{j_n,n} v_{j_n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} A_{\sigma(1),1} v_{\sigma(1)} \wedge A_{\sigma(2),2} v_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge A_{\sigma(n),n} v_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

となる. 最後の等号は同じ v_i があつたら零となるからである. さて,

$$\begin{aligned} &A_{\sigma(1),1} A_{\sigma(2),2} \cdots A_{\sigma(n),n} v_{\sigma(1)} \wedge v_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)} \\ &= \text{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1),1} A_{\sigma(2),2} \cdots A_{\sigma(n),n} v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} Av_1 \wedge Av_2 \wedge \cdots \wedge Av_n &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1),1} A_{\sigma(2),2} \cdots A_{\sigma(n),n} v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \\ &= (\det A) v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \end{aligned}$$

□

Remark 1.2.4. 線形写像 A に対して $\det A$ は基底の取り方によらないので, その表現行列の $\det$ をとればよい.

1.3 微分形式

これまでベクトル空間 V の外積代数 $\Lambda^p(V)$ について議論してきた. $V = T_p^*(M)$ のときに, $\Lambda^p(T_p^*(M))$ について考えて, さらに, これを M 全体で考える.

1.3.1 p -forms のベクトル束

M を n 次元多様体とし, T_x^*M を余接空間とする. このベクトル空間から

$$\Lambda^p T_x^*M$$

という新しいベクトル空間がつかれる. そして,

Definition 1.3.1. $\Lambda^p T^*M := \bigcup_{x \in M} \Lambda^p T_x^*M$ というベクトル束を p -forms (p 次形式) のベクトル束とよぶ. またその切断を p 次微分形式 (p -form) とよぶ.

次の命題は TM が多様体であり, M 上のベクトル束となることと同様に証明できる.

Proposition 1.3.1. $p : \Lambda^p T^*M \rightarrow M$ はランクが $\binom{n}{p}$ のベクトル束であり, 微分多様体となる.

同様にして, TM, T^*M のテンソル積の束が定義できる.

Proposition 1.3.2. M を多様体とする. このとき,

$$\otimes^p TM = \bigcup_{x \in M} \otimes^p T_x M, \quad \otimes^p T^*M = \bigcup_{x \in M} \otimes^p T_x^*M, \quad (\otimes^p TM) \otimes (\otimes^q T^*M)$$

は M 上ベクトル束である. それらの切断はテンソル場と言われる.

M 上の p 次微分形式 α を考える. M の局所座標 $(x_1, \dots, x_n)$ を使えば,

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} a_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

と書ける。座標変換したときに、どのように変化するかは、次のようにすればよい。別の座標を $(y_1, \dots, y_n)$ として、座標変換を $x = x(y)$ としておけば、

$$dx_i = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$$

となるので、これを代入して

$$\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \tilde{a}_{j_1 j_2 \dots j_p} dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge \dots \wedge dy_{j_p}$$

と書き直せばよいのである。

Example 1.3.3. $M = \mathbb{R}^2$ を考え、2 次微分形式 $\omega = dx_1 \wedge dx_2$ とする。 $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して、座標変換

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

を考える。このとき

$$dx_1 = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dx_2 = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

を得るので、

$$\omega = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) = r dr \wedge d\theta$$

を得る。

1.3.2 微分形式の引き戻し

Proposition 1.3.4. $\Lambda^p T^*M$ の切断である p 次微分形式の全体を $\Omega^p(M)$ とする。このとき、 $\Omega^p(M)$ は $C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ 加群である。また、 $C^\infty(M)$ -双線形写像

$$\Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \ni (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta \in \Omega^{p+q}(M)$$

が定義できる。 ($(\alpha \wedge \beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x$ として定義すればよい)。

1 次微分形式の引き戻しが定義できたように、 p 次微分形式の引き戻しが定義できる。 $F : M \rightarrow N$ を滑らかな写像としたとき、

$$DF_x : T_x M \rightarrow T_{F(x)} N$$

の双対写像

$${}^t DF_x : T_{F(x)}^* N \rightarrow T_x^* M$$

が定義できる．そして， N 上の 1 次微分形式 α に対して，

$$(F^*\alpha)_x := {}^tDF_x(\alpha_{F(x)})$$

として， M 上の 1 次微分形式が定義できた．つまり，

$$(F^*\alpha)_x(X_x) = \alpha_{F(x)}(DF_x(X_x)) \quad \forall X_x \in T_xM$$

として定義する．

そこで，

Definition 1.3.2.

$$\Lambda^p({}^tDF_x) : \Lambda^p T_{F(x)}^* N \rightarrow \Lambda^p T_x^* M$$

という写像が導かれるので， N 上の p 次微分形式 α に対して，

$$(F^*\alpha)_x := (\Lambda^p({}^tDF_x))(\alpha_{F(x)})$$

として M 上の p 次微分形式 $F^*\alpha$ が定義できる．これを α の F による引き戻しという (なめらかであることも確かめられる)．

この引き戻しについて次が成立．

Proposition 1.3.5. $F : M \rightarrow N$, $G : N \rightarrow P$ に対して，

- $F^*(\alpha + \beta) = F^*\alpha + F^*\beta$
- $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$. 特に, $f \in C^\infty(N)$ に対して, $F^*(f\alpha) = (F^*f)(F^*\alpha)$ となる. ここで $(F^*f)(x) = f(F(x))$. つまり $F^*f = f \circ F$ である.
- $(F \circ G)^*\alpha = G^*F^*\alpha$ ($\alpha \in \Omega^p(P)$).

Proof. $A : V \rightarrow W$, $B : W \rightarrow U$ 線形写像に対して, $\Lambda^p A : \Lambda^p V \rightarrow \Lambda^p W$, $\Lambda^p B : \Lambda^p W \rightarrow \Lambda^p U$ が導かれるが, これは次をみtas.

$$(\Lambda^p A)(\phi + \psi) = (\Lambda^p A)(\phi) + (\Lambda^p A)(\psi), \quad (\Lambda^{p+q} A)(\phi \wedge \psi) = (\Lambda^p A\phi) \wedge (\Lambda^q A\psi)$$

および,

$$\Lambda^p(BA) = \Lambda^p B \Lambda^p A$$

が成立する．

これらのことは,

$$\Lambda^p A(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = Av_1 \wedge \cdots \wedge Av_p$$

から確かめられる．

そこで, たとえば,

$$(F^*(\alpha \wedge \beta))_x = \Lambda^{p+qt} DF_x(\alpha \wedge \beta) = (\Lambda^{pt} DF_x)(\alpha_{F(x)}) \wedge (\Lambda^{qt} DF_x)(\beta_{F(x)}) = (F^*\alpha)_x \wedge (F^*\beta)_x$$

となるので, 命題が証明される. $\square$

Exercise 1.3.6. $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$(x, y) = F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_1 + x_3)$$

とする. $\mathbb{R}^2$ 上の2次微分形式

$$\alpha = x dx \wedge dy$$

の F による引きもどし $F^*\alpha$ を計算せよ.

Proof.

$$\begin{aligned} F^*\alpha &= F^*(x dx \wedge dy) = (F^*x) dF^*x \wedge dF^*dy \\ &= x_1 x_2 d(x_1 x_2) \wedge d(x_1 + x_3) \\ &= x_1 x_2 (x_1 dx_2 + x_2 dx_1) \wedge (dx_1 + dx_3) \\ &= x_1^2 x_2 dx_2 \wedge dx_1 + x_1^2 x_2 dx_2 \wedge dx_3 + x_1 x_2^2 dx_1 \wedge dx_1 + x_1 x_2^2 dx_1 \wedge dx_3 \\ &= -x_1^2 x_2 dx_1 \wedge dx_2 + x_1^2 x_2 dx_2 \wedge dx_3 - x_1 x_2^2 dx_3 \wedge dx_1 \end{aligned}$$

$\square$

1.3.3 1の分割

$\Lambda^p T^*M$ の切断である, p 次微分形式は bump 関数を使えば, いろいろと作ることができる. つまり, ある座標近傍 (U_α, ϕ_α) において

$$\omega_\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

という局所的な微分形式を考えて bump 関数をかけることにより, そのほかのところで零となるように拡張すればよい. さらに, 各座標近傍で同様のことをすれば,

$$\sum_{\alpha \in A} \omega_\alpha$$

としても微分形式となる. しかし, ここで注意すべきは, 各点 $x \in M$ に対して,

$$\sum_{\alpha} \omega_\alpha(x)$$

は発散するかもしれない (添え字集合 α は無限和であるので). そこで, 各点で有限の値になるように調節しておけば, いろいろと M 上の微分形式をつくることができる.

実は、逆に M 上の任意の微分形式を上のような和で書くことが可能なのである。特に、 n 次元多様体上の n 次微分形式を局所座標系で普通に積分して和をとることができる。つまり、 $\omega = \sum \omega_\alpha$ としたら、

$$\int_M \omega = \sum \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^* \omega_\alpha$$

とすることにより n 次微分形式の M 上での積分が可能なのである（これが座標変換によらないことは、重積分の変換公式および n 次微分形式の座標変換の公式をあわせればよい。詳細は後で）。

そこで、それをするための道具として 1 の分割という概念を導入する。

Definition 1.3.3. M 上の一の分割 $\{\phi_i\}_{i \in I}$ とは、 ϕ_i は M 上の滑らかな関数であり、

- $\phi_i \geq 0$.
- $\{\text{supp}(\phi_i) \mid i \in I\}$ が局所有限。ここで局所有限とは、 $x \in M$ に対して、 x の近傍 U が存在して、 $\text{supp}(\phi_i) \cap U \neq \emptyset$ となる $i \in I$ は有限個。
- $\sum_i \phi_i = 1$.

2 番目の条件は、各点 x に対して、十分小さい近傍 U をとれば、 ϕ_i は U 上でほとんどが零であり、添え字 i は（非加算）無限個あるが $\sum \phi_i(x)$ は各点 x で有限和になる。

Theorem 1.3.7. M の開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対して、1 の分割 $\{\phi_i\}_{i \in I}$ 、各 $i \in I$ に対して、ある $\alpha(i) \in A$ があって $\text{supp}(\phi_i) \subset V_{\alpha(i)}$ となるようなものが存在。

上の定理のような 1 の分割を、与えられた開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に付随した 1 の分割とよぶことにする。また、 M の開被覆は局所座標系とは限らないことにしよう。たとえば、 $M = U_1 \cup U_2$ という開被覆に対しても、それらに付随した 1 の分割を作れるのである。

一般の場合の証明はちょっと面倒だけど、 M がコンパクトの場合には簡単である。

(Proof for M コンパクトの場合) . M の開被覆 $\{V_\alpha\}$ を考える。各点 x に対して、局所座標系 U_x をとり、必要なら小さくにとって $U_x \subset V_{\alpha(x)}$ となるようにできる。そして、 x の近傍 V_x 上で 1 となるような bump 関数で support が U_x に含まれるようなものを作れる。そして M の開被覆 $\{V_x\}_{x \in M}$ で $V_x \subset V_{\alpha(x)}$ となるものを得る。 M がコンパクトから、有限個からなる開被覆 $\{V_{x_i}\}_{i=1}^N$ および各 V_{x_i} 上で 1 となる滑らかな関数 $\psi_i \geq 0$ を得る。特に、和は各点で $\sum_{i=1}^N \psi_i > 0$ となることに注意。そこで、

$$\phi_i = \frac{\psi_i}{\sum_{i=1}^N \psi_i}$$

とすれば、1 の分割であり、 $\{V_\alpha\}$ に付随したものである。 □

さて、 M 上の 1 の分割 $\{\phi_i\}_{i \in I}$ を考えると、 p 次微分形式 α に対して、

$$\alpha = \left(\sum \phi_i \right) \alpha = \sum_i \phi_i \alpha$$

となる。 $\phi_i \alpha$ は局所的に定義されたものを零で全体に拡張したものとみなせる。

1.3.4 外微分 (exterior derivative)

微分形式の大事な性質の一つは、微分形式は外微分できるということである。我々は関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ の外微分 df が 1 次微分形式とみなせることをみた。実は、 p 次微分形式も微分でき、それは $p+1$ 次微分形式となるのである。

Theorem 1.3.8. M を多様体として、 $\Omega^p(M)$ を p 次微分形式全体の空間とする ($C^\infty(M)$ 加群であった)。このとき、線形写像

$$d: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

であり、つぎを満たすものがただひとつ存在する。この d を外微分とよぶ。

- $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ に対して、 $df \in \Omega^1(M)$ 。(これは以前定義した関数 f の微分)
- $d^2 = 0$ ($d^2: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+2}(M)$)。
- ライプニッツ則

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta, \quad \alpha \in \Omega^p(M)$$

を満たす。

この外微分は、ベクトル解析における、divergence, rotation, gradient の一般化になっている。ベクトル解析は 3 次元空間で行っているという特殊事情が反映している。

Example 1.3.9. $M = \mathbb{R}^3$ の場合を考える。考えるべき微分形式は Λ^p ($p = 0, 1, 2, 3$) である。

- $f \in \Omega^0(M)$ に対しては、性質 1 から

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

となる。つまり、

$$f \mapsto \text{grad}(f) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$$

となる。

- $\alpha \in \Omega^1(M)$ を考える.

$$\alpha = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + a_3(x)dx_3$$

ここに外微分を施すと,

$$\begin{aligned} d(a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3) &= d(a_1dx_1) + d(a_2dx_2) + d(a_3dx_3) \\ &= da_1 \wedge dx_1 + a_1d(dx_1) + da_2 \wedge dx_2 + a_2d(dx_2) + da_3 \wedge dx_3 + a_3d(dx_3) \\ &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_3\right) \wedge dx_1 + \cdots \\ &= \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_3} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

となる. ここで, $\alpha = df$ なら, $ddf = 0$ となることに注意する. ベクトル解析の記号で書けば,

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3) \mapsto \text{rot}\alpha = \nabla \times \alpha = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_3} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)$$

となる.

- $\beta \in \Omega^2(M)$ を考える.

$$\beta = b_1dx_2 \wedge dx_3 + b_2dx_3 \wedge dx_1 + b_3dx_1 \wedge dx_2$$

に対して, 外微分を施すと,

$$d(b_1dx_2 \wedge dx_3) = db_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \frac{\partial b_1}{\partial x_1}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

などから,

$$d\beta = \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

となる. ベクトル解析の記号でかけば,

$$\beta = (b_1, b_2, b_3) \mapsto \text{div}\beta = \nabla \cdot \beta = \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3}$$

となる.

また. $d^2 = 0$ はスカラー場 (関数) f に対して, $\text{rot grad}f = 0$. そして, ベクトル場 (1-form) α に対して, $\text{div rot}\alpha = 0$ を意味する.

さて, 定理の証明をしよう.

Proof. 局所座標で

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

とかけているとする．この局所座標系で d を定義し，性質を満たすことを示す．そして，最後に，われわれの定義が座標の取り方によらないことを示す．

局所座標で d を

$$d\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} (da_{i_1 \dots i_p}(x)) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = \sum_{j, i_1 < \dots < i_p} \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

と定義する． $p = 0$ の場合，つまり $\alpha = f$ なら， $d\alpha$ は関数の微分であるので定理の1番目の性質を満たしている．また，線形写像となることに注意しよう．

次に， $d^2 = 0$ を示す．上の外微分の定義に従えば，

$$d^2\alpha = \sum_{j, k, i_1 < \dots < i_p} \frac{\partial^2 a_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_j \partial x_k} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

となる．ここで，

$$\frac{\partial^2 a_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 a_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_k \partial x_j}$$

となり， j, k について対称である．一方，

$$dx_k \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_k$$

となり， j, k に反対称である．そこで， $j, k = 1, \dots, n$ と和をとれば，キャンセルしてしまい

$$d^2\alpha = 0$$

となる．

つぎに3番目の性質を見てみよう．線形性から

$$\alpha = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = f dx_I, \quad \beta = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = g dx_J$$

としてよい．そこで，

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg dx_I \wedge dx_J) = d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (f dg + g df) \wedge dx_I \wedge dx_J = (-1)^p f dx_I \wedge dg \wedge dx_J + df \wedge dx_I \wedge g dx_J \\ &= (-1)^p \alpha \wedge d\beta + d\alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

となる．

さて，我々はある局所座標において，定理の性質をみたす d を構成できた．他の局所座標でも同様にして構成できる．あとは，それらが座標系のとり方によらず well-defined であることを証明すればよい．先ほどの α が局所座標 $y_1, \dots, y_n$ に対して，

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} b_{i_1 \dots i_p} dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_p}$$

とかけたとする。このとき、性質 1 と 3 を用いて、

$$d\alpha = \sum db_{i_1 \dots i_p} \wedge dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_p} + \sum b_{i_1 \dots i_p} d(dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_p})$$

となる。そして、性質 3 より、

$$d(dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_p}) = d(dy_{i_1}) \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_p} - dy_{i_1} \wedge d(dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_p})$$

となる。第一項は性質 2 より零となる。さらに、第二項についても同様のことを繰り返せばゼロとなることかわかる。よって、

$$d\alpha = \sum db_{i_1 \dots i_p} \wedge dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_p}$$

となり、局所座標 $y_1, \dots, y_n$ における外微分と一致する。このように、座標系のとり方によらないことがわかった。

このように各局所座標で我々が構成した d は、張り合って、大域的に

$$d\alpha$$

が定義できる。このような外微分が唯一であることは、局所座標で定義したものが性質 1, 2, 3 を使って定義していることからわかる。□

Remark 1.3.1. 上の構成法から、 α の局所座標表示が

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

となるなら、 $d\alpha$ を、

$$d\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

とすればよいわけである。

さらに、ベクトル場を使った大域的な表示も作ることができる。

Proposition 1.3.10. $\omega \in \Omega^k(M)$ およびベクトル場 $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、外微分は次のように表示できる。

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

ここで、 $[X_i, X_j]$ は X_i, X_j のリー括弧積（多様体の本を参照）。

Proof. まず, 右辺は $C^\infty(M)$ 加群 $\mathfrak{X}(M)$ の $k+1$ 次交代形式であることがわかる. つまり,

•

$$d\omega(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_{k+1}) = f d\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_{k+1}) \quad i = 1, \dots, k+1$$

•

$$d\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_{k+1}) = -d\omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_{k+1})$$

よって, $k+1$ -form になる.

そこで, 各座標近傍で以前の定義と上の定義が一致することをみればよい.

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

としたとき,

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

であった.

線形性から $X_i = \frac{\partial}{\partial x_{j_i}}$ を代入して確かめればよく $j_1 < \dots < j_{k+1}$ としてよい.

まず,

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i_1 < \dots < i_k, s} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_s} dx_s \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}} \right)$$

となり, ここで $\{s, i_1, \dots, i_k\} = \{j_1, \dots, j_k, j_{k+1}\}$ となる項のみがのこる. $i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_{k+1}$ となるので, 残るのは,

$$\begin{aligned} s &= j_1, i_1 = j_2, \dots, i_k = j_{k+1}. \\ i_1 &= j_1, s = j_2, i_2 = j_3, \dots, i_k = j_{k+1}. \\ &\dots\dots\dots \\ i_1 &= j_1, i_2 = j_2, \dots, i_k = j_k, s = j_{k+1}. \end{aligned}$$

となる項であり,

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{j_s}} f_{j_1 \dots \hat{j}_s \dots j_{k+1}}$$

となる. さて, 一方, $[X_i, X_j] = 0$ であるので,

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &= \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{j_s}} f_{j_1 \dots \hat{j}_s \dots j_{k+1}} \end{aligned}$$

となり一致する. □

Definition 1.3.4. M を n 次元多様体とする. M 上の微分形式の空間を $\Omega^p(M)$ とする. このとき

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \rightarrow \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \rightarrow 0$$

は微分複体であり, これをド・ラーム複体とよぶ. 微分複体とは次数付きベクトル空間 $\oplus_k V_k$ および線形写像 $d_k : V_k \rightarrow V_{k+1}$ で, $d_{k+1}d_k = 0$ を満たすもの.

$d^2 = 0$ から, $B_k = \text{Image}(d : \Omega^{k-1} \rightarrow \Omega^k)$ は $Z_k = \ker d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$ の部分空間となる.

次の定理は証明は略:

Theorem 1.3.11. M がコンパクトなら,

$$H_{DR}^k(M) := Z_k / B_k$$

は有限次元ベクトル空間である. また, 位相幾何学におけるコホモロジー群 $H^k(M, \mathbb{R})$ と同型となる (ドラームの定理)

Definition 1.3.5. $H_{DR}^k(M)$ をド・ラームコホモロジー群とよぶ.

微分形式には, 外微分と引き戻しがあったが, それらの関係はどうなっているかを見ていこう.

Proposition 1.3.12. $F : M \rightarrow N$ を滑らかな写像とする. $\alpha \in \Omega^p(N)$ に対して,

$$d(F^*\alpha) = F^*(d\alpha)$$

となる. つまり引き戻しと外微分は可換である. 特に,

$$F^* : H^p(N) \rightarrow H^p(M)$$

という写像が導かれる.

Proof. 以前見たように, $F^*(df) = dF^*f$ である. また $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$ となるのであった. とくに, $dF^*dx_i = F^*ddx_i = 0$ となる. そこで,

$$\alpha = \sum a_{i_1 \dots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots dx_{i_p}$$

としたとき,

$$F^*\alpha = \sum a_{i_1 \dots i_p}(F(x)) F^*dx_{i_1} \wedge \cdots F^*dx_{i_p}$$

とり,

$$\begin{aligned} d(F^*\alpha) &= \sum d(a_{i_1 \dots i_p}(F(x))) \wedge F^*dx_{i_1} \wedge \dots \wedge F^*dx_{i_p} \\ &= \sum F^*da_{i_1 \dots i_p} \wedge F^*dx_{i_1} \wedge \dots \wedge F^*dx_{i_p} \\ &= F^*(d\alpha) \end{aligned}$$

となる. □

1.3.5 ドラムコホモロジー

ベクトル解析で $\text{rot}(\text{grad}f) = 0$ となった. 逆に, ベクトル場 X が $\text{rot}X = 0$ を満たすなら, ある f (ポテンシャル関数) が存在して, $X = \text{grad}f$ と書ける. これは $\mathbb{R}^3$ または $\mathbb{R}^3$ の単連結な領域で成立することである. 大事なことは, 考えている領域に位相的な条件が必要なことである. たとえば, X が原点で特異点をもつようなベクトル場だとしたとき $\text{rot}X = 0$ だとしても, ポテンシャル関数は存在しない. 実際, $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場

$$\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

は, $\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}$ を満たすが, 原点で発散するので, $\mathbb{R}^2$ 上のポテンシャル関数は存在しない. 実際, 原点のまわりの閉曲線で積分しても零とならない.

同様のことが, 多様体上でも成立する. 上のことを多様体上で定式化すると, M 上の 1-form α が $d\alpha = 0$ を満たしたとき, M が単連結なら, ある関数 f が存在して, $df = \alpha$ と書ける.

これらのことを定式化するためには, ドラムコホモロジー群を使えばよい.

Definition 1.3.6. • $\alpha \in \Omega^p(M)$ が閉 (closed) とは $d\alpha = 0$ となることである.

- $\alpha \in \Omega^p(M)$ が完全 (exact) とは, ある $\beta \in \Omega^{p-1}(M)$ があって, $\alpha = d\beta$ となること.

定義から明らかにように, exact なら closed である.

ドラムコホモロジー群 $H_{DR}^p(M)$ は,

$$H_{DR}^p(M) := \frac{\{\text{closed } p\text{-forms}\}}{\{\text{exact } p\text{-forms}\}}$$

として定義された. $[\alpha] \in H_{DR}^p(M)$ とは, α は closed p -form である. そして, $[\alpha] = [\alpha']$ とは, $\alpha - \alpha' = d\beta$ ($\exists \beta \in \Omega^{p-1}(M)$). また, ベクトル空間の構造としては,

$$c_1[\alpha_1] + c_2[\alpha_2] = [c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2]$$

として定義すればよい.

Exercise 1.3.13. 上で定義したベクトル空間としての構造が *well-defined* であることを証明せよ.

このドラムコホモロジー群の基本的な性質を見ていこう.

まず, $H^0(M)$ を考える. -1 -form は存在しないので, $H^0(M)$ は $df = 0$ となる関数からなるものである. M の各連結成分 M_i は M の開集合であり, M_i は連結な多様体である. M_i 上で座標近傍上で, $df = 0$ は f が定数 c となることを意味する. そこで, $f = c$ となる点の集合は M_i の開集合であり, 一方, $f(x) = c$ となるので閉集合でもある. よって, そのような集合は M_i 自身であり, $f = c$ が M_i 上で成立する.

このようなことから, M が連結なら $H^0(M) = \mathbb{R}$ であり, M が連結でない場合には, M が第二可算公理をみたすことから, 高々可算個の連結成分をもつことがわかる. つまり $M = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ なら, $H^0(M) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ となる. 特に, M がコンパクトなら, 連結成分は有限個であるので, $H^0(M)$ は有限次元ベクトル空間となる.

Remark 1.3.2. M がコンパクトなら, $H^p(M)$ ($\forall p$) に対して有限次元となることが知られている.

さて, コホモロジー群は次のような性質をもつ.

Proposition 1.3.14. M を n 次元多様体とする. このときドラムコホモロジー群は次の性質をもつ.

- $H^p(M) = \{0\}$ ($p < -1, p > n$)
- $a \in H^p(M), b \in H^q(M)$ に対して, 積 $a \wedge b \in H^{p+q}(M)$ が定義され,

$$a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a$$

このようにドラムコホモロジーは環構造をもつ.

- $F : M \rightarrow N$ が滑らかな写像とすると,

$$F^* : H^p(N) \rightarrow H^p(M)$$

が定義され, $F^*(a \wedge b) = F^*a \wedge F^*b$ となる.

Proof. 最初の主張は $\Lambda^p T^*(M) = 0$ ($p < -1, p > n$) から明らか.

また, 積は $a = [\alpha], b = [\beta]$ としたとき,

$$a \wedge b = [\alpha \wedge \beta]$$

と定義する. これが *well-defined* であることを見ていこう.

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta = 0$$

となるので, $[\alpha \wedge \beta] \in H^{p+q}(M)$ となる.

次に代表元の取り方によらないことを見してみる $\alpha' = \alpha + d\gamma$ とすれば,

$$\alpha' \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + d\gamma \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + d(\gamma \wedge \beta)$$

となるので,

$$[\alpha' \wedge \beta] = [\alpha \wedge \beta]$$

となる. β に対しても同様である. また $a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a$ も明らかであろう.

最後の主張はすでに証明した. □

さて, ドラームコホモロジーのもっとも重要な性質の一つは, それが代数的位相幾何学と結びつくことである. 実際, 位相幾何学で定義されるコホモロジー群と一致するのである. それを, 証明するのは大変なので, ここではその性質の現れであるホモトピー不変性についてみていく.

Definition 1.3.7. $F(x, t) = F_t(x) : M \times [0, 1] \rightarrow N$ が滑らかな写像とする ($[0, 1]$ を少し広げた开区間で滑らか). このとき $F_0 \sim F_1$ と書き, $F_0 : M \rightarrow N$ と $F_1 : M \rightarrow N$ はホモトピックとよぶことにする. そして, F_t を F_0 と F_1 を結ぶホモトピーとよぶ.

Theorem 1.3.15. $F_0, F_1 : M \rightarrow N$ がホモトピックなら, $F_t^* : H^p(N) \rightarrow H^p(M)$ ($\forall p$) はすべて同じ写像を与える. 特に, $F_0^* = F_1^*$ となる.

Proof. $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ をホモトピーとする. $a = [\alpha] \in H^p(N)$ に対して, $F^*\alpha$ は $M \times [0, 1]$ 上の微分形式であり, $[0, 1]$ 上の座標を t とすれば,

$$F^*\alpha = \beta + dt \wedge \gamma$$

と書くことができる. ここで, $\beta = F_t^*\alpha$, $\gamma = i(\partial/\partial t)F^*\alpha$ (どちらも t に依存). このことを証明しておこう.

局所座標系で

$$F(x, t) = (y_1(x, t), \dots, y_n(x, t))$$

として,

$$dy_i(x, t) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial y_i}{\partial t} dt$$

となるので,

$$\alpha = \sum a_{i_1 \dots i_p} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p}$$

と書けば,

$$\begin{aligned} F^*\alpha &= \sum_{i_1 \dots i_p, j_1, \dots, j_p} a_{i_1 \dots i_p}(y(x, t)) \left(\frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_1}} dx_{j_1} + \frac{\partial y_{i_1}}{\partial t} dt \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial y_{i_p}}{\partial x_{j_p}} dx_{j_p} + \frac{\partial y_{i_p}}{\partial t} dt \right) \\ &= \sum a_{i_1 \dots i_p}(y(x, t)) \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_1}} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial y_{i_p}}{\partial x_{j_p}} dx_{j_p} \\ &\quad + \sum \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_1}} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial y_{i_k}}{\partial t} dt \wedge \dots \wedge \frac{\partial y_{i_p}}{\partial x_{j_p}} dx_{j_p} \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\beta = F_t^* \alpha$$

であり, $X = \frac{\partial}{\partial t}$ とすれば,

$$\gamma = i(X)F^*\alpha$$

となる. つまり,

$$F^*\alpha = F_t^*\alpha + dt \wedge i(X)F^*\alpha$$

となる. ここで $i(X)$ は内部積であり,

$$i(v)(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} i(v)\phi_i (\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_{i-1} \wedge \phi_{i+1} \wedge \dots \wedge \phi_p)$$

さて, α が閉形式であるので,

$$0 = dF^*\alpha = F^*d\alpha = d_M\beta + dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t} - dt \wedge d_M\gamma$$

となり, $d_M\beta = 0$, $\frac{\partial \beta}{\partial t} = d_M\gamma$ を得る. よって,

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t^* \alpha = \frac{\partial \beta}{\partial t} = d_M\gamma$$

となるので, これを t について積分すれば,

$$F_1^* \alpha - F_0^* \alpha = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F_t^* \alpha dt = d_M \int_0^1 \gamma dt$$

となる. 以上から,

$$[F_1^* \alpha] = [F_2^* \alpha]$$

となるので, $F_1^* = F_2^* : H^p(N) \rightarrow H^p(M)$ となる. □

Proposition 1.3.16 (ポアンカレの補題). $M = \mathbb{R}^n$ に対して,

$$H^p(M) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases}$$

となる. 特に, $p \geq 1$ のとき, $\alpha \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$ が $d\alpha = 0$ ならば, $\beta \in \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^n)$ が存在して, $\alpha = d\beta$ となる.

Proof. $F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$F(x, t) = tx$$

として定義する. これは微分可能であるので, ホモトピーを与える. このとき $F_1(x) = x$ であり, $F_0(x) = 0$ である. 特に, $F_1^* = \text{id} : H^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^p(\mathbb{R}^n)$ であり. $F_0^*[\alpha] = 0$ ($\alpha \in \Omega^p(M)$, $p \geq 1$) であるので,

$$F_0^* : H^p(M) \ni [\alpha] \mapsto 0 \in H^p(M)$$

となる. 一方, 定理を用いれば, $\text{id} = F_0^* = F_1^* = 0$ となるので, $H^p(M) = \{0\}$ を得る. $\square$

Definition 1.3.8. 多様体 M, N がホモトピックとは, $F : M \rightarrow N, G : N \rightarrow M$ で, $F \circ G \sim \text{id}_N, G \circ F \sim \text{id}_M$ となるものが存在すること.

Example 1.3.17. $\mathbb{R}^n$ は1点 $\{0\}$ とホモトピックである.

Theorem 1.3.18. M と N がホモトピックなら, $H^p(M) \cong H^p(N)$ となる. 特に, M, N が微分同相なら, $H^p(M) \cong H^p(N)$ となる.

Proof. $F^* \circ G^* = \text{id}_{H^p(N)}, G^* \circ F^* = \text{id}_{H^p(M)}$ となるので, $H^p(M) \cong H^p(N)$ となる. $\square$

Example 1.3.19. 実は, $H^1(S^1) = \mathbb{R}$ であることが知られている. そして, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ と S^1 は明らかにホモトピックであるので, $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}$ となる. そこで, $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の1次微分形式 α として,

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

を考えたとき, $d\alpha = 0$ となるが, 関数 f で $\alpha = df$ となるものは存在しない. つまり, $[\alpha]$ が $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ の生成元である.

定理 1.3.15 について補足しておく.

$$F^* \alpha = F_t^* \alpha + dt \wedge i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) F_t^* \alpha$$

の微分を考えると,

$$F^* d_N \alpha = dF^* \alpha = d_M F_t^* \alpha + dt \wedge \frac{\partial F_t^* \alpha}{\partial t} - dt \wedge d_M \left(i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) F_t^* \alpha\right)$$

となる. 一方,

$$F^* d_N \alpha = F_t^* d_N \alpha + dt \wedge i(X) F_t^* d_N \alpha$$

であるので,

$$F_t^* d_N \alpha + dt \wedge i(X) F_t^* d_N \alpha = d_M F_t^* \alpha + dt \wedge \frac{\partial F_t^* \alpha}{\partial t} - dt \wedge d_M (i(\frac{\partial}{\partial t}) F_t^* \alpha)$$

となる. そこで, $i(\frac{\partial}{\partial t})$ で縮約すれば,

$$\frac{\partial F_t^* \alpha}{\partial t} = i(\frac{\partial}{\partial t}) F_t^* d_N \alpha + d_M (i(\frac{\partial}{\partial t}) F_t^* \alpha)$$

となる. そこで, $v_i \in T_x(M)$ に対して, 各 t に対して,

$$(h_t \alpha)(v_1, \dots, v_p) = \{i(\frac{\partial}{\partial t}) F_t^* \alpha\}(v_1, \dots, v_p) = \alpha_{F_t(x)}(\frac{\partial F_t}{\partial t}(x), (dF_t)_x(v_1), \dots, (dF_t)_x(v_p))$$

とすれば,

$$h_t : \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$$

が定まる. 先ほどの公式は,

$$\frac{\partial F_t^* \alpha}{\partial t} = h_t d_N \alpha + d_M h_t \alpha$$

となる. これを **Cartan** の公式とよぶ. これを積分することにより,

$$F_1^* - F_0^* = \int_0^1 h_t(d\alpha) dt + d \int_0^1 h_t(\alpha) dt$$

つまり,

$$h : \Omega^p(N) \ni \alpha \mapsto \int_0^1 h_t(\alpha) dt \in \Omega^{p-1}(M)$$

は, ホモトピー作用素となる. よって, コホモロジーレベルで $F_0^* = F_1^*$ を得る.

また, $M = N$ の場合で F_t が 1 パラメータ変換群 ϕ_t の場合には, 対応するベクトル場を X とすれば, $h_t \alpha = \phi_t i(X) \omega$ であり,

$$L_X = i(X)d + di(X)$$

という式を得ることができる (これもカルタンの公式という).

1.4 微分形式の積分

1.4.1 向き

多変数の積分の変数変換の公式を思い出す. それは

$$\int_U f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n = \int f(y_1(x), \dots, y_n(x)) \left| \det \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \right| dx_1 \cdots dx_n$$

であった。一方、 n 次元多様体上の n -form の変換公式は

$$\begin{aligned}\theta &= f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n \\ &= f(y_1(x), \dots, y_n(x)) \sum \frac{\partial y_1}{\partial x_i} dx_i \wedge \dots \wedge \sum \frac{\partial y_n}{\partial x_i} dx_i \\ &= f(y_1(x), \dots, y_n(x)) \det \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n\end{aligned}$$

となる。上の変換公式の違いは絶対値がついてるかどうかであるが、 n 次元多様体上の n -form の積分を定義できそうである。符号の違いは多様体の向きを導入することで解決する。

Definition 1.4.1. n 次元多様体が向き付け可能 (orientable) とは、すべての点で零とはならない n -form ω が存在することである。

Definition 1.4.2. M を n 次元の向き付け可能多様体とする。すべての点 x で零とならない n -form の全体の空間を考える。このとき $\omega \sim \omega'$ とは $f > 0$ ($\forall x$) となる関数があって $f\omega = \omega'$ とする。これは同値関係となる。このとき、その商空間は M が連結なら 2点集合となる。そこで、 M の向き (orientation) をどちらかの同値類として定義する。

Remark 1.4.1. M が n 次元多様体なら、 $\Lambda^n(M)$ は rank 1 のベクトル束である。 M が向き付け可能なら、各点で零にならない n -form ω を使って、 $\Lambda^n(M)$ は自明束 $M \times \mathbb{R}$ となる。よって、向きは二つとなる。

Example 1.4.1. $\mathbb{R}^n$ 上で

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

を考えると、これは各点で零とならない。よって、 $\mathbb{R}^n$ は向き付け可能である。そして、これが $\mathbb{R}^n$ の標準的な向きである。

また、各点で零とならない n -form ω は、各点で $f > 0$ または $f < 0$ となる関数が存在して、

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

となる。そして、 $\mathbb{R}^n$ の向きは

$$\{f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \mid f > 0\} \cup \{g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \mid g < 0\}$$

の二つである。代表元としては、

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad -dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

である。

Example 1.4.2. メビウスの帯（淵なしで開集合として）は、向き付けが不可能である。一方、円柱は向き付け可能である。

Example 1.4.3. M を $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の超曲面で次のようなものとする。

$$M = f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) = c, df(x) \neq 0\}$$

陰関数定理より、これは多様体になるのであった。そして、 $\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0$ なら、 $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ が局所座標としてとれるのであった。

M が向き付け可能であることを見てみよう。

$$\omega = (-1)^i \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_i}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

という、局所 n -form を考える。この局所座標においては零でないことがわかる。実は、この n -form は大域的なゼロにならない n -form となる。 $x \in M$ に対して、 $f(x) = c$ であるので、

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$$

となる。そこで、 $\frac{\partial f}{\partial x_j} \neq 0$ ならば、

$$dx_j = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} \sum_{i \neq j} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

となる。これを上の式に代入すれば、

$$\omega = (-1)^j \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

となるので、 M 全体で定義される、そして、各点で零でない n -form となる。また、もう一つの向きは、

$$-(-1)^i \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_i}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

とすればよい。

Example 1.4.4. $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ を考える。

$$f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

として、 $f^{-1}(1) = S^n$ である。そして、 $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i$ であるので、

$$\omega = -(-1)^i \frac{1}{x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

は大域的な n -form となる。

Example 1.4.5. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上の n -form として,

$$\omega_1 = \frac{1}{\|x\|^n} \sum_l (-1)^{l-1} x_l dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{l-1} \wedge dx_{l+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

を考える. これが $d\omega_1 = 0$ となることは簡単な計算でわかる. さて, $\iota: S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ として, S^{n-1} の局所座標を取ってくる.

$$\begin{aligned} \iota(x_1, \dots, x_{n-1}) &\rightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x_1, \dots, x_{n-1})) \\ x_n(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2} \end{aligned}$$

この写像により ω_1 を引き戻す.

$$dx_n = d\sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{-x_k}{\sqrt{1 - \sum x_j^2}} dx_k$$

となるので,

$$\begin{aligned} \iota^* \omega_1 &= \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{l-1} x_l dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{l-1} \wedge dx_{l+1} \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{-x_k}{\sqrt{1 - \sum x_j^2}} dx_k \right) \\ &\quad + (-1)^{n-1} \iota^* x_n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} \frac{-(-1)^{l-1} (-1)^{n-1-l} x_l^2}{\sqrt{1 - \sum_{1 \leq j \leq n-1} x_j^2}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} + (-1)^{n-1} \sqrt{1 - \sum_{1 \leq j \leq n-1} x_j^2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \sum x_j^2}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1}{x_n} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \end{aligned}$$

となり, S^{n-1} のゼロとならない $n-1$ -form を与える.

このような向きを S^{n-1} の標準的な向きとよぶ.

Example 1.4.6. 向き付け不可能な例として, 実射影空間 $\mathbb{R}P^{2m}$ がある, これが向き付け不可能であることを見ていこう.

$$\pi: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$$

を射影とする. 局所座標で書いてみると, $x \in S^n$ で $x_1 > 0$ のときの局所座標として,

$$(u_1, \dots, u_m) = \phi_1^+(x) = (x_2, \dots, x_{n+1})$$

が取れ、射影空間の局所座標としては、

$$\psi_1(x) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_1} \right)$$

となる。そこで、

$$\psi_1 \circ \pi \circ (\phi_1^+)^{-1}(u_1, \dots, u_n) = \frac{u}{\sqrt{1 - \|u\|^2}}$$

となる。他の局所座標でも同様。そして、この微分を計算すれば、 $D\pi$ は同型であることがわかる（つまり、球面と射影空間は局所的に同型である）。

さて、 $\sigma: S^n \rightarrow S^n$ を $\sigma(x) = -x$ で定義すれば、これは微分同相であり、

$$\sigma^*\omega = (-1)^i \frac{1}{-x_i} d(-x_1) \wedge \dots \wedge d(-x_{i-1}) \wedge d(-x_{i+1}) \wedge \dots \wedge d(-x_n) = (-1)^{n-1} \omega$$

となる。

$\mathbb{R}P^n$ が向き付け可能とすれば、零にならない n -form θ が存在する。これを $D\pi$ が同型であったので、 $\pi^*\theta$ は、 S^n 上で零にならない n -form となるので、

$$\pi^*\theta = f\omega$$

となる、零にならない関数 f が存在する。また、 $\pi \circ \sigma = \pi$ となるので、

$$f\omega = \pi^*\theta = \sigma^*\pi^*\theta = \sigma^*(f\omega) = f \circ \sigma (-1)^{n-1} \omega$$

となる。そこで、 n 偶数なら、

$$f \circ \sigma = -f$$

となり、 $a \in S^n$ に対して $f(a) > 0$ なら $f(-a) < 0$ となる。しかし、 S^n は連結であるので、どこかで f は零となる。これは、矛盾である。

よって、 n が偶数なら、つまり $\mathbb{R}P^{2m}$ は向き付け不可能である。

向き付け可能性と積分の関係をみるために次の命題が必要となる。

Proposition 1.4.7. 多様体 M が向き付け可能であるための必要十分条件は M の座標近傍による開被覆 $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_\alpha$ で、すべての座標変換が

$$\det \frac{\partial y_i}{\partial x_j} > 0$$

となるものが存在。

Proof. M が向き付け可能とする。このとき ω を零とならない n -form とする。 M を座標近傍で覆っておく。ある座標近傍上で ω が、

$$\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad f < 0$$

と書けた場合には、ちょっと座標変換 $x_1 \rightarrow -x_1$ をすることにより、 $f > 0$ としてよい。そこで、 M の座標近傍による開被覆で、 $\omega = f dx_1 \cdots dx_n$ ($f > 0$) となるもので覆うことができる。

このとき、二つの座標近傍が交わりでは、

$$\begin{aligned}\omega &= g(y_1, \dots, y_n) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \\ &= g(y_1(x), \dots, y_n(x)) \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\end{aligned}$$

となるが、 $f > 0, g > 0$ なので、 $\det \frac{\partial y_i}{\partial x_j} > 0$ となる。

逆に、そのような座標近傍らで M が覆えたとする。このとき、その開被覆に付随した 1 の分割を用いて、

$$\omega = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha} dy_1^{\alpha} \wedge dy_2^{\alpha} \wedge \cdots \wedge dy_n^{\alpha}$$

を考えると、これは零とならない n -form である。(和は局所的に定義された $dy_1^{\alpha} \wedge \cdots \wedge dy_n^{\alpha}$ を α で和をとっているのので、どのような微分形式かわからないから、打ち消しあって零となる可能性もありそうだけど、そういうことが起こらない)。実際、 $x \in M$ に対して、 $x \in U_{\beta}$ とすれば、

$$\omega|_{U_{\beta}} = \sum \phi_{\alpha} \det(\partial y_i^{\alpha} / \partial x_j) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

となるが、 $\phi_{\alpha} \geq 0$ かつ $\det(\partial y_i^{\alpha} / \partial x_j) > 0$ であるので零とならない。

□

このように、 M の向き (ω) に対して、上の命題の座標系を正の座標系とよぶことにする。つまり、その座標系に対して、

$$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad f > 0$$

となる。

さて、向き付けられた多様体 M 上の積分を定義しよう。 θ をコンパクト support をもつ n -form とする。このとき、向き付けに対応する、多様体の座標近傍の被覆を一つとる。そして被覆に付随した 1 の分割を $\{\phi_i\}_i$ とする。このとき、

$$\theta = \sum \phi_i \theta$$

となる。そして、 $\phi_i \theta$ は、ある座標近傍 $U_{\alpha(i)}$ 内に support をもつので、

$$\phi_i \theta|_{U_{\alpha(i)}} = g_{\alpha(i)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

とかけ、これもコンパクト support をもつ。よって、

$$\int_{U_{\alpha(i)}} g_{\alpha(i)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\phi_{\alpha(i)}(U_{\alpha(i)})} g_{\alpha(i)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

が定義できる（右辺は普通の重積分）。そこで、

$$\int_M \theta = \sum_i \int_M \phi_i \theta = \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} g_{\alpha(i)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

とすれば、 n -form の積分が定義できた。ここで、コンパクト台をもつので、1 の分割の局所有限性から、そのコンパクト台と $\text{supp}(\phi_i)$ が交わるのは有限個である。よって、上の和は有限和であることに注意する。

ここで、 M の向きを与える座標近傍被覆の取り方によらないことは、積分の変数変換の公式から証明できる。また、1 の分割のとり方にもよらないこともわかる。

Proof. 1 の分割 $\{V_i, f_i\}, \{W_j, g_j\}$ を考える。どちらも向きに対応しているとする。

$$\text{supp}(f_i g_j \theta) \subset \text{supp}(f_i) \cap \text{supp}(g_j) \subset V_i \cap W_j$$

となる。積分の変数変換の公式から、 $\int_M f_i g_j \theta$ は V_i, W_j のどちらの座標で計算しても同じ値である。また、

$$\begin{aligned} \sum_i \int_M f_i \theta &= \sum_i \int_M f_i \left(\sum_j g_j \right) \theta \\ &= \sum_{i,j} \int_M f_i g_j \theta \\ &= \sum_j \int_M g_j \left(\sum_i f_i \right) \theta \\ &= \sum_j \int_M g_j \theta \end{aligned}$$

□

Remark 1.4.2. M の向きを変えれば、積分 $\int_M \theta$ の符号が変化する。このように、積分は向きがあって初めて定義できるもの。

1.4.2 ストークスの定理

ベクトル解析におけるグリーンの定理は、次に述べる微分形式に対するストークスの定理の特別な場合である。まず、ストークスの定理の simple version を述べよう。

Theorem 1.4.8 (ストークスの定理). M をコンパクト向き付けられた n 次元多様体とし, $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ とすると,

$$\int_M d\omega = 0$$

が成立する. これは M がコンパクトでなくても, ω がコンパクト support を持つときでも成立する.

Proof. 1 の分割をとって,

$$\omega = \sum \phi_i \omega$$

とする.

$$\int_M d\omega = \int_M d(\sum \phi_i) \omega = \sum \int_M d(\phi_i \omega)$$

となるので, 右辺の各項がゼロとなることを示す. $n-1$ -form であるので,

$$\phi_i \omega = \sum (-1)^{j+1} a_j dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

となり,

$$d(\phi_i \omega) = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

となる. 積分の定義から,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

を計算すればよいので,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n$$

となる. ここで ω がコンパクト support をもつので, $\phi_i \omega$ も compact support をもつ. よって, $|x_1| \geq N$ で, $\phi_i \omega = 0$ となるので,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 = [a_1]_{-N}^N = 0$$

となる. 他の項も同様であるので,

$$\int_M d\omega = 0$$

□

いくつかの応用を述べよう.

Proposition 1.4.9. M をコンパクト向き付け可能な n 次元多様体とする. このとき $H_{DR}^n(M) \neq 0$ となる.

Proof. M が向き付け可能なので, 零とならない n -form θ が存在. n 次元なので $d\theta = 0$ であるので, $[\theta] \in H^n(M)$ となる. $[\theta] \neq 0$ つまり, $\theta = d\omega$ とならないことを示せばよい.

θ に対応する向きをとって積分すれば,

$$\int_M \theta = \sum_i \int f_i dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

となるが, $f_i \geq 0$ かつ, どれかは正であるので, この積分は正となる. さて, $\theta = d\omega$ とすると,

$$\int_M \theta = \int_M d\omega = 0$$

となるので, 矛盾してしまう. よって, $[\theta] \neq 0$ である. □

Remark 1.4.3. 実は, M を連結コンパクト向き付け可能な n 次元多様体とすれば, $H^n(M) = \mathbb{R}$ となる.

Theorem 1.4.10. 偶数次元球面 S^{2m} 上のすべてのベクトル場は必ずゼロ点をもつ.

Proof. 零点をもたないベクトル場が存在したとして, 矛盾を導く. $S^{2m} \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ とみなしたとき, ベクトル場 v を,

$$v : S^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}, \quad (x, v(x)) = 0$$

とみなすことができる. さらに, 零点を持たないので, $v/|v|$ を考えて正規化することにより, $(v(x), v(x)) = 1$ となる. さて,

$$F_t : S^{2m} \ni x \mapsto x \cos t + v(x) \sin t \in \mathbb{R}^{2m+1}$$

を考えると,

$$(F_t(x), F_t(x)) = \cos^2 t(x, x) + 2 \cos t \sin t(x, v(x)) + \sin^2 t(v(x), v(x)) = 1$$

となるので, $F_t(x) : S^{2m} \rightarrow S^{2m}$ というホモトピーを与える. そして,

$$F_0(x) = x, \quad F_\pi(x) = -x$$

となる. さて, S^{2m} は向き付け可能で, 標準的な向きとして (局所座標で)

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2m}/x_{2m}$$

を考えると,

$$F_0^* \omega = \omega, \quad F_\pi^* \omega = d(-x_1) \wedge d(-x_2) \wedge \cdots \wedge d(-x_{2m}) / (-x_{2m}) = -\omega$$

なる. F_t はホモトピーであり, $F_\pi^* = F_0^* = \text{id} : H^{2m}(S^{2m}) \rightarrow H^{2m}(S^{2m})$ となるので, $[\omega] = [F_\pi^* \omega] = -[\omega]$ となり, $[\omega] = 0$ となってしまう. これは先ほどの命題に矛盾している. $\square$

Remark 1.4.4. 奇数次元球面上では, $x = (x_1, \dots, x_{2m}, x_{2m+1}) \in S^{2m+1} \subset \mathbb{R}^{2m+2}$ において, .

$$F_t(x) = (x_1 \cos t - x_2 \sin t, x_1 \sin t + x_2 \cos t, \dots, x_{2m} \cos t - x_{2m+1} \sin t, x_{2m} \sin t + x_{2m+1} \cos t)$$

とすれば, これは S^{2m+1} の 1 パラメータ変換群をあたえ, これが導くベクトル場を考えると, ゼロ点をもたないベクトル場となる.

ストークスの定理の full version を述べるには, 境界付き多様体について考えることになる.

Definition 1.4.3. M が境界をもつ多様体とは, M の部分集合 U_α と写像

$$\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow (\mathbb{R}^n)^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}$$

の族 $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ で, 次をみたすものをもつとき,

- $M = \cup_\alpha U_\alpha$
- $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha)$ が全単射であり, $\phi_\alpha(U_\alpha)$ は $(\mathbb{R}^n)^+$ の開集合 ($(\mathbb{R}^n)^+$ には制限位相をいれている). さらに, $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ は開集合 ($\forall \alpha, \beta$).
-

$$\phi_\beta \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

は $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ の近傍 (ちょっと広げたところ) から $\mathbb{R}^n$ への滑らかな写像の $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ への制限となっている.

また, このとき, M の境界 ∂M を

$$\partial M = \{x \in M \mid \phi_\alpha(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n\}$$

として定義する. このとき, 上のことから ∂M には $n-1$ 次元多様体の構造がはいる.

Example 1.4.11. 1. $(\mathbb{R}^n)^+$ は境界をもつ多様体であり, 境界は $x_n = 0$.

2. $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ は境界を持つ多様体であり, 境界は S^{n-1} .

3. メビウスの帯は 2 次元の境界つき多様体であり, 境界は S^1 となる.

4. $I \times S^1$ という円柱は、2次元境界付き多様体であり、境界は二つの連結成分からなり、 $S^1 \cup S^1$ である。

境界付き多様体で微分形式とは、局所的に書けば、 $\mathbb{R}^n$ 上の開集合の微分形式を $(\mathbb{R}^n)^+$ へ制限したものとして定義すればよい。そして、境界上の微分形式は、 M 上の微分形式の ∂M への制限とすればよい。

Proposition 1.4.12. M を境界付き多様体とする。このとき、 M が向きが入っているとき、境界にも向きを入れることができる。

Proof. M の局所座標 $x_1, \dots, x_n$ で ∂M が $x_n = 0$ となるものをとっておく。よって、 ∂M の局所座標は $x_1, \dots, x_{n-1}$ となる。また、向き付けられているので、それに対応した局所座標による被覆をとっておく。このとき $\det(\partial y_i / \partial x_j) > 0$ である。近傍の交わりのところでは、

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad y_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$$

となる。そこで、ヤコビ行列を計算すると、境界上で、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$\left. \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \right|_{x_n=0} > 0$$

となる。実際、 $\phi_\beta \phi_\alpha^{-1}$ は $x_n > 0$ を $y_n > 0$ へ移すので、 $x_n = 0$ なら、 $y_n = 0$ 。 $x_n > 0$ なら $y_n > 0$ となるので、上のことが成立する。そこで、境界上で、

$$\det(J_{\partial M}) \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \det(J_M)$$

となるので、 $\det(J_M) > 0$ なら $\det(J_{\partial M}) > 0$ となる。

そこで、次のような向きを入れることになる。 M の向きは、各座標近傍で、

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

として入っている。このとき ∂M の向きを、

$$(-1)^n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

として入れる。言い換えると、 ∂M の向きを、ユークリッド座標で外向き法線ベクトルからくる向きを入れるのである ($(-1)^n (-dx_n) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$)。

このとき、上で述べたことから、 $\det(J_{\partial M}) > 0$ となるので、 ∂M に向きが入ることになる。□

Remark 1.4.5. M が向き付け可能なら ∂M も向き付け可能であることがわかるが、 ∂M の向きは、約束事として、上の命題のように入れるのである。

Theorem 1.4.13 (ストークスの定理). M は n 次元の向きつき多様体で、境界を ∂M とする. $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ がコンパクト台をもつとする. また、 ∂M には、 M の向きから定まる向きを入れておく. このとき、

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

が成立する.

Proof. $\omega = \sum \phi_i \omega$ としておくと、

$$\int_M d\omega = \int_M d(\sum \phi_i) \omega = \sum \int_M d(\phi_i \omega)$$

となる. $\text{supp}(\phi_i) \subset U_i$ とする. U_i は M の内部にはいるか、または M の境界を含む. M の内部に入る場合は、前と同じであり、 $\int_M d(\phi_i \omega) = 0$ となる. 境界を含む場合は、局所座標が $x_n \geq 0$ における積分を行うことになるので、

$$\begin{aligned} \int_M d(\phi_i \omega) &= \int_{x_n \geq 0} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int [a_n]_0^\infty dx_1 \cdots dx_{n-1} \\ &= \int a_n(x_n = 0) (-dx_1 \cdots dx_{n-1}) \\ &= \int_{\partial M} a_n (-1)^{n+1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \\ &= \int_{\partial M} \phi_i \omega \end{aligned}$$

ここで、

$$\phi_i \omega = \sum (-1)^{i+1} a_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

としてあり、境界上では、

$$\phi_i \omega|_{\partial M} = (-1)^{n+1} a_n(x_n = 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

としている. よって、 $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ となる. □

ストークスの定理の応用として、古典的な結果である Brouwer の固定点定理を証明できる.

Theorem 1.4.14. B を単位円盤 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ とする. $F: B \rightarrow B$ を滑らかな写像とする. このとき F は B において固定点をもつ.

Proof. 固定点がないとする. つまり $F(x) \neq x$ ($\forall x \in B$). このとき各 $x \in B$ に対して, 線分 $\overline{F(x)x}$ を伸ばせば, $F(x) \neq x$ なので, ∂B と交わる. その交点を $f(x)$ とする. (伸ばし方は $F(x)$ から x へ伸ばすようにすれば, 一点がきまる). そこで, 滑らかな写像,

$$f: B \rightarrow \partial B$$

を得る. ここで, $x \in \partial B$ ならば, $f(x) = x$ となることに注意.

ω を S^{n-1} 上の零とならない $n-1$ -form で, 正規化して,

$$\int_{\partial B=S^{n-1}} \omega = 1$$

とする. このとき, f は S^{n-1} 上で恒等写像であるので,

$$1 = \int_{\partial B} \omega = \int_{\partial B} f^* \omega$$

が成立する. しかし, ストークスの定理から

$$\int_{\partial B} f^* \omega = \int_B d(f^* \omega) = \int_B f^*(d\omega) = 0$$

となる. ここで, 最後の等式は $d\omega$ は n -form なので S^{n-1} 上で零となるので. よって,

$$1 = \int_{\partial B} f^* \omega = 0$$

となり, 矛盾である. □

証明は省略するが次が成立する. 後で Hodge 理論を用いた証明 (系 2.4.16) を与えるが, もっと初等的な証明もたくさんある.

Theorem 1.4.15. M がコンパクト連結 n 次元向き付け可能多様体なら, $H^n(M) = \mathbb{R}$ となる.

1.5 写像度

上の定理から, 連結コンパクト向き付けられた n 次元多様体に対して, $H^n(M)$ は 1 次元である. そこで, ω_M で, M 上で積分したら 1 となるものを取り $[\omega_M]$ が $H^n(M) = \mathbb{R}$ の基底とできる. そこで, M, N を連結コンパクト向き付けられた n 次元多様体として, 滑らかな写像

$$F: M \rightarrow N$$

を考えたとき,

$$F^*[\omega_N] = d[\omega_M]$$

となる実数 d が存在する.

Definition 1.5.1. d を $F : M \rightarrow N$ の写像度 (mapping degree) といい, $\deg F$ とかく.

直感的には, F により M が N に何回巻きつくかを表している.

Example 1.5.1. $F_k : S^1 \ni z \mapsto z^k \in S^1$ とすると, $\deg F_k = k$ となる.

Theorem 1.5.2. F の写像度に対して, 次が成立.

- $\deg F$ は整数であり, $\forall \omega \in \Omega^n(N)$ に対して,

$$\int_M F^* \omega = \deg F \int_N \omega$$

が成立.

- a を F の正則値とすれば,

$$\deg F = \sum_{x \in F^{-1}(a)} \operatorname{sgn}(\det DF_x)$$

となる.

Definition 1.5.2. $F : M \rightarrow N$ の正則値 (regular value) とは, $a \in N$ で, $\forall x \in F^{-1}(a)$ に対して, 微分 DF_x が全射となること.

Remark 1.5.1. $\dim M = \dim N$ のときは, DF_x が可逆ということになる. また, 陰関数定理から, $F^{-1}(a)$ は 0 次元多様体であるので, 点の集合からなる. また, M がコンパクトであるので, その閉集合である $F^{-1}(a)$ もコンパクト集合であり, $F^{-1}(a)$ は有限個の点の集合からなる.

Remark 1.5.2. サードの定理から, N 内のほとんどすべての点は正則値である.

Remark 1.5.3. $\operatorname{sgn}(\det DF_x)$ の定義は次のようにする. $DF_x : T_x M \rightarrow T_x N$ は線形写像

$$\Lambda^n({}^t(DF_x)) : \Lambda T_x^* M \rightarrow \Lambda T_x^* N$$

を導く. M, N の向きを与える, 零とならない n -form を ω_M, ω_N とすれば,

$$\Lambda^n({}^t(DF_x))(\omega_M) = \lambda \omega_N$$

となる, この λ の符号が $\text{sgn}(\det DF_x)$ である. 次のように定義してもよい. 向きを与える M, N の局所座標系を $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) = F(x)$ としたとき, $\det DF_x = \det(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})$ として, その符号を $\text{sgn}(\det DF_x)$ とすればよい.

Proof. まず, $\forall \omega \in \Omega^n(N)$ に対して,

$$\int_M F^* \omega = \deg F \int_N \omega$$

となることを見てみる. 前定理 ($H_{DR}^n = \mathbb{R}$) から $[\omega] = c[\omega_N]$ となる c が存在する. 積分すれば,

$$\int_N \omega = c \int_N \omega_N = c$$

となる. さらに, 写像度の定義から,

$$F^*[\omega] = cF^*[\omega_N] = c \deg F[\omega_M]$$

となり, これを積分すれば,

$$\int_M F^* \omega = c \deg F \int_M \omega_M = c \deg F = \deg F \int_N \omega$$

となる.

さて, remark で述べたように, $F^{-1}(a)$ は有限個 (m 個) の点からなる. DF_x は $\forall x \in F^{-1}(a)$ で同型であるので, 陰関数定理より, $a \in N$ の近傍 U に対して, $F^{-1}(U)$ は m 個の開集合 U_i からなり,

$$F_i : U_i \rightarrow U$$

は微分同相である. σ を U 内に support をもつ n -form として, $\int_N \sigma = 1$ となるとする. $F^* \sigma$ は U_i 内に support をもち, 積分の変数変換の公式から,

$$\int_{U_i} F^* \sigma = \text{sgn}(DF_{x_i}) \int_U \sigma = \text{sgn}(DF_{x_i})$$

となる. ここで, $\text{sgn}(DF_{x_i})$ がついてるのは, M, N の向きを考慮しているからである.

よって, これらをあわせれば,

$$\int_M F^* \sigma = \sum_{i=1}^m \text{sgn}(DF_{x_i})$$

となる. そこで,

$$\deg F = \deg F \int_N \sigma = \int_M F^* \sigma = \sum_{i=1}^m \text{sgn}(DF_{x_i})$$

となる. 特に, $\deg F$ は整数である. □

Corollary 1.5.3. F が全射でないなら, $\deg F = 0$ となる.

Proof. $x \in N \setminus F(M)$ のまわりの座標近傍をとり, n -form で $F(M)$ と交わらず, 積分したら 1 となる bump n -form ω をとれば, $F^*\omega = 0$ であるが,

$$0 = \int_M F^*\omega = \deg F \int_N \omega = \deg F$$

となる. □

1.6 写像度の応用

1.6.1 代数学の基本定理

Example 1.6.1. M を $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とする. これはコンパクト向き付け可能 2 次元連結多様体である. 実際, S^2 と同一視できる. $F: M \rightarrow M$ を

$$F(z) = \begin{cases} z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_k & z \neq \infty \\ \infty & z = \infty \end{cases}$$

とする. これは滑らかな写像である. 問題は $z = \infty$ のところであるが, $w = \frac{1}{z}$ として考えると,

$$w \mapsto \frac{w^k}{1 + a_1 w + \cdots + a_k w^k}$$

と書けるので, $z = \infty$ でも滑らかである.

さて, F の写像度を計算してみよう.

$$F_t(z) = z^k + t(a_1 z^{k-1} + \cdots + a_k)$$

を考えると, すべての t について, F_t は滑らかであり, ホモトピーを与えるので, $F_t^* = F_0^* = F_1^*$ on $H^*(M)$ となる. そして,

$$\deg F = \deg F_0$$

となる. そこで, $F_0(z) = z^k$ の写像度を計算する.

$|z| = r$, $z = x + iy$ として, $f(r)$ は $\mathbb{C}$ において, コンパクト台をもつとして, 2-form

$$f(r)dx \wedge dy = f(r)rdr \wedge d\theta$$

を考える. このとき, $z^k = r^k e^{ik\theta}$ であるので,

$$\det F_0 \int_{\mathbb{R}^2} f(r)rdr \wedge d\theta = \int_{\mathbb{R}^2} F_0^*(f(r)rdr \wedge d\theta) = \int_{\mathbb{R}^2} f(r^k)r^k d(r^k) \wedge k d\theta = k \int_{\mathbb{R}^2} f(\tau)\tau d\tau \wedge d\theta$$

最後の等式は $\tau = r^k$ という変数変換を行った。よって、

$$k = \deg F_0 = \deg F$$

となる。

特に、 $k > 0$ なら、 F は全射となる。よって、どこかの点で $F = 0$ となる。よって、

$$z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_k = 0$$

には解が存在することがわかる。（これを繰り返せば、代数学の基本定理を得る）

1.6.2 まつわり数

Example 1.6.2. $\mathbb{R}^3$ 内に、互いに交わらない二つの結び目 K, L があるとする。この二つの絡み具合を表すまつわり数 (*linking number*) を与えてみる。 K, L が $f, g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ と滑らかな写像で表されたとする。このとき、

$$F : S^1 \times S^1 \ni (s, t) \mapsto g(t) - f(s) \in \mathbb{R}^3$$

として、 $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow S^2$ を $\pi(x) = x/\|x\|$ とすれば、

$$\bar{F} = \pi \circ F : S^1 \times S^1 \rightarrow S^2 \quad \bar{F}(s, t) = \frac{g(t) - f(s)}{\|g(t) - f(s)\|}$$

とする。この $\bar{F}$ の写像度を K, L の *linking number* とよび、

$$Lk(K, L) = \deg \bar{F}$$

と表す。まず、写像度はホモトピー不変であるので、 K, L のパラメータのとり方によらない。 S^2 の標準的な 2-form としては、

$$\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$$

を S^2 へ制限したものを ω_0 とすれば、 $\int_{S^2} \omega_0 = 4\pi$ となることがわかる。よって、

$$Lk(K, L) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^1 \times S^1} \bar{F}^* \omega_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{S^1 \times S^1} F^* \omega$$

となる。また、

$$F^* dx = f_x(s)ds + g_x(t)dt$$

などから、

$$LK(K, L) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 ds \int_0^1 \frac{1}{\|g(t) - f(s)\|^3} \det(g(t) - f(s), f'(s), g'(t)) dt$$

となる。

まつわり数の位相幾何的な定義は、たとえば深谷「電磁気学とベクトル解析」などを参照。

1.6.3 ガウス写像

Example 1.6.3. $M \subset \mathbb{R}^3$ をコンパクト向き付け可能な曲面として, n を単位法線ベクトルとする. このとき, ガウス写像を

$$F : M \rightarrow S^2, \quad F(x) = n(x)$$

とする. ω を S^2 の標準的な 2-form とすれば,

$$\deg F \int_{S^2} \omega = \deg F \times 4\pi = \int_M F^* \omega = \int_M K \sqrt{EG - F^2} du dv = 2\pi \chi(M)$$

となる. よって,

$$\deg F = \frac{1}{2} \chi(M)$$

となる. 例えば, $F : S^2 \rightarrow S^2$ の場合には, $n(x) = x = \text{Id}(x)$ となるので, 次数は 1 であるので, $\chi(S^2) = 2$ を得る.

Proof. 法線ベクトルの微分を考えると,

$$\begin{aligned} n_u &= \frac{FM - GL}{EG - F^2} p_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} p_v \\ n_v &= \frac{FN - GM}{EG - F^2} p_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} p_v \end{aligned}$$

となる. これは $n_u = Ap_u + Bp_v$ と書けるので,

$$-L = p_u \cdot n_u = EA + FB, \quad -M = p_v \cdot n_u = FA + GB$$

を解けばよい. そこで,

$$n_u \times n_v = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} p_u \times p_v = K(p_u \times p_v) = K \sqrt{EG - F^2} \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} = K \sqrt{EG - F^2} n$$

となるので,

$$n \cdot (n_u \times n_v) = K \sqrt{EG - F^2}$$

を得る.

さて, $n(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ とすれば,

$$n_u \times n_v = (y_u z_v - y_v z_u, -(x_u z_v - x_v z_u), x_u y_v - x_v y_u)$$

であり,

$$n \cdot n_u \times n_v = x(y_u z_v - y_v z_u) - y(x_u z_v - x_v z_u) + z(x_u y_v - x_v y_u)$$

また, S^2 の座標で ω は

$$\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$$

を S^2 へ制限したものである (積分すれば 4π). これを引き戻すと,

$$F^*x dy \wedge dz = x(y_u du + y_v dv) \wedge (z_u du + z_v dv) = x(y_u z_v - y_v z_u) du \wedge dv$$

などから,

$$\begin{aligned} F^*\omega &= \{x(y_u z_v - y_v z_u) - y(x_u z_v - x_v z_u) + z(x_u y_v - x_v y_u)\} du \wedge dv \\ &= n \cdot (n_u \times n_v) du \wedge dv = K \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv \end{aligned}$$

となる. □

1.6.4 ガウス写像 (n 次元の場合)

上で述べたガウスボンネの定理の一般化を述べよう. 体積要素やリーマン計量については次の章を参照).

Example 1.6.4. M を境界がないコンパクト m 次元多様体で $\mathbb{R}^{m+1}$ に埋め込まれているとする. $\mathbb{R}^{m+1}$ の標準内積から M にリーマン計量を入れることができる.. また, 法線ベクトルを考えるとガウス写像

$$\nu: M \rightarrow S^m$$

を得る. これは次のように定義するとよい. $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$ は二つの連結成分をもち, 一つは有界で, 一つは非有界である. これらの成分は,

$$f_x: M \rightarrow S^m \quad f_x(p) = \frac{p - x}{|p - x|}$$

を考えて, その写像度を $\deg(f_x)$ を mod 2 したもので判別できる. 有界な成分の方は $\deg(f_x) = 1$ となるものであり, その閉包を W とすれば, W は m 次元のコンパクト連結多様体であり, $\mathbb{R}^{m+1}$ から自然に向きが入る. また, 境界が M となる. そこで, $\nu(p)$ を $p \in M$ に対して $T_p M$ に直交する単位法ベクトルで W の外側にあるものとする. また, 計量の入れ方から $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ の体積要素は

$$(vol_M)_p(v_1, \dots, v_m) = \det(\nu(p), v_1, \dots, v_m)$$

となる.

Proof. $\iota : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ を埋め込みとする．右辺および左辺は $v_1, \dots, v_m$ について交代双線形形式であるので， m -form を定める．そこで， $v_1, \dots, v_m$ を M の正規直交基底として証明すれば十分である．左辺は，

$$(\text{vol}_M)(v_1, \dots, v_m) = 1$$

となる．一方，右辺を考えると $v_i = \iota_* v_i$ 及び ν はユークリッド内積に関して正規直交基底である．また，向きも一致しているので，

$$\det(\nu, \iota_* v_1, \dots, \iota_* v_m) = 1$$

となる．よって，証明された． □

また， $\nu = (\nu^1, \dots, \nu^{m+1})$ として，余因子展開すれば， $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ の体積要素は

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} \nu^i(x) dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^{m+1}$$

となることがわかる．

Proof. $\iota_* v_i = h_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ とすれば，

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} \nu^1 & h_1^1 & \dots & h_m^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu^{m+1} & h_1^{m+1} & \dots & h_m^{m+1} \end{pmatrix} \\ &= \nu^1 \det \begin{pmatrix} h_1^2 & \dots & h_m^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^{m+1} & \dots & h_m^{m+1} \end{pmatrix} + \dots + (-1)^{i-1} \nu^i \det \begin{pmatrix} h_1^1 & \dots & h_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^{j-1} & \dots & h_m^{j-1} \\ h_1^{j+1} & \dots & h_m^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^{m+1} & \dots & h_m^{m+1} \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

一方，

$$(dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^{m+1})(v_1, \dots, v_m) = \det \begin{pmatrix} h_1^1 & \dots & h_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^{j-1} & \dots & h_m^{j-1} \\ h_1^{j+1} & \dots & h_m^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^{m+1} & \dots & h_m^{m+1} \end{pmatrix}$$

□

特に, $f^{-1}(c)$ で与えられる超曲面については,

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} \frac{f_i}{\|\sum f_i\|} dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^{m+1}, \quad f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ガウス写像の微分は

$$d\nu_p : T_p M \rightarrow T_{\nu(p)} S^m$$

であるが, $T_{\nu(p)} S^m = \nu(p)^\perp = T_p M$ であるので, これは

$$d\nu_p : T_p M \rightarrow T_p M$$

と見なせる. そこで, 超曲面 M のガウス曲率を

$$K(p) := \det(d\nu(p) : T_p M \rightarrow T_p M)$$

として定める. $\dim M$ が偶数なら $\nu \rightarrow -\nu$ に変えても (内側法線に変えても) $K(p)$ は変化しない. 一方 $\dim M$ が奇数なら符号が変わる. また, $\dim M = 2$ の場合には, ガウス曲率は曲面 M の計量の上に依存するのであった (ガウスの驚異の定理).

Remark 1.6.1. $T_{\nu(p)} S^m = T_p M$ であることから, $\nu^* T S^m \cong T M$ であることがわかる.

Theorem 1.6.5 (Gauss-Bonnet). 上の状況で次が成立する.

$$\int_M K \text{vol}_M = \frac{\text{Vol}(S^m)}{2} \chi(M)$$

ここで, m が偶数なら

$$\frac{\text{Vol}(S^{2n})}{2} = \frac{2^{2n} n!}{(2n)!} \pi^n$$

である. また m が奇数なら $\chi(M) = 0$ であった.

Proof. 球面のガウス写像は恒等写像である. よって, S^m の体積要素は

$$\text{vol}_{S^m} = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^{m+1}$$

となる. または,

$$(\text{vol}_{S^m})_x(w_1, \dots, w_m) = \det(x, w_1, \dots, w_m), \quad w_1, \dots, w_m \in T_x S^m = x^\perp$$

そこで, これをガウス写像で引き戻すと

$$\begin{aligned} (\nu^* \text{vol}_{S^m})_p(v_1, \dots, v_m) &= (\text{vol}_{S^m})_{\nu(p)}(d\nu_p(v_1), \dots, d\nu_p(v_m)) \\ &= \det(\nu(p), d\nu_p(v_1), \dots, d\nu_p(v_m)) \\ &= K(p) \det(\nu(p), v_1, \dots, v_m) \\ &= K(p) (\text{vol}_M)_p(v_1, \dots, v_m) \end{aligned}$$

ここで, $d\nu_p$ の $v_1, \dots, v_m$ に対する表現行列を A とすれば,

$$(\nu(p), d\nu_p v_1, \dots, d\nu_p v_m) = (\nu(p), v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\det(\nu(p), d\nu_p(v_1), \dots, d\nu_p(v_m)) = \det A \det(\nu(p), v_1, \dots, v_m)$$

であることを用いた.

よって,

$$Kvol_M = \nu^*(vol_{S^m})$$

となるので,

$$\int_M Kvol_M = \deg(\nu) \int_{S^m} vol_{S^m} = \frac{\chi(M)}{2} Vol(S^m)$$

を得る. ここで,

$$\deg(\nu) = \chi(M)/2$$

を証明する必要があるが, 以下で述べることは, オイラー類などの知識が必要である.

$$\nu^*TS^m \cong TM$$

であった. このオイラー類を考えると,

$$e(TM) = e(\nu^*TS^m) = \nu^*e(TS^m)$$

となる. これを M 上で積分すれば,

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \int_M e(TM) = \int_M \nu^*e(TS^m) = \deg(\nu) \int_{S^m} e(TS^m) \\ &= \deg(\nu) \chi(S^m) = \begin{cases} 2 \deg(\nu) & m = 2k \\ 0 & m = 2k + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

M が奇数次元の場合には, $\nu' = -\nu$ として考えると,

$$-Kvol_M = K'vol_M = \nu'(vol_{S^m}), \quad \nu'^*TS^m \cong \nu^*TS^m$$

に注意すれば, $\int_M Kvol_M = 0$ が分かる. □

第 2 章

リーマン多様体と Laplace-Beltrami 作用素

2.1 リーマン計量

曲面論において第一基本形式というものがでてきた。そして、曲面の 2 点の長さを測ったり、ある点の接ベクトルらの長さや角度を測るものであった。これを多様体へ一般化したものがリーマン計量である。

簡単にいえば、多様体の各点の接空間に内積をいれるので、そうすれば接ベクトルの長さや角度を測ることができるし、2 点の長さも測ることができるであろう。（接ベクトル空間は単なるベクトル空間であり、ユークリッド空間のように内積が入っているわけではない）

そこで、まずベクトル空間の正定値内積を思い出す。

Definition 2.1.1. V を n 次元ベクトル空間とする。このとき、 g が内積とは、

$$g : V \times V \ni (X, Y) \mapsto g(X, Y) \in \mathbb{R}$$

が双線形写像であり、対称性 $g(X, Y) = g(Y, X)$ が成立するとき内積とよぶ。さらに正定値とは $g(X, X) \geq 0$ であり、等号成立は $X = 0$ の時に限る。

V の適当に基底 $e_1, \dots, e_n$ をとった場合には、

$$g(e_i, e_j) = g_{ij} = g_{ji}$$

とすれば、

$$g(X, Y) = \sum_{i,j} g_{ij} x^i y^j \quad X = \sum x^i e_i. \quad Y = \sum y^i e_i$$

と二次形式として書くことができる．そして，対称行列 g_{ij} が定まるが，正定値とは，対称行列の固有値がすべて正のことである．また，正定値という概念は基底の取り方に依存しないことに注意．

M の各点の接ベクトル空間に正定値内積 g_x をいれて，滑らかにつながるようにすれば，リーマン計量となる．

Definition 2.1.2. M 上のリーマン計量とは， $g_x : T_x(M) \times T_x(M) \rightarrow \mathbb{R}$ が正定値内積 ($\forall x \in M$) であり， $x \rightarrow g_x$ が滑らかとなるものである．つまり，局所座標系をとったとき， $\frac{\partial}{\partial x_i}$ を局所的なベクトル場とみたとき，

$$g_{ij}(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \in C^\infty(U)$$

が滑らかな関数となることである．

別の言い方をすれば， $T^*(M) \otimes T^*(M)$ の切断であり，各点で，対称かつ正定値なものである．

また，リーマン計量が入った多様体をリーマン多様体とよび， (M, g) と書く．

また，局所座標を使えば，

$$g = \sum g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j$$

と書ける．そして，対称であることから $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ であり， $(g_{ij}(x))$ は正定値となる． dx_j が双対基底であるので，

$$\sum g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j : T_x(M) \times T_x(M) \ni \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \mapsto g_{ij}(x) \in \mathbb{R}$$

という意味である．

また，テンソルの記号を省いて，

$$g = \sum g_{ij}(x) dx_i dx_j$$

と書くこともある．

Proposition 2.1.1. 多様体はリーマン計量を一つはもつことができる．そして豊富にもつこともできる．

Proof. M を局所座標系で被覆しておく，さらに，その被覆に付随した 1 の分割を $\{\phi_k\}$ としておく．各 $U_{\alpha(k)}$ 上で，計量を

$$g_{\alpha(k)} = \sum_{i=1}^n dx_i dx_i$$

として入れておく．これは $U_{\alpha(k)}$ 上のリーマン計量になっている．そして，

$$g = \sum \phi_k g_{\alpha(k)}$$

とする．このとき ϕ_k は局所有限であるので，well-defined で $T^*M \otimes T^*M$ の切断で対称ある．そして， $\phi_i \geq 0$ であるので，各点で正定値または零である．しかし，各点で少なくとも一つは $\phi_i > 0$ となるので，和は正定値となる． $\square$

このように，多様体はたくさんリーマン計量を持つことができるが，現実的応用を考えると，それなりによい計量をとるべきである．

Proposition 2.1.2. $\iota: M \rightarrow N$ を埋め込みとする．つまり M は N の部分多様体とする．また， (N, g) はリーマン多様体とする．このとき，

$$(\iota^*g)_x(X, Y) = g_{\iota(x)}(D\iota_x(X), D\iota_x(Y))$$

とすれば， ι^*g は M 上のリーマン計量となる．(*induced metric* という)．

Proof. $D\iota_x: T_x(M) \rightarrow T_{\iota(x)}(N)$ は単射であることを使えばよい． $\square$

Example 2.1.3. $\mathbb{R}^n$ 上のユークリッド計量は， $\mathbb{R}^n$ の自然な座標を $x_1, \dots, x_n$ とすれば，

$$g = \sum dx_i dx_i$$

と書ける．つまり，

$$g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$$

となる．

Example 2.1.4. $\iota: S^n \subset \mathbb{R}^n$ は埋め込みである．そこで，ユークリッド計量 g から S^n に ι^*g というリーマン計量を入れることができる．これは球面上の標準的な計量とよばれるものである．単に，球面に接する接ベクトルを $\mathbb{R}^{m+1}$ のベクトルとみなしてユークリッド内積で測ったものである．

Example 2.1.5. $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S を考える． $p: D \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ としておく．このとき，

$$p^*(g_{\mathbb{R}^3})$$

が第一基本形式である．

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

とすれば，

$$p^*dx = dx(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

などとなり,

$$\begin{aligned}
 & p^*(dx dx + dy dy + dz dz) \\
 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv\right)^2 \\
 &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) du^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) du dv + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) dv^2 \\
 &= p_u \cdot p_u du^2 + 2p_u \cdot p_v du dv + p_v \cdot p_v dv^2
 \end{aligned}$$

となる. これが第一基本形式となる.

曲面論では, 第一基本形式のみから定まる, 曲面の曲がり具合を表すガウス曲率というものがある. そして, 外側にどのように埋め込まれているかは関係ない. これがガウスの脅威の定理であった. 一般のリーマン多様体に対しても, 曲がり具合を表す曲率という概念が定義される. 曲率については, リーマン幾何の参考書を見よ. このノートでは詳しく述べない.

2.2 star 作用素

正定値内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の入った n 次元ベクトル空間 V を考える. V の内積を $\Lambda^*(V)$ へ拡張し, $\Lambda^p(V)$ 上の内積を定義する.

Definition 2.2.1. 異なる次数の外積テンソルに対する内積はゼロとする.

$$\langle \phi, \psi \rangle = 0, \quad \phi \in \Lambda^p(V), \quad \psi \in \Lambda^q(V) = 0, \quad p \neq q$$

また, $\phi, \psi \in \Lambda^p(V)$ を

$$\phi = w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_p, \quad \psi = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p$$

に対して

$$\langle \phi, \psi \rangle = \det \langle w_i, v_j \rangle$$

として, あとは線型で $\Lambda^p(V)$ へ拡張すればよい.

Proposition 2.2.1. V の正規直交基底を $e_1, \dots, e_n$ とすれば, $\Lambda^*(V)$ の基底である

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$$

は正規直交基底となる.

Exercise 2.2.2. 上の命題を証明せよ.

さらに, V に向きが入っているとする. つまり, $\Lambda^n(V) \setminus \{0\}$ は二つの連結成分に分かれるが, どちらか決めておく. つまり, $e_1, \dots, e_n$ を正規直交基底とすれば,

$$e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n, \quad -e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

のいずれかを選ぶのである. また V に向きが入っていたとき, $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ が向きに一致するような基底を正の基底という. また, $e_1, \dots, e_n$ が正の正規直交基底としたとき,

$$vol = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

を体積要素という. これは正の正規直交基底の取り方によらないことがわかる.

Definition 2.2.2. V に向きが入っているとして, $e_1, \dots, e_n$ を任意の正規直交基底とする. このとき,

$$\begin{aligned} *(1) &= \pm e_1 \wedge \dots \wedge e_n, & *(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) &= \pm 1 \\ *(e_1 \wedge \dots \wedge e_p) &= \pm e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

とする. ただし, $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ が向きと同じ連結成分に入るならば, $+$ をとり, そうでないならば $-$ として定義する. これを線型で拡張することにより,

$$*: \Lambda^*(V) \rightarrow \Lambda^*(V)$$

が定義される. これを **star 作用素** という.

例えば, $e_1, \dots, e_n$ が正の正規直交基底とする. このとき $e_2, e_3, e_4, e_1, e_5, \dots, e_n$ は負の正規直交基底であるので,

$$*(e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) = -e_1 \wedge e_5 \wedge \dots \wedge e_n$$

となるわけである. このようにして, $\Lambda^*(V)$ の正規直交基底に対して, star 作用素が定義できるので, これを線型で拡張するのである.

Exercise 2.2.3. $*$ は正規直交基底の取り方によらないことを示せ.

Proposition 2.2.4. 定義より, $*: \Lambda^p(V) \rightarrow \Lambda^{n-p}(V)$ であるが,

$$*^2 = (-1)^{p(n-p)} \quad (\Lambda^p(V) \xrightarrow{*} \Lambda^{n-p}(V) \xrightarrow{*} \Lambda^p(V))$$

さらに, $\phi, \psi \in \Lambda^p(V)$ に対して,

$$\langle \phi, \psi \rangle = *(\phi \wedge * \psi) = *(\psi \wedge * \phi), \quad \phi \wedge * \psi = \langle \phi, \psi \rangle vol$$

これらのことをリーマン多様体 M 上で考えよう．まず，リーマン計量により $T_x(M)$ に正定値内積が入っていた．そこで，

$$T_x(M) \ni v \mapsto \phi_v \in T_x^*(M), \quad \phi_v(w) = g(v, w)_x$$

とすれば，正定値であることから $T_x(M) \cong T_x^*(M)$ となる．つまり接束 $T(M)$ と余接束 $T^*(M)$ はリーマン計量により同一視できる．

局所座標 $(U, x_1, \dots, x_n)$ に対して， $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ は局所フレーム（つまり U 上の各点で基底となる）であるが，これをグラムシュミットの直交化法により，局所正規直交フレーム場（**local orthonormal frame field**） $e_1, \dots, e_n$ を得ることができる．さらに，その双対 1-form を

$$\omega_1, \dots, \omega_n, \quad \omega_i(e_j) = \delta_{ij}$$

とする．これを U 上の local orthonormal coframe field という．

Definition 2.2.3. M に向きが入っているとす．このとき， $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ が向きに一致するときには，この frame を oriented という．

各点の近傍で，oriented orthonormal coframe をとり， n -form $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ を考えると，overlap したところで一致する．つまり，大域的な各点でゼロとならない n -form ω を得る．これを M の体積要素といい vol と書く．また，

$$vol(M) = \int vol$$

をリーマン多様体 M の体積とよぶ．

Example 2.2.5. M の正の局所座標を $x_1, \dots, x_n$ として， $G = \det(g_{ij})$ とする．このとき

$$vol = \sqrt{G} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Proof. $\omega_1, \dots, \omega_n$ を向きつき orthonormal coframe field とする．

$$vol = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n, \quad vol\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \det\left(\omega_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)$$

ここで，

$$\det\left(\omega_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \det\left(g(e_i, \frac{\partial}{\partial x_j})\right),$$

$e_i = \sum p_i^l \frac{\partial}{\partial x_l}$ とすれば，

$$\delta_{ij} = g(e_i, e_j) = g_{kl} p_i^l p_j^k, \quad 1 = G \det(p_i^l)^2,$$

であるので, $\det(p_i^l) = 1/\sqrt{G}$ を得る. よって,

$$\det(g(e_i, \frac{\partial}{\partial x_j})) = \det(\sum_k g_{kj} p_i^k) = G \det(p_i^k) = \sqrt{G}$$

□

さて, 次に star 作用素を定義しよう. M を向きつきリーマン多様体とする. 任意の点 $x \in M$ に対して, $T_x^*(M)$ に内積が入っているので, 各点で $*$: $\Lambda_x^p(M) \rightarrow \Lambda_x^{n-p}(M)$ を定義できる. よって, **star 作用素**

$$*: \Omega^p(M) \ni \phi \mapsto *\phi \in \Omega^{n-p}(M)$$

を得る. もちろん,

$$** = (-1)^{p(n-p)} \quad \text{on } \Omega^p(M)$$

となる.

体積要素を使って, $\Omega^p(M)$ 上の内積を定義できる.

Definition 2.2.4. $\phi, \psi \in \Omega^p(M)$ に対して,

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_M \phi \wedge *\psi = \int_M \langle \phi, \psi \rangle_x \text{vol}$$

さらに, ノルムを次で定義:

$$\|\phi\| = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle}$$

各点での内積が対称かつ正定値であることから次が成立する.

Proposition 2.2.6. M をコンパクト (かつ境界がない) 向きつきリーマン多様体とする. このとき, 上で定義した内積は対称かつ正定値である. また,

$$|\langle \phi, \psi \rangle| \leq \|\phi\| \|\psi\|$$

が成立する.

Proof. $f \geq 0$ として, $\int_M f \text{vol} = 0$ とする. 積分の定義を思い出せば

$$\sum \int_{U_i} \rho_i f \text{vol} = 0$$

となり, $\int_{U_i} \rho_i f dx_1 \cdots dx_n = 0$ である. よって, $f(x) = 0$ ($\forall x \in U_i$) となり, $f \equiv 0$. また, 正定値であることから,

$$0 \leq \|\phi + t\psi\|^2 = \|\phi\|^2 + t\langle \phi, \psi \rangle + t^2\|\psi\|^2$$

となり, 判別式を考えると $|\langle \phi, \psi \rangle| \leq \|\phi\| \|\psi\|$ が言える. □

もちろん, $\Omega^p(M)$ と $\Omega^q(M)$ ($p \neq q$) の内積はゼロとしている (つまり直交している).

2.3 ラプラス作用素

$\mathbb{R}^n$ 上のラプラス作用素とは

$$\Delta = - \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

として定義された。幾何学ではマイナス倍することに注意。 $\mathbb{R}^n$ の別の座標（たとえば極座標）をとったとして、 $\Delta = - \sum \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$ となるわけではない（外微分 d は局所座標によらずに定義できる概念であった）。実は、ラプラシアンはユークリッド計量の情報を用いているのである。 div, rot も外微分で書くことはできたのだが、これもベクトル場と 1-form の同一視を使っているので、実は計量を用いている（ $div, grad$ は n 次元リーマン多様体で定義できるが rot は 3 次元リーマン多様体で定義できる）。

Exercise 2.3.1. $div, grad, rot$ をリーマン多様体上で定義せよ。

さて、ラプラシアンを多様体上に拡張したい。さらに、微分形式上のラプラシアンにまで拡張することができる。

Definition 2.3.1. M を向きつきリーマン多様体とする。外微分とは

$$d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

という写像であった。さらに余微分（co-differential）を

$$\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d* : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$$

と定義する。 $\Omega^0(M)$ 上ではゼロとする。

さらに、Laplace-Beltrami 作用素を各 p -form 上で

$$\Delta = \delta d + d\delta : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M)$$

とする。 $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ 上では、

$$\Delta = \delta d$$

となる。

Exercise 2.3.2. ユークリッド空間上で、 p -form

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad I = (i_1, \dots, i_p)$$

に対して,

$$\Delta\alpha = (-1) \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \alpha_I}{\partial x_i^2} \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad I = (i_1, \dots, i_p)$$

となることをしめせ.

Exercise 2.3.3. $*\Delta = \Delta*$ を示せ.

以下では M は断らない限り, コンパクトで境界がない向きつきリーマン多様体とする

Proposition 2.3.4. δ は $\Omega^*(M)$ 上で d の随伴である. つまり,

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle$$

Proof. 線形性および $\Omega^p(M)$ の直交性から, α を $p-1$ -form, β を p -form として証明すればよい.

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge *\beta) &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{p-1} \alpha \wedge d*\beta \\ &= d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *\delta\beta \end{aligned}$$

これを両辺積分する. ストークスの定理から,

$$0 = \int_M d(\alpha \wedge *\beta) = \int_M (d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *\delta\beta) = \langle d\alpha, \beta \rangle - \langle \alpha, \delta\beta \rangle$$

□

Corollary 2.3.5. Δ は自己随伴 (*self-adjoint*):

$$\langle \Delta\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle$$

Exercise 2.3.6. 系を証明せよ.

Proposition 2.3.7. $\Delta\alpha = 0$ は「 $d\alpha = 0$ かつ $\delta\alpha = 0$ 」と同値

Proof. $d\alpha = 0, \delta\alpha = 0$ なら $\Delta\alpha = 0$ は明らか, 逆を示す.

$$\langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = \langle d\delta\alpha, \alpha \rangle + \langle \delta d\alpha, \alpha \rangle = \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle$$

なので, $\Delta\alpha = 0$ なら $\delta\alpha = 0, d\alpha = 0$.

□

Corollary 2.3.8. M が連結コンパクト向きつきリーマン多様体上の調和関数 ($\Delta f = 0$) なら, $df = 0$ となり, f は定数関数である.

我々の目的の一つは、リーマン多様体上で $\Delta\omega = \alpha$ という2階偏微分方程式を解くことである。このことを述べる前に、練習として線形代数で同様のことを考えてみる。

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

を線形写像とする。また、 $\mathbb{R}^n$ には通常の内積を入れておく。このとき、 $\alpha \in \mathbb{R}^k$ に対して、方程式

$$L\omega = \alpha$$

を考える。解をもつための必要十分条件は $\alpha \in (\ker L^*)^\perp$ である。そして、直交直和

$$\mathbb{R}^k = L(\mathbb{R}^n) \oplus \ker L^*$$

が成立する。

Proof. $\langle L\omega, \beta \rangle = \langle \omega, L^*\beta \rangle$ であるので、 $\ker L^* = (\text{Image}(L))^\perp$ を得る。よって、 $\text{Image}(L) = (\ker L^*)^\perp$ となる。□

コンパクトリーマン多様体上のラプラシアン Δ を考えたとき、適当なヒルベルト空間 H^{k+2}, H^k が存在して、

$$\Delta: H^{k+2} \rightarrow H^k$$

と有界線形作用素へと拡張できる（実際、後で見るが H^k は k 次ソボレフ空間）。そして、 $\text{Image}(\Delta)^\perp = \ker \Delta^*$ となることが同様に証明できる。有界線形作用素の核である $\ker \Delta$ は閉部分空間であるが、 $\text{Image}(\Delta)$ は閉部分空間であるかどうか分からない。そこで、有限次元での類似を行うなら、 $\overline{\text{Image}(\Delta)} = (\ker \Delta^*)^\perp$ となることに注意する必要がある、

$$H^k = (\ker \Delta^*) \oplus \overline{\text{Image}(\Delta)}$$

となる。そして、 $\alpha \in H^k$ に対して、 $\Delta\omega = \alpha$ が解をもつかどうかを考えることになるが、 $\alpha \in (\ker \Delta^*)^\perp$ が解をもつための必要十分条件であることは、明らかでない。 $\text{Image}(\Delta)$ が閉部分空間であることを証明しなくてはならないし、共役作用素 $\Delta^*: H^k \rightarrow H^{k+2}$ も明確ではない。さらに、我々としてがは $\Delta\omega = \alpha$ の滑らかな解を求めたい。このように、いろいろと不都合なことが起こるのであるが、最終的にはこれらの困難は解消できる。実際、 $\ker \Delta^* = \ker \Delta$ は有限次元であり滑らかな切断からなる空間で H^k の部分空間とみなせる。また、上の状況で $\text{Image}(\Delta)$ は閉部分空間であることがわかり、

$$H^k = \Delta(H^{k+2}) \oplus \ker \Delta$$

が成立する。また、 α が滑らかなら ω も滑らかであることが証明できる。

2.4 Hodge 理論概論

Δ^* を Δ の adjoint 作用素とする．これは Δ であるのだが，一般の場合に適用するときに混乱するのであえてこのように書いておく．

$\alpha \in \Omega^p(M)$ に対して，微分方程式 $\Delta\omega = \alpha$ を解くことが目的である．また，解をもつための α に対する必要十分条件は何か？

次の微分方程式の解 ω が存在するための必要十分条件を見つきたい．

$$\Delta\omega = \alpha$$

まず，解が存在したとする． ω が微分方程式の解とすると

$$\langle \Delta\omega, \phi \rangle = \langle \alpha, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \Omega^p(M)$$

を満たす．よって，

$$\langle \omega, \Delta^*\phi \rangle = \langle \alpha, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \Omega^p(M)$$

この解 ω に対して， $\Omega^p(M)$ 上の有界線型汎関数

$$l : \Omega^p(M) \ni \beta \mapsto \langle \omega, \beta \rangle \in \mathbb{R}$$

を考えると ($|l(\beta)| \leq \|\omega\| \|\beta\|$ であるので有界)，

$$l(\Delta^*\phi) = \langle \alpha, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \Omega^p(M)$$

を満たす．このような見方は関数解析のテクニックを利用するにはとても役立つ表示である．

Definition 2.4.1. $\Delta\omega = \alpha$ の弱解とは，有界線型汎関数 $l : \Omega^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ で，

$$l(\Delta^*\phi) = \langle \alpha, \phi \rangle, \quad \phi \in \Omega^p(M)$$

を満たすもの．

そこで， $\omega \in \Omega^p(M)$ が $\Delta\omega = \alpha$ の解とすれば，弱解は $l(\beta) = \langle \omega, \beta \rangle$ により定まる．逆が成立することを示す必要がある．つまり弱解 l に対して，滑らかな p -form ω を使って $l(\beta) = \langle \omega, \beta \rangle$ と書けることを示す．これがわかれば，

$$\langle \Delta\omega, \beta \rangle = \langle \omega, \Delta^*\beta \rangle = l(\Delta^*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \quad \forall \beta \in \Omega^p(M)$$

となり， $\Delta\omega = \alpha$ を得る．実は，次の定理のように弱解に対して真の解が存在する．ただし，弱解の定義から $\Delta^*\alpha = 0$ のとき， $l(\Delta^*\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ となるので，この場合は弱

解 l 自体が存在しない．実際，あとで見るように α が H^p に直交していることが必要である．このように，次の定理は弱解（条件をみたす有界線形作用素）が存在したら，解が存在するという定理である．

Theorem 2.4.1 (regularity theorem). $\alpha \in \Omega^p(M)$, l を $\Delta\omega = \alpha$ の弱解とする．このとき， $\omega \in \Omega^p(M)$ で，

$$l(\beta) = \langle \omega, \beta \rangle, \quad \beta \in \Omega^p(M)$$

を満たすものが存在する．よって，微分方程式 $\Delta\omega = \alpha$ の解 $\omega \in \Omega^p(M)$ が存在する．

Hodge 分解を証明するために，次も必要とする．これは本質的には楕円型微分作用素に対する楕円型評価（基本不等式）とレリッヒの補題からしたがう．

Theorem 2.4.2. $\{\alpha_n\}$ を滑らかな p -form の列で， $\|\alpha_n\| \leq C$ および $\|\Delta\alpha_n\| \leq C$ と有界であるとする．このとき， $\{\alpha_n\}$ は $\Omega^p(M)$ 内でコーシー部分列をもつ．

Remark 2.4.1. $\Omega^p(M)$ 内で収束することは言えない．実際，反例を作ることができる．これから述べる証明なども， $\Omega^p(M)$ はヒルベルト空間でない（つまり完備性が言えてない），注意が必要である．

この2定理の証明は第4章で行う．定理を仮定して，先に進もう．

Definition 2.4.2.

$$H^p = \{\omega \in \Omega^p(M) \mid \Delta\omega = 0\}$$

とする．この元を調和 p -form (harmonic p -form) という．

Theorem 2.4.3 (Hodge 分解定理). 各 $0 \leq p \leq n$ に対して， H^p は有限次元であり， $\Omega^p(M)$ に対して次の分解が成立する．また各成分は直交する．

$$\begin{aligned} \Omega^p(M) &= \Delta(\Omega^p(M)) \oplus H^p \\ &= d\delta(\Omega^p(M)) \oplus \delta d(\Omega^p(M)) \oplus H^p \\ &= d(\Omega^{p-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{p+1}(M)) \oplus H^p \end{aligned}$$

よって，方程式 $\Delta\omega = \alpha$ が解 $\omega \in \Omega^p(M)$ を持つための必要十分条件は， α が H^p に直交することである．

Proof. (Step 1): H^p が無限次元とすると， H^p はある無限の正規直交列 $\{\alpha_n\}$ を含むことになる（グラムシュミットで作っていけばよい）．よって，この α_n は， $\|\alpha_n\| = 1$ および $\|\Delta\alpha_n\| = 0$ となる．よって，定理 2.4.2 より $\{\alpha_n\}$ の部分列はコーシー列となるが，

$$\|\alpha_{n_k} - \alpha_{n_l}\|^2 = \langle \alpha_{n_k}, \alpha_{n_k} \rangle - 2\langle \alpha_{n_k}, \alpha_{n_l} \rangle + \langle \alpha_{n_l}, \alpha_{n_l} \rangle = 1 + 1 = 2$$

となり矛盾である．よって H^p は有限次元である．

(Step 2) : 第一番目の等式を示せば、他の等式は従う．実際、 $d\delta(\Omega^p) = d(\Omega^{p-1})$ を示そう． $d\delta(\Omega^p) \subset d\Omega^{p-1}$ は明らか．逆は、 $\phi \in \Omega^{p-1}$ に対して、 $\phi = d\delta\phi_1 + \delta d\phi_2 + \phi_3$ となり、 $d\phi = d\delta(d\phi_2)$ ($\Delta\phi_3 = 0 \iff d\phi_3 = 0, \delta\phi_3 = 0$) となるので、 $d\phi \in d\delta\Omega^p$ となる．

そこで、第一番目の等式を示そう． $\omega_1, \dots, \omega_l$ を H^p の正規直交基底とする． $\alpha \in \Omega^p(M)$ はユニークに、

$$\alpha = \beta + \sum_{i=1}^l \langle \alpha, \omega_i \rangle \omega_i$$

となる．ここで、 $\beta \in (H^p)^\perp$ である．つまり、

$$\Omega^p(M) = (H^p)^\perp \oplus H^p, \quad (H^p)^\perp = \{\phi \in \Omega^p(M) \mid \langle \phi, \omega \rangle = 0 \quad \forall \omega \in H^p\}$$

となる．実際、 $\beta = \alpha - \sum_{i=1}^l \langle \alpha, \omega_i \rangle \omega_i$ とすれば、 $\langle \beta, \omega_i \rangle = 0$ である．

(Step 3) : そこで、 $(H^p)^\perp = \Delta(\Omega^p)$ を証明すればよい．まず、 $\Delta(\Omega^p) \subset (H^p)^\perp$ を示す． $\omega \in \Omega^p$ 、 $\alpha \in H^p$ とすれば、

$$\langle \Delta\omega, \alpha \rangle = \langle \omega, \Delta\alpha \rangle = 0$$

となるので、 $\Delta(\Omega^p) \subset (H^p)^\perp$ ．

(Step 4) : $(H^p)^\perp \subset \Delta(\Omega^p)$ を示す．

(Step 4-1) : まず、次を示す：ある定数 $c > 0$ で

$$\|\beta\| \leq c\|\Delta\beta\|, \quad \forall \beta \in (H^p)^\perp \quad (*)$$

となるものが存在する．これが不成立であるとする、任意の (大きな) $c > 0$ に対して、 $\|\beta_c\| > c\|\Delta\beta_c\|$ となる $\beta_c \in (H^p)^\perp$ が存在する． β_c は正規化して $\|\beta_c\| = 1$ とできる．よって、列 $\beta_j \in (H^p)^\perp$ で $\|\beta_j\| = 1$ かつ $\|\Delta\beta_j\| \rightarrow 0$ となるものが存在する．定理 2.4.2 から、部分列でコーシー列となるものが存在する．それも $\{\beta_j\}$ と書いておく．そこで、 $\langle \beta_j, \psi \rangle$ という実数列はコーシー列であるので収束する．つまり、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \beta_j, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \Omega^p(M)$$

が存在．線形汎関数 $l_0 : \Omega^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$l_0(\psi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \beta_j, \psi \rangle, \quad \psi \in \Omega^p(M)$$

として定義する． l_0 は有界である．実際、

$$|\langle \beta_j, \psi \rangle| \leq \|\beta_j\| \|\psi\| \leq \|\psi\|$$

から従う。また,

$$l_0(\Delta\phi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \beta_j, \Delta\phi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \Delta\beta_j, \phi \rangle = 0$$

となる。つまり, l_0 は方程式 $\Delta\beta = 0$ の弱解である。定理 2.4.1 により, $\beta \in \Omega^p(M)$ で, $l_0(\psi) = \langle \beta, \psi \rangle$ となるものが存在する。つまり, $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \beta_j, \phi \rangle = \langle \beta, \phi \rangle$ ($\forall \phi \in \Omega^p(M)$) となる。さらに, β_j がコーシー列であることを使えば, $\beta_j \rightarrow \beta$ となる ($\Omega^p(M)$ の距離空間としての収束)。 (Fact: コーシー列 $\{\beta_j\}$ が β に弱収束しているなら, β に収束する。後述)。特に, $\|\beta\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|\beta_j\| = 1$ となる。

さて, $\beta_j \in (H^p)^\perp$ であるので,

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \beta_j, \omega \rangle = \langle \beta, \omega \rangle \quad \forall \omega \in H^p$$

となるので, $\beta \in (H^p)^\perp$ となる。しかし, 定理 2.4.1 により $\Delta\beta = 0$ であるので, $\beta \in H^p$ となる。よって $\beta = 0$ となり $\|\beta\| = 1$ に矛盾する。

(Step 4-2): $(H^p)^\perp \subset \Delta\Omega^p$ を示そう。 $\alpha \in (H^p)^\perp$ とする。このとき $\Delta\Omega^p(M)$ 上の線型汎関数を

$$l(\Delta\phi) = \langle \alpha, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \Omega^p(M)$$

により定義する。これは well-defined である。実際, $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2$ とすれば, $\phi_1 - \phi_2 \in H^p$ であるので, $\langle \alpha, \phi_1 - \phi_2 \rangle = 0$ である。また, l は有界線形作用素である: $\phi \in \Omega^p(M)$ として, $\psi = \phi - H(\phi) \in (H^p)^\perp$ とする。ここで,

$$H : \Omega^p(M) \rightarrow H^p$$

は調和部分への直交射影作用素。つまり, $H(\alpha)$ は α に調和部分 $H(\alpha) = \sum \langle \alpha, \omega_i \rangle \omega_i$ とする。このとき, 先ほどの不等式 (*) から,

$$\begin{aligned} |l(\Delta\phi)| &= |l(\Delta\psi)| = |\langle \alpha, \psi \rangle| \leq \|\alpha\| \|\psi\| \\ &\leq c \|\alpha\| \|\Delta\psi\| = c \|\alpha\| \|\Delta\phi\| \end{aligned}$$

となるので, l が有界であることが示せた。そこで, **Hahn-Banach** の定理から, l は $\Omega^p(M)$ 上の線型汎関数へ拡張できる。さらに, $l(\Delta\phi) = \langle \alpha, \phi \rangle$ となるので, l は $\Delta\omega = \alpha$ の弱解であり, 定理 2.4.1 により $\omega \in \Omega^p(M)$ で $\Delta\omega = \alpha$ となる真の解が存在する。よって, $\alpha \in \Delta\Omega^p(M)$ となる。

証明を見ればわかるように, 解をもつための必要十分条件を得る。 $\Delta\omega = \alpha$ の弱解 $l : \Omega^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在すれば, 真の解となるのであった。そこで, 弱解が存在すればよいのであるが, 証明を見ればわかるように, 弱解 l が存在したら well-defined となるために, $\alpha \in (H^p)^\perp$ が必要である。逆に, $\alpha \in (H^p)^\perp$ とすれば, $(H^p)^\perp = \Delta\Omega^p(M)$ であることから, $\Delta\beta = \alpha$ となる $\beta \in \Omega^p(M)$ が存在し,

$$l(\beta) = \langle \omega, \beta \rangle$$

となり、弱解が定義できる。以上から、 $\Delta\omega = \alpha$ が解をもつための必要十分条件は $\alpha \in (H^p)^\perp$ となることである。□

ここで、Hahn-Banach の定理をあるバージョンを述べておく。Hahn-Banach の定理のより一般的な形は解析の本を参照してほしい。証明には Zorn の補題を用いる。

Theorem 2.4.4 (Hahn-Banach). X をノルム空間として、 $L \subset X$ を部分空間。この L 上で定義された有界な線型汎関数 f_0 は、 X 上の有界線型汎関数へ拡張することが可能である。

また、上の証明で弱収束の概念がでてきているが、それについて簡単にまとめておこう。

Definition 2.4.3. H を内積空間とする（完備性は仮定しない）。 $(x_n) \subset H$, $x \in H$ が

$$(x_n, y) \rightarrow (x, y) \quad \forall y \in H$$

を満たすとき、 (x_n) は x に弱収束するという。

Lemma 2.4.5. 収束する列は弱収束する。また有限次元ベクトル空間の場合には、弱収束と収束は同値である。

Proof. $x_n \rightarrow x$ とする。このとき、

$$|(x_n, y) - (x, y)| \leq \|x_n - x\| \|y\| \rightarrow 0$$

となるので弱収束する。□

無限次元ヒルベルト空間の場合には、弱収束しても収束しない場合がある。

Example 2.4.6. H を無限次元ヒルベルト空間として、 (e_n) を正規直交系とする。これはゼロに弱収束するが収束しない。実際、次の Bessel の不等式を利用すればよい（Bessel の不等式の証明は関数解析の本をみよ）。

Lemma 2.4.7 (Bessel の不等式). (e_n) を正規直交系とする。このとき $u \in H$ に対して、

$$\sum_n |(u, e_n)|^2 \leq \|u\|^2$$

が成立する。

ベッセルの不等式から、任意の $u \in H$ に対して、

$$\sum |(u, e_n)|^2 \leq \|u\|^2$$

が成立するので、数列 $|(u, e_n)|^2$ は 0 へ収束する。よって、 $(u, e_n) \rightarrow 0$ ($\forall u$) となるので、 e_n は 0 へ弱収束する。しかし、 $\|e_n\| = 1$ であるので、0 へ収束すると矛盾する。このように e_n は 0 へ弱収束するが収束しない。

Proposition 2.4.8. (x_n) が x に弱収束するとき、

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

が成立（特に、ノルムは収束に関しては連続であるが、弱収束に関しては下半連続）。また、 x_n が x へ収束するための必要十分条件は x へ弱収束し、 $\|x\| = \lim \|x_n\|$ となることである。

Remark 2.4.2. この命題も H の完備性は仮定しなくても成立する。

Proof. (x_n) が x へ弱収束するとする。

$$0 \leq (x_n - x, x_n - x) = (x_n, x_n) - 2(x_n, x) + (x, x)$$

となる。ここで $n \rightarrow \infty$ とすれば、 $(x_n, x) \rightarrow (x, x)$ であるので、

$$0 \leq \liminf \|x_n\| - \|x\|$$

となる。ここで $\|x_n\|$ は収束するとは限らないので $\liminf$ を使っている。

さらに、 $\|x\| = \lim \|x_n\|$ とすれば、上の式で、 $\lim(x_n - x, x_n - x) = 0$ を得る、よって、 $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ であるので、 x_n は x へ収束する。収束するなら、弱収束かつ $\|x\| = \lim \|x_n\|$ は明らか。□

次の系は、ヒルベルト空間の場合には完備性からコーシー列は収束してしまうことになるので、明らかな命題であるが、完備性を仮定しなくても弱収束を条件に加えれば収束することを述べている。つまり、われわれが扱っている $\Omega^p(M)$ でも成立する。

Corollary 2.4.9. 内積空間において、 (x_n) が x に収束するための必要十分条件は (x_n) がコーシー列であり、 x に弱収束していること。

Proof. コーシー列は有界列である。そこで $\|x_n\|$ も有界列であるので、実数の完備性から収束する部分列 $\|x_{n_j}\|$ が取れる。 $\lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j}\| = \alpha$ としておく。さて、 x_{n_j} はコーシー列であるので、 j, k を十分大とすれば、

$$0 \leq \|x_{n_j} - x_{n_k}\|^2 = \|x_{n_j}\|^2 + \|x_{n_k}\|^2 - 2\langle x_{n_j}, x_{n_k} \rangle \leq \epsilon$$

k を固定して $j \rightarrow \infty$ とすれば、 x_{n_j} は x に弱収束しているので、

$$0 \leq \alpha^2 + \|x_{n_k}\|^2 - 2\langle x, x_{n_k} \rangle \leq \epsilon$$

となり, $k \rightarrow \infty$ とすれば,

$$0 \leq 2\alpha^2 - 2\|x\| \leq \epsilon$$

となる. ϵ は任意であるので, $\alpha = \|x\|$ を得る. よって, $\lim \|x_{n_j}\| = \|x\|$ が成立する. 前命題から, x_n は収束する部分列が取れることになる. コーシー列で, 収束する部分列がとれるなら, もとの列は収束するのであった. 実際, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|x - x_{n_j}\| &\leq \epsilon \quad (\because \text{部分列 } x_{n_j} \text{ は収束}) \\ \|x_{n_j} - x_j\| &\leq \epsilon \quad (\because x_n \text{ はコーシー列}) \end{aligned}$$

より,

$$\|x - x_j\| \leq \|x - x_{n_j}\| + \|x_{n_j} - x_j\| \leq 2\epsilon$$

である. 以上から $\lim x_j = x$ を得る. □

さて, 本論に戻ろう.

次に, $H_{DR}^p(M) \cong H^p$ であることを証明する. まずは Δ の調和部分を除いた逆作用素である Green 作用素を定義する.

Definition 2.4.4 (Green 作用素). Green 作用素 $G : \Omega^p(M) \rightarrow (H^p)^\perp$ を $\alpha \in \Omega^p(M)$ に対して $\Delta\omega = \alpha - H(\alpha)$ の解 ω で $\omega \in (H^p)^\perp$ となる ω を考えて $G(\alpha) = \omega$ として定義する.

Proposition 2.4.10. G は有界自己随伴線型作用素であり, 有界点列をコーシー部分列をもつ点列に写像する (実際, $\Omega^p(M)$ を完備化して $G : L^2 \rightarrow L^2$ とみなすと, コンパクト作用素である).

Proof. 写像となることを見てみる. $\Delta\omega = \alpha - H(\alpha)$ の解は一つとは限らないが, $\omega \in (H^p)^\perp$ となることからただ一つに定まる. 別の解を ω' とすれば,

$$\Delta(\omega - \omega') = 0$$

であるので, $\omega - \omega' \in H^p$ であるが, $\omega, \omega' \in (H^p)^\perp$ に入ることから $\omega - \omega' = 0$ となる. 特に, $\alpha \in H^p$ のとき, $\alpha - H(\alpha) = \alpha - \alpha = 0$ であるので, $\alpha \in H^p \Rightarrow G(\alpha) = 0$ であることに注意する.

また, $G(\Delta\alpha)$ を考えてみる. $\Delta\alpha \in \Delta\Omega^p = (H^p)^\perp$ であるので, 調和部分はない. よって, $\Delta\alpha - H(\Delta\alpha) = \Delta\alpha$ である. よって, $\Delta\omega = \Delta\alpha = \Delta(\alpha - H(\alpha))$ の解として $\omega = \alpha - H(\alpha) \in (H^p)^\perp$ を得る. つまり,

$$\boxed{G(\Delta\alpha) = \alpha - H(\alpha)}$$

である。特に, $\alpha \in (H^p)^\perp$ ならば, $G\Delta(\alpha) = \alpha$ となる。また,

$$\Delta G(\alpha) = \Delta\omega = \alpha - H(\alpha)$$

となる。特に, $\alpha \in (H^p)^\perp$ ならば, $\Delta G(\alpha) = \alpha$ となる。このように, Green 作用素はラプラシアン of the inverse modulo harmonic part のようなものである。

線形であることは easy.

有界であることは, (*) を使えば, 定数 c が存在して,

$$\|\omega\| \leq c\|\Delta\omega\| = c\|\alpha - H(\alpha)\| \leq 2c\|\alpha\|$$

であるので。また, 自己随伴作用素であることを見てみる。まず, G^* は

$$\langle G(\alpha), \phi \rangle = \langle \alpha, G^*(\phi) \rangle$$

を満たすものとして定義され, $G^* = G$ を見ればよいのであるが, $\Omega^p(M)$ は完備化してないので, リースの表現定理が使えず G^* の存在が言えない。一つの証明方法は, 完備化して G^* を作り, $G^* = G$ をみればよい。ここでは, まだ完備化してないので,

$$\langle G(\alpha), \phi \rangle = \langle \alpha, G(\phi) \rangle, \quad \alpha, \phi \in \Omega^p(M)$$

となることを示すことにする。 $\Delta G(\alpha) = \alpha - H(\alpha)$, $G\Delta(\alpha) = \alpha - H(\alpha)$ を利用すれば,

$$\begin{aligned} \langle G(\alpha), \phi \rangle &= \langle G(\alpha), \Delta G(\phi) + H(\phi) \rangle = \langle G(\alpha), \Delta G(\phi) \rangle = \langle \Delta G(\alpha), G(\phi) \rangle \\ &= \langle \alpha - H(\alpha), G(\phi) \rangle = \langle \alpha, G(\phi) \rangle \end{aligned}$$

よって, G は自己随伴作用素である。

α_n を有界点列で $\|\alpha_n\| \leq K$ とする。このとき, $\|\omega_n\| \leq 2cK$ であり, $\|\Delta\omega_n\| = \|\alpha_n - H(\alpha_n)\| \leq 2K$ となる。定理 2.4.2 により, $\{\omega_n\}$ はコーシー部分列をもつ。 $\square$

Proposition 2.4.11. G は d, δ, Δ と可換である。より一般には, G は「 Δ と可換な線型作用素」と可換。

Proof. $T\Delta = \Delta T$ と仮定する。 $T : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^q(M)$ (p, q は適当に)。 $\pi_p : \Omega^p(M) \rightarrow (H^p)^\perp$ を射影とする。 G の定義から,

$$G = (\Delta|_{(H^p)^\perp})^{-1} \circ \pi_p$$

となる。 $T\Delta = \Delta T$ により, $T(H^p) \subset H^q$ である。また, $(H^p)^\perp = \Delta(\Omega^p(M))$ により, $T((H^p)^\perp) \subset (H^q)^\perp$ となる。

よって, $\phi = \phi - H(\phi) + H(\phi)$ に対して,

$$T \circ \pi_p(\phi) = T(\phi - H(\phi)) = \pi_q\{T(\phi - H(\phi)) + T(H(\phi))\} = \pi_q \circ T(\phi)$$

となるので,

$$T \circ \pi_p = \pi_q \circ T$$

となる. また, $(H^p)^\perp$ 上で,

$$T \circ \Delta|_{(H^p)^\perp} = \Delta|_{(H^q)^\perp} \circ T$$

である. 実際, $\Delta \circ T = T \circ \Delta$ より, $\phi \in (H^p)^\perp$ に対して, $T\phi \in (H^q)^\perp$ であるので,

$$(\Delta \circ T)(\phi) = (\Delta|_{(H^q)^\perp} \circ T)(\phi), \quad (T \circ \Delta)(\phi) = (T \circ \Delta|_{(H^p)^\perp})(\phi)$$

となり, $T \circ \Delta|_{(H^p)^\perp} = \Delta|_{(H^q)^\perp} \circ T$. よって, $(H^p)^\perp$ 上で,

$$T \circ (\Delta|_{(H^p)^\perp})^{-1} = (\Delta|_{(H^q)^\perp})^{-1} \circ T$$

となる. そこで,

$$T \circ (\Delta|_{(H^p)^\perp})^{-1} \circ \pi_p = (\Delta|_{(H^q)^\perp})^{-1} \circ T \circ \pi_p = (\Delta|_{(H^q)^\perp})^{-1} \circ \pi_q \circ T =$$

となり, G と T は可換である. □

Theorem 2.4.12. コンパクト向きつきリーマン多様体上で, 各ドラムコホモロジー類 $[\phi] \in H_{DR}^q(M)$ は, 調和形式を代表元にもち, それはただ一つである. つまり, $\psi \in [\phi]$ で $\Delta\psi = 0$ となるものがただ一つ存在する. 特に,

$$H_{DR}^p(M) \cong H^p$$

さらに, ドラムの定理を使えば, $H^p \cong H^p(M, \mathbb{R})$ となる. 特に, $\dim H^p = b_p(M)$ となる.

このように, 多様体上で解析を行うと, 解空間は多様体の位相構造 (場合によっては微分位相構造) に依存するのである. これが多様体上で解析を行う楽しさの一つである.

Proof. $\alpha \in \Omega^p(M)$ とする. ホッジ分解定理および Green 作用素の定義 ($(H^p)^\perp$ 上で Δ の逆写像) から

$$\alpha = \Delta G\alpha + H\alpha = d\delta G\alpha + \delta dG\alpha + H\alpha$$

となる. さらに G は d と可換であるので,

$$\alpha = d\delta G\alpha + \delta Gd\alpha + H\alpha$$

よって, α が閉形式なら,

$$\alpha = d\delta G\alpha + H\alpha$$

となり $[\alpha] = [H\alpha]$ を得る. また, $\alpha \in H^p$ なら, $[\alpha] \in H_{DR}^p(M)$ である.

$$\alpha_1 - \alpha_2 + d\beta = 0$$
☐

1

M を n 次元のコンパクト向きつき微分可能多様体とする. このとき双線型形式

$$H_{DR}^p(M) \times H_{DR}^{n-p}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$([\phi], [\psi]) \mapsto \int_M \phi \wedge \psi$$
$$H_{DB}^{n-p}(M) \cong (H_{DB}^p(M))^* \cong H_p(M, \mathbb{R})$$
$$([\phi], [*\phi]) = \int_M \phi \wedge *\phi = \|\phi\|^2 \neq 0$$

7

Remark 2.4.3. M が連結なら, $H_{DR}^n(M) \cong H_0(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ となるが, 一点 $\{p\} \in H_0(M, \mathbb{R})$ に対して, p のまわりの bump n -form で $\int \omega = 1$ となるものが対応する $H_{DR}^n(M)$ の元である, 一方, 定数関数 $f \equiv 1$ には, $[M] \in H_n(M, \mathbb{R})$ が対応する. 一般には, $N \subset M$ という p 次元部分多様体に対して, $[\alpha] \in H_{DR}^{n-p}(M)$ という微分形式 α でつぎを満たすものが存在することを意味する.

$$\int_N i^* \psi = \int_M \alpha \wedge \psi, \quad \psi \in Z^p(M) \subset \Omega^p(M)$$

Remark 2.4.4. M が $n = 2m = 4k$ 次元の多様体とすれば, $H_{DR}^m \times H_{DR}^m \rightarrow \mathbb{R}$ は対称形式になる. そこで正の固有値から負の固有値を引いた数である符号数を定義できる. これは M の位相不変量 $\sigma(M)$ で符号数と呼ばれるものである. star 作用素は $*^2 = 1$ となり, $H^m = H_+^m \oplus H_-^m$ に分解できるが, $\sigma(M) = \dim H_+^m - \dim H_-^m$ となる. この符号数は, M のポントリャーギン類の積分で表すことができる.

Corollary 2.4.16. M がコンパクト向きづけ可能な連結微分多様体とすると, $H_{DR}^n(M) \cong \mathbb{R}$.

第 3 章

必要な解析学

我々が証明すべきことは定理 2.4.1, 2.4.2 である. これを証明するために必要な解析の準備をする. すべて $\mathbb{R}^n$ 上の周期関数に対するものである. つまり, トーラス上での解析学を行っていると考えてよい.

3.1 記号

mutli-index の記号を導入する.

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}$$

に対して,

$$|\alpha| := \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

とし, $\alpha_i \geq 0$ のとき,

$$[\alpha] := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

とする. また α, η を整数の n 個の列として,

$$\eta^\alpha := \eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}, \quad 0^0 = 1$$

とする.

$\mathbb{R}^n$ 上の標準座標を $x_1, \dots, x_n$ としたとき,

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

とする. そして α -th 微分作用素 D^α を.

$$D^\alpha := \left(\frac{1}{i} \right)^{[\alpha]} \frac{\partial^{[\alpha]} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad i = \sqrt{-1}$$

$\mathcal{P}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{C}^m$ 値 C^∞ 関数で各変数に対して周期 2π となるものからなる複素ベクトル空間とする.

$$\mathcal{P} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) \mid f(x_1 + 2k_1\pi, \dots, x_n + 2k_n\pi) = f(x_1, \dots, x_n), \\ \forall k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n\}$$

複素ベクトル $\gamma, \beta \in \mathbb{C}^m$ のエルミート内積とノルムを

$$\gamma \cdot \beta := \gamma_1 \overline{\beta_1} + \dots + \gamma_m \overline{\beta_m}, \quad |\gamma| := \sqrt{\gamma \cdot \gamma}$$

とする. 同様に, $\psi, \phi \in \mathcal{P}$ に対して, エルミート積を

$$\phi(x) \cdot \psi(x) = \phi_1(x) \cdot \overline{\psi_1(x)} + \dots + \phi_m(x) \cdot \overline{\psi_m(x)}$$

として, $|\phi| = \sqrt{\phi \cdot \phi}$ とする (これは実数値関数である). さらに, $\phi \in \mathcal{P}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ で周期的とすれば, $\phi f \in \mathcal{P}$ である. ここで,

$$\phi f = (\phi_1 f, \dots, \phi_m f)$$

である.

$Q \subset \mathbb{R}^n$ を次の開 cube とする:

$$Q = \{p \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_i(p) < 2\pi, i = 1, \dots, n\}$$

Definition 3.1.1. $\psi, \phi \in \mathcal{P}$ に対して, L^2 ノルムと L^2 内積を

$$\|\psi\| = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\int_Q \psi \cdot \psi dx \right)^{1/2}, \quad \langle \psi, \phi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \psi \cdot \phi dx$$

とする. さらに, 一様ノルムを

$$\|\phi\|_\infty = \sup_{x \in Q} |\phi(x)|$$

3.2 フーリエ級数

$\phi \in \mathcal{P}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{Z}^n$ にたいして, ξ -th フーリエ係数を

$$\phi_\xi := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \phi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \quad x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n \quad (3.1)$$

まず, フーリエ級数 $\sum_\xi \phi_\xi e^{ix \cdot \xi}$ が一様収束することを証明する.

$k \in \mathbb{Z}_{>0}$ として, (3.1) を部分積分する. 周期を考えると,

$$\begin{aligned} \int_Q \phi e^{-ix \cdot \xi} dx &= \int_Q \phi \left(i \frac{1}{\xi_1} e^{-ix \cdot \xi} \right)_{x_i} dx = \int_{Q'} dx' [\phi \left(i \frac{1}{\xi_1} e^{-ix \cdot \xi} \right)]_0^{2\pi} - i \frac{1}{\xi_1} \int_Q \phi_{x_i} e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= -i \frac{1}{\xi_1} \int_Q \phi_{x_i} e^{-ix \cdot \xi} dx \end{aligned}$$

これを $2nk$ 階微分まで繰り返すと, ϕ およびその $2nk$ 階までの微分に依存した c'_k が存在して,

$$|\phi_\xi| \leq \frac{c'_k}{(\prod \xi_i)^{2k}} \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$$

ここで, $\prod \xi_i$ はゼロでない ξ_i のすべての積を表す. よって, ある c_k が存在して,

$$|\phi_\xi| \leq \frac{c_k}{(1 + |\xi|^2)^k} \quad \forall \xi$$

(c_k は ϕ に依存しているが ξ には依存しない).

Proof. $\xi_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$) のとき,

$$(1 + |\xi|^2) = (1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \leq (n + 1)(\xi_1^2 \dots \xi_n^2)$$

であることがわかる. 実際,

$$\frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{\prod \xi_i^2} + \frac{\xi_1^2}{\prod \xi_i^2} + \dots + \frac{\xi_n^2}{\prod \xi_i^2} \right) \leq \frac{1}{n+1} (1 + 1 + \dots + 1) \leq 1$$

また, 上の不等式は $\xi_i = 0$ となった場合でも成立する (右辺は $\xi_i \neq 0$ となる ξ_i で積をとっている). よって,

$$\frac{1}{(\prod \xi_i^2)^k} \leq \frac{c}{(1 + |\xi|^2)^k}$$

よって,

$$|\phi_\xi| \leq \frac{c_k}{(1 + |\xi|^2)^k}$$

が成立する (これは $\xi \equiv 0$ の場合でも成立). □

さて, $\sum_\xi (1 + |\xi|^2)^{-k}$ の収束を考える.

Lemma 3.2.1. $\sum_\xi (1 + |\xi|^2)^{-k}$ は $k \geq [\frac{n}{2}] + 1$ のとき, 収束する.

Proof.

$$S_j = \{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \mid \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| = j \}$$

とする. S_j は高々 $2n(2j+1)^{n-1}$ 個の元からなる ($\xi_i = \pm j$ としてあとは $-j, \dots, j$ の $2j+1$ 個から選べばよいので, $(2j+1)^{n-1}$ 通りある. $i = 1, \dots, n$ で動かせば, 全部で $2n(2j+1)^{n-1}$ 個). $\xi \in S_j$ に対して, $|\xi|^2 \geq j^2$ であるので,

$$s_j = \sum_{\xi \in S_j} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^k} \leq \frac{2n(2j+1)^{n-1}}{(1+j^2)^k} \leq cj^{n-1-2k}, \quad j \geq 1$$

ここで c は n にのみ依存した定数である. 実際,

$$(2j+1)^{n-1}(1+j^2)^{-k}j^{-n+1+2k} = (2+1/j)^{n-1}(1/j^2+1)^{-k} \leq 3^{n-1}$$

よって,

$$\sum_{\xi} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^k} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} s_j \leq 1 + c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+2k-n}}$$

となる.. よって, $1+2k-n > 1$ ならば収束する. つまり, $k \geq [n/2] + 1$ ならば収束する. $\square$

そこで, $k \geq [\frac{n}{2}] + 1$ のとき

$$|\sum_{\xi} \phi_{\xi} e^{ix \cdot \xi}| \leq \sum_{\xi} |\phi_{\xi}| \leq \sum_{\xi} \frac{c_k}{(1+|\xi|^2)^k} < \infty$$

となる (ここで c_k は ϕ の $2nk$ 回までの微分に依存していて, ξ には依存していない定数であった. よって左辺は有界である). そこで, $k \geq [\frac{n}{2}] + 1$ となる k を固定しておく, このとき, $\sum_{\xi} \phi_{\xi} e^{ix \cdot \xi}$ は各点収束して, その関数を Φ とする. $S_N(x) = \sum_{|\xi| \leq N} \phi_{\xi} e^{ix \cdot \xi}$ とすれば,

$$\|\Phi - \sum_{|\xi| \leq N} \phi_{\xi} e^{ix \cdot \xi}\|_{\infty} = \sup_{|\xi| \geq N} |\sum \phi_{\xi} e^{ix \cdot \xi}| \rightarrow 0$$

であるので, $S_N(x)$ は, Φ へ一様収束する. また, 連続関数の列 $\{S_N(x)\}$ の一様収束先は連続関数であった.

Lemma 3.2.2. フーリエ級数

$$\sum \phi_{\xi} e^{ix \cdot \xi}$$

は連続関数 Φ に一様収束する.

次に, $\Phi = \phi$ となることを示そう. 三角多項式 (trigonometric polynomial) とは, $a_{\xi} e^{ix \cdot \xi}$ の形の関数の有限和のこととする.

Theorem 3.2.3 (Stone-Weierstass 近似定理). $\mathcal{P}$ 上で三角多項式は一様ノルムに関して稠密である.

Remark 3.2.1. Stone-Weierstass 近似定理のもとバージョンは $[a, b]$ 上の連続関数は多項式近似できるというもの。より、一般的なバージョンは、コンパクト空間 K 上の連続関数 $C(K, \mathbb{R})$ に対して A をゼロでない定数関数を含む部分代数とする。このとき A が $C(K, \mathbb{R})$ 内で（一様ノルムに関して）稠密であるための必要十分条件は「 A が点を分離すること。つまり、 $s \neq t \in K$ に対して、 $f(s) \neq f(t)$ となる $f \in A$ が存在」である。三角多項式はこの条件を満たす（それほど難しくはない。関数解析の本を参照）。

$\psi = \phi - \Phi$ として、 $t \in \mathcal{P}$ を三角多項式 (trigonometric polynomial) とする。 ϕ, Φ は同じフーリエ係数をもつので、

$$\int_Q \psi \cdot t = 0$$

である。 $\epsilon > 0$ に対して、Stone-Weierstarass 近似定理から、ある三角多項式 $t \in \mathcal{P}$ が存在して、

$$\|\psi - t\|_\infty < \epsilon$$

よって、

$$\|\psi\|^2 = \left| \int_Q \psi \cdot \psi \right| = \left| \int_Q \psi \cdot (\psi - t) \right| \leq \epsilon (2\pi)^n \|\psi\|$$

となる。よって $\|\psi\| \leq \epsilon$ を得る。 ϵ は任意であり ψ は連続関数であるので、 $\psi = 0$ となる。

Proposition 3.2.4. 周期的な C^∞ 関数 ϕ のフーリエ級数 $\sum \phi_\xi e^{ix \cdot \xi}$ は ϕ へ一様収束する。

$$\phi(x) = \sum_{\xi} \phi_\xi e^{ix \cdot \xi}$$

次に微分の評価をしておく。

部分積分を行えば、 $D^\alpha \phi$ のフーリエ係数は $\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n} \phi_\xi$ であることがわかる。よって、

$$D^\alpha \phi(x) = \sum_{\xi} \xi^\alpha \phi_\xi e^{ix \cdot \xi}$$

となる（右辺が左辺に一様収束するという意味で書いている。また、項別積分を使って示してもよい）。一方、 $\phi(x) = \sum_{\xi} \phi_\xi e^{ix \cdot \xi}$ から、パーセバル (Parseval) の等式

$$(2\pi)^n \|\phi\|^2 = \int_Q |\phi|^2 dx = (2\pi)^n \sum_{\xi} |\phi_\xi|^2 \quad (3.2)$$

を得る。同様にして、

$$\|D^\alpha \phi\|^2 = \sum_{\xi} \xi^{2\alpha} |\phi_\xi|^2$$

となる．そこで， $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して， t, n にのみ依存した正定数 c が存在して，

$$c \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t |\phi_{\xi}|^2 \leq \sum_{[\alpha]=0}^t \|D^{\alpha} \phi\|^2 = \sum_{[\alpha]=0}^t \sum_{\xi} \xi^{2\alpha} |\phi_{\xi}|^2 \leq \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t |\phi_{\xi}|^2 \quad (3.3)$$

Exercise 3.2.5. 上の不等式を証明せよ．

3.3 ソボレフ空間・ソボレフの補題・レリッヒの補題

3.3.1 ソボレフ空間

先ほどの不等式 (3.3) を考えると，微分可能な関数の一般化として，ソボレフ空間が定義できる．

Definition 3.3.1.

$$\mathcal{S} := \{u = \{u_{\xi}\}_{\xi} \mid u_{\xi} \in \mathbb{C}^m, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{Z}^n\}$$

$\mathcal{S}$ は $\xi \in \mathbb{Z}^n$ で添え字づけられた $\mathbb{C}^m$ 内の列からなる空間とする．また， $s \in \mathbb{Z}$ (正整数，ゼロ，負整数どれでもよい) に対して，ソボレフ空間 H_s を

$$H_s := \{u \in \mathcal{S} \mid \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s |u_{\xi}|^2 < \infty\}$$

とする．シュワルツの不等式 (下の補題) から

$$\left| \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^{(s+t)/2} u_{\xi} \cdot v_{\xi} \right|^2 \leq \left(\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s |u_{\xi}|^2 \right) \left(\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t |v_{\xi}|^2 \right)$$

となり，この右辺が有限なら左辺も有限である．そこで， H_s 上の内積

$$\langle u, v \rangle_s := \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s u_{\xi} \cdot v_{\xi}$$

を定義する．また，ノルムを次で定義

$$\|u\|_s := \langle u, u \rangle_s^{1/2}$$

Remark 3.3.1. $u \in H_t$, $v \in H_{t'}$ であり $(t+t')/2 = s$ なら $\langle u, v \rangle_s$ は定義できる．

Remark 3.3.2. 何故，上のようにしてソボレフノルムを定義するのであろうか？ $u \in C^1(T^n)$ の場合に， $D_{x_i} u$ に対応する級数は $\{\xi_i u_{\xi}\}_{\xi}$ となり， $\sum |\xi_i u_{\xi}|^2 < \infty$ となる．これがすべての $i = 1, \dots, n$ に対して成立するので， $\sum (1 + |\xi|^2)^2 |u_{\xi}|^2 < \infty$ が成立する．

このように、 $u \in C^1$ なら対応するフーリエ係数は $\{u_\xi\}_\xi \in H_1$ となる。つまり、ソボレフノルムで重み $(1 + |\xi|^2)^s$ をつけているのは、微分可能性を測定するためである。実際に、 $u \in H_s$ ならば、 $u \in C^s$ が成立するかということ、そこまでうまくいかないが、後で述べるソボレフの補題がその答えを与える。

Lemma 3.3.1 (シュワルツの不等式). $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2, \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$ ならば,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n \right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2}$$

Proof.

$$\left| \sum_{n=1}^k x_n \bar{y}_n \right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^k |x_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^k |y_n|^2}$$

において $k \rightarrow \infty$ とすればよい。 □

Proposition 3.3.2. H_s はヒルベルト空間である。

Proof. 完備性を証明する。(証明は l^2 空間の完備性と同じである。ちょっと重みがついただけ)。

$u(n)$ を H_s でのコーシー列とする。つまり、 $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon$ such that

$$\|u(n) - u(k)\|_s < \epsilon \quad \forall n, k > N_\epsilon$$

つまり,

$$\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s |u(n)_\xi - u(k)_\xi|^2 < \epsilon^2$$

よって、 ξ について帰納的に考えて行けば、 $\mathbb{C}$ の完備性から $u(n)_\xi \rightarrow u_\xi$ と各 $u(n)_\xi$ は収束する。そこで $u = \{u_\xi\}$ とする。

先ほどの式で、各自然数 M に対して

$$\sum_{|\xi| < M} (1 + |\xi|^2)^s |u(n)_\xi - u(k)_\xi|^2 < \epsilon^2$$

であるので、 $k \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\sum_{|\xi| < M} (1 + |\xi|^2)^s |u(n)_\xi - u_\xi|^2 < \epsilon^2$$

を得る。さらに $M \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\|u(n) - u\|_s^2 = \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s |u(n)_\xi - u_\xi|^2 < \epsilon^2$$

を得る．そこで，

$$\begin{aligned} \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s |u_{\xi}|^2 &\leq \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s |u_{\xi} - u(n)_{\xi} + u(n)_{\xi}|^2 \\ &\leq 2 \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s |u_{\xi} - u(n)_{\xi}|^2 + 2 \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s |u(n)_{\xi}|^2 \end{aligned}$$

となるので， $u \in H_s$ となる．そして， $\|u(n) - u\|_s \rightarrow 0$ となるので，コーシー列は収束する． $\square$

C^∞ の周期関数の空間 $\mathcal{P}$ を $\mathcal{S}$ の部分空間とみなす．

$$\mathcal{P} \ni \phi \mapsto \{\phi_{\xi}\} \in \mathcal{S}$$

また， $\mathcal{P}$ 上の微分 D^α は，この埋め込みにより $\mathcal{S}$ 上の微分として拡張しておく（いわゆる弱微分である）．

$$\mathcal{S} \ni u = \{u_{\xi}\} \mapsto D^\alpha u = \{(D^\alpha u)_{\xi}\} \in \mathcal{S}, \quad (D^\alpha u)_{\xi} = \xi^\alpha u_{\xi}$$

$\phi \in \mathcal{P}$ に対して，

$$|\phi_{\xi}| \leq \frac{c_k}{(1 + |\xi|^2)^k}$$

（ここで， c_k は ϕ の $2nk$ 階までの ϕ の微分に依存した定数）であったので，

$$\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s |\phi_{\xi}| \leq \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^{s-k} c_k$$

となるが， k を十分大きくとれば，これは収束するので， $\mathcal{P} \subset H_s (\forall s \in \mathbb{Z})$ となる．さらに，稠密な埋め込み ($\overline{\mathcal{P}} = H_s$) である．実際， $u = \{u_{\xi}\} \in H_s$ に対して， $u_N = \sum_{|\xi| \leq N} u_{\xi} e^{ix \cdot \xi}$ とすれば， $\mathcal{P}$ の元であり， $\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s |u_{\xi}|^2$ は有界であるので， $\|u_N - u\|_s \rightarrow 0 (N \rightarrow \infty)$ となる．このように $\{u_N\}_{N=1}^{infy} \subset \mathcal{P}$ という関数列で $u \in H_s$ は近似できるので $\overline{\mathcal{P}} = H_s$ ．つまり， $\mathcal{P}$ の H_s ノルムによる完備化したものが H_s である．

このように，ソボレフ空間の元は「一般化された関数」とみなすことができる．ソボレフが述べたことは， s が十分大きいなら， $u \in H_s$ に対するフーリエ級数は実際の微分可能（微分がどの程度できるかは s に依存）な関数となることである．

ソボレフ空間の性質を述べよう．まず，各整数 t （正でも負でもよい）に対して， $\mathcal{S}$ 上の変換 K^t を

$$K^t u = \{(K^t u)_{\xi}\}, \quad (K^t u)_{\xi} = (1 + |\xi|^2)^t u_{\xi}$$

により定めておく．

Theorem 3.3.3 (ソボレフ空間の性質).

1. $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. このとき, s と n に依存した定数 c, c' が存在して,

$$c\|\phi\|_s \leq \sum_{[\alpha]=0}^s \|D^\alpha \phi\| \leq c'\|\phi\|_s \quad \forall \phi \in \mathcal{P}$$

(特に, $s \geq 0$ のとき, H_s は s 階弱微分可能な (一般化された) 関数であり, そのノルムは $\sum_{[\alpha]=0}^s \|D^\alpha \phi\|$ と同値). さらに, $s = 0$ のとき,

$$\|\phi\| = \|\phi\|_0 \quad \forall \phi \in \mathcal{P}$$

(これは $H_0 \cong L^2(T^n)$ であることを意味する).

2. $t < s$ ($s, t \in \mathbb{Z}$) ならば, $\|u\|_t \leq \|u\|_s$ である. よって, $H_s \subset H_t$ となる. 任意の s についての H_s の和集合は $\mathcal{S}$ の部分集合となるが, それを $H_{-\infty}$ とかく.

$$H_{-\infty} := \cup_{s \in \mathbb{Z}} H_s$$

3. $\mathcal{P}$ は H_s で稠密 ($s \in \mathbb{Z}$).

4. K^t は H_s から H_{s-2t} の等長作用素であり, K^{-t} を逆作用素としてもつ. 実際,

$$\|u\|_s = \|K^t u\|_{s-2t} \quad (3.4)$$

となる. また, K^t は $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ となる. そして, $\phi \in \mathcal{P}$ かつ $t \geq 0$ のとき,

$$K^t \phi = \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^t \phi$$

また, 任意の $s, t \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\langle u, v \rangle_s = \langle u, K^t v \rangle_{s-t} = \langle K^t u, v \rangle_{s-t} \quad u, v \in H_s$$

5. シュワルツの不等式: $u \in H_{s+t}$, $v \in H_{s-t}$ なら,

$$|\langle u, v \rangle_s| \leq \|u\|_{s+t} \|v\|_{s-t}$$

6. $u \in H_{s+t}$ なら,

$$\|u\|_{s+t} = \sup_{v \in H_{s-t}, v \neq 0} \frac{|\langle u, v \rangle_s|}{\|v\|_{s-t}}$$

これより, 次のこともよく利用する. $u \in H_s$ に対して, $\|u\|_s = 0$ であるための必要十分条件は $\langle u, \phi \rangle_0 = 0$ ($\forall \phi \in \mathcal{P}$).

7. **Peter-Paul** 不等式 : $t' < t < t''$ かつ $\epsilon > 0$ に対して, $c(\epsilon) > 0$ で,

$$\|u\|_t^2 \leq \epsilon \|u\|_{t''}^2 + c(\epsilon) \|u\|_{t'}^2 \quad \forall u \in H_{t''}$$

となるものが存在する. 先ほどの, $t < s$ なら $\|u\|_t \leq \|u\|_s$ であったことと比較すると, $s < t$ のときは, $\|u\|_t$ を $\|u\|_s$ で評価できないので, $\|u\|_{t''}$ ($t < t''$) も利用しなくてはならないことを表している.

8. D^α は $H_{s+[\alpha]}$ から H_s への有界線形作用素である. 実際,

$$\|D^\alpha u\|_s \leq \|u\|_{s+[\alpha]} \quad \forall u \in H_{s+[\alpha]}$$

9. ω を $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 複素数値の周期関数とする. このとき, 整数 s に対して, 「 s と n にのみ依存した正定数 c 」 と 「 s, n および ω とその微分に依存した正定数 c' 」 が存在して,

$$\|\omega\phi\|_s \leq c \|\omega\|_\infty \|\phi\|_s + c' \|\phi\|_{s-1} \quad \forall \phi \in \mathcal{P}$$

となる. 特に, 「 s, n, ω (および微分) に依存した定数 c'' 」 が存在して,

$$\|\omega\phi\|_s \leq c'' \|\phi\|_s$$

となる. つまり, 滑らかな関数をかけるという掛け算作用素は H_s 上の有界作用素に拡張される.

10. ω は上と同様とする. 整数 s に対して, 正定数 c (s, n, ω の微分に依存) が存在して,

$$|\langle \omega u, v \rangle_s - \langle u, \bar{\omega} v \rangle_s| \leq c (\|u\|_s \|v\|_{s-1} + \|u\|_{s-1} \|v\|_s) \quad u, v \in H_s$$

となる. 特に $s = 0$ の場合は

$$\langle \omega u, v \rangle_0 = \langle u, \bar{\omega} v \rangle_0$$

(注意: $H_0 = L^2$ の場合は, 積分で内積を入れているので $\langle \omega u, v \rangle_0 = \langle u, \bar{\omega} v \rangle_0$ が成立するが, 一般のソボレフ空間では $\langle \omega u, v \rangle_s$ と $\langle u, \bar{\omega} v \rangle_s$ は一致するとは限らない).

Proof. 1. $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, t, n に依存した正定数 c が存在して,

$$c \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t |\phi_{\xi}|^2 \leq \sum_{[\alpha]=0}^t \|D^\alpha \phi\|^2 \leq \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t |\phi_{\xi}|^2$$

であった. また, $a_1, \dots, a_n > 0$ に対して,

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2$$

となるので,

$$\frac{1}{N(t)} \left(\sum_{[\alpha]=0}^t \|D^\alpha \phi\| \right)^2 \leq \sum_{[\alpha]=0}^t \|D^\alpha \phi\|^2 \leq \left(\sum_{[\alpha]=0}^t \|D^\alpha \phi\| \right)^2$$

となる. これより, s, n に依存した正定数 c, c' が存在して,

$$c\|\phi\|_s \leq \sum_{[\alpha]=0}^s \|D^\alpha \phi\| \leq c'\|\phi\|_s, \quad \forall \phi \in \mathcal{P}$$

となる. また $s = 0$ のときは, パーセバルの等式 $\|\phi\| = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q |\phi|^2 = \sum_{\xi} |\phi_{\xi}|^2 = \|\phi\|_0$ である.

2. $t < s$ なら $\|u\|_t \leq \|u\|_s$ は明らか.
3. 稠密であることはすでに述べた.
4. $(K^t u)_{\xi} = (1 + |\xi|^2)^t u_{\xi}$ であったので,

$$\sum (1 + |\xi|^2)^s |u_{\xi}|^2 = \sum (1 + |\xi|^2)^{s-2t} |(1 + |\xi|^2)^t u_{\xi}|^2$$

であるので, $\|u\|_s = \|K^t u\|_{s-2t}$ となる. また, $u, v \in H_s$ に対して, $K^t u, K^t v \in H_{s-2t}$ であり, $(s + (s - 2t))/2 = s - t$ であるので, $\langle u, K^t v \rangle_{s-t}$ などは定義される. あとは, 先ほどと同様にして,

$$\langle u, v \rangle_s = \langle u, K^t v \rangle_{s-t} = \langle K^t u, v \rangle_{s-t} \quad u, v \in H_s$$

を得る.

また $\phi \in \mathcal{P} \subset H_s$ に対して, $K^t \phi = \{(1 + |\xi|^2)^t \phi_{\xi}\}_{\xi}$ であり,

$$|\phi_{\xi}| \leq \frac{c_k}{(1 + |\xi|^2)^k}$$

が成立していた (ここで, c_k は ϕ の $2nk$ 階までの微分に依存した定数). そこで,

$$\left| \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t \phi_{\xi} e^{ix \cdot \xi} \right| \leq \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t |\phi_{\xi}| \leq \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t \frac{c_k}{(1 + |\xi|^2)^k}$$

は k を十分大きく取れば収束する. つまり, $\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t \phi_{\xi} e^{ix \cdot \xi}$ は一様に収束する. また,

$$\xi^{2\alpha} \leq (1 + |\xi|^2)^{[\alpha]}$$

が成立していたので, 同様に, formal 微分

$$\sum D^{\alpha} (1 + |\xi|^2)^t \phi_{\xi} e^{ix \cdot \xi} = \sum_{\xi} \xi^{\alpha} (1 + |\xi|^2)^t \phi_{\xi} e^{ix \cdot \xi}$$

も一様に収束する．よって， $\sum_{\xi}(1+|\xi|^2)^t\phi_{\xi}e^{ix\cdot\xi}$ は項別微分の定理を使って C^{∞} 関数に収束することがわかるので $\mathcal{P}$ に入る．このように， K^t は $\mathcal{P}$ を $\mathcal{P}$ へ移す．また， $\left(1-\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^t\phi$ のフーリエ係数を求めると $(1+|\xi|^2)^t\phi_{\xi}$ であることも明らか．

5. 以前，述べたように．

$$\left|\sum_{\xi}(1+|\xi|^2)^{(s+t)/2}u_{\xi}\cdot v_{\xi}\right|^2\leq\left(\sum_{\xi}(1+|\xi|^2)^s|u_{\xi}|^2\right)\left(\sum_{\xi}(1+|\xi|^2)^t|v_{\xi}|^2\right)$$

が成立していた． s, t をそれぞれ $s+t, s-t$ にすれば， $|\langle u, v \rangle_s| \leq \|u\|_{s+t}\|v\|_{s-t}$ を得る．

6. シュワルツの不等式より

$$\|u\|_{s+t}\geq\sup_{v\in H_{s-t}, v\neq 0}\frac{|\langle u, v \rangle_s|}{\|v\|_{s-t}}$$

が成立する． $v = K^t u$ に対して， $\|u\|_{s+t} = \|K^t u\|_{s-t} = \|v\|_{s-t}$ であるので，

$$\|u\|_{s+t}=\frac{|\langle u, u \rangle_{s+t}|}{\|u\|_{s+t}}=\frac{|\langle u, v \rangle_s|}{\|v\|_{s-t}}$$

となる．よって，上の不等号は等号となる．

$u=0$ なら $\langle u, \phi \rangle_0 = 0$ は明らかである（ここで $\phi \in \mathcal{P} \subset H_{-s}$ としているので，内積には意味がある）．逆に $\langle u, \phi \rangle_0 = 0$ ($\forall \phi \in \mathcal{P}$) とする． $\mathcal{P}$ は H_{-s} で稠密であったので

$$\langle u, v \rangle_0 = 0 \quad v \in H_{-s}$$

となる．実際， $\phi_n \rightarrow v$ として，

$$|\langle u, v \rangle_0| \leq |\langle u, v - \phi_n \rangle_0| + |\langle u, \phi_n \rangle_0| = |\langle u, v - \phi_n \rangle_0| \leq \|u\|_s \|v - \phi_n\|_{-s} \rightarrow 0$$

となる．そこで，

$$\|u\|_{0+s}=\sup_{v\in H_{0-s}, v\neq 0}\frac{|\langle u, v \rangle_0|}{\|v\|_{-s}}=0$$

となるので， $\|u\|_s = 0$ となる．

7. 任意の正の数 $y > 0$ に対して， $t' < t < t''$ なら， $y, 1/y$ のいずれかは 1 以上であるので

$$1 \leq y^{t''-t} + y^{t'-t}$$

を得る．（いわゆる Peter-Paul 不等式または Young 不等式は $ab \leq a^p/p + b^q/q$ ($1/p + 1/q = 1$))

$y = \epsilon^{1/(t''-t)}(1 + |\xi|^2)$ とすれば,

$$(1 + |\xi|^2)^t \leq \epsilon(1 + |\xi|^2)^{t''} + \epsilon^{(t'-t)/(t''-t)}(1 + |\xi|^2)^{t'}$$

となる. そこで $c(\epsilon) = \epsilon^{(t'-t)/(t''-t)}$ とすれば $\|u\|_t^2 \leq \epsilon\|u\|_{t''}^2 + c(\epsilon)\|u\|_{t'}^2$ ($\forall u \in H_{t''}$) を得る.

8. $(D^\alpha u)_\xi = \xi^\alpha u_\xi$ であり,

$$\|D^\alpha u\|_s^2 = \sum (1 + |\xi|^2)^s |\xi^\alpha u_\xi|^2 \leq \sum (1 + |\xi|^2)^s (1 + |\xi|^2)^{[\alpha]} |u_\xi|^2 = \|u\|_{s+[\alpha]}$$

9. 不等式を示すために, まずは $s \geq 0$ の場合を考える. この定理の 1 より

$$\begin{aligned} \|\omega\phi\|_s &\leq \text{const} \sum_{[\alpha]=0}^s \|D^\alpha \omega\phi\| \leq \text{const} \sum_{[\alpha]=0}^s \|\omega D^\alpha \phi\| + \text{const} \sum_{[\alpha]=0}^s \|D^\alpha \omega\phi - \omega D^\alpha \phi\| \\ &\leq c\|\omega\|_\infty \|\phi\|_s + \text{const} \sum_{[\alpha]=0}^{s-1} \|D^\alpha \phi\| \leq c\|\omega\|_\infty \|\phi\|_s + c'\|\phi\|_{s-1} \end{aligned}$$

ここで, $D^\alpha \omega\phi - \omega D^\alpha \phi$ は ϕ の $s-1$ 階までの微分しか含まないことを利用した. また c' は ω およびその微分にも依存していることに注意せよ. さて, $s < 0$ の場合には,

$$\begin{aligned} \|\omega\phi\|_s^2 &= \langle \omega\phi, \omega\phi \rangle_s = \langle \omega K^{-s} K^s \phi, K^s \omega\phi \rangle_0 \\ &= \langle K^{-s} \omega K^s \phi, K^s \omega\phi \rangle_0 + \langle (\omega K^{-s} - K^{-s} \omega) K^s \phi, K^s \omega\phi \rangle_0 \\ &\leq |\langle K^{-s} \omega K^s \phi, K^s \omega\phi \rangle_0| + \left| \left\langle \sum_{[\alpha]=0}^{-2s-1} a_\alpha D^\alpha K^s \phi, K^s \omega\phi \right\rangle_0 \right| \end{aligned}$$

ここで a_α は ω の微分多項式 (K^{-s} は $2s$ 階微分作用素であった). また, $s \geq 0$ の場合を利用すれば,

$$\begin{aligned} |\langle K^{-s} \omega K^s \phi, K^s \omega\phi \rangle_0| &= |\langle \omega K^s \phi, K^s \omega\phi \rangle_{-s}| \leq \|\omega K^s \phi\|_{-s} \|K^s \omega\phi\|_{-s} \\ &\leq (c\|\omega\|_\infty \|K^s \phi\|_{-s} + k' \|K^s \phi\|_{-s-1}) (\|K^s \omega\phi\|_{-s}) \\ &= (c\|\omega\|_\infty \|\phi\|_s + k' \|\phi\|_{s-1}) \|\omega\phi\|_s \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \sum_{[\alpha]=0}^{-2s-1} a_\alpha D^\alpha K^s \phi, K^s \omega \phi \right\rangle_0 \right| &\leq C' \sum_{[\alpha]=0}^{-2s-1} |\langle D^\alpha K^s \phi, K^s \omega \phi \rangle_0| \\
&\leq C' \sum_{[\alpha]=0}^{-2s-1} \|D^\alpha K^s \phi\|_s \|K^s \omega \phi\|_{-s} \\
&\leq C' \sum_{[\alpha]=0}^{-2s-1} \|K^s \phi\|_{s+[\alpha]} \|K^s \omega \phi\|_{-s} \\
&\leq C'_1 \|K^s \phi\|_{-s-1} \|K^s \omega \phi\|_{-s} \\
&\leq C'_1 \|\phi\|_{s-1} \|\omega \phi\|_s
\end{aligned}$$

以上を合わせれば

$$\|\omega \phi\|_s^2 \leq (c\|\omega\|_\infty \|\phi\|_s + k'\|\phi\|_{s-1}) \|\omega \phi\|_s + C'_1 \|\phi\|_{s-1} \|\omega \phi\|_s$$

となり, 両辺 $\|\omega \phi\|_s$ で割れば, $s < 0$ の場合の不等式も証明できる. また,

$$\|\omega \phi\|_s \leq c\|\omega\|_\infty \|\phi\|_s + c'\|\phi\|_{s-1} \leq c\|\omega\|_\infty \|\phi\|_s + c'\|\phi\|_s \leq c''\|\phi\|_s$$

となる. 特に, ω は H_s 上の有界線形作用素となる.

10. 不等式を証明するには, H_s 内の稠密な部分集合である $\mathcal{P}$ に対して証明すれば十分である. まず, $\langle \omega u, v \rangle_0 = \langle u, \bar{\omega} v \rangle_0$ については, L_2 内積とソボレフ 0 内積が $\mathcal{P}$ 上で一致していることから従う.

また, $\phi, \psi \in \mathcal{P}$ として, $s < 0$ の場合を考える.

$$\begin{aligned}
\langle \omega \phi, \psi \rangle_s &= \langle \omega K^{-s} K^s \phi, K^s \psi \rangle_0 \\
&= \langle K^{-s} K^s \phi, \bar{\omega} K^s \psi \rangle_0 = \langle K^s \phi, K^{-s} \bar{\omega} K^s \psi \rangle_0 \\
&= \langle \phi, \bar{\omega} \psi \rangle_s + \langle K^s \phi, (K^{-s} \bar{\omega} - \bar{\omega} K^{-s}) K^s \psi \rangle_0 \\
& (= \langle \phi, \bar{\omega} \psi \rangle_s + \langle (K^{-s} \omega - \omega K^{-s}) K^s \phi, K^s \psi \rangle_0)
\end{aligned}$$

となる. 先ほどと同様にすれば,

$$|\langle \omega \phi, \psi \rangle_s - \langle \phi, \bar{\omega} \psi \rangle_s| \leq c' \|\phi\|_s \|\psi\|_{s-1}$$

を得る. 同様に,

$$|\langle \omega \phi, \psi \rangle_s - \langle \phi, \bar{\omega} \psi \rangle_s| \leq c' \|\phi\|_{s-1} \|\psi\|_s$$

となる. よって, 不等式が証明される. s が正の場合も同様なので省略.

□

Exercise 3.3.4. 上の証明の最後の省略した部分を証明せよ.

3.3.2 ヒルベルト空間上の有界線形作用素の復習

ヒルベルト空間上の線形作用素 A に対して、作用素ノルムを

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0, \|x\|=1} \|Ax\|$$

と定義する。このとき、明らかに

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

となる。

Lemma 3.3.5. 線形作用素 A が有界であるとは、任意の $x \in H$ に対して、 $\|Ax\| \leq M\|x\|$ となる定数 M が存在することである。または $\|A\| \leq M$ となることである。また、線形作用素に対して、有界であることと連続であることは同値である。

Proof. A が有界なら、 $x_n \rightarrow x$ とすれば、 $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \rightarrow 0$ であるので、 $Ax_n \rightarrow Ax$ となるので連続である。逆に A が連続として、 A が有界でないとする。このとき $\|Ax_n\| > n^2\|x_n\|$ をみたす点列 (x_n) が存在する。そこで、

$$y_n = \frac{1}{n\|x_n\|} x_n$$

とすれば、 $\|Ay_n\| > n$ となる。 $\|y_n\| = \frac{1}{n}$ であるので、 $y_n \rightarrow 0$ となる。 A が連続という仮定から、 $Ay_n \rightarrow 0$ となるがこれは矛盾である。よって A は有界でなければならない。□

有界線形作用素の定義域が H に一致しない場合を考えることがしばしばある。しかし、次のことがわかる。 A の定義域を $D(A)$ とする。

Proposition 3.3.6. $A : D(A) \rightarrow H'$ が有界線形作用素で、 $D(A)$ が H 内で稠密なら、 A は一意的に有界線形作用素 $\tilde{A} : H \rightarrow H'$ へ拡張できる。

Proof. $u \in H$ に対して、稠密であることから $u_n \in D(A)$ で、 $u_n \rightarrow u$ となるものが存在する。そこで、 $\tilde{A}u = \lim Au_n$ として定義する。まず、この極限が存在することを見ておく。

$$\|Au_n - Au_m\| \leq \|A\|\|u_n - u_m\|$$

であり、 u_n は収束するのでコーシー列であり、 Au_n もコーシー列である。 H' は完備であるので収束する。よって、極限 $\lim Au_n$ が存在。さらに、 $\tilde{A}$ は線形であり、有界である。

$$\|\tilde{A}u\| \leq \|\tilde{A}u - Au_n\| + \|Au_n\| \leq \epsilon + \|A\|\|u_n\|$$

となるので, $n \rightarrow \infty$ とすれば, $\|\tilde{A}u\| \leq \|A\|\|u\|$ となる. よって, 有界である. つまり連続である. また, 連続なら, 上の定義で決まってしまうので, 一意的である. $\square$

すでに, 有界線形作用素の例として D^α を見てきた. $\mathcal{P}$ 上の D^α は $H_s \rightarrow H_{s+l}$ 上の有界線形作用素に拡張された (いわゆる弱微分である). 一般の微分作用素についても同様である.

3.3.3 差分商

$\phi \in \mathcal{P}$ とし, $h \in \mathbb{R}^n$ だけ平行移動した $\phi(x+h)$ を考える.

$$\phi(x) = \sum \phi_\xi e^{ix \cdot \xi}, \quad \phi(x+h) = \sum \phi_\xi e^{i(x+h) \cdot \xi} = \sum e^{ih \cdot \xi} \phi_\xi e^{ix \cdot \xi}$$

であるので, このフーリエ係数は $e^{ih \cdot \xi} \phi_\xi$ である. そこで,

Definition 3.3.2. 平行移動 $T_h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S} \ni u = \{u_\xi\} \mapsto T_h(u) = \{e^{ih \cdot \xi} u_\xi\} \in \mathcal{S}$$

と定義する. また $u \in \mathcal{S}$ の差分商 u^h を, $h \neq 0$ に対して,

$$u^h = \frac{T_h(u) - u}{|h|} = \left\{ \left(\frac{e^{ih \cdot \xi} - 1}{|h|} \right) u_\xi \right\} \in \mathcal{S}$$

として定義する.

$\phi \in \mathcal{P}$ の場合には,

$$T_h(\phi) = \phi(x+h), \quad \phi^h(x) = \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{|h|}$$

また, $u \in H_s$ ならば,

$$\|T_h(u)\|_s = \|u\|_s$$

であるので, T_h は等長変換を与える. 特に, $u \in H_s$ ならば各 $h \neq 0$ に対して $u^h \in H_s$ である. また,

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{ih \cdot \xi} - 1}{|h|} \right|^2 &= \left| \frac{\cos(h \cdot \xi) - 1 + i \sin(h \cdot \xi)}{|h|} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\cos(h \cdot \xi) - 1}{|h|} \right|^2 + \left| \frac{\sin(h \cdot \xi)}{|h|} \right|^2 = \frac{2(1 - \cos(h \cdot \xi))}{|h|^2} \\ &= \frac{4 \sin^2(\frac{1}{2} h \cdot \xi)}{|h|^2} \leq \frac{(h \cdot \xi)^2}{|h|^2} \leq (1 + |\xi|^2) \end{aligned}$$

となるので,

$$\|u^h\|_s \leq \|u\|_{s+1}$$

を得る. 特に, $u \in H_{s+1}$ ならば u^h はソボレフ s ノルムについて h について一様に有界である.

逆に, 任意の $h \in \mathbb{R}^n$ に対して u^h が存在するなら (弱) 微分可能性が一階増えそうである. 実際, 次が成り立つ.

Lemma 3.3.7. $u \in H_s$ として, 定数 $k > 0$ が存在して, $\|u^h\|_s \leq k$ ($\forall h \neq 0 \in \mathbb{R}^n$) とする. このとき $u \in H_{s+1}$ となる.

Proof. N を自然数として, $u_N = \{(u_N)_\xi\} \in H_s$ を

$$(u_N)_\xi = \begin{cases} u_\xi & |\xi| < N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする. 仮定のもとで $\|u_N\|_{s+1}$ が N に関して一様に有界であることを示せば, $\sum_\xi (1 + |\xi|^2)^{s+1} |u_\xi|^2 < \infty$ となり, $u \in H_{s+1}$ を得る.

$e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ を標準正規直交基底として, $h = te_i$ とすると,

$$\left| \frac{e^{ih \cdot \xi} - 1}{|h|} \right|^2 = \left| \frac{e^{it\xi_i} - 1}{t} \right|^2 \rightarrow |\xi_i|^2 \quad t \rightarrow 0$$

である. 仮定より,

$$\sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^s |u_\xi|^2 \left| \frac{e^{ih \cdot \xi} - 1}{|h|} \right|^2 \leq \|u^h\|_s^2 \leq k^2$$

また, $|\xi| < N$ となる ξ は有限個であるので, ここで $h = te_i$ で $t \rightarrow 0$ としても問題ない. よって,

$$\sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^s |u_\xi|^2 |\xi_i|^2 \leq k^2$$

となり,

$$\begin{aligned} \|u_N\|_{s+1}^2 &= \sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^{s+1} |u_\xi|^2 = \sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^s |u_\xi|^2 |\xi|^2 + \sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^s |u_\xi|^2 \\ &\leq nk^2 + \|u\|_s^2 \end{aligned}$$

となる. よって, $\|u_N\|_{s+1}$ は一様に有界. □

3.3.4 ソボレフの補題

$u = \{u_\xi\} \in H_{-\infty}$ に対して、フーリエ級数 $\sum u_\xi e^{ix \cdot \xi}$ を得る。この級数がいつ収束し、どの程度微分ができるのかを知りたい。それに答えるのが次のソボレフの補題である。

Theorem 3.3.8 (ソボレフの補題). 1. $t \geq [n/2] + 1$ で $u \in H_t$ なら, $\sum u_\xi e^{ix \cdot \xi}$ は一様収束する。つまり, u はある連続関数に対応する。
 2. $u \in H_t$ で $t \geq [n/2] + 1 + m$ ならば, $D^\alpha u = \sum \xi^\alpha u_\xi e^{ix \cdot \xi}$ (formal な微分) は $[\alpha] \leq m$ で, 一様に収束する。つまり, $t \geq [n/2] + m + 1$ なら, $u \in H_t$ に対するフーリエ級数は C^m 級関数である。
 3. $t \geq [n/2] + 1$ ならば, 定数 $c > 0$ が存在して,

$$\|\phi\|_\infty \leq c \|\phi\|_t \quad \forall \phi \in \mathcal{P}$$

また,

$$\|D^\alpha \phi\|_\infty \leq c \|\phi\|_{t+[\alpha]} \quad \forall \phi \in \mathcal{P}$$

このように, 微分可能なら弱微分可能であるので, $C^s \subset H_s$ は成立するのであるが, $t \geq [n/2] + s + 1$ ならば, 逆の包含関係である $H_t \subset C^s \subset H_s$ が成立するのである。微分方程式の解を探すには, 完備な空間で考えた方が見つけやすい。そして, H_t 内で解を見つけたら, それは C^s 級関数の解であるといえるのである。

Proof.

$$\begin{aligned} \sum_{|\xi| < N} |u_\xi| &= \sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^{-t/2} (1 + |\xi|^2)^{t/2} |u_\xi| \\ &\leq \left(\sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^{-t} \right)^{1/2} \left(\sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^t |u_\xi|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^{-t} \right)^{1/2} \|u\|_t \end{aligned}$$

となる。第一項が収束するためには,

$$t \geq [n/2] + 1$$

であればよかった。よって $t \geq [n/2] + 1$ であれば, 関数項級数 $\sum u_\xi e^{ix \cdot \xi}$ はある連続関数へ一様収束する。

また,

$$\|\phi\|_\infty \leq \|\phi - \sum_{|\xi| < N} \phi_\xi e^{ix \cdot \xi}\|_\infty + \|\sum_{|\xi| < N} \phi_\xi e^{ix \cdot \xi}\|_\infty \leq \epsilon + \sum_{|\xi| < N} |\phi_\xi| \leq \epsilon + c\|\phi\|_t$$

となり, $N \rightarrow \infty$ とすれば, $\|\phi\|_\infty \leq c\|\phi\|_t$ を得る. ϕ を $D^\alpha \phi$ に変えれば,

$$\|D^\alpha \phi\|_\infty \leq c\|D^\alpha \phi\|_t \leq c\|\phi\|_{t+[\alpha]}$$

さて, $u \in H_t$ ($t \geq [n/2] + m + 1$, $[\alpha] \leq m$) のに対して, $D^\alpha u \in H_{t-[\alpha]}$ であるが $t - [\alpha] \geq [n/2] + 1$ であるので, すでに証明したことから, 関数項級数 $\sum \xi^\alpha u_\xi e^{ix \cdot \xi}$ は, ある連続関数へ一様収束する. この関数は, $\sum u_\xi e^{ix \cdot \xi}$ を項別微分したものである. 項別微分の定理から $\sum u_\xi e^{ix \cdot \xi}$ は C^m 級関数となり, その微分は $D^\alpha(\sum u_\xi e^{ix \cdot \xi}) = \sum \xi^\alpha u_\xi e^{ix \cdot \xi}$ となる. $\square$

Exercise 3.3.9. $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ で周期的な関数の列 $\{\phi_n\}$ で, ϕ_n は $1 \leq r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/2$ において,

$$\log \log \left(\frac{1}{r + 1/n} \right)$$

に一致するようなものを考える. このとき, 定数 $c > 0$ で

$$\|\phi_n\|_\infty \leq c\|\phi_n\|_1, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

となるものは存在しないことを示せ. このことから, $t \geq [n/2] + 1$ でなくては, ソボレフの補題は成立しないことがわかる.

3.3.5 レリッヒの補題

Theorem 3.3.10 (レリッヒの補題). $\{u^i\}_i$ を H_t 内の有界列とする ($\|u^i\|_t \leq 1$). このとき, $s < t$ ならば, H_s 内で収束する部分列をもつ. 言い換えると, 埋め込み $H_t \subset H_s$ はコンパクト作用素である.

Proof. 仮定より,

$$\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t |u_\xi^i|^2 \leq 1$$

であり. ξ を固定すれば, $\{(1 + |\xi|^2)^{t/2} u_\xi^i\}_i$ は有界であるので, $\mathbb{C}^m$ 内で収束する部分列をもつ. そこで, $\xi \in \mathbb{Z}^n$ を番号づけして $\xi^1, \dots, \xi^k, \dots$ としておく. まず, $\{u^{j_1, l}\}_l$ という $\{u^i\}$ の部分列で, $\{(1 + |\xi|^2)^{t/2} u_{\xi^1}^{j_1, l}\}_l$ が収束するようなものをとる. 次に, この $\{u^{j_1, l}\}_l$ の部分列 $\{u^{j_2, l}\}_l$ で, $\{(1 + |\xi|^2)^{t/2} u_{\xi^2}^{j_2, l}\}_l$ が収束するようなものをとる. 以下,

これを繰り返すと、部分列 $\{u^{j_k, l}\}_l$ で、 $\{(1+|\xi|^2)^{t/2}u_{\xi^k}^{j_k, l}\}_l$ が収束するものをとることができる。このとき、

$$\{u^{j_1, l}\}_l \supset \{u^{j_2, l}\}_l \supset \cdots \supset \{u^{j_k, l}\}_l \supset \cdots$$

となることに注意する。そこで、添え字について対角成分である。 $\{u^{j_l, l}\}_l$ という部分列をとると、各 k に対して、 $l \geq k$ ならば、 $\{u^{j_k, l}\}_l \supset \{u^{j_l, l}\}_{l \geq k}$ であるので、 $\{(1+|\xi|^2)^{t/2}u_{\xi^k}^{j_l, l}\}_l$ は収束する。つまり、 $\{u^i\}_i$ の部分列 $\{u^{j_l}\}_l$ で、各 $\xi \in \mathbb{Z}^n$ に対して $\{(1+|\xi|^2)^{t/2}u_{\xi}^{j_l}\}_l$ が $\mathbb{C}^m$ 内で収束するようにとれる。これが H_s ($s < t$) 内でコーシー列であることを示せば、 H_s は完備であったので収束する。

$\epsilon > 0$ を取ってくる。

$$\begin{aligned} \|u^{j_i} - u^{j_k}\|_s^2 &= \sum_{|\xi| < N} (1+|\xi|^2)^{s-t} (1+|\xi|^2)^t |u_{\xi}^{j_i} - u_{\xi}^{j_k}|^2 \\ &\quad + \sum_{|\xi| \geq N} (1+|\xi|^2)^{s-t} (1+|\xi|^2)^t |u_{\xi}^{j_i} - u_{\xi}^{j_k}|^2 \end{aligned}$$

第2項は

$$N^{2(s-t)} \sum_{|\xi| \geq N} (1+|\xi|^2)^t (|u_{\xi}^{j_i}|^2 + 2|u_{\xi}^{j_k}| |u_{\xi}^{j_i}| + |u_{\xi}^{j_k}|^2)$$

で bound されるが、これは、仮定を使えば、 $\leq 4N^{2(s-t)}$ となる。 $s-t < 0$ であるので、 N を十分大きくとれば（それを N_0 とする） $\epsilon/2$ で抑えることができる。第一項は、

$$\sum_{|\xi| < N_0} (1+|\xi|^2)^t |u_{\xi}^{j_i} - u_{\xi}^{j_k}|^2$$

で抑えられる ($(1+|\xi|^2)^{s-t} \leq 1$ for all $|\xi| < N_0$)。これは有限和であり、各 ξ に対して、 $(1+|\xi|^2)^{t/2}u_{\xi}^{j_i}$ が収束したことから、ある定数 $J > 0$ で、 $j_1, j_2 > J$ なら $\epsilon/2$ で抑えることができるものが存在する。以上から、 $j_i, j_k > J$ に対して、 $\|u^{j_i} - u^{j_k}\|_s^2 < \epsilon$ とできるので、コーシー列である。 $\square$

3.3.6 コンパクト作用素について

本論とは関係ないが、コンパクト作用素について述べておく。

Definition 3.3.3 (コンパクト作用素). ヒルベルト空間上の線形作用素がコンパクト作用素とは、有界の点列の像が収束する部分列をもつこと。コンパクト作用素は有界作用素である。

Proof. コンパクト作用素 A が有界でないとするば、 $\|x_n\| = 1$ かつ $\|Ax_n\| \rightarrow \infty$ となる点列が存在する。 Ax_n からは収束する部分列はとれないので矛盾。 $\square$

Example 3.3.11. 埋め込み $i: H_t \rightarrow H_s$ ($s < t$) はコンパクト作用素である.

Lemma 3.3.12. コンパクト作用素の全体は有界線形作用素全体において閉部分空間である. また両側 $*$ イデアルになる.

Proof. A, B がコンパクト作用素なら, $A + B$, kA がコンパクト作用素であることは明らかである. 例えば, $x_n \in H$ を有界列として Ax_{n_k} が収束するようにできる. x_{n_k} は有界であるので, 部分列をとれば $Bx_{n'_k}$ が収束させることができる. よって, $A + B$ に対しても収束する部分列がとれる. これよりコンパクト作用素の全体は部分空間である.

閉集合であることを証明しよう. A_n をコンパクト作用素の列で A_0 という有界線形作用素に収束するとする. このとき A_0 がコンパクトを証明すればよい. 有界列は $x_k \in H$ で $\|x_k\| \leq 1$ となるものとしてよい. この有界列に対して, $A_n x_k$ は収束する部分列をもつ. そこで, 先ほどと同様の対角線論法を使って, x_k の部分列 x'_k で, 各 n に対して, $A_n x'_k$ が収束するようにとることができる. $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して,

$$\|A_N - A_0\| < \epsilon/3$$

とする. また, $A_N x'_k$ が収束するので, ある自然数 $L = L(\epsilon)$ をとって,

$$p, q > L \Rightarrow \|A_N x'_p - A_N x'_q\| < \epsilon/3$$

とできる. そこで,

$$\begin{aligned} \|A_0 x'_p - A_0 x'_q\| &\leq \|(A_0 - A_N)x'_p\| + \|A_N x'_p - A_N x'_q\| + \|(A_N - A_0)x'_q\| \\ &\leq \|(A_0 - A_N)\| \|x'_p\| + \|A_N x'_p - A_N x'_q\| + \|(A_N - A_0)\| \|x'_q\| < \epsilon \end{aligned}$$

となる. よって $A_0 x'_k$ はコーシー列であるので収束する. つまり A_0 はコンパクト作用素である.

両側 $*$ イデアルであることを証明しよう. A をコンパクト作用素として B を有界線形作用素とする. x_n を有界列とすれば, Ax_n は収束する部分列をもつ. B の連続性から BAx_n も収束する部分列をもつ. 次に, B が有界なので Bx_n も有界である. よって ABx_n は収束する部分列をもつ. 次に A^* がコンパクトを示す. A^* がコンパクトでないとすると, $\|x_n\| \leq 1$ で,

$$\|A^* x_n - A^* x_m\| \geq \delta > 0, \quad n \neq m$$

となる点列が存在する. $\|x_n\| \leq 1$ より,

$$\delta^2 \leq \|(A^*(x_n - x_m), A^*(x_n - x_m))\| = |(Ay_n - Ay_m, x_n - x_m)| \leq 2\|Ay_n - Ay_m\|$$

となるので, 有界列 Ay_n は収束する部分列をもたないので, A がコンパクトであることに矛盾. $\square$

Lemma 3.3.13. ランクが有限（値域が有限次元）な線形作用素 A はコンパクト作用素である

Proof. $x_n \in H$ を有界な列とする. Ax_n は有限次元なベクトル空間内の有界列である. 有限次元なら $\overline{\{Ax_n\}}$ はコンパクトである. よって, 収束部分列をもつ. $\square$

Proposition 3.3.14. ランクが有限な作用素の列 A_n の極限 $A_n \rightarrow A$ はコンパクト作用素である.

Proof. 有界線形作用素がランク有限の作用素の列で近似できたとする. 退化作用素はコンパクト作用素であった. またコンパクト作用素は閉集合であったので, その極限もコンパクト作用素である. $\square$

Remark 3.3.3. 可分なヒルベルト空間 H, K に対するコンパクト作用素 $A: H \rightarrow K$ に対しては, この逆も成立することが知られている. よって, コンパクト作用素をランク有限な作用素で近似できる作用素としてもよい.

Example 3.3.15. 恒等写像 I はコンパクト作用素でない（ただし無限次元ヒルベルト空間において）. 実際, 完全正規直交系 $v_1, \dots, v_n, \dots$ をとる. $\|v_i\| = 1$ より有界である. しかし, $Iv_i = v_i$ であるので収束する部分列はとれない. 実際, 収束するなら, コーシー列となるが,

$$\|v_k - v_l\|^2 = \|v_k\|^2 + \|v_l\|^2 = 2$$

であるので, コーシー列になりえない. これは, ヒルベルト空間内の単位球がコンパクトでないということ. 単位球は有界閉集合であるがコンパクトでない.

また, 有界ランクの射影作用素 $I_n(v) = \sum_{i=1}^n (v, v_i)v_i$ はコンパクト作用素であるが, 作用素ノルムについて $I_n \not\rightarrow I$ である. 実際, $\|I_n - I\| = 1$ である. では, 有界線形作用素で近似できるとは, といったものかということ, 例えば,

$$J(v) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)(v, v_i)v_i, \quad f(i) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} f(i) = 0$$

である. 無限大の方の寄与がなくなっている作用素である. これなら, $J_n(v) = \sum_{i=1}^n f(i)(v, v_i)v_i$ とすれば, $J_n \rightarrow J$ となる. 例えば, 熱作用素などがこの性質を満たしている.

さらに, 熱作用素は *smoothing* 作用素となる. つまり, 勝手な関数を滑らか関数に変換する性質を持っている（針金に適当に熱を与えたとき, 少しでも時間がたてば滑らかな熱分布をもつということを意味してる）. 簡単な例で見て行こう. S^1 上の熱作用素 $e^{-t\Delta}$ を考える. Δ の完全正規直交系として $v_m = e^{2\pi i m x}$ ($m \in \mathbb{Z}$) をとれる. 各 $v_{\pm m}$ は固有値

m^2 の固有関数である。そして、フーリエ展開 $u(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle u, v_m \rangle v_m$ が成立する。熱作用素とは

$$e^{-t\Delta}u = \sum e^{-tm^2} \langle u, v_m \rangle v_m$$

と定義されるものである。先ほど見たように、 $e^{-t\Delta}$ はコンパクト作用素である。これが *smoothing* 作用素であることを見てみよう。我々の記号で、フーリエ係数を取り出せば

$$u = \{u_\xi\}_{\xi \in \mathbb{Z}} \rightarrow e^{-t\Delta}u = \{e^{-t\xi^2} u_\xi\}_{\xi \in \mathbb{Z}}$$

そこで、 $u \in H_{s'}$ に対して、 $|u_\xi^2(1 + |\xi|^2)^{s'}| \leq M$ と有界となるので、任意の s に対するソボレフノルムを取ると、

$$\|e^{-t\Delta}u\|_s^2 = \sum |u_\xi|^2 e^{-t\xi^2} (1 + |\xi|^2)^s < \infty$$

となるので、ソボレフの補題から $e^{-t\Delta}u$ は滑らかな関数となる。

次の事実は、本論とは関係ないが知っておくべき。

Theorem 3.3.16 (自己共役コンパクト作用素の固有空間分解定理). K を自己共役コンパクト作用素とする。実数列 μ_j と点列 $\phi_j \in H$ で、

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \cdots \rightarrow 0, \quad (\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}, \quad K\phi_j = \mu_j \phi_j$$

となるもので、任意の $\phi \in H$ が

$$K\phi = \sum \mu_j (\phi, \phi_j) \phi_j$$

となるものが存在する。より正確には、 $\mu_j = 0$ ($j \geq j_0 + 1$) ならば、

$$K\phi = \sum_{j=0}^{j_0} \mu_j (\phi, \phi_j) \phi_j$$

と有限ランクの作用素である。それ以外の場合には、

$$K\phi = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j (\phi, \phi_j) \phi_j$$

となる。

また、固有空間を $E(\mu_i)$ と書けば、

$$H = E(0) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} E(\mu_i)$$

となる。注意：0 は固有値になることもありえるし、固有値とならないこともある。また、0 固有空間が無限次元となることもありえる。 $E(\mu_j)$ は有限次元。

Example 3.3.17. 以前述べたグリーン作用素 G は $G : L^2(\Lambda^p(M)) \rightarrow L^2(\Lambda^p(M))$ となり、ヒルベルト空間上のコンパクトな自己共役作用素である。

コンパクト作用素の別の例を与える。

Definition 3.3.4. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする。 Ω 上の連続関数の列 $\{f_n\}$ を考える。

1. (f_n) が一様有界とは、 $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega, |f_n(x)| \leq M$. つまり任意の n に対して、 $\|f_n\|_{\Omega} \leq M$
2. (f_n) が同程度連続とは、 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |x - y| < \delta$ なる $x, y \in \Omega$ に対して、 $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$ となる。特に、同程度連続なら f_n は一様連続である。大事なことは δ が $x \in \Omega$ にも n にもよらずとれることである。

Theorem 3.3.18 (アスコリアルゼラの定理). Ω を有界集合とする。 (f_j) は一様有界、同程度連続な関数列とする。このとき、一様収束する部分列をもつ。

Proof. $x \in \overline{\Omega}$ に対して、 $\{x_l\} \subset \Omega$ かつ $x_l \rightarrow x$ となるようにとる。また、

$$f_j(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} f_j(x_l)$$

として f_j を $\overline{\Omega}$ まで拡張する。まず、この極限の存在することを確認する。同程度連続から、 f_j は一様連続である。そこで、 $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、 $|x - y| < \delta$ なら、

$$|f_j(x) - f_j(y)| < \epsilon$$

であった。そこで $x_l \rightarrow x$ より、ある l_0 が存在して、 $|x_l - x_k| < \delta$ ($\forall l, k > l_0$)。よって、

$$|f_j(x_l) - f_j(x_k)| < \epsilon \quad \forall l, k > l_0$$

である。つまり $\{f_j(x_l)\}_l$ はコーシー列なので収束する、よって極限が存在する。さらに、これは x へ収束する点列のとり方にもよらない。(つまり、一様連続なら境界まで拡張できる)。また、 $\overline{\Omega}$ 上の関数列 (f_j) も一様有界かつ同程度連続である。

さて、 $\{x^k\}_k$ を $\overline{\Omega}$ 内で稠密な点列とする。一様有界であるので $\{f_j(x^1)\}_j$ は有界な列であるので収束する部分列をもつ。それを $\{f_{1,j}\}_j$ とする。次に、 $\{f_{1,j}(x^2)\}_j$ を考えると収束する部分列をもつ。これを繰り返して、部分列 $\{f_{m,j}\}_j$ を得ることができる。そこで、 $f_{j_k} = f_{k,k}$ とする。この関数列 $\{f_{j_k}\}_k$ は、任意の m に対して、 $k > m$ ならば、 $\{f_{m,j}\}_j$ の部分列になっている。よって、点列 $\{f_{j_k}(x^m)\}_k$ は収束する ($\forall m$)。

次に、任意の点 $x \in \overline{\Omega}$ に対して、 f_{j_k} が収束することを証明しよう。任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ を $x, y \in \overline{\Omega}$ で、 $|x - y| < \delta$ なら、 $|f_{j_k}(x) - f_{j_k}(y)| < \epsilon/3$ となるようにとる。 $\overline{\Omega}$ はコンパクトなので、有限個の y^p があって、

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{p=1}^{P(\delta)} B_p, \quad B_p = \{x \mid |x - y^p| < \delta/2\}$$

とできる. 各 p に対して, $|x^{m_p} - y^p| < \delta/2$ となるように x^{m_p} をとる ($\{x^m\}$ が稠密なので取れる). $f_{j_k}(x^{m_p})$ は収束するので, K を十分大きくとれば,

$$|f_{j_k}(x^{m_p}) - f_{j_l}(x^{m_p})| < \epsilon/3, \quad \forall k, l > K, \quad p = 1, 2, \dots, P(\delta)$$

となる. $x \in \bar{\Omega}$ とすれば, ある p があって, $x \in B_p$ であり, $|x - x^{m_p}| \leq |x - y^p| + |y^p - x^{m_p}| < \delta$ なので, $k, l > K$ なら,

$$|f_{j_k}(x) - f_{j_l}(x)| \leq |f_{j_k}(x) - f_{j_k}(x^{m_p})| + |f_{j_k}(x^{m_p}) - f_{j_l}(x^{m_p})| + |f_{j_l}(x^{m_p}) - f_{j_l}(x)| < \epsilon$$

となる. よって, $f_{j_k}(x)$ は収束する. また上の式は x によらないので, $\{f_{j_k}\}$ がコーシー一様収束であることがわかるので, ある連続関数へ一様収束する (有界閉集合上の連続関数の空間は $\sup$ ノルムで完備であった). $\square$

(上の証明を見ればわかるように, Ω が有界であることが必要である. 実際, 有界でない場合には, 一様有界, 同程度連続だが, 一様収束する部分列をもたない関数列をつくることのできる).

Definition 3.3.5. $f \in C^k(\Omega)$ に対して,

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\Omega, \quad D^\alpha = (\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial x_n)^{\alpha_n}, \quad [\alpha] = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

とする. さらに,

$$C_b^k(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) \mid \|f\|_{C^k(\Omega)} < \infty\}$$

とする.

Theorem 3.3.19. $C_b^k(\Omega)$ は C^k ノルムに関して完備である.

Proof. $k = 1$ の場合のみ証明する ($k \geq 2$ でも同様). (f_n) を $C_b^1(\Omega)$ 内のコーシー列とする. このとき, $(f_n), (D^i f_n)$ は $\|\cdot\|_\Omega$ のノルムでコーシー列である. よって, どちらも一様収束して, その収束先は連続関数である. $f_n \rightarrow f, D^i f_n \rightarrow g_i$ とする. このとき $D^i f = g_i$ となるなら, $f \in C_b^1(\Omega)$ かつ $\|f_n \rightarrow f\|_{C^1(\Omega)} \rightarrow 0$ であることがわかる ($\|f\|_{C^1(\Omega)} < \infty$ であることは先ほどと同様). そこで, $D^i f = g_i$ を証明する. $D^i f_n$ がコーシー一様収束しているのだから, $\epsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$\forall m, n \geq N : \sup_{x \in \Omega} |D^i f_n(x) - D^i f_m(x)| < \epsilon$$

また, $D^i f_n \rightarrow g_i$ であるので,

$$\forall n \geq N : \sup_{x \in \Omega} |D^i f_n(x) - g_i(x)| < \epsilon$$

となる．そこで平均値の定理から，

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| \leq |x_i - z_i| \sup_{\xi \in \Omega} |D^i f_n(\xi) - D^i f_m(\xi)| < |x_i - z_i| \epsilon$$

となる．ここで $m \rightarrow \infty$ とすれば，

$$|f_n(x) - f(x) - (f_n(z) - f(z))| \leq |x_i - z_i| \epsilon$$

となる．一方， $D^i f_n$ に対して， $|x_i - z_i|$ が十分小さいなら，微分の定義から，

$$|f_n(x) - f_n(z) - (x_i - z_i) D^i f_n(x)| \leq \epsilon |x_i - z_i|$$

が成立する．以上をあわせると， $|x_i - z_i|$ が十分小さいなら，

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(z) - (x_i - z_i) g_i(x)| \\ & \leq |f(x) - f(z) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(z) + f_n(z) \\ & \quad - (x_i - z_i) D^i f_n + (x_i - z_i) D^i f_n - (x_i - z_i) g_i(x)| \\ & \leq |f(x) - f_n(x) - (f(z) - f_n(z))| \\ & \quad + |f_n(x) - f_n(z) - (x_i - z_i) D^i f_n(x)| + |x_i - z_i| |D^i f_n(x) - g_i(x)| \\ & \leq 3\epsilon |x_i - z_i| \end{aligned}$$

これは $D^i f(x) = g_i(x)$ となることを意味する．（いわゆる項別微分のこと）． $\square$

Remark 3.3.4. $C_0^k(\Omega)$ は完備ではない．

Corollary 3.3.20. Ω を有界とする．このとき $C_b^1(\Omega) \subset C_b^0(\Omega)$ という埋め込みはコンパクトである．

Proof. $(f_n) \subset C_b^1(\Omega)$ に対して， $\|f_n\|_{C^1} \leq M$ とする（有界）．一様有界は明らかである．また，一階微分が n によらず有界なので，平均値定理より

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y| \sup |D_n f| \leq M |x - y|$$

となる．よって，同程度連続．そこで，アスコリアルゼラの定理から，一様ノルムで収束する部分列をもつ．これは埋め込みがコンパクトであることを意味する． $\square$

3.3.7 微分作用素

Definition 3.3.6. $\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{C}^m$ 値な滑らかな関数に作用する「階数 l の線形微分作用素 L 」とは， $m \times m$ 行列 $L = (L_{ij})$ で各成分が微分作用素

$$L_{ij} = \sum_{|\alpha|=0}^l a_{ij}^\alpha D^\alpha$$

であり, ある i, j および $[\alpha] = l$ となるある α に対して, $a_{ij}^\alpha \neq 0$. ここで a_{ij} は滑らかな関数である.

また, 微分作用素が周期的または $\mathcal{P}$ 上に作用するとは, a_{ij}^α が周期関数のときである. (以下, $\mathcal{P}$ 上の微分作用素といったら周期的なものを意味する).

L を周期的微分作用素として, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) \in \mathcal{P}$ とすると,

$$L\phi = (\sum L_{1j}\phi_j, \dots, \sum L_{mj}\phi_j)$$

となる. 部分積分を繰り返すことにより, L の形式的随伴作用素 L^* を,

$$L^* = (L_{ij}^*), \quad L_{ij}^* = \sum D^\alpha \overline{a_{ji}^\alpha}$$

とて定義する (転置されていることに注意). つまり, $L^*\phi$ の第 i 成分は

$$(L^*\phi)_i = \sum_{j=0}^m \sum_{[\alpha]=0}^l D^\alpha (\overline{a_{ji}^\alpha} \phi_j)$$

である. もちろん, $\mathcal{P}$ 上の L^2 内積について

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L^*\psi \rangle$$

が成立する.

Remark 3.3.5. L^* を形式的随伴作用素と呼ぶのは, L^* はヒルベルト空間における随伴作用素ではないからである (拡張できる可能性はあるが). ここでは, あくまで $\mathcal{P}$ 上の L^2 内積に関して随伴ということである.

Proposition 3.3.21. L を階数 l の微分作用素とする. $s \in \mathbb{Z}$ とする. このとき, 正の定数 c, k, c' で,

$$\|L\phi\|_s \leq ck\|\phi\|_{s+l} + c'\|\phi\|_{s+l-1}, \quad \forall \phi \in \mathcal{P}$$

となるものが存在. ただし, c は「 n, m, l, s に依存」. k は「 L の最高次の係数の絶対値を抑えるもの」. c' は「 n, m, l, s 及び L の係数およびその l 階までの微分に依存」.

特に, ある定数 c'' が存在して,

$$\|L\phi\|_s \leq c''\|\phi\|_{s+l} \quad \forall \phi \in \mathcal{P}$$

である. よって L は $H_{s+l} \rightarrow H_s$ の有界線形作用素へ拡張される ($\forall s$).

Proof. 第2の主張は第1の主張から従う. そこで, 第一の主張を示せばよい. $m = 1$ の場合には, $L = \sum a^\alpha D^\alpha$ と書けるが,

$$\|D^\alpha u\|_s \leq \|u\|_{s+[\alpha]}, \quad \|\omega\phi\|_s \leq c\|\omega\|_\infty\|\phi\|_s + c'\|\phi\|_{s-1}$$

を使えばよい. ここで, c は s と n にのみ依存し, c' は s, n および ω とその微分に依存.

一般の m については, $m = 1$ の場合の不等式および $\|L\phi\|_s \leq \text{const} \sum_{ij} \|L_{ij}\phi_j\|_s$ を使えばよい. ここで const は m にのみ依存. $\square$

Remark 3.3.6. L が l 階作用素. ω を滑らかな関数とすれば, $M = \omega L - L\omega = [\omega, L]$ は高々 $l - 1$ 階の微分作用素である. よって,

$$\|M\phi\|_s \leq \text{const} \|\phi\|_{s+l-1} \quad \forall \phi \in \mathcal{P}$$

Lemma 3.3.22. ω を実数値の周期的な滑らかな関数. L を l 階微分作用素. このとき, 正の定数が存在して,

$$|\langle L(\omega^2 u), Lu \rangle_s - \|L(\omega u)\|_s^2| \leq \text{const}(\|u\|_{s+l} \|u\|_{s+l-1}) \quad \forall u \in H_{s+l}$$

Proof.

$$\begin{aligned} & |\langle L(\omega^2 u), Lu \rangle_s - \langle L(\omega u), L(\omega u) \rangle_s| \\ & \leq |\langle \omega L(\omega u), Lu \rangle_s - \langle L(\omega u), \omega L(u) \rangle_s| \\ & \quad + |\langle L(\omega u), (\omega L - L\omega)u \rangle_s| \\ & \quad + |\langle (L\omega - \omega L)(\omega u), Lu \rangle_s| \end{aligned}$$

さらに, ソボレフ空間の性質で述べた不等式

$$|\langle \omega u, v \rangle_s - \langle u, \bar{\omega} v \rangle_s| \leq c(\|u\|_s \|v\|_{s-1} + \|u\|_{s-1} \|v\|_s) \quad u, v \in H_s$$

および $\|Lu\|_s \leq c'' \|u\|_{s+l}$, $\|\omega u\|_s \leq c'' \|u\|_s$ を利用すれば定理が証明される (後ろの2項はシュワルツ不等式も利用). $\square$

3.4 楕円型微分作用素

Definition 3.4.1. L を l 階微分作用素とする.

$$L = P_l(D) + \cdots + P_0(D)$$

とかく. ここで, $P_j(D)$ は $m \times m$ の行列で各成分が同次 j 階の微分作用素 $\sum_{[\alpha]=j} a_\alpha D^\alpha$. さらに, $P_j(\xi)$ は D^α を ξ^α に置き換えたものとする.

$$P_j(\xi) = \sum_{[\alpha]=j} a_\alpha \xi^\alpha$$

このとき L が点 $x \in \mathbb{R}^n$ で楕円型とは, 点 x における $m \times m$ 行列 $P_l(\xi)$ が任意の $\xi \neq 0$ に対して非退化であること (最高次の P_l に対する条件である).

L が x で楕円型であることは、任意の滑らかな $\mathbb{C}^m$ 値関数 u で $u(x) \neq 0$ となるもの及び任意の滑らかな実数値関数 $\phi(x)$ で $\phi(x) = 0$ かつ $d\phi(x) \neq 0$ となるものに対して、

$$L(\phi^l u)(x) \neq 0$$

となることと同値である。

Proof.

$$L(\phi^l u)(x) \underbrace{=}_{\phi(x)=0} P_l(D)(\phi^l u)(x) \underbrace{=}_{\phi(x)=0} P_l(d\phi|_x)(u(x))$$

□

このように解釈するには、この解釈が座標によらない定義であるためである。よって、多様体上で楕円型作用素を定義できる。

楕円型微分作用素で重要なのは次の不等式である。elliptic estimate とか Garding inequality と呼ばれるものである。

Theorem 3.4.1 (Fundamental inequality). L を $\mathcal{P}$ 上の階数 l の楕円型微分作用素とする。 $s \in \mathbb{Z}$ とする。このとき定数 $c > 0$ で

$$\|u\|_{s+l} \leq c(\|Lu\|_s + \|u\|_s) \quad \forall u \in H_{s+l}$$

が成立する。また $\|Lu\|_s \leq c''\|u\|_{s+l}$, $\|u\|_s \leq \|u\|_{s+l}$ であったので、これが意味することは、楕円型なら $\|u\|_{s+l}$ というノルムは $\|Lu\|_s + \|u\|_s$ というノルムと同値ということ。

Proof. 稠密性から $\phi \in \mathcal{P}$ に対して示せばよい。

まず、定数係数かつ主要項 $P_l(D)$ のみからなる楕円型微分作用素 L_0 に対して証明する。 $u \in \mathbb{C}^m$ で $u \neq 0$ とし、 $\xi \in \mathbb{R}^n$ で $\xi \neq 0$ とする。 $P_l(\xi)$ は非退化なので、 $|P_l(\xi)u|^2 > 0$ である。 $|u| = 1, |\xi| = 1$ とすれば球面がコンパクトであることから、 $|P_l(\xi)u|$ は球面上の連続関数であるので、定数 $c > 0$ で

$$|P_l(\xi)u|^2 \geq c, \quad |u| = |\xi| = 1$$

となるものが存在。そこで、 $P_l(\xi)$ は ξ に対する次数 l の同次多項式であるので、

$$|P_l(\xi)u|^2 \geq c|\xi|^{2l}|u|^2 \quad \forall u \in \mathbb{C}^m, \xi \in \mathbb{R}^n$$

となる。 L_0 が定数係数であることから、

$$\|L_0 \phi\|_s^2 = \sum_{\xi} |P_l(\xi) \phi_{\xi}|^2 (1 + |\xi|^2)^s \geq \text{const} \sum_{\xi} |\xi|^{2l} |\phi_{\xi}|^2 (1 + |\xi|^2)^s$$

よって,

$$\begin{aligned}
 (\|L_0\phi\|_s + \|\phi\|_s)^2 &\geq \|L_0\phi\|_s^2 + \|\phi\|_s^2 \\
 &\geq \sum_{\xi} |\phi_{\xi}|^2 (1 + |\xi|^2)^s (1 + \text{const}|\xi|^{2l}) \\
 &\geq \text{const} \sum |\phi_{\xi}|^2 (1 + |\xi|^2)^{s+l} = \text{const} \|\phi\|_{s+l}^2
 \end{aligned}$$

次に一般の場合を考える. $p \in \mathbb{R}^n$ とする. p の近傍 U で「 U に support をもつすべての $\phi \in \mathcal{P}$ に対して不等式が成立する」ようなものが存在することを証明する (support が U に入るという意味は, 周期により U を平行移動したすべての $\mathbb{R}^n$ の開集合に入るという意味). L_0 を先ほどのような作用素 (定数係数, homog order l) で, L の点 p における主要部 $P_l(D)_p$ から決まるものとする. このとき, 先ほど述べたことを使って,

$$\begin{aligned}
 \|\phi\|_{s+l} &\leq \text{const} (\|L_0\phi\|_s + \|\phi\|_s) \\
 &\leq \text{const} (\|L\phi\|_s + \|(L_0 - L)\phi\|_s + \|\phi\|_s)
 \end{aligned}$$

この const を k として, $\epsilon > 0$ を $0 < \epsilon < 1/(2ck)$ となるものをとる. ここで c は以前述べた不等式

$$\|L\phi\|_s \leq ck' \|\phi\|_{s+l} + c' \|\phi\|_{s+l-1}$$

における c であり n, m, l, s に依存. また, k' は主要項の係数の絶対値を抑える定数であった. そこで, 係数は滑らかな関数であったので, 点 p のまわりの十分小さな近傍 U 上で $L_0 - L$ の主要部の係数の絶対値は ϵ より小さくなるとしてよい. $\tilde{L}$ という周期的微分作用素で U 上では $L_0 - L$ に一致し, $\mathbb{R}^n$ 上で主要部の係数の絶対値が ϵ より小さくなるものを取ってくる. このとき,

$$\underbrace{\|\tilde{L}\phi\|_s}_{k' < \epsilon} \leq c\epsilon \|\phi\|_{s+l} + c' \|\phi\|_{s+l-1} \leq \underbrace{\frac{1}{2k} \|\phi\|_{s+l} + c' \|\phi\|_{s+l-1}}_{\epsilon < 1/(2ck)}$$

が成立する. そこで, $\phi \in \mathcal{P}$ で support が U 内にある場合には, $(L - L_0)\phi = \tilde{L}\phi$ であるので,

$$\begin{aligned}
 \|\phi\|_{s+l} &\leq k (\|L\phi\|_s + \|\tilde{L}\phi\|_s + \|\phi\|_s) \\
 &\leq k \|L\phi\|_s + \frac{1}{2} \|\phi\|_{s+l} + kc' \|\phi\|_{s+l-1} + k \|\phi\|_s
 \end{aligned}$$

また, ソボレフ空間の性質で述べた不等式を思い出せば, $s < s+l-1 < s+l$ なので,

$$\|\phi\|_{s+l-1}^2 \leq \delta \|\phi\|_{s+l}^2 + c(\delta) \|\phi\|_s^2 \Rightarrow \|\phi\|_{s+l-1} \leq \delta^{1/2} \|\phi\|_{s+l} + c(\delta)^{1/2} \|\phi\|_s$$

が成立. δ は任意なので十分小さくとれば,

$$\|\phi\|_{s+l} \leq \text{const} \|L\phi\|_s + \frac{3}{4} \|\phi\|_{s+l} + \text{const} \|\phi\|_s$$

となるので, ϕ が U 内に support を持つ場合には,

$$\|\phi\|_{s+l} \leq c(\|L\phi\|_s + \|\phi\|_s) \quad (a)$$

となる.

T^n を $\mathbb{R}^n$ を $Lat = \{2\pi\xi | \xi \in \mathbb{Z}^n\}$ という格子で割ったトーラスとする. 各点 $p \in \mathbb{R}^n$ に対して, 上で述べた U をとり, 射影することで T^n のカバーがとれる. コンパクトより有限個の部分カバー $U_1, \dots, U_k$ をとり, $\omega_1, \dots, \omega_k$ の 2 乗が対応する 1 の分割となる関数族とする:

$$\sum_{i=1}^k \omega_i^2 = 1$$

また, ω^i は $\mathbb{R}^n$ 上の周期関数とみなせる. そこで, $\phi \in \mathcal{P}$ として,

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{s+l}^2 &= \langle \phi, \phi \rangle_{s+l} = \left\langle \sum_i \omega_i^2 \phi, \phi \right\rangle_{s+l} \\ &= \sum_i \langle \omega_i^2 \phi, \phi \rangle_{s+l} \leq \sum_i \langle \omega_i \phi, \omega_i \phi \rangle_{s+l} + \text{const} \|\phi\|_{s+l} \|\phi\|_{s+l-1} \quad (b) \end{aligned}$$

ここで, 以前述べた次の二つの不等式を利用した.

$$|\langle \omega u, v \rangle - \langle u, \bar{\omega} v \rangle_s| \leq c(\|u\|_s \|v\|_{s-1} + \|v\|_{s-1} \|u\|_s), \quad \|\omega \phi\|_s \leq c'' \|\phi\|_s$$

さて, $\omega_i \phi$ は support を U_i にもつ. また,

$$|\langle L(\omega^2 u), Lu \rangle_s - \|L(\omega u)\|_s^2| \leq \text{const} \|u\|_{s+l} \|u\|_{s+l-1}, \quad (c)$$

$$\|\phi\|_{s+l-1} \leq \delta^{1/2} \|\phi\|_{s+l} + c(\delta)^{1/2} \|\phi\|_s \quad (d)$$

が成立していた. そこで,

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{s+l}^2 &\leq \sum_i \langle \omega_i \phi, \omega_i \phi \rangle_{s+l} + \text{const} \|\phi\|_{s+l} \|\phi\|_{s+l-1} \quad (\because (b)) \\ &\leq \text{const} \sum_i \|L\omega_i \phi\|_s^2 + \text{const} \|\phi\|_s^2 + \text{const} \|\phi\|_{s+l} \|\phi\|_{s+l-1} \quad (\because (a)) \\ &\leq \text{const} \sum_i \langle L(\omega_i^2 \phi), L\phi \rangle_s + \text{const} \|\phi\|_s^2 + \text{const} \|\phi\|_{s+l} \|\phi\|_{s+l-1} \quad (\because (c)) \\ &= \text{const} \|L\phi\|_s^2 + \text{const} \|\phi\|_s^2 + \|\phi\|_{s+l} (\text{const} \|\phi\|_{s+l-1}) \quad (\because \sum \omega_i^2 \phi = \phi) \\ &\leq \text{const} \|L\phi\|_s^2 + \text{const} \|\phi\|_s^2 + \frac{1}{2} \|\phi\|_{s+l}^2 + \text{const} \|\phi\|_{s+l-1}^2 \quad (\text{相加相乗}) \\ &\leq \text{const} \|L\phi\|_s^2 + \text{const} \|\phi\|_s^2 + \frac{3}{4} \|\phi\|_{s+l}^2 + \text{const} \|\phi\|_s^2 \quad (\because (d)) \end{aligned}$$

以上から, $\phi \in \mathcal{P}$ に対して, よって, $u \in H_{s+l}$ に対して,

$$\|u\|_{s+l} \leq c(\|Lu\|_s + \|u\|_s)$$

が成立する. □

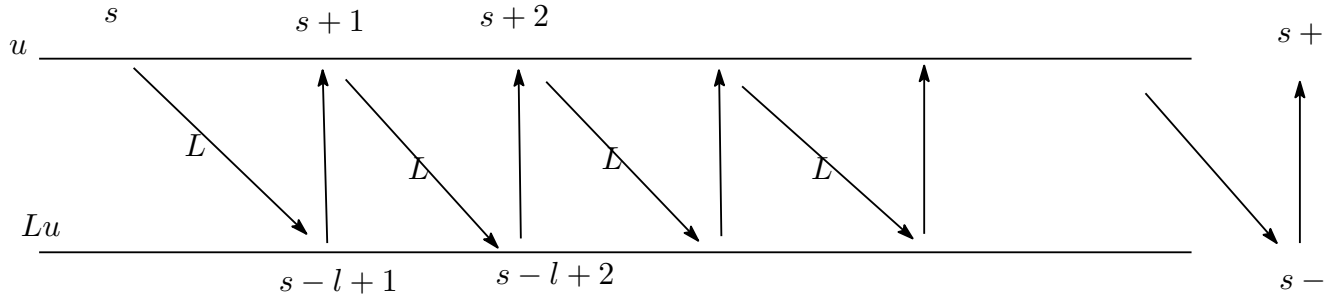
Theorem 3.4.2 (周期的楕円型作用素に対する regularity). L を周期的な l 階の楕円型微分作用素とする. $u \in H_{-\infty}$, $v \in H_t$ で,

$$Lu = v$$

を満たすなら, $u \in H_{t+l}$ となる. このように楕円型微分方程式の解なら微分可能性が上がるのである.

Proof. 次のように $u \in H_s$, $v = Lu \in H_{s-l+1}$ ならば $u \in H_{s+1}$ を示せば十分である.

1. $s \geq t+l$ のときは, $H_s \subset H_{t+l}$ であるので, $u \in H_s$ なら $u \in H_{t+l}$ は (微分方程式を満たさなくても) 明らかである.
2. $s < t+l$ ($s-l < t$) の場合が問題である. $Lu \in H_{s-l}$ であるが, $Lu \in H_t$ と微分可能性が上がっていることに注意する. $s-l+k=t$ となる $k \geq 1$ を取ってくる. $u \in H_s$, $Lu \in H_t$ とする. $u \in H_s$, $Lu \in H_t \subset H_{s-l+1}$ であるので, $u \in H_{s+1}$ である. そこで, $u \in H_{s+1}$, $Lu \in H_t \subset H_{(s+1)-l+1}$ であるので, $u \in H_{s+2}$ である. これを繰り返すことにより, $u \in H_{s+k-1}$ であり, $Lu \in H_t \subset H_{(s+k-1)-l+1}$ であるので, $u \in H_{s+k} = H_{t+l}$ が成立する.



そこで, $u \in H_s$, $v = Lu \in H_{s-l+1}$ ならば $u \in H_{s+1}$ を示そう, $h \in \mathbb{R}^n$ として $h \neq 0$ とする. L^h を L の各微分係数 a を

$$\frac{a(x+h) - a(x)}{|h|}$$

と差分商を取ったものとする. $u \in \mathcal{P}$ に対して, 次が成立する.

$$L(u^h) = (Lu)^h - L^h(T_h(u)) \quad (*)$$

実際,

$$\begin{aligned}
& a_\alpha(x) D^\alpha \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \\
&= \frac{1}{|h|} (a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x+h) - a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x)) \\
&= \frac{1}{|h|} (a_\alpha(x+h)(D^\alpha u)(x+h) - a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x) \\
&\quad - a^\alpha(x+h)(D^\alpha u)(x+h) + a^\alpha(x)(D^\alpha u)(x+h)) \\
&= (Lu)^h - L^h(T_h u)
\end{aligned}$$

となる. そこで $\mathcal{P} \subset H_{-\infty}$ は稠密であり, 作用素は有界 (よって連続) であったので, $(*)$ は $u \in H_{-\infty}$ に対しても成立する.

そこで, Fundamental inequality より,

$$\begin{aligned}
\|u^h\|_s &\leq \text{const} \|L(u^h)\|_{s-l} + \text{const} \|u^h\|_{s-l} \\
&\leq \text{const} \|(Lu)^h\|_{s-l} + \text{const} \|L^h(T_h u)\|_{s-l} + \text{const} \|u^h\|_{s-l}
\end{aligned}$$

作用素 L の係数は周期的であるのでその差分商 L^h の係数は一様に有界である. よって,

$$\|L^h(T_h u)\|_{s-l} \leq \text{const} \|T_h(u)\|_s$$

であり, この定数は h には依存しない. 実際, $|h| \geq \epsilon$ なら

$$\left| \frac{a(x+h) - a(x)}{|h|} \right| \leq |a(x+h) - a(x)| \frac{1}{\epsilon} \leq C$$

であり, $|h| < \epsilon$ でも

$$\frac{a(x+h) - a(x)}{|h|} = (Da)(x) + o(h)$$

であり, ϵ を十分小さくにとっておけば, h によらない定数で抑えることができる.

そこで, $\|u^h\|_s \leq \|u\|_{s+1}$ 及び $\|T_h(u)\|_s = \|u\|_s$ を使って

$$\|u^h\|_s \leq \text{const} \|Lu\|_{s-l+1} + \text{const} \|u\|_s$$

となる. ここで右辺の定数は h に依存しないことに注意する. よって, h によらず $\|u^h\|_s$ が有界であるので, 補題 3.3.7 より $u \in H_{s+1}$ を得る. $\square$

第 4 章

Regularity の証明

4.1 準備

ホッジ理論の証明には, regularity の証明をすればよいが, 多様体上で議論を展開する必要がある. そこで, 多様体上での話を, 1 の分割を使った局所的な話にもっていき, 前章の理論を使えるようにしたい. まずは, そのための記号などの準備を行う.

C^∞ を (周期的とは限らない) 滑らかなベクトル値関数とする.

$$C^\infty := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m \mid f \text{ は滑らか} \}$$

また, C_0^∞ は

$$C_0^\infty := \{f \in C^\infty \mid f \text{ はコンパクトサポートをもつ} \}$$

また, $C_0^\infty(V)$ はそれらのうち V にコンパクトサポートをもつものとする.

C_0^∞ 上の L_2 内積を

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot v$$

として定義. ここで, $u \cdot v$ はエルミート内積を表すことに注意.

$V \subset \mathbb{R}^n$ を開集合で, $\bar{V}$ は 2π -cube に含まれるとしておく. $C_0^\infty(V)$ は周期的に拡張することにより, $\mathcal{P}$ の部分空間とみなす. また, $C_0^\infty(V)$ の L_2 内積は, $\mathcal{P}$ の部分空間とみたときの L_2 内積に一致する. また, それはソボレフ 0 空間 H_0 上の内積に一致したのであった.

L を C^∞ 上の階数 l の楕円型微分作用素とする. ここで, 周期的とは限らないことに注意する. L^* を C_0^∞ 上の L_2 内積に関する形式的随伴作用素とする. つまり, $L = (L_{ij})$ ($L_{ij} = \sum a_{ij}^\alpha D^\alpha$) なら, $L^* = (L_{ij}^*)$ ($L_{ij}^* = \sum D^\alpha \overline{a_{ij}^\alpha}$) であり, L^* も階数 l の楕円型微分作用素である.

Lemma 4.1.1. $p \in \mathbb{R}^n$ とする. p のまわりの十分小さな近傍 V および V 上で L に一致する周期的な楕円型微分作用素 $\tilde{L}$ が存在

Proof. 点 p 上で L と一致する定数係数の楕円型微分作用素を L_0 とする. 点 p において L は楕円型であるので, ある定数 $\epsilon > 0$ が存在して, L_0 の微分係数からのずれが ϵ より小さいような微分係数をもつ任意の微分作用素が楕円型となる (楕円型とは最高次の微分係数 (行列値 C^∞ 関数) が非退化行列であることであつたので).

また, p の十分小さい近傍 U で (2π -cube Q に入り), U 上では L と L_0 の微分係数の差が ϵ より小さくなるようにしておく. $V \subset \bar{V} \subset U$ となる V をとり, C^∞ 関数で,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \in V \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus U \end{cases}$$

となるようなものをとる ($\text{supp} \phi \subset U$). そして,

$$\phi L + (1 - \phi)L_0$$

とすれば, $\mathbb{R}^n$ 上で楕円型である. 実際, V 上では L であり, U^c 上では L_0 である. また $U \setminus V$ 上では $L_0 + \phi(L - L_0)$ で L_0 との微分係数の差は ϵ 以下となる. よって, $\mathbb{R}^n$ 上で楕円型. さらに, Q の境界のところでは L_0 であるので周期的作用素にすることが可能で, 周期的楕円型微分作用 $\tilde{L}$ に拡張で $V \subset Q$ 上では楕円型微分作用素 L に一致するものを得る $\square$

次に, L の形式的随伴作用素 L^* との関係を述べる. まず, $u \in H_s$ (周期的), $\phi \in C_0^\infty(V)$ に対して,

$$\langle \tilde{L}u, \phi \rangle_0 = \langle u, L^*\phi \rangle_0 \quad (4.1)$$

となる.

Proof. H_s ノルムで $\psi_j \rightarrow u$ ($\psi_j \in \mathcal{P}$) となるものを取り,

$$\langle \tilde{L}\psi_j, \phi \rangle_0 = \langle \tilde{L}\psi_j, \phi \rangle = \langle L\psi_j, \phi \rangle = \langle \psi_j, L^*\phi \rangle = \langle \psi_j, L^*\phi \rangle_0$$

となるが,

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{L}u, \phi \rangle_0 - \langle u, L^*\phi \rangle_0| &= |\langle \tilde{L}(u - \psi_j), \phi \rangle_0 - \langle u - \psi_j, L^*\phi \rangle_0| \\ &\leq \|\tilde{L}(u - \psi_j)\|_{s-l} \|\phi\|_{-s+l} + \|u - \psi_j\|_s \|L^*\phi\|_{-s} \\ &\leq \text{const} \|u - \psi_j\|_s \|\phi\|_{-s+l} + \|u - \psi_j\|_s \|L^*\phi\|_{-s} \end{aligned}$$

となる. そこで $j \rightarrow \infty$ とすればよい. $\square$

さて, $u, v \in H_s$ (u, v は周期的. V は cube に入る) として, u, v が V 上で一致するとは

$$\langle u - v, \phi \rangle_0 = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(V)$$

として定義する. s がそれなりに大きい場合は連続関数とみなせ, その場合には上の定義は, 普通の意味で V 上で一致と同じである.

また, 周期的微分作用素 L が V に support を持つとは, L の係数が $C_0^\infty(V) \subset \mathcal{P}$ に入ることと定義する.

Lemma 4.1.2. 周期的微分作用素 L の support が V に入り, $u, v \in H_s$ が V 上で一致するなら,

$$Lu = Lv$$

(in H_{s-t}) が成立する.

Proof.

$$\langle L(u - v), \phi \rangle_0 = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{P}$$

を証明すればよい. そこで, 先ほどのべた $\langle \tilde{L}u, \phi \rangle_0 = \langle u, L^*\phi \rangle_0$ で $\tilde{L}$ を L として, u を $u - v$ とすれば,

$$\langle L(u - v), \phi \rangle_0 = \langle u - v, L^*\phi \rangle_0$$

となるが L^* のサポートも V に入るので, $L^*\phi \in C_0^\infty(V)$ であり, u, v が V 上で一致したので, 右辺はゼロとなる. $\square$

4.2 定理 2.4.1 の証明

ここで, 証明すべき定理を思い出そう.

Theorem 4.2.1 (regularity theorem). $\alpha \in \Omega^p(M)$, l を $\Delta\omega = \alpha$ の弱解とする. このとき, $\omega \in \Omega^p(M)$ で,

$$l(\beta) = \langle \omega, \beta \rangle, \quad \beta \in \Omega^p(M)$$

を満たすものが存在する. よって, $\Delta\omega = \alpha$ を満たす $\omega \in \Omega^p(M)$ が存在.

いろいろな内積を区別するため, $\Omega^p(M)$ 上の内積を

$$\langle \alpha, \beta \rangle' = \int_M \alpha \wedge * \beta$$

と表すことにする.

証明すべきことは, 次である:

(☆) : $f \in \Omega^p(M)$ として, $l' : \Omega^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ を有界線形作用素で, $l'(\Delta^* \phi) = \langle f, \phi \rangle'$ ($\forall \phi \in \Omega^p(M)$) とする. このとき, $u \in \Omega^p(M)$ で $l'(t) = \langle u, t \rangle'$ ($\forall t \in \Omega^p(M)$) となるものが存在.

これがわかれば, $\Delta u = f$ を得る. 実際,

$$\langle \Delta u, \phi \rangle' = \langle u, \Delta^* \phi \rangle' = l'(\Delta^* \phi) = \langle f, \phi \rangle' \quad \forall \phi \in \Omega^p(M)$$

となる.

この定理を局所的な問題にしたい. (U, γ) を M の局所座標で $\gamma(U) = \mathbb{R}^n$ となるものにとる. この座標系で p -form の bundle を自明化し, $\Omega^p(U)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$ 値関数とみなす. 逆に, C_0^∞ はゼロで拡張すれば M 上の p -form にできる.

ラプラシアン Δ は, $\gamma(U) = \mathbb{R}^n$ 上で2階の楕円型微分作用素 L になる (楕円型であることは後で証明する). L^* を C_0^∞ での L_2 内積に関する L の形式的随伴作用素とする (Δ^* に一致するわけではない).

M 上の p -form 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ は自然に複素数値 p -form のエルミート内積へ拡張できる. つまり,

$$\langle u_1 + iu_2, v_1 + iv_2 \rangle' = \langle u_1, v_1 \rangle' + \langle u_2, v_2 \rangle' + i(\langle u_2, v_1 \rangle' - \langle u_1, v_2 \rangle')$$

とすればよい. そして, このエルミート内積から C_0^∞ 上のエルミート内積を得る. 普通の L_2 内積とは異なるが,

$$\langle \phi, \psi \rangle' = \langle \phi, A\psi \rangle \quad \phi, \psi \in C_0^\infty$$

となる C^∞ な行列値関数 A が存在する. 内積はどちらも正定値であったので, A は正定値のエルミート行列であり, A^{-1} が存在して, それも正定値エルミートである.

L の $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ の内積に関する形式的随伴作用素を Δ^* とすれば,

$$L^* \phi = A \Delta^* A^{-1} \phi, \quad \phi \in C_0^\infty$$

である.

Proof.

$$\begin{aligned} \langle L^* \phi, \psi \rangle &= \langle \phi, L\psi \rangle = \langle A^{-1} \phi, L\psi \rangle' \\ &= \langle \Delta^* A^{-1} \phi, \psi \rangle' = \langle A \Delta^* A^{-1} \phi, \psi \rangle \quad \forall \psi \in C_0^\infty \end{aligned}$$

となるので, $L^* \phi = A \Delta^* A^{-1} \phi$. □

線形汎関数 $l : \Omega^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ を複素数値微分形式上の複素線形汎関数に拡張しておき, $\gamma(U) = \mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{C}^m$ 値 smooth 関数 (with compact support) 全体 C_0^∞ 上の複素線形汎関数を

$$l(\phi) = l'(A^{-1}\phi), \quad l : C_0^\infty \rightarrow \mathbb{C}$$

とする.

このとき次がわかる

(☆☆) : $p \in \mathbb{R}^n$ とする. このとき p の近傍 W_p および $u_p \in \mathcal{P}$ で,

$$l(t) = \langle u_p, t \rangle \quad \forall t \in C_0^\infty(W_p)$$

となるものが存在する.

まず, これが成立すれば, 証明すべき (☆) が成立することを見る. (☆☆) が成立したとすると, 各点 $p, q \in \mathbb{R}^n$ に対して, 弱解 l の解 $u_p, u_q \in \mathcal{P}$ をとる. このとき, $\langle u_p - u_q, t \rangle = 0$ ($\forall t \in C_0^\infty(W_p \cap W_q)$) となる. 各点 $r \in W_p \cap W_q$ に対して, r の近傍 $V \subset W_p \cap W_q$ にコンパクトサポートが含まれる t を任意にとれるので, $u_p(r) = u_q(r)$ がわかる. つまり, $u_p|_{W_p \cap W_q} = u_q|_{W_p \cap W_q}$ を得る. そこで, 各点 $p \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\{W_p, u_p\}_{p \in \mathbb{R}^n}$ をとって, $u \in C^\infty$ を

$$u|_{W_p} = u_p|_{W_p}$$

として定める. さて, この $\mathbb{R}^n = \cup_p W_p$ に付随した 1 の分割を $\{\phi_i\}$ とすると, $t \in C_0^\infty$ に対して,

$$l(t) = \sum_i l(\phi_i t) = \sum_i \langle u, \phi_i t \rangle = \langle u, t \rangle$$

となる.

さて, $\phi \in \Omega^p(M)$ で座標近傍 U ($\gamma(U) = \mathbb{R}^n$) に support を持つものとして,

$$l'(\phi) = l(A\phi) = \langle u, A\phi \rangle = \langle u, \phi \rangle'$$

となる $u \in \Omega(U)$ が存在する. $M = \cup U_\lambda$ として, 各座標近傍で $l'(\phi) = \langle u_\lambda, \phi \rangle'$ ($\forall \phi \in \Omega_0^p(U_\lambda)$) となる u_λ をとる. このとき, $U_\lambda \cap U_\mu$ 上で $u_\lambda = u_\mu$ となる. そこで, $u \in \Omega^p(M)$ を

$$u|_{U_\lambda} = u_\lambda$$

として定める. $\{U_\lambda\}$ に付随した 1 の分割 $\{\phi_\lambda\}$ をとれば, $t \in \Omega^p(M)$ に対して, $\phi_\lambda t \in \Omega_0^p(U_\lambda)$ であり,

$$l'(t) = \sum_\lambda l'(\phi_\lambda t) = \sum_\lambda \langle u, \phi_\lambda t \rangle' = \langle u, t \rangle' \quad \forall t \in \Omega^p(M)$$

となる．このように， M 上の C^∞ p -form u で， $l'(t) = \langle u, t \rangle'$ ($\forall t \in \Omega^p(M)$) を得る．以上から (☆) が成立する．

(☆☆) の証明： $p \in \mathbb{R}^n$ を固定して， p を含む 2π -cube Q' をとり， $p \in V \subset \bar{V} \subset Q'$ となる開集合 V をとる，そして，

$$\tilde{l} = l|_{C_0^\infty(V)}$$

とする．このとき， $\tilde{l}$ は $C_0^\infty(V)$ 上の有界線形作用素である．

Proof. $\bar{V}$ はコンパクトであるので，行列ノルム $\|A_x^{-1}\|$ は $\bar{V}$ 上で最大値をもつ．そこで， l' が有界線形作用素という仮定を使えば，

$$\begin{aligned} |\tilde{l}(\phi)| &= |l(\phi)| = |l'(A^{-1}\phi)| \leq \text{const} \|A^{-1}\phi\|' \\ &= \text{const} \sqrt{\langle A^{-1}\phi, A^{-1}\phi \rangle'} = \text{const} \sqrt{\langle \phi, A^{-1}\phi \rangle} \\ &\leq \text{const} \sqrt{\|\phi\| \|A^{-1}\phi\|} \leq \text{const} \|\phi\| \quad \forall \phi \in C_0^\infty(V) \end{aligned}$$

□

さらに，

$$\tilde{l}(L^*\phi) = l'(A^{-1}L^*\phi) = l'(\Delta^*A^{-1}\phi) = \langle f, A^{-1}\phi \rangle' = \langle f, \phi \rangle \quad \phi \in C_0^\infty(V) \quad (4.2)$$

となる．このように， $\tilde{l}$ は $Lu = f$ の弱解である．

$\tilde{l}$ は $C_0^\infty(V)$ 上で有界であるので， $C_0^\infty(V) \subset \mathcal{P} \subset H_0$ とみなして，Hahn-Banach の定理 (定理 2.4) から， $\tilde{l}$ はヒルベルト空間 H_0 上の有界線形作用素へ拡張できる．

そこで，ヒルベルト空間上ではリースの表現定理を使えるので， $\tilde{u} \in H_0$ で，

$$\tilde{l}(t) = \langle \tilde{u}, t \rangle_0 \quad \forall t \in H_0 \quad (4.3)$$

となるものが存在する (H_0 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $C_0^\infty(V)$ では L_2 内積に一致した)．よって，

$$\langle \tilde{u}, L^*\phi \rangle = \tilde{l}(L^*\phi) = \langle f, \phi \rangle \quad \phi \in C_0^\infty(V)$$

となる．このように，弱微分の視点で方程式 $Lu = f$ は $\tilde{u} \in H_0$ という解をもつ．

ここでリースの表現定理の復習をしておく．

Theorem 4.2.2 (リースの表現定理). H をヒルベルト空間とし， $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ (H が $\mathbb{C}$ 上ヒルベルトなら $L : H \rightarrow \mathbb{C}$) を有界線形汎関数とする．有界とは

$$\|L\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|Lx|}{\|x\|} < \infty$$

のこと．このとき唯一つの $y \in H$ が存在して，

$$L(x) = (x, y), \quad \forall x \in H$$

となる．さらに， $\|L\| = \|y\|$ となる．

Proof. $N = \ker L$ とする. $N = H$ なら, $y = 0$ とすればよい. $N \neq H$ のときを考える. N は閉集合である. 実際, $x_n \in N$ として, $x_n \rightarrow x$ とすれば, 有界と連続は同値であったので, $Lx = 0$ となる. よって, $x \in N$ である. N が閉より $N^\perp$ も閉ベクトル空間 (ヒルベルト部分空間) であり, $H = N \oplus N^\perp$ が成立する ($H = N + N^\perp$ を示すとき, H の完備性を用いる). そこで, $N \neq H$ であるので, ある $z \neq 0$ で, $z \in N^\perp$ が存在する. このとき $Lz \neq 0$ である. さらに, $x \in H$ に対して,

$$L\left(x - \frac{Lx}{Lz}z\right) = Lx - \frac{Lx}{Lz}Lz = 0$$

である. よって, $x - \frac{Lx}{Lz}z \in N$ となり,

$$\left(x - \frac{Lx}{Lz}z, z\right) = 0$$

となり,

$$(x, z) = \frac{Lx}{Lz}\|z\|^2$$

となる. そこで,

$$y := \frac{\overline{Lz}}{\|z\|^2}z$$

とすれば (x には依存していない),

$$(x, y) = \left(x, \frac{\overline{Lz}}{\|z\|^2}z\right) = \frac{Lx}{Lz}\|z\|^2 \frac{Lz}{\|z\|^2} = Lx$$

となる. これがもとめる y である. また y がただ一つであることを証明する. $Lx = (x, y_1) = (x, y_2)$ とすれば,

$$(x, y_1 - y_2) = 0, \quad \forall x$$

である. $x = y_1 - y_2$ とすれば, $\|y_1 - y_2\| = 0$ であるので $y_1 = y_2$ となる. (特に, $z, z' \in N^\perp$ のとき, $\frac{\overline{Lz}}{\|z\|^2}z = \frac{\overline{Lz'}}{\|z'\|^2}z'$ となるので, $N^\perp$ は一次元ベクトル空間である).

さて, シュワルツの不等式から, 任意の $x \neq 0$ に対して, $\frac{|(x, y)|}{\|x\|} \leq \|y\|$ であるので,

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, y)|}{\|x\|} \leq \|y\|$$

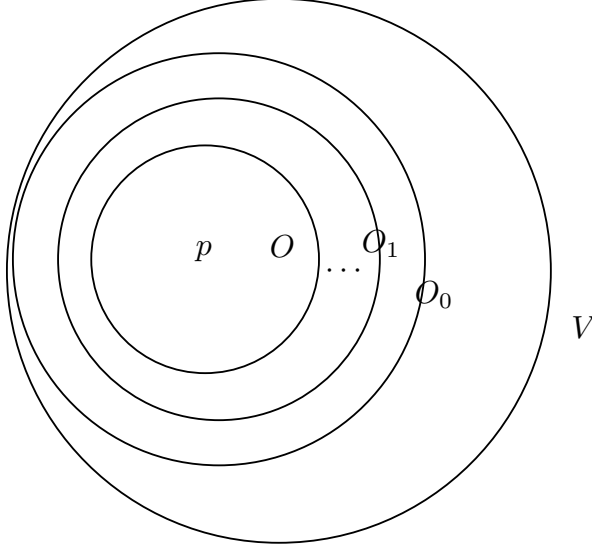
となる. 一方,

$$\|y\|^2 = (y, y) = Ly \leq \|L\|\|y\|$$

をあわせれば, $\|y\| = \|L\|$ となる. □

そこで, p の十分小さな近傍上で $\tilde{u} \in H_0$ と一致する $\mathcal{P}$ の元 u の存在を言えばよい.

p の近傍 O_0 で $\bar{O}_0 \subset V$ となり, O_0 上で L に一致する周期的楕円型作用素 $\tilde{L}$ が存在した. さらに p の近傍 O で, $\bar{O} \subset O_0$ となるものを取り, p の開近傍列 $\{O_n\}_n$ で, $\bar{O} \subset O_n$, $\bar{O}_n \subset O_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) となるような列をとる.



各自然数 n に対して, 滑らかな関数 ω_n を O_n 上で 1 で, $0 \leq \omega_n(x) \leq 1$ かつ support が O_{n-1} に入るものをとる. そして,

$$v_1 = \omega_1 \tilde{u} \in H_0$$

とすれば,

$$\tilde{L}v_1 = \tilde{L}\omega_1 \tilde{u} = \omega_1 \tilde{L}\tilde{u} + M_1 \tilde{u}, \quad M_1 = \tilde{L}\omega_1 - \omega_1 \tilde{L}$$

となる. ここで, 周期的楕円型微分作用素に対する regularity を適用したいので, $\omega_1 \tilde{L}\tilde{u} + M_1 \tilde{u}$ がどのソボレフ空間に入るかを知りたい. まず,

$$\omega_1 \tilde{L}\tilde{u} = \omega_1 f$$

が成立することを示す. これが成立すれば, 右辺 $\omega_1 f$ は滑らかなので, $\omega_1 \tilde{L}\tilde{u} \in C_0^\infty(O_0)$ となる. とくに, 任意の s に対して, $\omega_1 \tilde{L}\tilde{u} \in H_s$ となる

Proof. $\omega_1 \tilde{L}\tilde{u}, \omega_1 f$ に対して, ある s があって H_s に属している. これが H_s 上で一致するためには,

$$\langle \omega_1 \tilde{L}\tilde{u} - \omega_1 f, \phi \rangle_0 = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{P}$$

が成立することを証明すればよい. そこで,

$$\begin{aligned} \langle \omega_1 \tilde{L}\tilde{u} - \omega_1 f, \phi \rangle_0 &= \langle \omega_1 \tilde{L}\tilde{u}, \phi \rangle_0 - \langle \omega_1 f, \phi \rangle_0 \\ &= \langle \tilde{L}\tilde{u}, \omega_1 \phi \rangle_0 - \langle f, \omega_1 \phi \rangle_0 \\ &= \langle \tilde{u}, L^* \omega_1 \phi \rangle_0 - \tilde{l}(L^* \omega_1 \phi) \quad \text{第1項 by (4.1), 第2項 by (4.2)} \\ &= \tilde{l}(L^* \omega_1 \phi) - \tilde{l}(L^* \omega_1 \phi) = 0 \quad \text{by (4.3)} \end{aligned}$$

となる. $\omega_1 \tilde{L}\tilde{u}, \omega_1 f$ は H_s の元として一致しているが, $\omega_1 f$ が滑らかであることから $\omega_1 \tilde{L}\tilde{u}$ も滑らかである. $\square$

Remark 4.2.1. 我々としては $\omega_1 \tilde{L}\tilde{u} = \omega_1 f$ ではなく, $\tilde{L}\tilde{u} = f$ が言えると嬉しいのであるが (regularity から $\tilde{u}$ が滑らかになるので), そこまでうまはいかない. そこで, 考えている近傍 V より少し小さい近傍をとる必要がある. 上の証明をみればわかるように, $\tilde{l}$ は, $C_0^\infty(V)$ 上で定義しているので, $\omega_1 f$ をかける必要がある. そこで, $\omega_1 \tilde{L}\tilde{u} = \omega_1 f$ を得るのであるが, これだと元の式と異なってしまう. そこで, 帰納的に考えて, 近傍を少しずつ縮めていくことになる.

さて, L によって $\tilde{L}$ は 2 階微分作用素であるので, M_1 は一階微分作用素である. よって $M_1\tilde{u} \in H_{-1}$ となる. そこで, $\omega_1 \tilde{L}\tilde{u} + M_1\tilde{u}$ は H_{-1} に入る. そこで, 周期的楕円型微分作用素 $\tilde{L}$ に対する regularity により, $v_1 \in H_1$ となる.

さて,

$$v_2 = \omega_2 \tilde{u}$$

とすると,

$$\tilde{L}_2 v_2 = \omega_2 \tilde{L}\tilde{u} + M_2 \tilde{u} = \omega_2 \tilde{L}\tilde{u} + M_2 v_1$$

となる. ここで, $M_2 = \tilde{L}\omega_2 - \omega_2 \tilde{L}$ としている. そして, M_2 は O_1 内に support をもち, O_1 上で $\tilde{u} = v_1 \in H_1$ となっているので補題 4.1.2 を使えば, $M_2 \tilde{u} = M_2 v_1$ が従う. 特に, $M_2 v_1 \in H_0$ となる. 先ほどと同様にして, 右辺は H_0 に入ることから $v_2 \in H_2$ となる. これを繰り返して,

$$v_n = \omega_n \tilde{u} \quad v_n \in H_n$$

という列を得る. 最後に, p の近傍 W_p で $\bar{W}_p \subset O$ となるものをとる. ω を W_p 上で $1, 0 \leq \omega(x) \leq 1$, support が O に入るものをとる.

$$\omega \tilde{u} = \omega \omega_n \tilde{u} \quad n = 1, 2, \dots$$

となる. そこで, $\omega \tilde{u} \in H_n$ ($n = 1, 2, \dots$). ソボレフの補題から $\omega \tilde{u}$ は C^∞ 関数 $u \in \mathcal{P}$ となる.

このように, $\tilde{l}(t) = \langle \tilde{u}, t \rangle_0$ を満たす $\tilde{u} \in H_0$ に対して, p の十分小さい近傍 W_p および $u \in \mathcal{P}$ が存在して, W_p 上で $\tilde{u} = u$ となる.

そして, $t \in C_0^\infty(W_p)$ なら, $\omega t = t$ であるので,

$$l(t) = \tilde{l}(t) = \langle \tilde{u}, t \rangle_0 = \langle \tilde{u}, \omega t \rangle_0 = \langle \omega \tilde{u}, t \rangle_0 = \langle u, t \rangle$$

となる, よって (☆☆) が証明された.

この証明から次のことがわかる. 先ほど述べたように, $\tilde{u} \in H_0$ は,

$$\langle \tilde{u}, L^* \phi \rangle = \tilde{l}(L^* \phi) = \langle f, \phi \rangle \quad \phi \in C_0^\infty(V)$$

を満たすのであった。普通の微分方程式のテキストでは、このような $\tilde{u}$ を $Lu = f$ の弱解とよぶ。上でのべたことは、 f の局所的滑らかさから、弱解 $\tilde{u}$ の局所的滑らかさが従うことである（楕円型微分作用素の **regularity**）。局所的な話であるので、 M がコンパクトでなくても完備性を仮定しておけば、楕円型微分作用素の **regularity** は従うことになる。

4.3 定理 2.4.2 の証明

次にもうひとつの証明すべき定理を述べておく。

Theorem 4.3.1. $\{\alpha_n\}$ を滑らかな p -form の列で、 $\|\alpha_n\| \leq C$ および $\|\Delta\alpha_n\| \leq C$ と有界であるとする。このとき、 $\{\alpha_n\}$ は $\Omega^p(M)$ 内でコーシー部分列をもつ。

各点 $m \in M$ に対して、 m の近傍 U_m で「任意の $\phi \in C^\infty(M)$ で $\text{support}(\phi) \subset U_m$ に対して、 $\{\phi\alpha_n\}$ がコーシー部分列をもつ」となるものが存在ことを示せばよい。

Proof. $M = \cup_m U_m$ に対して、 M コンパクトより有限個の開被覆をとる。 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ を付随した 1 の分割とする。任意の $j = 1, \dots, N$ に対して、 $\phi_j\alpha_{n_k}$ がコーシー列となるような部分列 $\{\alpha_{n_k}\}$ をとれば、

$$\|\alpha_{n_k} - \alpha_{n_l}\| = \left\| \sum_{j=1}^N \phi_j(\alpha_{n_k} - \alpha_{n_l}) \right\| \leq \sum_{j=1}^N \|\phi_j\alpha_{n_k} - \phi_j\alpha_{n_l}\|$$

となる。 □

さて、記号はこれまでの記号を使おう。 M 上の p -form 上のノルムおよび対応する $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ のノルムを $\|\cdot\|'$ と書くことにする。 C_0^∞ 上の通常ノルムは $\|\cdot\|$ とする。 $m \in M$ を含む座標近傍をとり m が $p \in \mathbb{R}^n$ に移るとする。 p の近傍 O_0 をとり、 support が O_0 に含まれるような実 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 関数 ϕ をとる。ここで、 O_0 は、 $O_0 \subset \overline{O_0} \subset V \subset \overline{V} \subset Q'$ を満たし、 Δ の局所座標表示 L に対して、周期的楕円型作用素 $\tilde{L}$ が存在して、 O_0 上で $L = \tilde{L}$ となるもの。

そこで、「 $\mathcal{P}$ の列 $\{\phi\alpha_n\}$ が、0 ノルムでコーシー部分列 $\{\phi\alpha_{n_k}\}$ を持つこと」を示せばよい。なぜなら、 $C_0^\infty(O_0)$ 上では、0-norm と L_2 ノルムは一致し、それらは $C_0^\infty(O_0)$ 上では $\|\cdot\|'$ と同値なノルムであったからである。レリッヒの補題（定理 3.3.5）から、 $\{\phi\alpha_n\}$ が 0-ノルムでコーシー部分列をもつためには、 $\{\phi\alpha_n\}$ が H_1 で有界であることを示せば十分である。

Δ の局所座標での表示を L 、 O_0 で一致する周期的微分作用素を $\tilde{L}$ とすれば、Fundamental

mental inequality (定理 3.4.1) より

$$\begin{aligned}\|\phi\alpha_n\|_1 &\leq \text{const}(\|\tilde{L}\phi\alpha_n\|_{-1} + \|\phi\alpha_n\|_{-1}) \\ &= \text{const}(\|L\phi\alpha_n\|_{-1} + \|\phi\alpha_n\|_{-1}) \\ &\leq \text{const}\|\phi L\alpha_n\|_{-1} + \text{const}\|(L\phi - \phi L)\alpha_n\|_{-1} + \text{const}\|\phi\alpha_n\|_{-1}\end{aligned}$$

まず, 右辺第一項目の評価は,

$$\begin{aligned}\|\phi L\alpha_n\|_{-1} &\leq \|\phi L\alpha_n\|_0 = \|\phi L\alpha_n\| \quad (L_2 \text{ ノルムと } H_0 \text{ ノルムは一致}) \\ &\leq \text{const}\|\phi L\alpha_n\|' \quad (\|\cdot\| \text{ と } \|\cdot\|' \text{ は同値なノルム}) \\ &\leq \text{const}\|\phi\Delta\alpha_n\|' \leq \|\Delta\alpha_n\|'\end{aligned}$$

となる.

次に, 右辺第二項目の評価をする. $\tau \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ で V に support をもち, O_0 上で 1 で, $0 \leq \tau \leq 1$ となるものをとる. このとき, ϕ は O_0 に support をもつので,

$$(L\phi - \phi L)\alpha_n = (L\phi - \phi L)(\tau\alpha_n)$$

となる. そこで, $L\phi - \phi L$ は一階微分作用素であるので (対応する周期的な作用素も同じ記号で書く),

$$\begin{aligned}\|(L\phi - \phi L)\alpha_n\|_{-1} &= \|(L\phi - \phi L)(\tau\alpha_n)\|_{-1} \\ &\leq \text{const}\|\tau\alpha_n\|_0 = \text{const}\|\tau\alpha_n\| \\ &\leq \text{const}\|\tau\alpha_n\|' \leq \text{const}\|\alpha_n\|'\end{aligned}$$

となる.

最後に, 右辺第三項目の評価をする. $t < s$ なら $\|u\|_t \leq \|u\|_s$ であったので,

$$\|\phi\alpha_n\|_{-1} \leq \|\phi\alpha_n\|_0 = \|\phi\alpha_n\| \leq \text{const}\|\phi\alpha_n\|' \leq \text{const}\|\alpha_n\|'$$

となる.

以上を合わせると,

$$\|\phi\alpha_n\|_1 \leq \text{const}(\|\Delta\alpha_n\|' + \|\alpha_n\|')$$

となる. 仮定より右辺は有界であるので, $\{\phi\alpha_n\}$ は H_1 で有界である. よって, レリッヒの補題から, 定理が証明された.

4.4 Laplace-Beltrami 作用素の楕円型性

Laplace-Beltrami 作用素 Δ が楕円型であることを証明する. つまり, 各座標系で楕円型微分作用素であることを証明する.

U, V, W を有限次元の内積が入った空間として,

$$U \xrightarrow{A} V \xrightarrow{B} W$$

が完全系列とする. $A^* : V \rightarrow U$, $B^* : W \rightarrow V$ を随伴作用素とすれば, $B^*B + AA^* : V \rightarrow V$ は同型写像となる. 逆に, 複体 (つまり $BA = 0$) に対して, $B^*B + AA^* : V \rightarrow V$ が同型なら, 完全系列である.

Proof. $v \neq 0 \in V$ として, $(B^*B + AA^*)v \neq 0$ を示そう.

$$\langle (B^*B + AA^*)v, v \rangle = \langle Bv, Bv \rangle + \langle A^*v, A^*v \rangle \geq 0$$

となる. よって, $Bv \neq 0$ とすれば, $(B^*B + AA^*)v \neq 0$ である. $Bv = 0$ とすれば, 完全性から $v \in \text{Image}(A)$ である. A^* は $\text{Image}(A)$ 上では単射である ($0 = (A^*Av, v) = (Av, Av)$ なら $Av = 0$). そこで, $v \neq 0$ より, $A^*v \neq 0$ となる. よって, $(B^*B + AA^*)v \neq 0$.

次に, $BA = 0$ かつ $B^*B + AA^*$ が同型写像と仮定する. $BA = 0$ より, $A^*B^* = 0$ である. よって,

$$\text{Image}(A) \subset \ker(B), \quad \text{Image}(B^*) \subset \ker A^*$$

となる. また,

$$V = \ker A^* \oplus \text{Image}(A) = \ker B \oplus \text{Image}(B^*)$$

である. そこで, $v \in \ker B$ に対して,

$$v = v_1 + v_2 \in \ker A^* \oplus \text{Image}(A)$$

となるが, $Bv_2 = 0$ であるので, $Bv_1 = 0$ を得る. よって, $v_1 \in \ker B \cap \ker A^*$ となる. $(B^*B + AA^*)v_1 = 0$ となり, $B^*B + AA^*$ が同型写像なので $v_1 = 0$ となる. よって, $v = v_2 \in \text{Image}(A)$ となるので, $\ker B \subset \text{Image}(A)$ が成立する. $\square$

これを次の場合で考える: $m \in M$ を固定して,

$$U = \Lambda^{p-1}(M)_m, \quad V = \Lambda^p(M)_m, \quad W = \Lambda^{p+1}(M)_m$$

として, それぞれの内積をとっておく. $\xi \neq 0 \in T_m^*(M)$ に対して,

$$\Lambda^{p-1}(M)_m \xrightarrow{\xi \wedge} \Lambda^p(M)_m \xrightarrow{\xi \wedge} \Lambda^{p+1}(M)_m$$

を考えると, これは完全系列である.

Exercise 4.4.1. 完全系列であることを示せ.

また, この $\xi \wedge : \Lambda^p(M)_m \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)_m$ の随伴作用素は

$$(-1)^{np} * \xi \wedge * : \Lambda^{p+1}(M)_m \rightarrow \Lambda^p(M)_m$$

となる.

Proof.

$$\langle \xi \wedge \phi, \psi \rangle vol = \xi \wedge \phi \wedge * \psi,$$

$$\begin{aligned} \text{一方 } \langle \phi, (-1)^{np} * \xi \wedge * \psi \rangle vol &= (-1)^{np} \phi \wedge *^2 \xi \wedge * \psi \\ &= (-1)^{np} (-1)^{(n-p)(n-(n-p))} \phi \wedge \xi \wedge * \psi \\ &= (-1)^{p^2+p} \xi \wedge \phi \wedge * \psi \end{aligned}$$

□

そこで,

$$(\xi \wedge)^*(\xi \wedge) + (\xi \wedge)(\xi \wedge)^* = (-1)^{np} * \xi \wedge * \xi \wedge + (-1)^{n(p-1)} \xi \wedge * \xi \wedge *$$

は, $\Lambda^p(M)_m$ 上で同型である.

さて, Δ が各座標系で楕円型となることを示そう. つまり, 各点 $m \in M$ において, 「 $\alpha(m) \neq 0$ となる任意の C^∞ 微分形式 α 」と「 $\phi(m) = 0$ かつ $d\phi(m) \neq 0$ となる C^∞ 関数 ϕ 」に対して

$$\Delta(\phi^2 \alpha)(m) \neq 0$$

が成立することを言えばよい.

$d\phi = \xi \in T_m^*(M)$, α を p -form とする. また,

$$\Delta = (-1)^{n(p+1)+1} d * d * + (-1)^{np+1} * d * d$$

となる. そこで, $\phi(m) = 0$ を用いれば,

$$\begin{aligned} d * d * (\phi^2 \alpha)(m) &= (d * d(\phi^2) * \alpha)(m) = (2d * \phi(d\phi) * \alpha)(m) \\ &= (2(d\phi) * (d\phi) * \alpha)(m) = 2\xi \wedge * \xi \wedge * (\alpha(m)) \end{aligned}$$

同様に

$$* d * d(\phi^2 \alpha)(m) = 2 * \xi \wedge * \xi \wedge (\alpha(m))$$

となるので,

$$\Delta(\phi^2 \alpha)(m) = -2\{(-1)^{np} * \xi \wedge * \xi \wedge + (-1)^{n(p-1)} \xi * \wedge \xi * \wedge\}(\alpha(m))$$

となり, $\alpha(m) \neq 0$ なら $\Delta(\phi^2 \alpha)(m) \neq 0$. よって, Δ は楕円型である.

Remark 4.4.1. $\Lambda^p(M)_m$ 上で, $\alpha(m) = v$ となる p -form α および $\phi(m) = 0$ かつ $d\phi(m) = \xi$ となる C^∞ 関数 ϕ に対して,

$$\sigma_\Delta(\xi)(v) := \frac{i^2}{2!} \Delta(\phi^2 \alpha)(m), \quad v \in \Lambda^p(M)_m$$

と定義する. この $\sigma_\Delta(\xi)(v)$ は ξ, v にのみ依存し, ϕ, α の取り方にはよらない. この $\sigma_\Delta(\xi)$ は Δ の主表象 (**principal symbol**) とよばれる. また, Δ から導かれる $\mathbb{R}^n$ 上の微分作用素 L が楕円型であることは, $\sigma_\Delta(\xi)$ が各点 $m \in M$ および各 $\xi \neq 0 \in T_m^*(M)$ に対して, 非退化であることと同値である.

同様にして d の表象 $\sigma_d(\xi) = \xi \wedge$ であり, δ の表象は $\xi \wedge$ の随伴写像であることがわかる (これらは楕円型ではない).

Exercise 4.4.2. d の表象 $\sigma_d(\xi) = \xi \wedge$ であり, δ の表象は $\xi \wedge$ の随伴写像となることを示し, これらが楕円型ではないことを証明せよ.

4.5 一般の楕円型微分作用素

これまで, $\Delta : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M)$ という微分作用素に対する regularity について証明したが. その証明方法は, 一般の楕円型微分作用素 L でも成立する. 実際, これまでの述べたことを Δ を一般の楕円型微分作用に置き換えればよい (そのために, 我々は Δ の形式的随伴をあえて Δ^* と書いていた),

M をコンパクト向き付多様体とする. E, F を実または複素ベクトル束として, $\Gamma(E), \Gamma(F)$ を滑らかな切断の空間とする.

Definition 4.5.1. 1. 線形写像 $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ が l 階の微分作用素とは, 任意の局所自明化したときに, L が線形偏微分作用素となること:

$$L = \sum_{[\alpha] \leq l} L_\alpha(x) D^\alpha$$

2. L が楕円型とは, 局所的に楕円型であること (このとき E, F のベクトル束としてのランクは一致する): 局所自明化したとき,

$$\sigma_\xi(L) := \sum_{[\alpha]=l} L_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad \xi \in T_x^*(M)$$

とする. これは well-defined であり, L の主表象 $\sigma(L) \in \Gamma(S^l(TM) \otimes \text{Hom}(E, F))$ が定まる. 楕円型とは $\forall x \in M, \forall \xi \neq 0, \sigma_\xi(L) : E_x \rightarrow F_x$ が同型のこと.

Remark 4.5.1. 主表象は, $\phi(x) = 0$ かつ $d\phi(x) = \xi$ となる関数に対して,

$$\sigma_\xi(L)\alpha = \frac{i^l}{l!} L(\phi\alpha)$$

としてもよい.

Exercise 4.5.1. 主表象の二つの定義が一致することを証明せよ.

また, E, F には fiber に内積が入っているとして, M にリーマン計量と向きを入れておく. このとき, $\Gamma(E)$ 上の内積を

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_M \langle \phi, \psi \rangle_x dvol$$

と定義する. このとき, L の形式的随伴作用素 $L^* : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(E)$ を

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L^*\psi \rangle \quad \forall \phi \in \Gamma(E), \psi \in \Gamma(F)$$

として定義する. これは l 階の微分作用素となる. そして, L が楕円型なら L^* も楕円型である.

Exercise 4.5.2. 次を示せ.

- $\sigma_\xi(P + Q) = \sigma_\xi(P) + \sigma_\xi(Q)$.
- $\sigma_\xi(PQ) = \sigma_\xi(P)\sigma_\xi(Q)$.
- $\sigma_\xi(P^*) = \sigma_\xi(P)^*$.

このとき, ラプラス作用素の場合と同様にして次が成立する.

Theorem 4.5.3 (regularity theorem). $\alpha \in \Gamma(F)$ として, $l : \Gamma(E) \rightarrow \mathbb{R}$ を $L\omega = \alpha$ の弱解とする. つまり, l は有界線形汎関数であり,

$$l(L^*\phi) = \langle \alpha, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \Gamma(F)$$

とする. このとき, $\omega \in \Gamma(E)$ で $l(\beta) = \langle \omega, \beta \rangle$ ($\forall \beta \in \Gamma(E)$) となるものが存在する. 特に, $\langle L\omega, \beta \rangle = \langle \omega, L^*\beta \rangle = l(L^*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle$ となるので, $L\omega = \alpha$ となる.

同様のことが L^* に対しても成立する.

Theorem 4.5.4. $\{\alpha_n\}$ を $\Gamma(E)$ の列で, $\|\alpha_n\| \leq C$ および $\|L\alpha_n\| \leq C$ と有界であるとする. このとき, $\{\alpha_n\}$ は $\Gamma(E)$ 内のコーシー列である. 同様のことが L^* に対しても成立する.

Theorem 4.5.5. $\ker L, \ker L^*$ は有限次元である.

Proof. 証明はラプラス作用素のときと同様。 $\square$

Remark 4.5.2. そこで、楕円型微分作用の指数を

$$\text{index}(L) := \dim \ker L - \dim \ker L^*$$

と定義する． L を適当なソボレフ空間の間の有界線形作用素と見たとき， L はフレドホルム作用素となるが，楕円型微分作用の指数はフレドホルム指数とよばれるものである． M, E, F の計量の入れ方に依存するよう見えるのだが，実は， M, E, F 及び L の主表象（ある bundle の切断）から決まる微分位相不変量である．それを述べているのが，Atiyah-Singer の指数定理であり， $\text{index}(L)$ は M, E, F の特性類の M 上での積分として書ける．

Theorem 4.5.6. 次の直交分解が成立する．

$$\Gamma(E) = L^*(\Gamma(F)) \oplus \ker L, \quad \Gamma(F) = L(\Gamma(E)) \oplus \ker L^*$$

さらに， $L\omega = \alpha$ が解をもつための必要十分条件は， $\alpha \in (\ker L^*)^\perp = L(\Gamma(E))$ であり， $L^*\eta = \beta$ が解をもつための必要十分条件は $\beta \in (\ker L)^\perp = L^*(\Gamma(F))$ である

Proof. ラプラス作用素のときと証明は同様である。 $\square$

また， L が形式的自己随伴作用素であるとき（ $L = L^*$ ），次の章でのべる固有値分解も成立する（もちろん L が正定値とはわからないので固有値は負などもありえる）。

幾何学でよく表れる楕円型微分作用素の例を挙げておこう．

Example 4.5.7. E, F, G をリーマン多様体上 M 上の内積が入ったベクトル束として，

$$\Gamma(E) \xrightarrow{P} \Gamma(F) \xrightarrow{Q} \Gamma(G)$$

という一階微分作用素 P, Q を考える．このとき，主表象の列

$$E_x \xrightarrow{\sigma_\xi(P)} F_x \xrightarrow{\sigma_\xi(Q)} G_x$$

が完全系列である（ $\forall \xi \neq 0$ ）ならば，2階微分作用素

$$L = PP^* + Q^*Q : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(F)$$

は楕円型である．逆に， $QP = 0$ であり L が楕円型ならば，主表象の列は完全系列となる．

Proof. すでに証明したように，主表象の複体

$$E_x \xrightarrow{\sigma_\xi(P)} F_x \xrightarrow{\sigma_\xi(Q)} G_x$$

が完全であることと

$$\sigma_\xi(PP^* + Q^*Q) = \sigma_\xi(P)\sigma_\xi(P)^* + \sigma_\xi(Q)^*\sigma_\xi(Q)$$

が同型であることは同値である. □

L が楕円型とする. L は明らかに形式的自己共役作用素であり,

$$\Gamma(F) = \ker L \oplus L(\Gamma(F))$$

が成立し,

$$\begin{aligned} \Gamma(F) &= \ker L \oplus L(\Gamma(F)) \\ \ker L \oplus PP^*(\Gamma(F)) \oplus Q^*Q(\Gamma(F)) \\ \ker L \oplus P(\Gamma(E)) \oplus Q^*(\Gamma(G)) \end{aligned}$$

という直交直和分解が成立する. 証明は, 微分形式上のラプラシアンに対する場合と全く同様にすればよい. また,

$$\ker Q / \text{Image } P \cong \ker L$$

であることも, グリーン作用素を定義することで同様にして証明

4.6 楕円複体

上の例の一般化となる楕円複体について述べておこう. M をコンパクト向きつきリーマン多様体として, $\{E_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ を内積の入ったベクトル束とする. このとき, 微分作用素の列

$$\cdots \rightarrow \Gamma(E_i) \xrightarrow{P_i} \Gamma(E_{i+1}) \rightarrow \cdots$$

が与えられとする.

Definition 4.6.1. ベクトル束と微分作用素の上のような列 $\{E_i, P_i\}$ が楕円複体とは

1. $P_{i+1}P_i = 0 \quad (\forall i)$
2. 主表象の列

$$\cdots \rightarrow (E_i)_x \xrightarrow{\sigma_\xi(P_i)} (E_{i+1})_x \rightarrow \cdots$$

が任意の $\xi \neq 0$ に対して, 完全系列.

3. 各微分作用素の階数は $d > 0$ (幾何学で現れる楕円複体は, $d = 1$ の場合).

Example 4.6.1.

$$0 \rightarrow \Gamma(E_0) \xrightarrow{P} \Gamma(E_1) \rightarrow 0$$

が楕円複体であることは、 P が楕円型微分作用素であることと同値..

次の補題は、前 section の最後に述べた例から明らかであろう。

Lemma 4.6.2. ベクトル束と微分作用素がなす、微分複体 $\{E_i, P_i\}_i$ を考える。

$$\cdots \rightarrow \Gamma(E_i) \xrightarrow{P_i} \Gamma(E_{i+1}) \rightarrow \cdots$$

ここで、微分複体とは $P_{i+1}P_i = 0$ ($\forall i$) を満たすものである。このとき、この楕円複体に随伴したラプラシアン ($2d$ 階微分作用素)

$$\Delta_i = P_i^* P_i + P_{i-1} P_{i-1}^* : \Gamma(E_i) \rightarrow \Gamma(E_i)$$

を得る。このとき、微分複体が楕円複体であることと、 Δ_i が各 i に対して楕円型微分作用素であることは同値である。

長さが有限である楕円複体を考えることが多いが、このとき主表象複体が完全系列であることから、

$$\sum \text{rank}(E_{2i}) = \sum \text{rank}(E_{2i+1})$$

である。

Proof. 完全系列であるので、

$$\sum (-1)^i \dim E_i = 0$$

であることから従う。 □

次も明らかであろう。

Definition 4.6.2. コンパクト向きつきリーマン多様体 M 上の楕円複体、

$$E_* : \cdots \rightarrow \Gamma(E_i) \xrightarrow{P_i} \Gamma(E_{i+1}) \rightarrow \cdots$$

を考える。このとき、 i -th コホモロジーを

$$H^i(M, E_*) := \ker P_i / \text{Image}(P_{i-1})$$

として定める。

Theorem 4.6.3 (楕円複体に対する Hodge 分解). 上の状況で次が成立する。

1. $H^i(M, E_*) \cong \ker \Delta_i$ であり、有限次元ベクトル空間である。

2.

$$\Gamma(E_i) = \ker \Delta^i \oplus P_i^*(\Gamma(E_{i+1})) \oplus P_{i-1}(\Gamma(E_{i-1}))$$

であり, この分解は L_2 内積について直交直和となっている.

Example 4.6.4. M をコンパクト向きつき多様体として, 次の微分複体を考える.

$$\cdots \rightarrow \Omega^p(M) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(M) \rightarrow \cdots$$

このとき, M にリーマン計量を入れ, $\Omega^p(M)$ にもリーマン計量を入れれば, 上は楕円複体になる. この楕円複体に対する *Hodge* 分解が, 我々が学んできたものである. そして,

$$H_{DR}^i(M) \cong \ker(dd^* + d^*d)$$

が成立するのであった.

次の例は, 複素多様体への応用である (複素多様体知らない場合は, 飛ばしてください).

Example 4.6.5. M をコンパクト複素多様体として, E を正則ベクトル束とする. このとき

$$\Omega^i(M, E) := \Gamma(\Lambda^i(M) \otimes_{\mathbb{C}} E) = \oplus_{p+q=i} \Omega^{p,q}(M, E). \quad \Omega^{p,q}(M, E) = \Gamma(\Lambda^{p,q}(M) \otimes_{\mathbb{C}} E)$$

とする. E が正則ベクトル束であるので, *Dolbeault* 作用素

$$\bar{\partial}^E : \Omega^{p,q}(M, E) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M, E)$$

が定義される. つまり, 局所座標で

$$\omega = \sum \alpha_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J, \quad \alpha_{IJ} \in \Gamma(U, E)$$

としたときに,

$$\bar{\partial}^E \omega = \sum \left(\sum_j \frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

としたものである. E が正則ベクトル束であることから, これは大域的に定義される. また, 局所座標系で見ればわかるように $\bar{\partial}^E \bar{\partial}^E = 0$ である.

Exercise 4.6.6. 大域的に定義されることを証明せよ. また, $\bar{\partial}^E \bar{\partial}^E = 0$ を示せ.

そこで,

$$\cdots \rightarrow \Omega^{p,q}(M, E) \xrightarrow{\bar{\partial}^E} \Omega^{p,q+1}(M, E) \rightarrow \cdots$$

という微分複体を得られるが, これは楕円複体であり (*twisted*) *Dolbeault* 複体という (*twisted* とはベクトル束 E をテンソルしている).

どるば一ふくたい@Dolbeault 複体

主表象の複体が完全であることを証明する必要がある． E はテンソルしただけであり局所的に書けばわかるように， E は自明束としてよく， $\bar{\partial}$ の主表象を考えればよい． $\Lambda^{0,1}(M) \cong T^*M$ であること及び $\bar{\partial} = \sim d\bar{z}_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \wedge$ であることを考慮すれば．

$$\sigma_\xi(\bar{\partial}^E) = \frac{i}{2} \xi \wedge$$

となる．よって，ドラム複体のときと同様にして，完全であることがわかる．

さて，この複体のコホモロジーは

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M, E) \cong \ker \Delta = \ker(\bar{\partial}^E(\bar{\partial}^E)^* + (\bar{\partial}^E)^*\bar{\partial}^E)$$

となるが，右辺が有限次元となることがわかる．なお， E が自明な直線束 $E = M \times \mathbb{C}$ の場合には， $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ と書く．

E に値をもつ正則 p 形式の *germ* の層に対して，次の *fine resolution* が存在するのであった．

$$0 \rightarrow \Omega^p(E) \xrightarrow{i} A^{(p,0)}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}^E} A^{(p,1)}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}^E} \dots A^{(p,n)}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}^E} 0$$

ここで， $A^{(p,q)}(E)$ は E に値をもつ滑らかな (p, q) 形式の *germ* の層である (*fine* な層)．これより *Dolebeault* の定理が成立する．

$$H^q(M, \Omega^p(E)) = \frac{\ker(\bar{\partial}^E : \Gamma(M, A^{(p,q)}(E)) \rightarrow \Gamma(M, A^{(p,q+1)}(E)))}{\bar{\partial}^E(\Gamma(M, A^{(p,q-1)}(E)))}$$

左辺は，層 $\Omega^p(E)$ に対する層の q 次コホモロジーである．この事実を合わせれば，

$$H^q(M, \Omega^p(E)) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M, E) \cong \ker \Delta$$

となり， M がコンパクト複素多様体のとき，これらが有限次元であることがわかる．

さて，コンパクト向きつきリーマン多様体 M 上の楕円複体，

$$E_* : \dots \rightarrow \Gamma(E_i) \xrightarrow{P_i} \Gamma(E_{i+1}) \rightarrow \dots$$

で長さが有限であるとする．このとき，

$$E^+ = \oplus_i E_{2i}, \quad E^- = \oplus_i E_{2i+1}$$

とする． $\text{rank}(E^+) = \text{rank}(E^-)$ であることに注意する．また，微分作用素

$$\begin{aligned} D^+ &= P_+ + P_-^* : \Gamma(E^+) \rightarrow \Gamma(E^-) \\ D^- &= P_- + P_+^* : \Gamma(E^-) \rightarrow \Gamma(E^+) \end{aligned}$$

を考える．ここで， $P_+ = \oplus P_{2i}$ ， $P_- = \oplus P_{2i+1}$ ．この作用素

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} : \Gamma(E^+ \oplus E^-) \rightarrow \Gamma(E^- \oplus E^-)$$

を楕円複体 E_* に対するディラック作用素とよぶ．

次は明らかであろう．

- Proposition 4.6.7.** 1. D^+ ， D^- は互いに形式的に随伴である．また， P_i の階数を d とすれば $D^\pm$ は d 階の楕円型微分作用素である．よって， D は d 階の形式的自己共役楕円型微分作用素．
2. $\Delta^+ = D^- D^+ = \oplus \Delta_{2i}$ ． $\Delta^- = D^+ D^- = \oplus \Delta_{2i+1}$ となり，形式的自己共役な楕円型微分作用素である．
3. フレドホルム指数を

$$\text{ind}(D^+) = \dim \ker D^+ - \dim \ker (D^+)^* = \dim \ker D^+ - \dim \ker D^-$$

として定めれば，

$$\text{ind}(D^+) = \sum (-1)^i \dim \ker \Delta_i = \sum (-1)^i \dim H^i(M, E_*) = -\text{ind}(D^-)$$

を得る．

Proof. $D^\pm$ が楕円型であることは， E^+ ， E^- のランクが等しく， $D^+ D^-$ が楕円型であることから従う． □

Example 4.6.8. ドラーム複体の場合には，

$$\text{ind}(d + d^*) = \sum (-1)^i \dim H^i(M) = \chi(M)$$

となり，ディラック作用素の指数はオイラー数に一致する．

この楕円複体（または楕円型微分作用素）に対するディラック作用素の指数は，Atiyah-Singer 指数定理により，特性類の M 上の積分として書くことが可能である．楕円型微分作用素の基礎知識はできたので，興味のある学生さんは Atiyah-Singer の指数定理に関する論文などを読むことをお勧めする．

第 5 章

応用

5.1 固有値問題

Laplace-Beltrami 作用素 $\Delta : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M)$ の固有値問題および固有関数展開について述べよう．固有値問題はグリーン作用素が，あるヒルベルト空間上で自己共役コンパクト作用素であることから従うが，固有関数が滑らかであることを示す必要がある．

Definition 5.1.1 (固有値・固有関数)．実数 λ が固有値とは， p -form $u \neq 0$ で $\Delta u = \lambda u$ となるものが存在．また，この u を固有値 λ に対する Δ の固有関数とよぶ．そして，固有値 λ に対する固有関数全体のベクトル空間を固有空間とよぶ．

Lemma 5.1.1. 1. Δ の固有値はゼロ以上．

2. Δ の固有空間は有限次元．

3. Δ の固有値は有限な集積値をもたない．つまり，ある有限の値に収束するような固有値列は存在しない．特に，固有値は離散的であり $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$ とすれば，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \rightarrow \infty.$$

4. 異なる固有値に対する固有空間は互いに直交する．

Proof. $\Delta u = \lambda u$ とすれば，

$$\lambda \|u\|^2 = \langle \Delta u, u \rangle = \|du\|^2 + \|\delta u\|^2 \geq 0$$

であるので， $\lambda \geq 0$ である．

無限次元とすると，固有空間の正規直交列 $\{u_n\}$ をとれる． $\|u_n\| = 1$ ， $\|\Delta u_n\| = \lambda \|u_n\| = \lambda$ と有界である．よってコーシー部分列をもつが，

$$\|u_n - u_m\|^2 = 2$$

となるので矛盾．よって有限次元である．

$\lambda \neq \mu$ とし, $\Delta u = \lambda u$, $\Delta v = \mu v$ とすると,

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle \Delta u, v \rangle = \langle u, \Delta v \rangle = \mu \langle u, v \rangle$$

となるので, $(\lambda - \mu) \langle u, v \rangle = 0$ となる. $\lambda \neq \mu$ より $\langle u, v \rangle = 0$ となる.

有限の集積点 α があると仮定. 固有値と正規直交固有関数の列 $\{\lambda_n, u_n\}_n$ で $\lambda_n \rightarrow \alpha$ となるものが存在する. $\lambda_n \rightarrow \alpha$ であるので, $\{\lambda_n\}_n$ は有界である. 先ほどと同様にコーシー部分列をもち矛盾する. 同様にして, 固有値は有界でないことがわかる. $\square$

さて, 固有値・固有関数が存在することを見たい. 特に固有関数が滑らかを示したい. まず, ゼロが固有値であることは, 非自明な調和形式が存在することは同値である. 次に, 正の固有値をもつことを示そう.

Δ を $(H^p)^\perp$ に制限すれば,

$$\Delta : (H^p)^\perp \rightarrow (H^p)^\perp, \quad G = \Delta^{-1}$$

となる. このとき, Δ のある固有値 λ が存在する. また, $\lambda \neq 0$ が Δ の固有値であることは $1/\lambda$ が G の固有値であることと同値である.

Proof. G は $(H^p)^\perp$ 上の有界作用素であるので,

$$\eta = \sup_{\|\phi\|=1, \phi \in (H^p)^\perp} \|G\phi\|$$

が定まる. このとき $\phi \neq 0$ なら $G\phi \neq 0$ であることから $\eta > 0$ である. また, $\sup$ の定義から $\|G\phi\| \leq \eta \|\phi\|$ ($\forall \phi \in (H^p)^\perp$). このとき $1/\eta$ が Δ の固有値になることを証明しよう. $\{\phi_j\} \subset (H^p)^\perp$ を η に対する最大化列とする. つまり $\|\phi_j\| = 1$ かつ $\|G\phi_j\| \rightarrow \eta$ となるもの ($\sup$ の定義から存在). このとき, まず $\|G^2\phi_j - \eta^2\phi_j\| \rightarrow 0$ である. 実際,

$$\begin{aligned} \|G^2\phi_j - \eta^2\phi_j\|^2 &= \|G^2\phi_j\|^2 - 2\eta^2 \langle G^2\phi_j, \phi_j \rangle + \eta^4 \\ &\leq \eta^2 \|G\phi_j\|^2 - 2\eta^2 \|G\phi_j\|^2 + \eta^4 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

さらに, $\|G\phi_j - \eta\phi_j\| \rightarrow 0$ である. 実際, $\psi_j = G\phi_j - \eta\phi_j$ とすれば,

$$\begin{aligned} \langle \psi_j, G^2\phi_j - \eta^2\phi_j \rangle &= \langle \psi_j, G\psi_j + \eta\psi_j \rangle \\ &= \langle \psi_j, G\psi_j \rangle + \eta \|\psi_j\|^2 \geq \eta \|\psi_j\|^2 \end{aligned}$$

左辺は 0 へ収束し $\eta > 0$ であるので, $\psi_j = G\phi_j - \eta\phi_j \rightarrow 0$ となる. ここで, $\langle \psi_j, G\psi_j \rangle \geq 0$ を用いた. これは, $\langle \psi_j, G\psi_j \rangle = \langle \Delta G\psi_j, G\psi_j \rangle \geq 0$ から従う. また, 最大化列 ϕ_j は有界であるので, 命題 2.4.10 (G がコンパクト作用素) より, $G\phi_j$ はコーシー部分列をもつ. それを改めて ϕ_j とかく. そこで, 有界線形汎関数

$$l : \Omega^p(M) \ni \beta \mapsto \lim_{j \rightarrow 0} \eta \langle G\phi_j, \beta \rangle \in \mathbb{R}$$

を考える．右辺は $\langle G\phi_j, \beta \rangle$ がコーシー列であるので収束することから定義できる．また，有界線形であることも明らか．さらに，

$$l((\Delta - 1/\eta)^* \beta) = \lim_{j \rightarrow 0} \eta \langle (\Delta - 1/\eta) G\phi_j, \beta \rangle = \lim_{j \rightarrow 0} (\eta \langle \phi_j, \beta \rangle - \langle G\phi_j, \beta \rangle) = \lim_{j \rightarrow 0} \langle -(G - \eta)\phi_j, \beta \rangle$$

となるが，

$$|\langle (G - \eta)\phi_j, \beta \rangle| \leq \|(G - \eta)\phi_j\| \|\beta\| \rightarrow 0$$

となる．このように，有界線形作用素 l は，方程式

$$(\Delta - 1/\eta)u = 0$$

の弱解である．さらに， $\Delta - 1/\eta$ は楕円型であるので ($1/\eta$ は 0 階作用素の部分なので影響なし)，真の解をもつ．よって， $\Delta u = 1/\eta u$ をみたす $u \in (H^p)^\perp \subset \Omega^p(M)$ が存在する． $\square$

他の固有値・固有関数の存在は，帰納法による．固有値 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ と対応する正規直交固有関数 $u_1, \dots, u_n \in (H^p)^\perp$ が得られたとする． $R_n = \text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ として， $(H^p \oplus R_n)^\perp$ を考えると， $G, \Delta : R_n \rightarrow R_n$ であるので，

$$G, \Delta : (H^p \oplus R_n)^\perp \rightarrow (H^p \oplus R_n)^\perp$$

であり，互いに逆作用素である．そこで，

$$\eta_{n+1} = \sup_{\|\phi\|=1, \phi \in (H^p \oplus R_n)^\perp} \|G\phi\|$$

とすれば，先ほどと同様にして $\lambda_{n+1} = 1/\eta_{n+1}$ が Δ の固有値であることがわかる．

Exercise 5.1.2. 各自，証明せよ．

さらに，

$$\eta_{n+1} = \sup_{\|\phi\|=1, \phi \in (H^p \oplus R_n)^\perp} \|G\phi\| \leq \sup_{\|\phi\|=1, \phi \in (H^p \oplus R_{n-1})^\perp} \|G\phi\| = \eta_n$$

であるので， $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n$ となる．

このように，固有値の列 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ と対応する (正規直交) 固有関数の列 $u_1, u_2, \dots$ を得る． $\alpha \in \Omega^p(M)$ として，このとき，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \alpha - \sum_{i=1}^n \langle \alpha, u_i \rangle u_i \right\| = 0$$

Proof. $\dim H^p = k$ とすれば, $u_1, \dots, u_k \in H^p$ である. このとき $\beta \in (H^p)^\perp$ で, $G\beta = \alpha - \sum_{i=1}^k \langle \alpha, u_i \rangle u_i$ となるものが存在. よって, $n > k$ に対して,

$$\begin{aligned} \|G(\beta - \sum_{i=k+1}^n \langle \beta, u_i \rangle u_i)\| &= \|\alpha - \sum_{i=1}^k \langle \alpha, u_i \rangle u_i - \sum_{i=k+1}^n \langle 1/\lambda_i \beta, u_i \rangle u_i\| \\ &= \|\alpha - \sum_{i=1}^k \langle \alpha, u_i \rangle u_i - \sum_{i=k+1}^n \langle G\beta, u_i \rangle u_i\| = \|\alpha - \sum_{i=1}^n \langle \alpha, u_i \rangle u_i\| \end{aligned}$$

となる. そこで, $\beta - \sum_{i=k+1}^n \langle \beta, u_i \rangle u_i \in (H^p \oplus R_n)^\perp$ であるので, λ_{n+1} の定義から,

$$\|G(\beta - \sum_{i=k+1}^n \langle \beta, u_i \rangle u_i)\| \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|\beta - \sum_{i=k+1}^n \langle \beta, u_i \rangle u_i\| \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|\beta\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる. よって, $\|\alpha - \sum_{i=1}^n \langle \alpha, u_i \rangle u_i\| \rightarrow 0$, □

以上から, L_2 空間内で,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \alpha, u_i \rangle u_i$$

が成立する. L^2 での収束なので, 最後に, 右辺がちゃんと一様ノルムに関して収束していることを述べる必要がある. これがわかれば, この等号は連続関数として (よって滑らかな関数として) の等号となる. $\Omega^p(M)$ 上の一様ノルムを

$$\|\alpha\|_\infty = \sup_{m \in M} \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \sup_{m \in M} \sqrt{* (\alpha \wedge * \alpha)}$$

とする. ソボレフの補題 (補題 3.3.8) から, $t \geq [n/2] + 1$ なら $\|\phi\|_\infty \leq c \|\phi\|_t$ であった. そこで, M がコンパクトであることから, 1 の分割などを利用して, つぎがわかる. また, $(1 + \Delta)^k$ は以前述べた K^k に対応するもので (3.4) を使っていることに注意.

Lemma 5.1.3. ある十分大きい整数 k および正定数 c が存在して

$$\|\alpha\|_\infty \leq c \|(1 + \Delta)^k \alpha\|, \quad \forall \alpha \in \Omega^p(M).$$

さて, $\alpha \in \Omega^p(M)$, $P_n(\alpha) = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, u_i \rangle u_i$ とする. $\Delta P_n = P_n \Delta$ であるので,

$$\|\alpha - P_n(\alpha)\|_\infty \leq c \|(1 + \Delta)^k (\alpha - P_n(\alpha))\| \leq \|\phi - P_n(\phi)\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ここで, $\phi = (1 + \Delta)^k \alpha$ としている. このように, 一様ノルムについても

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \alpha, u_i \rangle u_i$$

となる. 以上をまとめて.

Theorem 5.1.4 (固有関数展開). M をコンパクト向きつきリーマン多様体とし, Laplace-Beltrami 作用素 $\Delta : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M)$ を考える. このとき, 固有値の列 $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \rightarrow \infty$ および滑らかな正規直交固有関数の列 $u_1, u_2, u_3, \dots$ が存在して, 次のみをみたす.

1. 任意の $\alpha \in \Omega^p(M)$ に対して,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \alpha, u_i \rangle u_i, \quad \|\alpha\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \alpha, u_i \rangle^2$$

2. 固有空間は有限次元であり, 異なる固有値の固有空間は直交する.

Remark 5.1.1. (若干, この remark はいい加減に書いてます) 形式的自己共役な楕円型微分作用素でも同様の定理が成立する. 自己共役でない楕円型微分作用素の場合には, 固有値が離散的にならないこともある (多様体がコンパクトでも). 次は Seeley による例: M 上のラプラス作用素 Δ_M を考えて,

$$L = - \left(e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + e^{-2i\theta} \Delta_M$$

として, $M \times S^1$ 上の 2 階微分作用素を考える. これは楕円型であることがわかる. しかし, $t = \sqrt{\lambda} e^{i\theta}$ と変換すると, 任意の複素数 $\lambda \neq 0$ に対して, $u = \exp(\pm i\sqrt{\lambda} e \exp i\theta)$ が固有値 λ の固有関数となることがわかる. このような状況を避けるには強楕円型という概念がある. 点 x において, 強楕円型とは, ある定数 $c(x) > 0$ が存在して,

$$\Re \langle \sigma_\xi(L)v, v \rangle \geq c \|v\|^2 \quad \forall v \in E_x, \forall \xi \in T_x^* M (|\xi| = 1)$$

となることである. ここで $\xi \rightarrow -\xi$ にしても成立する必要があるので, 作用素の階数は偶数でなければならないことに注意. ラプラシアンは強楕円型である. ディラック作用素は強楕円型ではないが, その 2 乗が強楕円型であるので振る舞いはよい. 実際, スペクトルは離散である. 上で述べた作用素は楕円型であるが, 強楕円型でない例であり, スペクトルが離散とならない例である. その他にも 2 階微分作用素 $(\partial x + i\partial y)^2$ (on $\mathbb{R}^2$) などが楕円型であるが強楕円型でない例である. コンパクト多様体の強楕円型作用素に対しては, その固有値は離散であり, 集積点は無限大のみであることが知られている. また, 最大値原理も強楕円型でなければ成立するとは限らない (easy). 強楕円型の概念は, 境界付きの多様体の場合やコンパクトでない場合の微分作用素を扱うためには重要な概念である.

5.2 Peter-Weyl の定理

S^1 上の関数はフーリエ展開可能であった. このとき, $-\frac{d^2}{dt^2} e^{imt} = m^2 e^{imt}$ であるので, これはラプラス作用素に対する固有関数展開となる. $S^1 = U(1)$ と可換コンパクトリー

群であることを考えると、一般の（非可換）コンパクトリー群 G に対しても同様のことを考えることができる。つまり、コンパクトリー群 G 上の関数のフーリエ展開である。

Definition 5.2.1. 集合 G がリー群であるとは、

1. G は群
2. G は滑らかな多様体.
3. $G \times G \ni (x, y) \rightarrow xy \in G$, $G \ni x \rightarrow x^{-1} \in G$ が滑らか.

また、 G が多様体としてコンパクトのとき G をコンパクトリー群とよぶ。

G の左作用, 右作用を

$$L_g : G \ni x \mapsto gx \in G, \quad R_g : G \ni x \mapsto xg \in G$$

とする。これらは微分同相写像であり、その微分写像を考えると、

$$dL_g : T_x G \rightarrow T_{gx} G, \quad dR_g : T_x G \rightarrow T_{xg} G$$

という線形写像を得る。

Proposition 5.2.1. リー群上には左不変計量が存在する。つまり、

$$\langle v, w \rangle_x = \langle dL_g v, dL_g w \rangle_{gx} \quad \forall g \in G, \forall v, w \in T_x(G)$$

となる計量が存在する。

Proof. $T_e(G)$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を固定する。このとき、 $x \in G$ 上の内積を

$$\langle v, w \rangle_x = \langle dL_{x^{-1}} v, dL_{x^{-1}} w \rangle_e$$

として定義すれば、 $L_g L_x = L_{gx}$ より、 $dL_g dL_x = dL_{gx}$ となるので、

$$\langle dL_g v, dL_g w \rangle_{gx} = \langle dL_x^{-1} dL_g^{-1} dL_g v, dL_x^{-1} dL_g^{-1} dL_g w \rangle_e = \langle dL_{x^{-1}} v, dL_{x^{-1}} w \rangle_e$$

となるので、不変であることがわかる。 □

Definition 5.2.2. リー群 G の表現とは、（有限次元）複素ベクトル空間 V と連続な準同形 $\pi : G \rightarrow GL(V)$ の組のことである。 V を表現空間または G 加群とよぶ。また表現を G が V へ作用しているということもある。

Definition 5.2.3. エルミート内積 $(\cdot, \cdot)$ の入った表現空間 V を考える。この空間に G が作用して、 $(\pi(g)v, \pi(g)w) = (v, w)$ ($\forall g \in G, \forall v, w \in V$) が成立するとき、表現をユニタリ表現とよぶ。

Proposition 5.2.2. コンパクトリー群 G の有限次元表現を考える．このとき，ユニタリ表現になるようにエルミート内積を入れることができる．

Proof. V の勝手なエルミート内積 $(\cdot, \cdot)$ を選ぶ．そして，

$$(v, w)_{inv} = \frac{1}{\text{vol}(G)} \int_G (gv, gw) dg = \frac{1}{\text{vol}(G)} \int_G (ghv, ghw) dg = (hv, hw)_{inv}, \quad h \in G$$

と積分すればよい．ここで， G がコンパクト群であるので，不変積分要素 dg が存在する．つまり $\int_G f(gg') dg = \int_G f(g) dg = \int_G f(g'g) dg$ が成立する． $\square$

Definition 5.2.4. 表現空間 V が非自明な G 不変部分空間をもつとき可約とよぶ．それ以外の時を既約とよぶ．（部分空間 W が G 不変とは， $GW \subset W$ となること．また $V, \{0\}$ は不変部分空間であるが，これらは自明な不変部分空間とよぶ）．また表現空間が既約表現空間の直和に分解できるとき，完全可約とよぶ．

リー環の表現の既約や可約なども同様である．

Proposition 5.2.3. コンパクトリー群 G の表現は完全可約である．

Proof. V を G の表現として，ユニタリ表現としておく． $W \subset V$ が G 不変であるとすれば， $W \oplus W^\perp$ と分解できる．ここでユニタリ表現であることから $W^\perp$ も G 不変である．以下この作業を繰り返せばよい． $\square$

そこで，我々は主に既約表現空間を考えればよいことにする．

Remark 5.2.1. 無限次元ベクトル空間へのユニタリ表現を考えることもできる．しかし， G がコンパクトの場合は，任意の既約ユニタリ表現は有限次元であることがわかる．

Definition 5.2.5. G の表現 $(\pi, V), (\pi', V')$ が同値とは， $\Phi : V \rightarrow V'$ というベクトル空間としての同型写像で， G の作用と可換なものが存在することをいう． $(\Phi(\pi(g)v) = \pi'(g)\Phi(v) \ (\forall g \in G, \forall v \in V)$ G 加群として同型のことである）．また，同値でないときは非同値とよぶ．

Proposition 5.2.4 (シュアの補題)． G の既約表現 $(\pi, V), (\pi', V')$ を考える． $\Phi : V \rightarrow V'$ が G 線形とする．つまり $\Phi(\pi(g)v) = \pi'(g)\Phi(v) \ (\forall g \in G, \forall v \in V)$ が成立するとする．このとき， V と V' が非同値なら $\Phi = 0$ である．同値なら， V と V' を同一視することにより， $\Phi = \lambda \text{id} \ (\lambda \in \mathbb{C})$ となる ($\lambda = 0$ もありえることに注意)．

Definition 5.2.6. 表現 $(\pi, V), (\pi', V')$ に対して G 線形写像の全体を $\text{Hom}_G(V, V')$ と書く．

Corollary 5.2.5. 既約表現 $(\pi, V), (\pi', V')$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_G(V, V') = \begin{cases} 0 & \pi \not\cong \pi' \\ \mathbb{C} & \pi \cong \pi' \end{cases}$$

Proof of proposition. 線形写像 $\Phi : V \rightarrow V'$ が G 線形であるので, $\ker \Phi, \mathrm{Image} \Phi$ は G 不変部分空間である. そこで, $\Phi \neq 0$ なら, 既約性から $\ker \Phi = 0$ および, $\mathrm{Image} \Phi = V'$ を得る. よって, Φ は同型写像であり, $\pi \cong \pi'$ となる. このように, $\pi \not\cong \pi'$ なら $\Phi = 0$ となる.

同値な場合には, G 線形同型写像 $T : V \rightarrow V'$ が存在する. そこで, $T^{-1} \circ \Phi : V \rightarrow V$ を, 新たに Φ として考えてよい. Φ の固有値の一つを λ とする. このとき $\Phi - \lambda$ も G 線形写像である. $\ker(\Phi - \lambda)$ は $\{0\}$ でない G 不変部分空間であるので既約性から $\ker(\Phi - \lambda) = V$ となる, よって, $\Phi = \lambda \mathrm{id}$ となる. $\square$

Example 5.2.6. G のユニタリ表現 (π, V) を考える. このとき双対空間 V^* 上で,

$$(\pi(g)f)(v) = f(\pi(g^{-1})v), \quad f \in V^*, v \in V$$

により, V^* 上の表現を得ることができる (表現になることは演習問題). これを転置表現または双対表現とよぶ.

また, V の共役空間 $\bar{V}$ を考える. つまり

$$\bar{V} := \{\bar{v} \mid v \in V\}$$

という集合であり, $\bar{v} + \bar{w} = \overline{v + w}$, $z \cdot \bar{v} = \overline{z v}$ によりベクトル空間の構造を入れたものである. ($\bar{v}$ は v の複素共役とは限らない. 複素共役が定義できるには V に実構造が必要である). このとき,

$$\pi(g)\bar{v} = \overline{\pi(g)v}, \quad v \in V$$

により, $\bar{V}$ は G の表現空間になる. これを共役表現という. さらにユニタリ表現なら, エルミート内積を使って $V^* \cong \bar{V}$ という線形同型が作れるが, これは G 線形になる. よって, V の共役表現と双対表現は同値になることがわかる.

Example 5.2.7. 表現 $(\pi, V), (\pi', V')$ から, 表現を作ることができる.

1. $V \oplus V'$ は $(\pi \oplus \pi')(g) := \pi(g) \oplus \pi'(g)$ とすれば, G 加群になる.
2. $V \otimes V'$ は $(\pi \otimes \pi')(g) := \pi(g) \otimes \pi'(g)$ とすれば, G 加群になる. $(\pi(g) \otimes \pi'(g))(v \otimes v') = \pi(g)v \otimes \pi'(g)v'$ を線形に拡張) これをテンソル積表現とよぶ.
3. V の交代テンソル積 $\Lambda^k(V)$ を考える. 上と同様に G 加群であることがわかる. つまり $\pi(g)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) := \pi(g)v_1 \wedge \cdots \wedge \pi(g)v_k$ とすればよい.

4. V の対称テンソル積 $S^k(V)$ を考えると, これは G 加群.
5. $\text{Hom}(V, V')$ は G 加群.

などなど, 線形代数の基本的な操作を使えば, 表現をたくさんつくることができる.

G をコンパクトリー群とする. 両側不変積分要素 dx を使って, G 上の連続関数全体 $C(G)$ に内積を

$$(f_1, f_2) = \int_G f_1(x) \overline{f_2(x)} dx$$

として導入する. G の左正則表現 $(L, C(G))$ を

$$(L(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$$

と定義する (無限次元の場合には, 作用が連続の定義は $G \times V \ni (g, v) \rightarrow \pi(g)v \in V$ が連続とする). これは, $L(g)$ は 2 乗可積分な関数全体 $L^2(G)$ 上のユニタリ作用素へ拡張され, 左正則表現 $(L, L^2(G))$ を得る. また, $G \times G$ の表現 τ を

$$(\tau(g, h)f)(x) = f(g^{-1}xh)$$

とすれば, $\tau(g, h)$ は $L^2(G)$ 上のユニタリ作用素になる.

Proof. 作用になることだけ証明しておこう.

$$\begin{aligned} (\tau(g_1, h_1)\tau(g_2, h_2)f)(x) &= (\tau(g_2, h_2)f)(g_1^{-1}xh_1) \\ &= f(g_2^{-1}g_1^{-1}xh_1h_2) = f((g_1g_2)^{-1}xh_1h_2) = (\tau(g_1g_2, h_1h_2)f)(x) \end{aligned}$$

□

Exercise 5.2.8. ユニタリであることを示せ.

Definition 5.2.7. G の既約有限次元ユニタリ表現の同値類全体を $\hat{G}$ で表す. また, $\gamma \in \hat{G}$ に対して表現空間を V_γ , 表現を π_γ で表す (同値なものは面倒なので区別しないことにする)

既約ユニタリ表現 $\gamma \in \hat{G}$ に対して, 双線形写像 Φ_γ を

$$\Phi_\gamma : V_\gamma \otimes V_\gamma^* \ni v \otimes \lambda \mapsto \Phi_\gamma(v \otimes \lambda) \in C(G) \subset L^2(G), \quad \Phi(v \otimes \lambda)(g) := \lambda(\pi_\gamma(g^{-1})v)$$

で定義する. この写像は $G \times G$ 線形写像となる. つまり,

$$\Phi_\gamma \in \text{Hom}_{G \times G}(V_\gamma \otimes V_\gamma^*, L^2(G))$$

Proof. まず V_γ^* への G の作用は $\lambda \in V_\gamma^*$ に対して,

$$(\pi_\gamma(k)^*\lambda)(v) = \lambda(\pi_\gamma(k^{-1})v), \quad \forall v \in V_\gamma$$

とし作用させるのであった. このようにすれば,

$$\begin{aligned} (\pi_\gamma(k)^*\pi_\gamma(k')^*\lambda)(v) &= (\pi_\gamma(k')^*\lambda)(\pi_\gamma(k^{-1})v) = \lambda(\pi_\gamma(k'^{-1}k^{-1})v) = \lambda(\pi_\gamma((kk')^{-1})v) \\ &= (\pi_\gamma(kk')^*\lambda)(v) \end{aligned}$$

となり作用になる.

さて, Φ_γ が $G \times G$ 線形であることを証明しよう.

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma((k, h)(v \otimes \lambda))(g) &= (\pi_\gamma(k)^*\lambda)(\pi_\gamma(g^{-1})\pi_\gamma(h)v) = \lambda(\pi(k^{-1}g^{-1}h)v) \\ &= (\tau(k, h)\Phi_\gamma(v \otimes \lambda))(g) \end{aligned}$$

□

像 $\Phi_\gamma(V_\gamma \otimes V_\gamma^*)$ は表現 (π_γ, V_γ) の行列成分で張られる空間となる. ここで, 行列成分について説明しおこう. V_γ の基底 $\{v_1, \dots, v_m\}$ 及びその双対基底 $\{v_1^*, \dots, v_m^*\}$ を選んでおく. この基底に関する表現行列を $(\pi(g)_{kl})_{k,l}$ とする:

$$\pi(g)(v_1, \dots, v_m) = (v_1, \dots, v_m)(\pi(g)_{kl})$$

である. よって, $\pi(g)v_l = \sum_k \pi(g)_{kl}v_k$ であるので, 行列成分は

$$\pi(g)_{ij} = v_i^*(\pi(g)v_j)$$

である. 基底の取り方を変えたり, 同値な表現をとったりしても, その場合の行列成分は, ここで述べた行列成分の線形結合でかけることがわかる.

Peter-Weyl の定理とは, すべての表現の行列成分が張る $C(G)$ の部分空間は, $C(G)$ 内で稠密になることである. これまでの議論から, その部分空間は

$$\bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} \Phi_\gamma(V_\gamma \otimes V_\gamma^*)$$

のことである.

Theorem 5.2.9. G をコンパクトリー群とする. このとき, $\bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} \Phi_\gamma(V_\gamma \otimes V_\gamma^*)$ は一様ノルムに対して, $C(G)$ 内で稠密である. つまり, $g \in C(G)$ とすると, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $f \in \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} \Phi_\gamma(V_\gamma \otimes V_\gamma^*)$ が存在して, $|f(\sigma) - g(\sigma)| < \epsilon$ ($\forall \sigma \in G$).

Proof. リー群 G 上のリーマン計量として, 左不変計量をとる. 滑らかな関数は一様ノルムについて連続関数空間で稠密であった. また, ラプラシアン固有空間の直和は, 一様ノルムについて滑らかな関数全体で稠密であった, そこで, Peter-Weyl の定理を証明す

るには, $\Delta : C^\infty(G) \rightarrow C^\infty(G)$ の固有関数がある表現の行列成分の線形結合であることを証明すればよい.

G は $C^\infty(G)$ に,

$$(L(g))(f)(x) = f(g^{-1}x) = (f \circ L_{g^{-1}})(x) = (L_{g^{-1}}^* f)(x)$$

と作用を定義した. リーマン計量は左作用で不変であるので, $L_{g^{-1}}$ は等長変換である. よって, ラプラシアンと可換である. 実際, $L_g^* d = dL_g^*$ であり, star 作用素は正規直交基底を使って定義されたので, L_g で不変である. よって, $L_g^* \delta = \delta L_g^*$ である. そこで, $\Delta = \delta d + d\delta$ (今は関数上なので $\Delta = \delta d$) は L_g で不変となる. つまり,

$$L_g^* \Delta = \Delta L_g^* \quad \forall g \in G$$

となるので, $L(g)\Delta = L(g)\Delta$ となる.

さて, V_λ を固有値 λ の固有空間とする. これは有限次元であった, このとき G の作用で V_λ は不変である. 実際, $f \in V_\lambda$ とすれば, $\Delta f = \lambda f$ であり, $\Delta L(g)f = L(g)\Delta f = \lambda L(g)f$ となるので $L(g)f \in V_\lambda$ となる. このように, 各固有空間は G の有限次元表現空間となる (既約とは限らない).

そこで, V_λ の基底を $\phi_1, \dots, \phi_n$ とし,

$$\phi_i(gx) = (L(g^{-1})\phi_i)(x) = \sum_k g_{ji}(g^{-1})\phi_j(x)$$

とかける. そして, 表現がユニタリであることを使えば,

$$\phi_i(g) = (L_g^* \phi_i)(e) = \sum g_{ji}(g^{-1})\phi_j(e) = \sum g_{ij}(g)\phi_j(e)$$

となる. よって, 固有関数 ϕ_i が有限次元表現 V_λ の行列成分 $\{g_{ij}(g)\}$ の一次結合となる. □

Remark 5.2.2. 実は, もう少し精密なことがわかる. $G \times G$ のユニタリ表現 $(\tau, L^2(G))$ は $\bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} V_\gamma \otimes V_\gamma^*$ (直交直和) と同値である. つまり, $\tilde{\Phi}_\gamma := \sqrt{\dim V_\gamma} \Phi_\gamma$ とすれば,

$$\bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} \tilde{\Phi}_\gamma : \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} V_\gamma \otimes V_\gamma^* \rightarrow L^2(G)$$

は $G \times G$ のユニタリ表現の同値写像を与える. この写像は内積を保つので, ユニタリ同型である. また, 異なる既約表現の行列成分は直交する (Schur の直交関係). このように, 既約成分の行列成分で正規直交系となるものがとれ, G 上の関数は行列成分で展開可能である. これがフーリエ展開の一般化である.

Remark 5.2.3. 各既約成分 $V_\gamma \otimes V_\gamma^*$ はある固有空間またはその部分空間になる. そこで, 各既約成分にラプラス作用素がどう作用するかを見ることにより固有値を調べることが可能である. 実際, ラプラス作用素はいわゆるカシミール作用素となり具体的に固有値を求めることができるのである.

5.3 Overdetermined elliptic, Underdetermined elliptic

せっかく楕円型微分作用素を学んだので、微分幾何学でよく利用する事実を証明しておく。(Besse [4] を参照).

M をコンパクト向きつきリーマン多様体として、 E, F を計量が入ったベクトル束とする. L を楕円型微分作用素 $L: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ としたとき、

$$\Gamma(F) = L(\Gamma(E)) \oplus \ker L^*, \quad \Gamma(E) = L^*(\Gamma(F)) \oplus \ker L$$

が成立した. また、 $L\omega = \alpha$ が解をもつための必要十分条件は、 $\alpha \in (\ker L^*)^\perp = L(\Gamma(E))$ であり、 $L^*\eta = \beta$ が解をもつための必要十分条件は $\beta \in (\ker L)^\perp = L^*(\Gamma(F))$ であった.

Definition 5.3.1. $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ を微分作用素とする.

- P が **underdetermined elliptic** とは、主表象 $\sigma_\xi(P): E_x \rightarrow F_x$ が全射 ($\forall x \in M, \forall \xi \in T_x^*(M)$). よって、このとき $PP^*: \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(F)$ は楕円型微分作用素となる. 例えば、

$$\Gamma(TM) \ni X \mapsto \operatorname{div}(X) = -\sum \nabla_i X^i \in C^\infty(M)$$

は underdetermined elliptic である.

- P が **overdetermined elliptic** とは、主表象 $\sigma_\xi(P): E_x \rightarrow F_x$ が単射 ($\forall x \in M, \forall \xi \in T_x^*(M)$). よって、このとき $P^*P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ は楕円型微分作用素となる. 例えば、

$$C^\infty(M) \ni f \mapsto \operatorname{grad}(f) \in \Gamma(TM)$$

は overdetermined elliptic である.

M がコンパクトであるので、

$$Pf = 0 \iff P^*Pf = 0$$

が成立する. 実際、

$$0 = \langle P^*Pf, f \rangle = \langle Pf, Pf \rangle = \|Pf\|^2$$

から従う. 同様に、 $P^*f = 0 \iff PP^*f = 0$.

さて、微分幾何学でよく利用する定理は次である.

Theorem 5.3.1. • P が *underdetermined elliptic* なら、 $\ker P^*$ は有限次元であり、

$$\Gamma(F) = P(\Gamma(E)) \oplus \ker P^*$$

- P が *overdetermined elliptic* なら,

$$\Gamma(F) = P(\Gamma(E)) \oplus (\ker P^* \cap \Gamma(F))$$

Proof. P が *underdetermined elliptic* とする. PP^* は楕円型であるので,

$$\Gamma(F) = PP^*(\Gamma(F)) \oplus \ker PP^* = PP^*(\Gamma(F)) \oplus \ker P^*$$

となる. $PP^*(\Gamma(E)) = P(\Gamma(E))$ を証明すればよい. $PP^*(\Gamma(E)) \subset P(\Gamma(E))$ は明らか. また, $P\phi \in P(\Gamma(E)), \psi \in \ker P^*$ に対して,

$$\langle P\phi, \psi \rangle = \langle \phi, P^*\psi \rangle = 0$$

となるので, L^2 内積に関して,

$$P(\Gamma(E)) \perp \ker P^*$$

となる. そこで, $P\phi \in P(\Gamma(E)) \subset \Gamma(F)$ とすれば, $\Gamma(F) = PP^*(\Gamma(F)) \oplus \ker P^*$ であるので,

$$P\phi = PP^*\phi_1 + \phi_2$$

と分解されるが,

$$0 = \langle P\phi, \phi_2 \rangle = \langle \phi_2, \phi_2 \rangle$$

であるので, $\phi_2 = 0$ であり,

$$P\phi = PP^*\phi_1$$

となる. よって, $PP^*(\Gamma(E)) \supset P(\Gamma(E))$ となる. 以上から,

$$\Gamma(F) = PP^*(\Gamma(E)) \oplus \ker P^* = P(\Gamma(E)) \oplus \ker P^*$$

を得る. また, ヒルベルト空間 $L^2(F)$ 内で $\ker P^*$ は (滑らかな切断からなる) 有限次元な閉部分空間である. よって,

$$L^2(F) = (\ker P^*)^\perp \oplus \ker P^*, \quad (\ker P^*)^\perp = \overline{PP^*(\Gamma(F))} = \overline{P(\Gamma(E))}$$

次に P が *overdetermined elliptic* とする. P^* は *underdetermined elliptic* であるので, 上で述べたことから

$$\Gamma(E) = P^*P(\Gamma(E)) \oplus \ker P^*P = P^*(\Gamma(F)) \oplus \ker P$$

が成立する. また, $L^2(E)$ において,

$$\overline{\text{Image}(P^*)} = (\ker P)^\perp$$

も同様に成立する．さて， $f \in \Gamma(F)$ とすれば， $P^*f \in P^*(\Gamma(F)) = P^*P(\Gamma(E))$ であり， P^*P が楕円型であることから，

$$P^*Pu = P^*f$$

を満たす滑らかな解 $u \in \Gamma(E)$ が存在する．よって， $P^*(Pu - f) = 0$ であるので，

$$Pu - f \in \ker P^* \cap \Gamma(F)$$

となる（ここで P^* は楕円型かわからないので， $\ker P^*$ は滑らかな切断からなるとは限らないし，無限次元かもしれないことに注意しよう）．また， $\Psi \in \ker P^*$ とすれば，

$$(Pu, \Psi) = (u, P^*\Psi) = 0$$

であるので， $Pu \in (\ker P^*)^\perp \cap \Gamma(F)$ である．以上を合わせれば次がわかる． $f \in \Gamma(F)$ として， $u \in \Gamma(E)$ を $P^*Pu = P^*f$ の解とすれば，

$$Pu - f = 0 \iff f \in (\ker P^*)^\perp \cap \Gamma(F)$$

特に， $(\ker P^*)^\perp \cap \Gamma(F) = P(\Gamma(E))$ が成立する．そこで，

$$f = -(Pu - f) + Pu \in \ker P^* \cap \Gamma(F) \oplus P(\Gamma(E))$$

となり，

$$\Gamma(F) = \ker P^* \cap \Gamma(F) \oplus P(\Gamma(E))$$

が従う． □

応用例を一つ述べるが，リーマン計量の汎関数の話などに繋がるものである（共変微分などを知らない場合は飛ばしてください）．

Example 5.3.2. (M, g) を向きつきコンパクトリーマン多様体とする．また， $S^p(M) := \Gamma(S^p(T^*M))$ を T^*M の p 次対称テンソル積の切断の空間とする．このとき，レビチビタ接続から導かれる共変微分を ∇ として， sym を対称化作用素とする．

$$\nabla : S^p(M) \rightarrow \Omega^1(M) \otimes S^p(M), \quad \text{sym} : \Omega^1(M) \otimes S^p(M) \rightarrow S^{p+1}(M)$$

sym は次で定義される．

$$\text{sym}(\alpha, \omega)(X_0, \dots, X_p) := \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p \alpha(X_i) \omega(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_p)$$

このとき，

$$\delta^* := \text{sym} \circ \nabla : S^p(M) \rightarrow S^{p+1}(M)$$

とする。さらに、 δ^* の *formal adjoint* を δ と書き、*divergence* とよぶ。

$$\delta : S^{p+1}(M) \rightarrow S^p(M), \quad (\delta T)_{i_1 \dots i_p} = - \sum_p \nabla^p T_{pi_1 \dots i_p}$$

さて、 $S^2(M)$ を考えてみる。このとき、 $\delta^* : S^1(M) = \Omega^1(M) \rightarrow S^2(M)$ は *overdetermined elliptic* であり、 $S^2(M)$ に対して次の直交直和分解が成立する。

$$S^2(M) = \text{Image}(\delta^*) \oplus \ker \delta$$

ここで、 $\ker \delta = \{\phi \in S^2(M) \mid \delta\phi = 0\}$ 。この分解はリーマン汎関数などを述べる際に重要となってくる分解である。実際、 $S^2(M)$ は M 上のリーマン計量全体の接空間と見なせる。詳しいことは *Besse* の本などを参照してほしい。

Proof. 主表象が単射であることをしめせばよい。 $\alpha \in S^2(M)$ として、 e_i を正規直交フレームとすれば、

$$\delta^* \alpha = \sum_i e_i \odot \nabla_{e_i} \alpha$$

である ($\odot$ が対称テンソル積)。つまり、局所的には

$$\sum_i e_i \odot \nabla_{e_i} \alpha = \sum_i e_i \odot \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$$

であるので、 $\xi \in T_x^*(M)$ に対して、

$$\sigma_\xi(\delta^*)\alpha = \alpha \otimes \xi + \xi \otimes \alpha$$

となる。そこで、

$$\|\alpha \otimes \xi + \xi \otimes \alpha\|^2 = 2g(\alpha, \alpha)g(\xi, \xi) + 2g(\alpha, \xi)^2 = 2\|\alpha\|^2\|\xi\|^2 + 2|g(\alpha, \xi)|^2$$

となる。よって、 $\alpha \otimes \xi + \xi \otimes \alpha = 0$ ならば ($\xi \neq 0$)、 $\alpha = 0$ を得る。よって単射となる。

これは、 δ の主表象が全射を証明してもよい。

$$(\delta\phi)_i = - \sum \nabla^p \phi_{pi}$$

であったので、

$$\sigma_\xi(\delta)\phi = - \sum \xi^p \phi_{pi}$$

であるので、明らかに全射である。 □

参考文献

- [1] Frank W. Warner *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie groups*, GTM 94, 1971.
- [2] N. Hitchin, *Differentiable manifolds*, Lecture note, Hitchin の homepage からダウンロード可.
- [3] 松本幸夫 多様体の基礎, 東大出版会.
- [4] L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, 1987.

索引

調和形式, 76

$\mathcal{S}$, 92

$\mathcal{P}$, 88

$\Omega^1(M)$, 12

$\Omega^p(M)$, 28

$C^\infty(M)$, 6

C_0^∞ , 121

C^∞ , 121

H^p , 76

$H_{-\infty}$, 95

$H_{DR}^*(M)$, 37

H_s , 92

K^t , 94

$\mathfrak{X}(M)$, 11

$C_b^k(\Omega)$, 111

closed form, 38

cotangent bundle, 12

elliptic estimate, 115

exact form, 38

Fundamental inequality, 115

harmonic form, 76

$\text{Hom}_G(V, V')$, 149

section, 14

tangent bundle, 9

アスコリアルゼラの定理, 110

underdetermined elliptic, 154

一様ノルム, 88

一様有界, 110

L^2 内積, 88

overdetermined elliptic, 154

外積, 19

外微分, 32

可約, 149

完全可約, 149

完全形式, 38

既約, 149

境界つき多様体, 52

共役表現, 150

行列成分, 152

Green 作用素, 81

形式的随伴作用素, 113

固有関数, 143

固有関数展開, 147

固有空間分解, 109

固有値, 143

コンパクト作用素, 106

差分商, 102

作用素ノルム, 101

三角多項式, 90

G 加群, 148

G 線形, 149

弱収束, 79

写像度, 56

シュアアの補題, 149

周期関数, 88

主表象, 134

シュワルツの不等式 (ソボレフ空間), 95

シュワルツの不等式, 93

推移関数, 15

star 作用素, 69, 71

ストークスの定理, 50, 54

Stone-Weierstass 近似定理, 90

正規直交フレーム, 70

積分 (多様体上), 48

接束, 9

切断, 14

接ベクトル, 6

双対表現, 150

ソボレフ空間, 92

ソボレフの補題, 104

体積 (リーマン多様体), 70

体積要素, 69, 70

楕円型微分作用素, 115

楕円複体, 137

多様体, 5

ディラック作用素, 141

テンソル積, 16

テンソル場, 27

テンソル表現, 151

転置表現, 150

同値 (表現が), 149

同程度連続, 110

ドラームコホモロジー群, 37

ドラームの定理, 37

ドラーム複体, 37

内積 (外積代数), 68

内積 (ソボレフ空間), 92

内積 (微分形式上), 71

滑らかな写像, 6

Parseval の等式, 91

Hahn-Banach の定理, 79

Peter-Paul 不等式, 96

引き戻し (微分形式), 13, 29

左正則表現, 151

微分 (多様体上), 9

微分形式, 12, 27

微分作用素, 112

表現, 148

フーリエ級数, 91

フーリエ係数, 88

ブラウアーの不動点定理, 55

閉形式, 38

平行移動, 102

ベクトル束, 14

ベクトル場, 11

ベッセルの不等式, 79

ポアンカレ双対定理, 84

ホッジ分解定理, 76

multi-index, 87

向き, 47

向き (多様体), 44

有界作用素, 101

ユニタリ表現, 148

余接束, 12

Laplace-Beltrami 作用素, 72

リー群, 148

リースの表現定理, 126

リーマン計量, 66

リーマン多様体, 66

regularity 定理, 76

regularity 定理 (一般の場合), 135

regularity 定理 (周期的作用素), 118

レリッヒの補題, 105