スピン幾何入門その１
クリフォード代数とスピン群

本間 泰史 *

目 次

1 クリフォード代数

1.1 定義と実現

クリフォード代数は，数学，物理学，工学（工学に場合は geometric algebra とよぶ）の様々な場面で使われる道具の一つである．

この章では，クリフォード代数を定義し，そのいくつかの性質を述べよう．特に，ディラック作用素や指数定理に最低限に必要な部分の述べる．クリフォード代数を使えるようになることが目的であるのであまり抽象的な議論はしないことにする（universality など．詳しくは spin geomerty を参照）.

$\mathbb{R}^n$ を内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ をもつ n 次元ユークリッド空間とする．また $e_1,\ldots,e_n$ を正規直交基底とする．

*理科大理工, version.2005.9.10（多分最終版）

　このとき外積代数という代数を作ることができる．それを $\Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \oplus_{p=0}^n \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ と書く．これは，$\mathbb{R}$ 上ベクトル空間としての基底が

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, \quad k = 1, \ldots, n$$

およびスカラー 1 で，関係式が

$$e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i = 0 \qquad \forall i, j$$

で与えられるものである．

Remark 1.1. 外積代数は内積が無くても定義できる．

　クリフォード代数は，ベクトル空間としては外積代数と同じだが，関係式を内積を使って変形したものである．特に，クリフォード代数は，外積と内積の情報をもったものである（例えばベクトル解析などをクリフォード代数で書くときれいになる）．

Definition 1.1 (クリフォード代数)**.** ベクトル空間としての基底が

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, \quad k = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

および 1 で，関係式が

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{i,j} = -2\langle e_i, e_j \rangle, \qquad \forall i, j \tag{1.2}$$

または

$$vw + wv = -2\langle v, w \rangle, \quad \text{for } v, w \in \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

で与えらる $\mathbb{R}$ **上の結合的代数を** $\mathbb{R}^n$ **に付随したクリフォード代数といい** Cl_n と書く（外積と区別するため $\wedge$ などの積の記号は書かない）．

　この定義から次がわかる

Proposition 1.1. クリフォード代数 Cl_n の**次元は** 2^n **である．また** $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n \subset Cl_n$ **である**.

Remark 1.2. もう少し数学的に定義したいなら，V を内積の入った実ベクトル空間としたときに，そのテンソル代数を考え，$\{vw + wv + 2\langle v, w \rangle | v, w \in \mathbb{R}^n\}$ で生成される両側イデアルでわった代数である．

Remark 1.3. 関係式は代数的な基底である e_i に対してのみ書いてある．一般の元の関係はこれを拡張したものである．例えば

$$e_1 e_2 e_1 e_2 = e_1(e_2 e_1)e_2 = e_1(-e_1 e_2)e_2 = -e_1^2 e_2^2 = -(-1)^2 = -1$$

となる．

n 次元実ベクトル空間で内積の符号が (p,q) となるものを $\mathbb{R}^{p,q}$ と書く．この場合にも関係式を

$$vw + wv = -2\langle v, w\rangle_{p,q}$$

とすることで，$\mathbb{R}$ 上結合的代数 $Cl_{p,q}$ を定義できる．上で定義した Cl_n は $Cl_{n,0}$ のことである．もちろん，$Cl_{p,q}$ は $Cl_{p',q'}$ と一般には代数として同型でない．$Cl_{n,0}$ と $Cl_{0,n}$ でさえ一般に代数として同型でない．

また Cl_n を複素化した $\mathbb{C}$ 上代数を $\mathbb{C}l_n = Cl_n \otimes \mathbb{C}$ と書く．符号 (p,q) の内積を複素内積にすれば，標準的な複素内積をもつ複素ベクトル空間に同型であるので，それは代数のほうにも反映され $\mathbb{C}l_{p,q} \simeq \mathbb{C}l_n$ と代数同型が成立する．我々が今後必要とするのは $Cl_{n,0}, Cl_{0,n}, \mathbb{C}l_n$ である．

以下でいくつかの例をあたえる．クリフォード代数がどんなものであるか感じをつかんでみよう．記号として $\mathbb{R}(n), \mathbb{C}(n), \mathbb{H}(n)$ と書いたら，それぞれ実，複素，四元数を成分にもつ $n \times n$ 行列の行列環のこと（行列環とは行列に普通の積によって代数構造を入れたもの）．

Example 1.1.

1. $\mathbb{R}^{1,0}$ の場合．正規直交基底は e_1 である．そこで $Cl_1 = Cl_{1,0}$ の基底は $1, e_1$ で，関係式は $e_1^2 = -1$ である．よって e_1 を i に対応させれば，$\mathbb{R}$ **上代数**として $Cl_{1,0} = \mathbb{C}$ である.（対応のさせ方は一つではない．例えば e_1 を $-i$ に対応させてもよい）．

2. $\mathbb{R}^{0,1}$ の場合．正規直交基底を e_1 とすれば，関係式は $e_1^2 = 1$ である．よって 1 を $(1,1)$ に e_1 を $(1,-1)$ に対応させれば，$\mathbb{R}$ **上代数**として $Cl_{0,1} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ である．ここで $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ の積構造は $(a,b)(c,d) = (ab, cd)$ としている.（つまり $Cl_{0,1}$ は二つの $\mathbb{R}$ 上代数の直和である）．

3. $\mathbb{C}l_1$ は $Cl_{0,1}$ を複素化すれば $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ であることがわかる．$Cl_{1,0}$ を複素化しても，同様の代数がえられるが複素化するには注意が必要である．実際 $\mathbb{C}1 + \mathbb{C}e_1$ を次のように分解する：

$$\mathbb{C}(\frac{1+ie_1}{2}) \oplus \mathbb{C}(\frac{1-ie_1}{2}).$$

このようにすれば $e_1^2 = -1$ から

$$\left(\frac{1 \pm ie_1}{2}\right)^2 = \frac{1 \pm ie_1}{2}, \quad \left(\frac{1+ie_1}{2}\right)\left(\frac{1-ie_1}{2}\right) = 0$$

であるので，二つの代数の直和に分解する．そこで，次のような対応させるのがよい．

$$1 = (1,1), \quad e_1 = (-i, i)$$

とすれば，$\mathbb{C}l_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ となる（このとき $e_1^2 = -1$ である）．

Example 1.2. 1. $\mathbb{R}^{2,0}$ の場合．$Cl_{2,0}$ の基底は $1, e_1, e_2, e_1e_2$ である．そこで

$$e_1^2 = e_2^2 = (e_1e_2)^2 = -1$$

などをみたすことから，$e_1 = i, e_2 = j, e_1e_2 = k$ として $Cl_{2,0} = \mathbb{H}$ が成立する．

2. $\mathbb{R}^{0,2}$ の場合．

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1e_2 = -e_2e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば $\mathbb{R}$ 上代数として $Cl_{0,2} = \mathbb{R}(2)$ である．

3. $\mathbb{C}l_2$ の実現は

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1e_2 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

とすることにより $\mathbb{C}l_2 = \mathbb{C}(2)$ となる．**ここで σ_i はパウリ行列である**．

4. ちなみに $\mathbb{R}^{1,1}$ に付随したクリフォード代数は $Cl_{1,1} = \mathbb{R}(2)$ となる．（各自確かめてみよ）．

Example 1.3. 1. $\mathbb{R}^{3,0}$ の場合．

$$1 = (1, 1), \quad e_1 = (i, -i), \quad e_2 = (j, -j), \quad e_3 = (k. - k)$$

とすれば．$Cl_{3,0} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ である．

2. $\mathbb{C}l_3$ の実現は次のようにする．

$$1 = (I, I), \quad e_1 = (\sigma_1, -\sigma_1), \quad e_2 = (\sigma_2, -\sigma_2), \quad e_3 = (\sigma_3, -\sigma_3)$$

とすれば $\mathbb{C}l_2 = \mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$ である．

3. $Cl_{0,3} = \mathbb{C}(2)$ である．

Example 1.4. 1. $\mathbb{R}^{4,0}$ の場合

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{pmatrix},$$
$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

とすれば，$Cl_{4,0} = \mathbb{H}(2)$ を得る．何度も注意するが対応のさせ方は一通りではない．

2. $\mathbb{C}l_4$ の場合

$$1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

とすれば，$\mathbb{C}l_4 = \mathbb{C}(4)$ を得る．

3. $Cl_{0,4} = \mathbb{H}(2)$ である．

上の例から複素クリフォード代数 $\mathbb{C}l_n$ については 2 の周期性が見える．実は，実クリフォード代数 $Cl_{0,n}, Cl_{n,0}$ にたいしても 8 の周期性がある．これらのことを証明しよう．

Lemma 1.2. $\mathbb{R}$ **上代数として**次の同型がある．

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}(2), \quad \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = \mathbb{R}(4).$$

Proof. 最初の同型は $Cl_{1,0}$ を複素化するときに証明した．次の同型は $\mathbb{H}$ の元 i, j, k に対してパウリ行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を対応させれば同じ関係式をみたすことからわかる．最後の同型について考える．$\mathbb{H}$ の元 x に対して，

$$(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \times \mathbb{H} \ni (p \otimes q, x) \to px\bar{q} \in \mathbb{H}$$

を考える．$\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$ に注意して，$\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ とかんがえれば，上の写像は $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ から $\mathbb{R}(4)$ の実代数として準同形を与える．さらにこれは同じ次元をもつ．また具体的に計算すればすぐに単射であることもわかる．よって同型になる． ■

二つの実代数 A, B があったとき $A \otimes_{\mathbb{R}} B$ も自然に代数になる．例えば実行列環のテンソル積を考えると $\mathbb{R}(n) \otimes \mathbb{R}(m) = \mathbb{R}(nm)$ である．

Lemma 1.3. 次の $\mathbb{R}$ 上代数としての同型が成立．

$$Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} = Cl_{0,n+2}, \quad Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} = Cl_{n+2,0}.$$

また $\mathbb{C}$ 上代数として

$$\mathbb{C}l_{n+2} = \mathbb{C}l_n \otimes \mathbb{C}l_2$$

である．

Proof. このような代数の同型を証明するには,「代数的な生成元の行き先を定義して，クリフォード代数の関係式が満たされれば代数準同形であることがわかり，あとは全単射性をしめす」というテクニックを使う．

$Cl_{n,0}\otimes Cl_{0,2}=Cl_{0,n+2}$ を証明しよう．$\mathbb{R}^{n+2}$ の正規直交基底を $e_1,\cdots,e_{n+2}$ とする．また $\mathbb{R}^{n,0}$ の基底を $e'_1,\cdots,e'_n$，$\mathbb{R}^{0,2}$ の基底を e''_1,e''_2 とする．このとき

$$f(e_i):=\begin{cases} e'_i\otimes e''_1e''_2 & 1\le i\le n \\ 1\otimes e''_{i-n} & i=n+1,n+2 \end{cases}$$

とする．$1\le i,j\le n$ に対して，

$$\begin{aligned} &f(e_i)f(e_j)+f(e_j)f(e_i)=e'_ie'_j\otimes e''_1e''_2e''_1e''_2+e'_je'_i\otimes e''_1e''_2e''_1e''_2 \\ =&-e'_ie'_j\otimes 1-e'_je'_i\otimes 1 \\ =&2\delta_{ij} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} &f(e_{n+1})f(e_i)+f(e_i)f(e_{n+1})=e'_i\otimes e''_1e''_1e''_2+e'_i\otimes e''_1e''_2e''_1 \\ =&e'_i\otimes e''_2-e'_i\otimes e''_2=0 \end{aligned}$$

や

$$f(e_{n+1})f(e_{n+1})=1\otimes e''_1e''_1=1\otimes 1$$

などから，f は代数準同形 $f:Cl_{0,n+2}\to Cl_{n,0}\otimes Cl_{0,2}$ へ拡張できる（実際，代数的な生成元に対して写像を定義し，上のような式から準同形へと拡張できる）．さらに e_i は $Cl_{0,n+2}$ の代数的な生成元であり，$e'_i\otimes e''_1e''_2, 1\otimes e''_{i-n}$ は $Cl_{n,0}\otimes Cl_{0,2}$ の代数的な生成元であるので全射となる．また次元を考えると一致するので代数同型となる．

他の場合も同様である． ■

例および補題をあわせると次がいえる．

Theorem 1.4 (クリフォード代数の分類). 実クリフォード代数に対して，次のような代数同型がある．

$Cl_{1,0}$	$\mathbb{C}$	$Cl_{0,1}$	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$
$Cl_{2,0}$	$\mathbb{H}$	$Cl_{0,2}$	$\mathbb{R}(2)$
$Cl_{3,0}$	$Cl_{0,1}\otimes Cl_{2,0}=(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})\otimes\mathbb{H}=\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$Cl_{0,3}$	$Cl_{1,0}\otimes Cl_{0,2}=\mathbb{C}(2)$
$Cl_{4,0}$	$Cl_{0,2}\otimes Cl_{2,0}=\mathbb{R}(2)\otimes\mathbb{H}=\mathbb{H}(2)$	$Cl_{0,4}$	$Cl_{2,0}\otimes Cl_{0,2}=\mathbb{H}(2)$
$Cl_{5,0}$	$Cl_{0,3}\otimes Cl_{2,0}=\mathbb{C}(4)$	$Cl_{0,5}$	$Cl_{3,0}\otimes Cl_{0,2}=\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$
$Cl_{6,0}$	$Cl_{0,4}\otimes Cl_{2,0}=\mathbb{R}(8)$	$Cl_{0,6}$	$Cl_{4,0}\otimes Cl_{0,2}=\mathbb{H}(4)$
$Cl_{7,0}$	$Cl_{0,5}\otimes Cl_{2,0}=\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$Cl_{0,7}$	$Cl_{5,0}\otimes Cl_{0,2}=\mathbb{C}(8)$
$Cl_{8,0}$	$Cl_{0,6}\otimes Cl_{2,0}=\mathbb{R}(16)$	$Cl_{0,8}$	$Cl_{6,0}\otimes Cl_{0,2}=\mathbb{R}(16)$

また，

$$Cl_{n+8,0}=Cl_{n,0}\otimes Cl_{8,0}=Cl_{n,0}\otimes\mathbb{R}(16),\quad Cl_{0,n+8}=Cl_{0,n}\otimes Cl_{0,8}=Cl_{0,n}\otimes\mathbb{R}(16)$$

となるので Cl_n **は周期８の周期性をもつ**（ここで周期性といってるのは単に規則性のことである．実は，直交群のボット周期性に対応している）．同様に，

$$\mathbb{C}l_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad \mathbb{C}_2 = \mathbb{C}(2)$$

及び $\mathbb{C}l_{n+2} = \mathbb{C}l_n \otimes \mathbb{C}_2 = \mathbb{C}l_n \otimes \mathbb{C}(2)$ から**複素クリフォード代数は周期２の周期性**をもつ．特に，

$$\mathbb{C}l_{2n+1} = \mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n), \quad \mathbb{C}l_{2n} = \mathbb{C}(2^n)$$

となり，複素クリフォード代数は複素行列環またはその直和に代数として同型である．

1.2　クリフォード代数上の写像

クリフォード代数上には様々な代数同型，代数歪同型が存在する．それらについて見ていこう．以下では主に $\mathbb{C}l_n$ について議論する（応用上よく使うのは複素スピノール表現である．もちろん実スピノール表現も大事であるが，それは周期８で case by case に議論すればよい）．$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底として $e_1, \cdots, e_n$ をとり，$\mathbb{C}l_n$ は Cl_n を複素化したものとして考える．つまり，$\mathbb{C}l_n$ 内での関係式は $e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}$ としておく．

前 subsection から次を得たのであった．

$$\mathbb{C}l_{2n+1} = \mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n), \quad \mathbb{C}l_{2n} = \mathbb{C}(2^n). \tag{1.4}$$

1. まず，$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}l_n$ の基底 $e_1, \cdots, e_n$ に対して，

   $$\alpha : e_k \mapsto -e_k$$

   という写像を定義する．$\alpha(e_i)\alpha(e_j)+\alpha(e_j)\alpha(e_k) = -2\delta_{ij}$ であるので $\alpha : \mathbb{C}l_n \to \mathbb{C}l_n$ という代数準同形に持ち上がる．さらに同型であることはすぐわかる．つまり一般には

   $$e_{i_1} \cdots e_{i_k} \mapsto (-1)^k e_{i_1} \cdots e_{i_k}$$

   とする．$\alpha^2 = 1$ であるので，± 1 固有空間に分解する．$+1$ 固有空間は偶数個の積の元全体で，-1 は奇数個の積の元全体である．つまり

   Proposition 1.5. α により次の分解を得る（代数としての分解ではない）．

   $$\mathbb{C}l_n = \mathbb{C}l_n^0 \oplus \mathbb{C}l_n^1 \quad \textit{even-odd}\,\text{分解}$$

   となる．さらに

   $$\mathbb{C}l_n^i \mathbb{C}l_n^j \subset \mathbb{C}l_n^{i+j \mod 2}$$

   であるので，$\mathbb{C}l_n$ **は** $\mathbb{Z}_2$ **次数付き代数**である．特に $\mathbb{C}l_n^0$ は積に関して閉じてる．

Remark 1.4. このような次数が付くのは $e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}$ という関係式からである．もちろん外積代数のように次数付き代数，つまり $\Lambda^p\Lambda^q \subset \Lambda^{p+q}$ のようにはならないが，クリフォード代数は $\mathbb{Z}_2$-graded にはなる．

2. 次に，$\mathbb{C}l_n^0 \simeq \mathbb{C}l_{n-1}$ という代数同型を与えよう．これを与えるには，

$$i : \mathbb{C}l_{n-1} \ni e_i \to e_ie_n \in \mathbb{C}l_n^0$$

を拡張すればよい（何度もいうように拡張できるのは $i(e_i)i(e_j) + i(e_i)i(e_j) = -2\delta_{ij}$ であり，e_i, e_ie_n はそれぞれの生成元であるからである）．この写像は代数同型になることはすぐにわかる．

Proposition 1.6. 次は代数としての同型

$$i : \mathbb{C}l_{n-1} \simeq \mathbb{C}l_n^0$$

3. 次は転置という歪代数同型である．

$$\mathbb{C}l_n \ni e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \mapsto (e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k})^t = e_{i_k}\cdots e_{i_2}e_{i_1} \in \mathbb{C}l_n$$

歪代数同型とは $(\phi\psi)^t = \psi^t\phi^t$ が成立すること．

4. 次に体積要素 ω を考える．そこで $\mathbb{R}^n$ **は向きつきであるとし，**$e_1, \cdots, e_n$ **が向きつき正規直交基底であるとする**．このとき

$$\omega := e_1 \cdots e_n$$

として，これを**体積要素**とよぶ（物理でいうところの γ_5 のこと）．実クリフォード代数の場合は，この体積要素を使って，例えば $n = 8k+3, 8k+7$ での Cl_n の実代数として分解を得ることができる．複素クリフォードの場合は次を使うのがよい

$$\omega := i^{[\frac{n+1}{2}]}e_1 \cdots e_n, \quad (i = \sqrt{-1})$$

これも**（複素）体積要素**とよぶ．このとき

$$\omega^2 = 1, \quad v\omega = (-1)^{n-1}\omega v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

が成立する．（ω の係数 $i^{[\frac{n+1}{2}]}$ は $\omega^2 = 1$ となるようにするためにつけている）．特に n **が奇数なら**$\mathbb{C}l_n$ の生成元と可換であるので，$\mathbb{C}l_n$ のすべての元と可換，つまり ω **は中心元**である．また n が偶数のときには可換とはならないが $\phi\omega = \omega\alpha(\phi)$ が成立する．

Remark 1.5. $\mathbb{C}l_n$ **の行列環としての実現をみると** n **偶数の場合には中心元全体は** $\mathbb{C}1$ **である**．実際，$\mathbb{C}l_n = \mathbb{C}(2^n)$ において，すべての $2^n \times 2^n$ 行列と可換な元は単位行列の定数倍である．n **奇数のときは** $\mathbb{C}_{\mathrm{span}}\{(I,I),(I,-I)\}$ **である．実は** ω **は** $(I,-I)$ **に対応している．つまり** $\mathbb{C}_{\mathrm{span}}\{1,\omega\}$

(a) n 奇数の場合を考える．このとき

$$\omega^2 = 1, \quad v\omega = v\omega$$

である．これは代数としての分解を与えることを見ていこう．

$$\omega : \mathbb{C}l_n \ni \phi \to \omega\phi \in \mathbb{C}l_n$$

という代数同型を考える（ω は中心なので代数同型である）．$\omega^2 = 1$ なので $\mathbb{C}l_n^+ \oplus \mathbb{C}l_n^-$ と ± 1 固有分解を得る．実はこれは代数としての分解である．

Proposition 1.7. ω は次の分解を与える．

$$\mathbb{C}l_{2n+1} = \mathbb{C}l_{2n+1}^+ \oplus \mathbb{C}l_{2n+1}^- = \mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n)$$

特に，$(1 \pm \omega)\mathbb{C}l_n = \mathbb{C}l_n^\pm$ である．

Proof. $\phi^\pm \in \mathbb{C}l_n^\pm$ とする．つまり $\omega\phi^\pm = \pm\phi^\pm$ である．

$$\omega(\phi^\pm\phi^\pm) = (\omega\phi^\pm)\phi^\pm = \pm\phi^\pm\phi^\pm$$

となる．よって $\mathbb{C}l_n^\pm$ は代数としてそれぞれ閉じている．また

$$\omega\phi^\pm\phi^\mp = (\omega\phi^\pm)\phi^\mp = \pm\phi^\pm\phi^\mp$$

一方，

$$\omega\phi^\pm\phi^\mp = \phi^\pm\omega\phi^\mp = \mp\phi^\pm\phi^\mp$$

であるので $\phi^\pm\phi^\mp = 0$ をえる．このように代数としての分解を与える．つまり

$$\mathbb{C}l_n = \mathbb{C}l_n^+ \oplus \mathbb{C}l_n^- \quad \mathbb{C}l_n^\pm = (1 \pm \omega)\mathbb{C}l_n$$

■

(b) n が偶数のときを考える．$\mathbb{C}l_{2n} = \mathbb{C}(2^n)$ の $\mathbb{C}^{2^n}$ 上への表現を考えたとき，ω はスピン群の表現空間の分解を与える．つまりスピノール表現の既約分解に使える．詳しくは後で．

5. $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を考えると

$$\mathbb{C}l_{n-1} \ni e_i \to e_i \in \mathbb{C}l_n$$

を拡張することにより $j : \mathbb{C}l_{n-1} \to \mathbb{C}l_n$ という単射準同形をえる．ここで $i = j : \mathbb{C}l_{n-1}^0 \to \mathbb{C}l_n^0$ であることに注意．

6. n が奇数の場合には $\alpha(\omega)=-\omega$ である．$\mathbb{C}l_n^0$ が $\mathbb{C}l_n=\mathbb{C}l_n^+\oplus\mathbb{C}l_n^-$ にどのように埋め込まれているかを見てみる．実は

$$\mathbb{C}l_n^0=\{\phi+\alpha(\phi)\in\mathbb{C}l_n^+\oplus\mathbb{C}l_n^-|\phi\in\mathbb{C}l_n^+\}$$

と diagonal に入っている．

Proof. $\alpha\omega=-\omega$ から α は $\alpha(\mathbb{C}l^\pm)=\mathbb{C}l^\mp$ である（つまり α が同型を与える）．実際 $\phi\in\mathbb{C}l_n^+$ とすると，$\alpha(\phi)=\alpha(\omega\phi)=\alpha(\omega)\alpha(\phi)=-\omega\alpha(\phi)$ となるので $\alpha(\phi)\in\mathbb{C}l^-$ である．そこで

$$\mathbb{C}l_n^+\ni\phi\to\phi+\alpha(\phi)\in\mathbb{C}l_n^+\oplus\mathbb{C}l_n^-$$

を考える．この像は $\alpha(\phi+\alpha(\phi))=\alpha(\phi)+\phi$ であるので $\mathbb{C}l_n^0$ に入っている．

$$(\phi+\alpha(\phi))(\psi+\alpha(\psi))=\phi\psi+\alpha(\phi\psi)$$

であるので（$\mathbb{C}l_n^+\mathbb{C}l_n^-=0$ を使った），代数準同形である．また単射，次元が一致する．よって $\mathbb{C}l_n^+\simeq\mathbb{C}l_n^0$ である．同様に $\mathbb{C}l_n^-\simeq\mathbb{C}l_n^0$ となる． ■

以上がクリフォード代数に対して使う性質である．

2 スピン群

スピン群 $Spin(n)$ は特殊直交群 $SO(n)$ の非自明な二重被覆を与える群である．$\pi_1(SO(n))=\mathbb{Z}_2$（$n\geq 3$）であるので，$n\geq 3$ なら普遍被覆群になってる群と言っても良い．

まず $SO(n)$ のリー環 $\mathfrak{so}(n)$ について復習する．

$$\mathfrak{so}(n)=\{a\in\mathbb{R}(n)|\langle av,w\rangle+\langle v,aw\rangle=0,\forall v\in\mathbb{R}^n\}$$

である．これは次のようにして $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ と同一視できる，$v\wedge w\in\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$(v\wedge w)(u)=\langle v,u\rangle w-\langle w,u\rangle v$$

とすることにより，$\Lambda^2(\mathbb{R}^n)\subset\mathbb{R}^n\otimes(\mathbb{R}^n)^*=\mathbb{R}(n)$ を $\mathbb{R}^n$ に作用させることができる．この対応で

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^n)=\mathfrak{so}(n)$$

となる．つまり

$$\mathfrak{so}(n)=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_i\wedge e_j|1\leq i<j\leq n\}$$

となる．

スピン群は $SO(n)$ のように行列表示は簡単ではない．半単純リー群は大きな線形群の部分群としては必ず実現できるのであるが，スピン群を実現するにはクリフォード代数を使うことになる（クリフォード代数を行列環とみなせば，スピン群の行列表示は可能ということになる）．スピン群そのものを定義する前に，まずリー環から定義する．

Definition 2.1.

$$[e_i, e_j] := e_i e_j - e_j e_i \in Cl_n \subset \mathbb{C}l_n$$

として，

$$\mathfrak{spin}(n) := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{[e_i, e_j] | 1 \leq i < j \leq n\} \subset Cl_n$$

とする．このときリー環構造は $a, b \in \mathfrak{spin}(n)$ に対して，$[a, b] = ab - ba$ としていれる（積はもちろんクリフォード積）．

このとき，次のことがわかる．

Lemma 2.1. *1.*

$$[e_i, e_j] = -[e_j, e_i] = \begin{cases} 2e_i e_j & \textit{for } i \neq j \\ 0 & \textit{for } i = j. \end{cases} \tag{2.1}$$

2.

$$[[e_i, e_j], e_k] = 4\delta_{ik} e_j - 4\delta_{jk} e_i. \tag{2.2}$$

3.

$$[[e_i, e_j], [e_k, e_l]] = 4(\delta_{ik}[e_j, e_l] + \delta_{il}[e_k, e_j] - \delta_{kj}[e_i, e_l] - \delta_{jl}[e_k, e_i]). \tag{2.3}$$

最後の式をみればわかるが，$\mathfrak{spin}(n)$ はリー環としてちゃんと閉じている．($\Lambda^2(\mathbb{R}^n) \subset Cl_n$ はクリフォード積については閉じてないけど，リー環の積構造に関しては閉じてる）．

Definition 2.2. $a \in \mathfrak{spin}(n)$ に対して，

$$\exp a := \sum \frac{a^n}{n!}$$

と定義する．そして**スピン群**を

$$Spin(n) := \exp \mathfrak{spin}(n)$$

とする．特に（このように定義すれば）**スピン群は連結**($n \geq 2$）であることがわかる．**また** $Spin(n) \subset \mathbb{C}l_n^0$ **である**ことにも注意する．

Remark 2.1. $n=1$ のときは，上の定義ではだめで $\mathfrak{spin}(1)=\{\pm 1\}$（連結でない）とする．

Remark 2.2. exp は $\mathbb{C}l_n$ を行列環だと思って行列の指数写像だと思えば，積は行列の積なので行列の exp 写像であり収束することがわかる．また $O(n)$ の二重被覆群としてピン群 $Pin(n)$ がある．それは

$$Pin(n)=Spin(n)\cup e_n Spin(n)$$

として定義する．しかしピン群はあまり必要ない．

Example 2.1. $e_1e_2\in\mathfrak{spin}(n)$ であった．$(e_1e_2)^2=-1$ であるので，

$$\exp te_1e_2=\cos t+e_1e_2\sin t\in Spin(n)$$

（$e^{it}=\cos t+\sin t$ と同じ）となる．特に，$\pm 1,\pm e_1e_2\in Spin(n)$ である．

さて $SO(n)$ に二重被覆であることを証明する前に次の補題を証明しよう．

Lemma 2.2. $\lambda\in\mathbb{C}\subset\mathbb{C}l_n$ とする．$\lambda\in Spin(n)$ ならば $\lambda=\{\pm 1\}$ となる．つまり言い換えると $Spin(n)\cap\mathbb{C}=\{\pm 1\}$ である．

Proof. $a\in\mathfrak{spin}(n)$ が存在して，$\lambda=\exp a$ とかける．この両辺の転置をとる．a は二次の元なので $a^t=-a$ であり，歪準同形であったので $(a^n)^t=(a^t)^n=(-a)^n$ である．よって $(\exp a)^t=\exp -a=(\exp a)^{-1}$ となる．一方 λ の転置は λ である．よって $\lambda=\lambda^{-1}$，つまり $\lambda=\pm 1$ である． ■

Remark 2.3. 上の性質はスピン c 群と異なる．スピン c 群の場合は $Spin^c(n)\cap\mathbb{C}=U(1)$ である．スピン c 群はあとで定義する．

さて，$Spin(n)$ が $SO(n)$ の二重被覆であること，つまり

$$0\to\mathbb{Z}_2\to Spin(n)\to SO(n)\to 1$$

という短完全系列を証明していこう．

$\mathfrak{spin}(n)$ は $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}l_n$ に次のようにして作用する：$u\in\mathbb{R}^n$, $[e_i,e_j]\in\mathfrak{spin}(n)$ に対して

$$\mathrm{ad}([e_i,e_j])(u):=[[e_i,e_j],u].$$

ここで (2.2) から $[[e_i,e_j],u]\in\mathbb{R}^n$ であることがわかる（ちゃんとリー代数の作用であることを各自確かめよ）．そして

$$\mathfrak{spin}(n)\ni[e_i,e_j]\mapsto 4e_i\wedge e_j\in\mathfrak{so}(n)$$

という**リー環の同型写像**を得る．

そこでこの指数写像を考えれば

$$Spin(n)\times\mathbb{R}^n\ni(g,u)\mapsto\mathrm{Ad}(g)(u):=gug^{-1}\in\mathbb{R}^n$$

という作用を得る（$Ad(\exp a) = \exp ad(a) \in SO(n)$ などもなりたつ）．よってリー群の準同形 $Spin(n) \to SO(n)$ が得られ，次の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccc} Spin(n) & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & SO(n) \\ \text{微分}\downarrow & & \downarrow\text{微分} \\ \mathfrak{so}(n) & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathfrak{so}(n) \end{array}$$

$Ad(\exp a) = \exp ad(a)$ から $\mathrm{Ad} : Spin(n) \to SO(n)$ **は全射**である．さらに Ad **の核は** ± 1 **である**.

単射性. $g \in Spin(n)$ として $gxg^{-1} = x$ がすべての x について成立すると仮定する．Ad は明らかに

$$Spin(n) \times \mathbb{C}l_n \ni (g, \phi) \mapsto g\phi g^{-1} \in \mathbb{C}l_n$$

として $\mathbb{C}l_n$ の表現へと拡張できる．$\{x \in \mathbb{R}^n\}$ はクリフォード代数を代数的に生成するので $gxg^{-1} = x$ から $g\phi g^{-1} = \phi$（$\forall \phi \in \mathbb{C}l_n$）が成立する．つまり g は中心元である．n が偶数の場合には中心元全体は $\mathbb{C}1 \subset \mathbb{C}l_{2n} = \mathbb{C}(2^n)$ であった．$g = \exp a \in \mathbb{C}$ となるのは補題 2.2 から $g = \pm 1$ しかありえない．

またnが奇数の場合には中心元は $\mathbb{C}l_{2n+1} = \mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n)$ と実現すれば，$1 = (I, I)$ および $\omega = (I, -I)$ で生成される．$g = \lambda(I, I)$ ならば補題 2.2 から $g = \pm 1$ となる．また，他の中心元は $\mathbb{C}l_n^1$ と交わりがあるので，$g \in \mathbb{C}l_n^0$ に反する．

このように $gxg^{-1} = x$ なら $g = \pm 1$ であることがわかった．以前みたように $\pm 1 \in Spin(n)$ であるので，$\ker \mathrm{Ad} = \{\pm 1\}$ である． ■

全射を証明するためにいくつか準備をする．

Definition 2.3. 連結コンパクト群 G に含まれる，連結で可換な閉部分群で極大なものを**極大トーラス**T と呼ぶ．またそのリー環である**極大可換環** $\mathfrak{t}$ **をカルタン部分環**とよぶ.

Lemma 2.3. *1.* 連結コンパクトリー群 G の極大トーラスは互いに共役である．

2. G のリー環 $\mathfrak{g}$ は，$\mathfrak{g} = \cup_{g \in G} Ad(g)\mathfrak{t}$.

3. $G = \cup_{g \in G} gTg^{-1}$.

4. $G = \exp X$

outline of proof. $G = U(n)$ の場合に説明する．$U(n)$ の極大トーラス群として，

$$T = \{ \begin{pmatrix} e^{it_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{it_n} \end{pmatrix} \mid 0 \le t_1, \cdots, t_n < 2\pi \}$$

を考えることができる．また，このリー環を考えたとき，$\exp \mathfrak{t} = T$ となることがわかる．勝手な $g \in U(n)$ を固有値分解すれば，$g' g g'^{-1}$ を上の形にできる．このことから極大トーラスが互いに共役であること，$\mathfrak{g} = \cup_{g \in G} Ad(g)\mathfrak{t}$，$G = \cup_{g \in G} g T g^{-1}$ が従う．さらに，$g = g'^{-1} \exp X g' = \exp(\mathrm{Ad}(g'^{-1})X)$（$X \in \mathfrak{t}$）とかけるので，$G = \exp X$ となる．

また $G = SO(n)$ の場合も同様であり，直交群の固有値分解を使えばよい．一般の連結コンパクトリー群に対しては，小林・大島「Lie 群と Lie 環」を見よ（証明は簡単）． ■

全射性. $\mathrm{Ad} : Spin(n) \to SO(n)$ の全射性を証明する．$g \in SO(n)$ は $g = \exp X$ とかける．一方 ad が同型であるので，$X = \mathrm{ad}(X')$ となるので，$g = \exp \mathrm{ad}(X') = \mathrm{Ad}(\exp X')$ となり，Ad が全射であることがわかる． ■

以上から

Proposition 2.4. 短完全系列

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin(n) \to SO(n) \to 1$$

が成立する．$Spin(n)$ は連結であったので，非自明な二重被覆である．特に $n \geq 3$ なら普遍被覆群となる．

Remark 2.4. 実は $n = 1$ のときのみ，我々の定義は通常のスピン群と異なってしまう．$SO(1) = O(1) = \{\pm 1\}$ であり，我々の定義では $Spin(n) = \{1\}$ である（連結）．普通の教科書だと $Spin(n) = \{\pm 1\}$（非連結）とする．

$n = 2$ のときは $SO(2) = U(1)$, $Spin(2) = U(1)$ であり，$U(1) \ni z \mapsto z^2 \in U(1)$ という二重被覆を与える．

Remark 2.5. $Pin(n)$ の $O(n)$ の二重被覆を与えるには，捻れ随伴表現 $Pin(n) \times \mathbb{C}l_n \ni (g, \phi) \mapsto \alpha(g)\phi g^{-1} \in \mathbb{C}l_n$ を使う.（これは $Spin(n)$ へ制限すれば普通の随伴表現）.

より具体的に二重被覆となることを見ていこう．リー環の同型写像を考え，その exp を考えれば,

$$\mathfrak{spin}(n) \ni e_1 e_2 \mapsto 2 e_1 \wedge e_2 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{so}(n),$$

$$Spin(n) \ni \exp t e_1 e_2 = \cos t + e_1 e_2 \sin t \mapsto \left(\begin{array}{cc|ccc} \cos 2t & -\sin 2t & 0 & \dots & 0 \\ \sin 2t & \cos 2t & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \in SO(n).$$

となり $\exp te_1e_2$ がスピン群内で一周するとき Ad で移したものは $SO(n)$ 内で二周している．

上の証明で $Spin(n)$ の $\mathbb{C}l_n$ 上の表現をえた．同様にして実クリフォード代数 Cl_n 上の表現を得る．$Cl_n = \oplus\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ と考えたとき，この作用は次数を保存する作用である．つまり

$$Spin(n) \times \Lambda^p(\mathbb{R}^n) \ni (g, \phi) \mapsto g\phi g^{-1} \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$$

という $Spin(n)$ の表現をえる．**これは $SO(n)$ の表現におち，普通の外テンソル積表現に対応する**．後で定義するスピノール表現は $SO(n)$ の表現に落ちないスピン群特有の表現である．また上で次数が 2 の場合を考えると，$\Lambda^2(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{so}(n) = \mathfrak{spin}(n)$ であり，

$$Spin(n) \times \mathfrak{spin}(n) \ni (g, \phi) \mapsto g\phi g^{-1} \in \mathfrak{spin}(n)$$

はリー環への随伴表現である．

2.1 スピン群の実現

次元が低い場合にスピン群を具体的にリー群として表示してみよう．ピン群 $Pin(n)$ は二つの連結成分に分かれる．単位元連結成分が $Spin(n)$ である．もう一つの成分を $Pin^1(n) = e_nSpin(n)$ と書くことにする．つまり $Pin(n) = Pin^0(n) \cup Pin^1(n) = Spin(n) \cup e_nSpin(n)$.

Example 2.2. $n = 1$ のとき． $\mathbb{C}l_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ であった．$1 := (1, 1)$，$e_1 := (i, -i)$ とする．このとき $\mathbb{C}l_1 = \mathbb{C}l_1^+ \oplus \mathbb{C}l_1^- = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ となり

$$\mathbb{C}l_1^0 = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{C}\}, \quad \mathbb{C}l_1^1 = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{C}\},$$
$$Spin(1) = \{(\pm 1, \pm 1)\}, \quad Pin^1(1) = \{(\pm i, \mp i)\},$$

Example 2.3. $n = 2$ のとき．$\mathbb{C}(2)$ 内で $1 := I$，$e_1 := \sigma_2$，$e_2 := \sigma_3$ とする．ここで σ_1, σ_2, σ_3 はパウリ行列で，

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき $\mathbb{C}l_2 = \mathbb{C}(2)$ となり

$$\mathbb{C}l_n^0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{C} \right\}, \quad \mathbb{C}l_n^1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \middle| \, c, d \in \mathbb{C} \right\},$$
$$Spin(2) = U(1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, a \in U(1) \right\},$$
$$Pin^1(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in U(1) \right\}.$$

Example 2.4. $n=3$ のとき．$\mathbb{C}(2)\oplus\mathbb{C}(2)$ 内で $1:=(I,I)$, $e_1:=(\sigma_1,-\sigma_1)$, $e_2:=(\sigma_2,-\sigma_2)$, $e_3:=(\sigma_3,-\sigma_3)$ とする．このとき $\mathbb{C}l_2=\mathbb{C}(2)\oplus\mathbb{C}(2)$ であり

$$\begin{aligned}\mathbb{C}l_1^0=\{(\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{C}(2)\},\quad \mathbb{C}l_1^1=\{(\alpha,-\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{C}(2)\},\\ Spin(3)=\{(p,p)\mid p\in SU(2)\}\simeq SU(2)\simeq Sp(1),\\ Pin^1(3)=\{(p,-p)\mid p\in SU(2)\}.\end{aligned}$$

特に $\mathbb{R}^3=\mathfrak{su}(2)$ と見たときに，

$$Spin(3)\times\mathfrak{su}(2)\ni(p,x)\mapsto pxp^{-1}\in\mathfrak{su}(2)$$

が $SU(2)\to SO(3)$ という二重被覆を与える．

Example 2.5. $n=4$ のとき．$\mathbb{C}(4)$ 内で

$$\begin{aligned}e_1:=\begin{pmatrix}0&-\sigma_1\\-\sigma_1&0\end{pmatrix},\quad e_2:=\begin{pmatrix}0&-\sigma_2\\-\sigma_2&0\end{pmatrix},\\ e_3:=\begin{pmatrix}0&-\sigma_3\\-\sigma_3&0\end{pmatrix},\quad e_4:=\begin{pmatrix}0&-I\\I&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

とする．このとき $\mathbb{C}l_4=\mathbb{C}(4)$ であり

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}l_4^0=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha,\beta\in\mathbb{C}(2)\right\},\quad \mathbb{C}l_4^1=\left\{\begin{pmatrix}0&\delta\\\gamma&0\end{pmatrix}\,\middle|\,\delta,\gamma\in\mathbb{C}(2)\right\},\\ &Spin(4)=SU(2)\times SU(2)=\left\{\begin{pmatrix}p&0\\0&q\end{pmatrix}\,\middle|\,p,q\in SU(2)\right\}\simeq Sp(1)\times Sp(1),\\ &Pin^1(4)=\left\{\begin{pmatrix}0&r\\s&0\end{pmatrix}\,\middle|\,r,s\in SU(2)\right\}.\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^4=\mathbb{H}$ とみなしたとき，

$$Spin(4)\times\mathbb{H}=(Sp(1)\times Sp(1))\times\mathbb{H}\ni((p,q),x)\mapsto pxq^{-1}\in\mathbb{H}$$

が $Spin(4)=Sp(1)\times Sp(1)\to SO(4)=Sp(1)Sp(1)=(Sp(1)\times Sp(1))/\mathbb{Z}_2$ という二重被覆を与える．

Example 2.6. $n=5$ のとき．$\mathbb{C}(4)\oplus\mathbb{C}(4)$ 内で

$$
\begin{aligned}
e_1 &:= \left(\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\right), \\
e_2 &:= \left(\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\right), \\
e_3 &:= \left(\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}\right), \\
e_4 &:= \left(\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\right), \\
e_5 &:= \left(\begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

とする．このとき $\mathbb{C}l_5=\mathbb{C}(4)\oplus\mathbb{C}(4)$ であり

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{C}l_5^0=\{(A,A)\mid A\in\mathbb{C}(4)\},\quad \mathbb{C}l_5^1=\{(A,-A)\mid A\in\mathbb{C}(4)\},\\
&Spin(5)=\{(P,P)\mid P\in SU(4),\ P^tJP=J\}\simeq Sp(2),\\
&Pin^1(5)=\{(P,-P)\mid P\in SU(4),\ P^tJP=J\}.
\end{aligned}
$$

ここで P^t は P の転置行列であり，

$$
J=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

同型 $Spin(5)\simeq Sp(2)$ の別証明を与えておく．$Spin(5)\subset Cl_5^0\simeq Cl_4\simeq\mathbb{H}(2)$ である．$\mathbb{H}(2)$ の $\mathbb{H}^2$ 上の表現を考えると，これは忠実な表現である．つまり，恒等写像で作用するものは 1 のみである．この表現を $Spin(5)$ へ制限する．$\mathbb{H}^2$ には，右からの作用で四元数構造が入るが，これは $Spin(5)$ の作用と可換である．よって，埋め込み $Spin(5)\subset GL(2,\mathbb{H})$ を得る．さらに，$\mathbb{H}^2$ 上のエルミート内積で $Spin(5)$ の作用と可換なものが存在する（これは上の行列表示をみてもわかる．または後で述べる一般論からもわかる）．よって，$Spin(5)\subset Sp(2)=GL(2,\mathbb{H})\cap U(4)$ となる．次元が一致し，$\pi_1(Spin(5))=\pi_1(Sp(2))=1$ であることから，$Spin(5)\simeq Sp(2)$ を得る．

Example 2.7. $n=6$ のとき $Spin(6)\simeq SU(4)$ という同型がある．各自確かめよ．$\mathbb{C}l_6=\mathbb{C}l_4\otimes\mathbb{C}l_2$ の対応を使って行列表示を行えばわかるはず．かなり面倒だと思う．そこで，$Spin(6)\simeq SU(4)$ の別証明を与えておく．まず $Spin(6)\subset Cl_6^0\simeq Cl_5\simeq\mathbb{C}(4)$ であるので，$\mathbb{C}(4)$ の $\mathbb{C}^4$ 上への表現を考えて，$Spin(6)$ へ制限する．こ

のとき $\mathbb{C}^4$ 上のエルミート内積で $Spin(6)$ の作用と可換なものが存在する．そこで，埋め込み $\iota : Spin(6) \to U(4)$ を得る．この埋め込みと $\det : U(4) \to U(1)$ を合成し，$\det \circ \iota : Spin(6) \to U(1)$ を得る．$Spin(6)$ は単連結なので，$Spin(6) \to \mathbb{R}$ という準同形に持ち上がる．$Spin(6)$ はコンパクト群なので，像も加法群 $\mathbb{R}$ のコンパクトな部分群となるが，これは $\{0\}$ である．よって，$\det \circ \iota(Spin(6)) = 1$ である．つまり $Spin(6) \to SU(4)$ という単射準同形を得る．$\pi_1(Spin(6)) = 1$ であることから，$Spin(6) \simeq SU(4)$ となる．

Remark 2.6. より高い次元で考えたときはディンキン図形を考えれば，同じものがないので，$n \geq 7$ のときには，スピン群と他の古典型リー群との同型はありえない．

2.2 スピノール表現

クリフォード代数はスピン群を実現することに役立った．さらに，スピノール表現というスピン群特有の表現の構成にもクリフォード代数は役立つ．

以下では $n = 2m, 2m+1$ と書くことにする．

$$\mathbb{C}l_{2m+1} = \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m), \quad \mathbb{C}l_{2m} = \mathbb{C}(2^m)$$

を考えれば，自然に $\mathbb{C}^{2^m}$ への表現をえることができる．また n が奇数の場合には同値でない表現が二つ構成できる．つまり

$$\mathbb{C}l_{2m+1} = \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m) \ni (\phi, \psi) \to \phi \in \mathfrak{gl}(2^m, \mathbb{C})$$
$$\mathbb{C}l_{2m+1} = \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m) \ni (\phi, \psi) \to \psi \in \mathfrak{gl}(2^m, \mathbb{C})$$

である．

Lemma 2.5. 上で定義した表現はクリフォード代数の**既約表現**である．さらに既約表現は上であげたものしかない（同値なものは除いて）．つまり**クリフォード代数の任意の表現は，上の既約表現のいくつかの直和に分解する**．

Proof. 行列環 $\mathbb{C}(n)$ は単純である．つまりイデアルは $\mathbb{C}(n)$ または零しかない．

$\mathfrak{I} \neq \{0\} \subset \mathbb{C}(n)$ をイデアルとして $X \neq 0 \in \mathfrak{I}$ とすれば，両側から適当に行列をかければ，必ず

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形に変形できる（行と列の基本変形）．そこでさらに両側から行列をかければ

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

の形のすべての元を$\mathfrak{I}$は含む．さらにこれらの元から$\mathbb{C}(n)$を作ることができるので$\mathfrak{I} = \mathbb{C}(n)$となる．

さて$\mathbb{C}(n)$の$\mathbb{C}^n$への表現を考える．不変部分空間があったとする．そのときには

$$\rho : \mathbb{C}(n) \to \mathbb{C}(m) \qquad m < n$$

という代数準同形を得る．このkernelはイデアルであるのでそれは0か$\mathbb{C}(n)$である．$\ker = 0$はありえないので，$\ker\rho = \mathbb{C}(n)$なら$\rho = 0$である．このように不変部分空間は存在しないので既約である．

さて，$\mathbb{C}(n) = \oplus_i L_i$と分解する．ここで$L_i$は$i$列以外の列ベクトルが零の部分空間である．$\mathbb{C}(n)$を，$\oplus L_i$に左から書ければ，各$L_i$は表現空間であり，上の$\mathbb{C}^n$と表現空間として同型であることがわかる．

そこで任意の表現空間Vに対して，

$$V = \mathbb{C}(n)V = \sum_{v\in V}\mathbb{C}(n)v = \sum_{v,i} L_i v$$

となる．$L_i v = 0$は和からのぞいておくことにする．$L_i v \neq 0$なら$\Phi : L_i \ni X \to Xv \in L_i v$という写像を考えると$\mathbb{C}(n)$の作用と可換である．$\ker\Phi \neq 0$なら，$L_i$の既約性に反するので，$\ker\Phi = 0$であり，単射である．また全射は明らか．よってこれは表現空間としての同型$L_i v \simeq L_i \simeq \mathbb{C}^n$を与える．よって，

$$V = \sum L_i v, \quad L_i v \text{ は既約}$$

となる．つまり完全可約であることがわかる．またVが既約なら$V = L_i v$となるL_iとvが存在することになり，任意の既約表現は$\mathbb{C}^n$への表現と同値である．

以上の議論は$\mathbb{C}(n) \oplus \mathbb{C}(n)$という代数についても同様に議論できる．■

Remark 2.7. 群Gの**表現**とは，ベクトル空間Vと$\rho : G \to GL(V)$という群準同形の組のことである．ρはGがVへ**作用**するとか，VはG**加群**という言い方もある．また，**ユニタリ表現**とはGの表現(ρ, V)を考えて，表現空間VにGと可換なエルミート内積が入っていることである．つまり$(gv, gw) = (v, w)$（$\forall g \in G$, $v, w \in V$）．

環（代数）Aの表現とは，ベクトル空間Vと$\rho : A \to \mathfrak{gl}(V)$という代数準同形の組のことである．

表現(ρ, V)が**既約**とは，G不変部分空間がVと$\{0\}$のみのことである．既約でないときを**可約**という．また，表現が**完全可約**とは既約部分空間の直和に分解できることである．

Definition 2.4. 上で構成した表現を$Spin(n) \subset \mathbb{C}l_n$へ制限したものを$Spin(n)$のスピノール表現といい，$(\Delta_n, \mathbb{C}^{2^n})$と書く．またその表現空間を**スピノール空間**という．

次の命題は明らかである．

Proposition 2.6. スピノール空間にはクリフォード代数が作用する．これを**クリフォード積**とよぶこともある（クリフォード代数内での積もクリフォード積とよぶ）．

Example 2.8. $n=3$ の場合に，$\mathbb{C}l_3=\mathbb{C}(2)\oplus\mathbb{C}(2)$ であり，$\mathbb{C}^2$ への表現を得る．そして

$$Spin(3)=SU(2)=\{(p,p)\mid p\in SU(2)\}\simeq Sp(1),$$

であったので，$Spin(3)\ni(p,p)\to p\in SU(2)\subset\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ という $\mathbb{C}^2$ への表現を得る．つまり $SU(2)$ の自然表現である．物理では **spin**$1/2$ **表現**とよぶ．一般に $SU(2)$ の既約表現は自然表現の対称テンソル積表現により作れる．つまり $S^k(\mathbb{C}^2)$ 上の表現は既約表現であり，spin $k/2$ 表現とよぶ．特に k が偶数のときは $SO(3)$ の表現へと落ちる．

上の例からわかるように，n が奇数の場合にクリフォード代数の表現としては非同値なものを二つ得るが，スピン群の表現としては同値である．実際

Proposition 2.7. **n が奇数のとき，クリフォード代数の二つの非同値な表現をスピン群へ制限した場合に，スピン群の表現として同値**である．

Proof. クリフォード代数の非同値な表現は

$$A+B\in\mathbb{C}l_n^+\oplus\mathbb{C}l_n^-$$

に対して A または B を対応させることによる．それぞれの表現を $\rho_\pm$ とすれば，$\rho_-=\rho_+\circ\alpha$ となる．つまり $\rho_-(\phi):=\rho_+(\alpha(\phi))$ とすれば，$\rho_-(\phi\psi)=\rho_+(\alpha(\phi\psi))=\rho_+(\alpha(\phi)\alpha(\psi))=\rho_-(\phi)\rho_-(\psi)$ となるので，このように定義した ρ_- はクリフォード代数の表現である．実際 $\alpha(\mathbb{C}l_n^\pm)=\mathbb{C}l^\mp$ なのであった（これはクリフォード代数に中で動かしてから表現を考えているので，クリフォード代数の表現として表現が同値ということにはならない）．

さて，$Spin(n)\subset\mathbb{C}l_n^0$ であり，

$$\mathbb{C}l_n^0=\{\phi+\alpha(\phi)\in\mathbb{C}l_n^+\oplus\mathbb{C}l_n^-|\phi\in\mathbb{C}l_n^+\}\simeq\mathbb{C}l_n^+$$

であったので $\rho_\pm$ は $\mathbb{C}l_n^0$ 上で同値な表現を与える．よって $Spin(n)$ に制限しても同様に同値である． ■

n が偶数の場合を見ていこう．

Proposition 2.8. **n が偶数のとき，スピノール表現 Δ_n はスピン群の表現として，非同値な二つの表現に分解する**．つまり $\Delta_n=\Delta_n^+\oplus\Delta_n^-$ である．またこれらを区別するには体積要素を使う．**つまり ω は $\Delta_n^\pm$ に ±1 で作用**する．また $e_i:\Delta^\pm\to\Delta^\mp$ と**クリフォード積により $\Delta^\pm$ が入れ替わる**．

Proof. $\mathbb{C}l^0_{2m} \simeq \mathbb{C}l_{2m-1} = \mathbb{C}(2^{m-1}) \oplus \mathbb{C}(2^{m-1})$ へ制限すれば $\mathbb{C}l^0_{2m}$ の二つの非同値な表現へ分解する．$Spin(n) \subset \mathbb{C}l^0_{2m}$ であったのでスピン群の表現としても分解する．それぞれの表現空間の次元は 2^{m-1} である．また $\mathbb{C}l^0_{2m} \simeq \mathbb{C}l_{2m-1}$ の同型において，$i^m e_1 \cdots e_{2m-1} \in \mathbb{C}l_{2m-1}$ は $i^m(e_1e_{2m})(e_2e_{2m})\cdots(e_{2m-1}e_{2m}) = i^m e_1 \cdots e_{2m-1}e_{2m} = \omega \in \mathbb{C}l^0_{2m-1}$ に対応する．$i^m e_1 \cdots e_{2m-1}$ は $\mathbb{C}l_{2m-1} = \mathbb{C}(2^{m-1}) \oplus \mathbb{C}(2^{m-1})$ としたときに $(I, -I)$ に対応する．よって $\omega = i^m e_1 \cdots e_{2m-1}e_{2m} \in \mathbb{C}l^0_{2m}$ は $\Delta^\pm$ 上に ± 1 で作用する．さらに偶数の場合には $v\omega = -\omega v$ であったので，$v \in \mathbb{R}^n$ の作用で $\Delta^\pm$ の入れ替えができる．

$\Delta^\pm_{2m}$ が同値でないことを証明しておく．$e_ie_j \in Spin(2m)$ であることはすぐにわかる．よって，$e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{2k}} \in Spin(2m)$ である．そこで，$\mathbb{C}l^0_{2m} \simeq \mathbb{C}l_{2m-1}$ の基底は $Spin(2m)$ の元で作れる．そこで，$\Delta^\pm_{2m}$ が $Spin(2m)$ の表現として同値であると仮定すると，$\mathbb{C}l^0_{2m}$ へと拡張すれば，$\mathbb{C}l^0_{2m}$ の表現として同値になってしまうので，矛盾する.（別証明：後で述べるように highest weight が異なることからわかる）． ■

Example 2.9. $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$ と実現したときを考える．Δ_4 は複素 4 次元の表現で $(p, q) \in SU(2) \times SU(2)$ に対して (p, q) をそのまま対応させる表現である．そしてこれは二つの複素 2 次元表現 $(p, q) \mapsto p$, $(p, q) \mapsto q$ へ分解する．それぞれが Δ^+_4, Δ^-_4 である．

2.3 スピノール空間上の実構造・四元数構造

スピノール表現には，いくつかの幾何構造をいれることが可能である．

Definition 2.5. 複素ベクトル空間の**実構造，四元数構造**とは歪複素線形写像 $\mathfrak{J}$ でそれぞれ $\mathfrak{J}^2 = 1$, $\mathfrak{J}^2 = -1$ となるものである．

スピノール表現に場合によっては，実構造，四元数構造が入ることを見ていこう．まず，実クリフォード代数 $Cl_n = Cl_{n,0}$ は次のように実現できた．

$$Cl_1 = \mathbb{C}, \quad Cl_2 = \mathbb{H}, \quad Cl_3 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \quad Cl_4 = \mathbb{H}(2)$$
$$Cl_5 = \mathbb{C}(4) \quad Cl_6 = \mathbb{R}(8) \quad Cl_7 = \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8) \quad Cl_8 = \mathbb{R}(16)$$

この実現から実クリフォード代数の表現を考えることができる．

Example 2.10. $n = 4$ の場合を考えよう．$Cl_4 = \mathbb{H}(2)$ の表現としては $\mathbb{H}^2$ 上への表現を得る．そして $\mathbb{H}^2$ に左からクリフォード代数をかけて，右から四元数をかけることにより，**実クリフォード代数と可換な四元数構造がはいる**．これを複素へ拡張する場合には，表現空間はそのままで，クリフォード代数を複素化する．つまり $\mathbb{C}l_4 = Cl_4 \otimes \mathbb{C}$ の元を $\phi \otimes z$ とすれば，

$$\mathbb{C}l_4 \times \mathbb{H}^2 \ni (\phi \otimes z, v) \mapsto z\phi \cdot v \in \mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{C}^4$$

とすればよい．つまり，$\mathbb{C}l_4 = \mathbb{C}(4)$ の既約表現空間には，実クリフォード代数と可換な四元数構造が入る．

より具体的に考えてみる．まず，

$$\mathbb{H} \ni z + jw \mapsto (z, w) \in \mathbb{C}^2$$

が $\mathbb{H}$ と $\mathbb{C}^2$ の同一視である．そして $\mathbb{H}$ の四元数構造は $(z + jw)j = -\bar{w} + j\bar{z}$ であるので，$\mathfrak{J}; \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を $\mathfrak{J}(z, w) = (-\bar{w}, \bar{z})$ とすれば歪複素線形で $\mathfrak{J}^2 = -1$ となる．これが $\mathbb{C}^2$ 上の四元数構造である．また $\mathbb{H}$ を $\mathbb{H}$ へ**左から**作用させると，

$$(a + jb)(z + jw) = (az - \bar{b}w) + j(bz + \bar{a}w)$$

となる．これは，四元数構造である**右から**j をかけるということと可換である．べつの見方をすれば

$$\mathbb{H} \ni a + jb \mapsto \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2)$$

であり，これが $\mathfrak{J}$ と可換であることはすぐにわかる．以上から，$\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2$ という同一視の元で，四元数構造及び左 $\mathbb{H}$ 作用は

$$\mathfrak{J}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{w} \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \quad (a + jb)\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

となる．

そこで，$\mathbb{H}$ の表現空間 $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2$ を考えて，$\mathbb{H}$ を複素化するということは，$\mathbb{C}^2$ 上の表現，

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \ni (a + jb) \otimes z \mapsto z \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2)$$

を考えることになる．以上のことを $\mathbb{C}l_4 \simeq \mathbb{H}(2)$ が $\mathbb{H}^2$ に作用する場合に行えばよい．$\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{C}^4$ に入る四元数構造（右からの $\mathbb{H}$ の作用）は実クリフォード代数の作用と可換である.（複素クリフォード代数とは可換でない，実際 $\mathfrak{J}((\phi \otimes z)v) = \bar{z}\phi\mathfrak{J}(v)$ となる）．よって，$Spin(4) \subset Cl_4$ であるので，スピン群の作用とも可換な四元数構造がスピノール表現 Δ_4 に入る．

また，$\Delta_4^{\pm}$ を考える．$Cl_4^0 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \subset \mathbb{H}^2 \simeq Cl_4$ の表現である．よって，$Spin(4)$ の作用と可換な四元数構造が $\Delta_4^{\pm}$ に入る．もちろん $e_i : \Delta_4^+ \to \Delta_4^-$ であるので，この四元数構造は実クリフォード代数 Cl_4 と可換でない（Cl_4^0 とは可換）．

同様にして $n = 8k + 4, 8k + 3$ の時に，実クリフォード代数と可換な四元数構造をいれることができる．そして，$\mathbb{C}l_{8k+4}^0 \simeq \mathbb{C}l_{8k+3}$ の表現にもスピン群の作用と可換な四元数構造が入る．よって**（複素）スピノール表現** $\Delta_{8k+4}^{\pm}$ **には，**$Spin(8k + 4)$ **の作用と可換な四元数構造をいれる**ことができる．

Example 2.11. $n = 8k+2$ のときに，スピノール表現 Δ_{8k+2} にはスピン群の作用と可換な四元数構造がはいる．しかし $\Delta^{\pm}_{8k+2}$ を考えると，そこにはスピン群の作用と可換な四元数構造は入らない．実際 Δ_{8k+2} の四元数構造は $\Delta^{\pm}_{8k+2}$ を保存しない．例えば，各自 $n = 2$ の場合で確かめてみよ．

Example 2.12. 次に $\Delta^{\pm}_{8k}$ **上にスピン群の作用と可換な実構造が入る**ことを見てみよう．簡単のため $n = 8$ で考える．$Cl_8 = \mathbb{R}(16)$ であったので $\mathbb{R}^{16}$ への表現を得る．そこでこのベクトル空間を複素化することで，$\mathbb{C}^{16}$ を得る．そこで自然な複素共役 $\mathfrak{J}$ によって $\mathbb{C}^{16}$ に実構造が入る．そして Cl_8 の作用は実行列で実現されているので，実構造はクリフォード積と可換である．また $\mathbb{C}l_8$ に拡張するには

$$Cl_8 \otimes \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{16} \ni (\phi \otimes z, v) \mapsto z\phi \cdot v \in \mathbb{C}^{16}$$

とすればよい．よってスピン群の作用と可換な実構造がはいる．$n = 8k+7$ のときも同様である．そこで $\Delta^{\pm}_{8k}$ **にはスピン群の作用と可換な実構造が入る**．

Remark 2.8. $n = 8k+4$ の場合が重要である．スピン群の作用と可換なのでスピン多様体上のスピノール束にも同様の構造がはいる．そしてディラック作用素の指数を考えたとき $\mathrm{ind}(D) = \ker D^+ - \ker D^-$ の $\ker D^{\pm}$ にも四元数構造が入る．つまり次元は必ず 4 で割れる．有名なロホリンの定理でこの事実を使うのである．

スピノール空間上の実構造，四元数構造の詳細は「スピン幾何入門 2」で学ぶ．

2.4 スピノール空間上のエルミート内積

次にスピノール表現がユニタリ表現になることをみる．

Proposition 2.9. スピノール空間にはエルミート内積 $\langle \phi, \psi \rangle$ **で** $\langle e_i\phi, e_i\psi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle$ **となるものが存在**する．特に，スピン群の表現としてユニタリ表現であることがわかる．

Proof. ベクトル空間 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{spin}(n) \subset Cl_n$ を考える．$\mathfrak{g}$ に対して，リー環の構造を入れる．

$$[z, w] = zw - wz, \quad z, w \in \mathfrak{g}$$

とすればよい．さらに，代数同型 $i : Cl_n \to Cl^0_{n+1}$ （$i(e_k) = e_k e_{n+1}$）を使って，$i : \mathfrak{g} \to Cl_{n+1}$ を考えると，この像は $\mathfrak{spin}(n+1)$ に入り，リー環の同型写像であることがわかる．つまり，$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{spin}(n+1)$ となる．対応するコンパクトリー群を $G \simeq Spin(n+1)$ とする．スピノール表現空間の勝手な内積を考えて，それを G 上で積分すれば，$z \in \mathfrak{g}$ の元に対して，$\langle z\phi, \psi \rangle + \langle \phi, z\psi \rangle = 0$ を満たす．特に，$\langle e_i\phi, e_i\psi \rangle = -\langle \phi, e_ie_i\psi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle$ となる． ■

Remark 2.9. 球面を対称空間 $S^n = SO(n+1)/SO(n) = Spin(n+1)/Spin(n)$ とみなせるが，このときのリー環のカルタン分解は $\mathfrak{so}(n+1) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{m}$ となる．これが上で与えている分解である．

Corollary 2.10. 上の内積に関して，$\Delta_{2m} = \Delta_{2m}^+ \oplus \Delta_{2m}^-$ は直交分解になる．

Proposition 2.11. Δ_{2m+1}, $\Delta_{2m}^{\pm}$ は**スピン群の既約ユニタリ表現**である．

Proof. 既約性を証明する．Δ_{2m+1}, $\Delta_{2m}^{\pm}$ は $\mathbb{C}l_{2m+1}^0, \mathbb{C}l_{2m}^0$ の既約表現であった．スピン群はこれらの基底を含む．実際 $\exp te_ie_j = \cos t + e_ie_j \sin t$ であったので $e_ie_j \in Spin(n)$ である．そこで $\Delta_{2m+1}, \Delta_{2m}^{\pm}$ にスピン群に関して不変部分空間が存在したとすると，$\mathbb{C}l_n^0$ の表現として既約であることに反する． ■

2.5　フェルミオン表示

上で定義したスピノール表現をより具体的に書いてみよう．それには複素クリフォード代数をフェルミオンを使って表示するのがよい．

Definition 2.6. $1 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$ として，

$$a_k := \frac{1}{2}(\sqrt{-1}e_{2k-1} - e_{2k}), \quad a_k^{\dagger} := \frac{1}{2}(\sqrt{-1}e_{2k-1} + e_{2k}),$$

a_k **を消滅演算子，**$a_k^{\dagger}$ **を生成演算子**という．　また $n = 2m+1$ のときには

$$b := -\sqrt{-1}e_{2m+1}.$$

とする（この b の定義において $-\sqrt{-1}$ はあまり深い意味はない）．また

$$\omega_k := a_k^{\dagger}a_k - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}e_{2k-1}e_{2k},$$

とする．

上で挙げた生成消滅演算子で $a_k, a_k^{\dagger}, b$ で $\mathbb{C}l_n$ が生成されることがわかる．
反交換子積を $[a,b]_+ := ab + ba$ で定義するとクリフォード代数の関係式から

$$[a_k, a_l^{\dagger}]_+ = \delta_{kl}, \quad [b,b]_+ = 2,$$
$$[a_k, a_l]_+ = [a_k^{\dagger}, a_l^{\dagger}]_+ = [a_k, b]_+ = [a_k^{\dagger}, b]_+ = 0.$$

がわかる．

$\mathfrak{g} = \mathfrak{spin}(n)$ として $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ をその複素化とする．以前みたように，この基底として $[e_k, e_l]$ が考えられるが，表現論の視点からは次のような基底をとるのがよい．

1. $n = 2m$ のとき $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の基底として次をとれる．

$$\{\omega_k = a_k^{\dagger}a_k - 1/2\}_{k=1}^m \cup \{a_k^{\dagger}a_l\}_{k<l} \cup \{a_ka_l^{\dagger}\}_{k<l}$$
$$\cup \{a_ka_l\}_{k<l} \cup \{a_k^{\dagger}a_l^{\dagger}\}_{k<l}$$

2. $n=2m+1$ のとき $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の基底として次をとれる

$$\{\omega_k = a_k^\dagger a_k - 1/2\}_{k=1}^m \cup \{a_k^\dagger a_l\}_{k<l} \cup \{a_k a_l^\dagger\}_{k<l} \cup \{a_k a_l\}_{k<l} \\ \cup \{a_k^\dagger a_l^\dagger\}_{k<l} \cup \{a_k b\}_{k=1}^m \cup \{a_k^\dagger b\}_{k=1}^m$$

この基底の取り方は実はルート分解になっている.

さて $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の**極大可換環**として,

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\omega_1, \cdots, \omega_m\} \quad n=2m \text{ or } n=2m+1$$

を考える（$\mathfrak{h} := \sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ が $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環）.

$\mathfrak{g}$ の有限次元表現 (π, V) があったときに可換環 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ に関して表現空間 V を一次元同時固有空間の直和に分解ができる，$V = \oplus_\lambda V(\lambda)$．その同時固有値 $\lambda := (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ を **weight** とよぶ．つまり λ_i が ω_i の固有値（$\omega_i|_{V(\lambda)} = \lambda_i \mathrm{id}$）．また λ の重複度を weight の重複度とよぶ．そして**辞書式順序でならべてもっとも大きいものを highest weight** という（この重複度は既約表現の場合は 1 であることが知られている）．上で述べたルート分解とは，リー環のリー環自身への随伴表現を考えたときの，weight 分解のことである（この場合には weight をルート (root) とよぶ）．このような表現論の話は,「スピン幾何入門 2」で詳しく述べる．

weight の書き方として次のような書き方をする．l が k 個並んだとき l_k と書く．例えば，$((1/2)_{m-1}, -1/2)$ と書いたら，$1/2$ が $m-1$ 個ならび，最後が $-1/2$ の weight のことである．

Example 2.13. （スピノール表現．$n=2m$ の場合）W_{2m} を 2^m 次元のベクトル空間で $\{a_{k_1}^\dagger \cdots a_{k_j}^\dagger |vac\rangle \mid 1 \le k_1 < \cdots < k_j \le m\}$ で $\mathbb{C}$ 上 span されるものとする．$a_k|vac\rangle = 0$ for any k により定義するとクリフォード代数 $\mathbb{C}l_{2m}$ の表現を得る．

具体的に見てみよう．$|vac\rangle$ は真空状態というものである（vac は vacuum（真空）の意味）．ここに生成演算子である $a_1^\dagger$ が一個当たると $a_1^\dagger|vac>$ となる．さらに $a_1^\dagger$ を当てると，関係式を使って，

$$a_1^\dagger a_1^\dagger |vac\rangle = -a_1^\dagger a_1^\dagger |vac\rangle = 0$$

となる．つまり同じ生成演算子が同時に入ることはない（これがフェルミオンの意味である）．また，消滅演算子を当てると，

$$a_2(a_1^\dagger a_2^\dagger |vac\rangle) = -a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger |vac\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger a_2 |vac\rangle - a_1^\dagger |vac\rangle = -a_1^\dagger |vac\rangle$$

などとなる．このようにして，クリフォード代数 $\mathbb{C}l_{2m}$ の表現を得るのである．$\mathbb{C}l_{2m} = \mathbb{C}(2^m)$ であるのでクリフォード代数の既約表現 (ρ_{2m}, W_{2m}) である．$Spin(2m)$ または $\mathfrak{spin}(2m)$ の表現 (Δ_{2m}, W_{2m}) は制限 $(\rho_{2m}|_{Spin(n)}, W_{2m})$ により与えられる．これがスピノール表現であった．さらに (Δ_{2m}, W_{2m}) は $(\Delta_{2m}^+, W_{2m}^+) \oplus (\Delta_{2m}^-, W_{2m}^-)$ と

既約分解される．ここで

$$W_{2m}^{+} := \mathbb{C}\{a_{k_1}^{\dagger}\cdots a_{k_j}^{\dagger}|vac\rangle \mid 1 \le k_1 < \cdots < k_j \le m \text{ and } j \equiv m \mod 2\}, \tag{2.4}$$

$$W_{2m}^{-} := \mathbb{C}\{a_{k_1}^{\dagger}\cdots a_{k_j}^{\dagger}|vac\rangle \mid 1 \le k_1 < \cdots < k_j \le m \text{ and } j \equiv m+1 \mod 2\}. \tag{2.5}$$

$(\Delta_{2m}^{+}, W_{2m}^{+})$ (resp. $(\Delta_{2m}^{-}, W_{2m}^{-})$) の highest weight vector は $a_1^{\dagger}\cdots a_m^{\dagger}|vac\rangle$ で highest weight は $((\frac{1}{2})_m)$ (resp. $a_1^{\dagger}\cdots a_{m-1}^{\dagger}|vac\rangle$ with weight $((\frac{1}{2})_{m-1}, -\frac{1}{2})$) となる．また体積要素 ω は $2^m\omega_1\cdots\omega_m$ となるが，これは $W_{2m}^{\pm}$ 上 ±1 で作用する. なぜなら $\omega a_i^{\dagger} = -a_i^{\dagger}\omega$ かつ $\omega|vac\rangle = (-1)^m|vac\rangle$ であるので.

weight をもとめよう．$\omega_i = a_i^{\dagger}a_i - 1/2$ が $a_{k_1}^{\dagger}\cdots a_{k_j}^{\dagger}|vac\rangle$ に作用したとき添え字 k_i の中に i があれば（粒子 $a_i^{\dagger}$ があれば）$1/2$ で作用し，i がなければ（粒子が無ければ）$-1/2$ で作用する．例えば $a_1^{\dagger}a_3^{\dagger}|vac\rangle$ なら weight は $(1/2, -1/2, 1/2, (-1/2)_{m-3})$ である．よって weight はすべて $(\pm1/2, \cdots, \pm1/2)$ の形であり．各 weight の重複度は 1 で，全部で 2^m 個ある．このように W^{+} の weight は $(\pm1/2, \cdots, \pm1/2)$ の $-1/2$ の個数が $\#\{(-1/2)\} \equiv m \mod 2$ となるもので．W^{-} の weight は $\#\{(-1/2)\} \equiv m+1 \mod 2$. weight に辞書式順序を入れれば, **highest weight がそれぞれ** $((\frac{1}{2})_m)$**,** $((\frac{1}{2})_{m-1}, -\frac{1}{2})$ **になる**ことがわかる.

Remark 2.10. $\omega_i + 1/2 = a_i^{\dagger}a_i$ は上のことから粒子 $a_i^{\dagger}$ がある場合は 1 で，ない場合は 0 として作用する．そこで $N = \sum a_i^{\dagger}a_i$ が**数演算子**というもので，粒子がいくつあるかを数えるもの.

さて内積を導入し $Spin(n)$ のユニタリ表現にしよう.

$$(a_{k_1}^{\dagger}\cdots a_{k_i}^{\dagger}|vac\rangle, a_{l_1}^{\dagger}\cdots a_{l_j}^{\dagger}|vac\rangle) = \delta_{ij}\delta_{k_1l_1}\cdots\delta_{k_il_j} \tag{2.6}$$

(for $1 \le k_1 < \cdots < k_i \le m$ and $1 \le l_1 < \cdots < l_j \le m$)．この内積は $(a_k\phi, \psi) = (\phi, a_k^{\dagger}\psi)$ をみたすことがわかる．言いかえると $(e_k\phi, \psi) = -(\phi, e_k\psi)$ である．つまり e_i を行列表示したときに e_i は歪エルミート行列で，$e_i^{*} = -e_i$ である．また $(ie_i)^{*} = ie_i$ となる．また自然な複素共役により，$\bar{a}_i = -a_i^{\dagger}$，$\bar{a}_i^{\dagger} = -a_i$ となるため，例えば $A := a_k^{\dagger}a_l + a_ka_l^{\dagger} \in \mathfrak{g} = \mathfrak{spin}(n)$ とすれば，$\langle A\phi, \psi\rangle + \langle\phi, A\psi\rangle = 0$ がわかる. よってスピノール表現は上の内積に関して $Spin(n)$ のユニタリ表現になる.

物理の記号では内積 (2.6) を次のように書く

$$\langle vac|a_{k_i}\cdots a_{k_1}a_{l_1}^{\dagger}\cdots a_{l_j}^{\dagger}|vac\rangle = \delta_{ij}\delta_{k_1l_1}\cdots\delta_{k_jl_j}. \tag{2.7}$$

Remark 2.11. 上で自然な複素共役と書いたが，$\mathbb{C}l_n = Cl_n \otimes \mathbb{C}$ と見たときの複素共役のこと（その共役で不変なものが Cl_n）．これはクリフォード代数を複素行列で実現したときの複素共役に必ずしも一致しないことに注意する.

Example 2.14. （スピノール表現，$n = 2m+1$ のとき）W_{2m+1} を 2^m 次元のベクトル空間で $\{a_{k_1}^{\dagger}\cdots a_{k_j}^{\dagger}|vac\rangle \mid 1 \le k_1 < \cdots < k_j \le m\}$ で生成されるものとする.

$a_k|vac\rangle = 0$（for any k）とし，b の作用を $b|vac\rangle = |vac\rangle$ または $b|vac\rangle = -|vac\rangle$ により定義することにより $\mathbb{C}l_{2m+1}$ の二つの非同値な既約表現 ρ^+_{2m+1}，ρ^-_{2m+1} を得る．これは $\mathbb{C}l_{2m+1} = \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m)$ であるので，各成分の $\mathbb{C}^{2^m}$ への表現である．これらを区別するには体積要素をもちいる．$\omega = 2^m\omega_1 \cdots \omega_m b$ となるが, $\omega a_i^\dagger = a_i^\dagger\omega$ かつ $\rho^+(\omega)|vac\rangle = (-1)^m|vac\rangle$，$\rho^-(\omega)|vac\rangle = (-1)^{m+1}|vac\rangle$ であるので ω は W_{2m+1} に $(-1)^m$ または $(-1)^{m+1}$ で作用する（この違いは b の $|vac\rangle$ への作用の違いに対応）．さてこの表現を $\mathfrak{spin}(2m+1)$ へ制限すると互いに同値であった．そこで $b|vac\rangle = |vac\rangle$ を b の作用として採用する．このようにしてスピノール表現 $(\Delta_{2m+1}, W_{2m+1})$ をえる．これは既約であり highest weight vector は $a_1^\dagger \cdots a_m^\dagger|vac\rangle$ であり **highest weight は $((\frac{1}{2})_m)$ である**．weight は $n = 2m$ の場合と同様にする．

Remark 2.12. $n = 2m$ のとき $W_{2m} = W^+_{2m} \oplus W^-_{2m}$ と分解されていた．これは $W^\pm_{2m}$ が偶数個の粒子または奇数個の粒子かの分解であり，$\mathfrak{spin}(n)$ の作用は偶数個奇数個を変えないので $W^\pm_{2m}$ は不変部分空間である．$n = 2m+1$ のときは，$a_i^\dagger b|vac\rangle = a_i^\dagger|vac\rangle$ なので粒子の個数の偶奇は変わってしまう．

Remark 2.13. 上で構成した表現はスピン群の表現として既約ユニタリ表現であることがわかる（既約であることはすでに証明した）．

3　交代形式のスピノール空間への作用

クリフォード積は，クリフォード代数のスピノール空間への作用として定義されたが，微分形式（交代形式または multi-vector）がスピノール空間に作用すると見たほうが，微分幾何的な応用が多い．

W_n をスピノール表現とする．また交代テンソル積 $\Lambda^*((\mathbb{R}^n)^*) \simeq \Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ を考える．この交代テンソル積空間をスピノール空間へ作用させたい．例として $w = (e_1 + e_2) \wedge (e_1 + e_3) = e_2 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_3$ をスピノール空間へ作用させよう．単純に考えれば,

$$\begin{aligned} w\phi &= (e_1 + e_2) \cdot (e_1 + e_3) \cdot \phi = (e_1e_1 + e_2e_1 + e_1e_3 + e_2e_3)\phi \\ &= (-1 + e_2e_1 + e_1e_3 + e_2e_3)\phi \end{aligned}$$

となる．一方で，$w = e_2 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_3$ の表示を使えば

$$w\phi = (e_2e_1 + e_1e_3 + e_2e_3)\phi$$

となり，先ほどのものと異なってしまう．これはクリフォード代数と外積代数の積構造が異なるために起こる．

そこで $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底を固定して $\{e_i\}$ とする．そして，$w \in \Lambda^p((\mathbb{R}^n)^*)$ をこの基底に関して表示する

$$w = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} w_{i_1 i_2 \ldots i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}.$$

ここで内積を使って $(e_i,\cdot)$ と e_i の dual basis とを同一視している．このとき

$$w\cdot\phi := \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} w_{i_1 i_2\cdots i_p} e_{i_1}\cdots e_{i_p}\cdot\phi$$

と定義する．この定義は正規直交基底のとり方によらず well-defined である（正規直交基底でなければ駄目．つまりユークリッド内積の情報を使って定義しているのである）．別の書き方をすれば，

$$w\cdot\phi := \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} w(e_{i_1},\cdots,e_{i_p}) e_{i_1}\cdots e_{i_p}\cdot\phi$$

Remark 3.1. 添え字は $i_1<i_2<\cdots<i_p$ としないと駄目．例えば $w=\sum_{i,j} w_{ij}e_i\wedge e_j$ としたら，$w\cdot\phi=\sum_{i,j} w_{ij}e_ie_j\phi$ とはならない．これは $e_i\wedge e_i=0$ であるが $e_ie_i=-1$ であるからである．

Proposition 3.1. $w\in\Lambda^p((\mathbb{R}^n)^*)\simeq\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, $\phi\in W_n$ とする．$\{e_i\}_i$ を正規直交基底とすれば，

$$w\cdot\phi := \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} w(e_{i_1},\cdots,e_{i_p}) e_{i_1}\cdots e_{i_p}\cdot\phi$$

により**交代テンソル積 w をスピノール空間に作用させる**ことができる．このとき

1. $v\in(\mathbb{R}^n)^*=\mathbb{R}^n$ に対して

$$(v\wedge w)\phi = v\cdot(w\cdot\phi)+(i(v)w)\cdot\phi$$

が成立．ここで $i(v)$ は縮約である（注意：このように**外積代数の表現ではない**）．

2. スピノール空間に入る自然な**ユニタリ内積に関して**

$$(w\cdot\phi,\psi)=(-1)^{p(p+1)/2}(\phi,w\cdot\psi)$$

が成り立つ.

3. スピン群の作用と可換である．つまり

$$g(w\phi)=(\mathrm{Ad}(g)w)(g\phi)$$

が成立する．

Remark 3.2. 縮約についても注意する必要がある．$v\in(\mathbb{R}^n)^*$ で $w\in\Lambda^*((\mathbb{R}^n)^*)$ を縮約するのには計量の情報を使っている．つまり $(\mathbb{R}^n)^*\simeq\mathbb{R}^n$ という同型を使っている．例えば，$v,w\in\mathbb{R}^n$ なら，$(v\wedge w)\phi=v\cdot w\cdot\phi+(v,w)\phi$ となる．

Proof. 基底 $w = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ について証明すればよい．まず

$$e_i e_{i_1} \cdots e_{i_p} = \begin{cases} (-1)^k e_{i_1} \cdots \widehat{e_{i_k}} \cdots e_{i_p}, & i = i_k \\ e_i e_{i_1} \cdots e_{i_p}, & i \notin \{i_1, \cdots, i_p\} \end{cases}$$

一方

$$(e_i \wedge -i(e_i))(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \begin{cases} (-1)^k e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_k}} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, & i = i_k \\ e_i \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, & i \notin \{i_1, \cdots, i_p\} \end{cases}$$

である．よって

$$e_i(w\phi) = (e_i \wedge w - i(e_i)w)\phi$$

となる．

次に $(w \cdot \phi, \psi) = (-1)^{p(p+1)/2}(\phi, w \cdot \psi)$ を証明する．これも $w = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ と仮定してよい．そこで

$$\begin{aligned} &(e_{i_1} \cdots e_{i_p} \cdot \phi, \psi) = (-1)^p (\phi, e_{i_p} \cdots e_{i_1} \psi) \\ =&(-1)^p (-1)^{p-1} (-1)^{p-2} \cdots (-1)^1 (\phi, e_{i_1} \cdots e_{i_p} \psi) = (-1)^{p(p+1)/2} (\phi, e_{i_1} \cdots e_{i_p} \psi) \end{aligned}$$

となる．

作用と可換であることを証明しよう．$g \in Spin(n)$ として，

$$\begin{aligned} g(w \cdot \phi) &= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} w(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}) g(e_{i_1} \cdots e_{i_p} \cdot \phi) \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} w(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}) (g e_{i_1} g^{-1}) \cdots (g e_{i_p} g^{-1})(g\phi) \\ &= (\mathrm{Ad}(g)\omega)(g\phi) \end{aligned}$$

となる． ■

上の証明から次のことがわかる．クリフォード代数を自分自身に左から作用させた場合に，

$$e_i(e_{i_1} \cdots e_{i_p}) = \begin{cases} (-1)^k e_{i_1} \cdots \widehat{e_{i_k}} \cdots e_{i_p} & i = i_k \\ e_i e_{i_1} \cdots e_{i_p} & i \notin \{i_1, \cdots, i_p\} \end{cases}$$

が成立する．一方でクリフォード代数を外積代数だとみなした場合には

$$(e_i \wedge -i(e_i))(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \begin{cases} (-1)^k e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_k}} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} & i = i_k \\ e_i \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\phi & i \notin \{i_1, \cdots, i_p\} \end{cases}$$

となる．つまり $v \in \mathbb{R}^n$, $w \in \Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ と考えたとき

$$L(v)w := (v \wedge -i(v))w$$

とすればクリフォード代数の外積代数への作用となる．実際，

$$L(u)L(v)+L(v)L(u)=-2\langle u,v\rangle\mathrm{id}$$

が成立する．この式をもう少し詳しく見てみよう．まず $u\wedge v\wedge+v\wedge u\wedge=0$, $i(u)i(v)+i(v)i(u)=0$ は明らかであるので，上の式は

$$u\wedge i(v)+i(u)v\wedge+i(v)u\wedge+v\wedge i(u)=2\langle u,v\rangle$$

を意味する．実際には，次のより強い関係式が成立する．

$$u\wedge i(v)+i(v)u\wedge=\langle u,v\rangle.$$

Proof. これも基底について考えればよい．$I=(i_1,\cdots,i_k)$ で $1,2$ を含まないとする．

$$\begin{aligned}
&(e_1\wedge i(e_2)+i(e_2)e_1\wedge)(e_1\wedge e_2\wedge e_I)=0,\\
&(e_1\wedge i(e_2)+i(e_2)e_1\wedge)(e_1\wedge e_I)=0,\\
&(e_1\wedge i(e_2)+i(e_2)e_1\wedge)(e_2\wedge e_I)=0,\\
&(e_1\wedge i(e_2)+i(e_2)e_1\wedge)(e_I)=0,\\
&(e_1\wedge i(e_1)+i(e_1)e_1\wedge)(e_1\wedge e_2\wedge e_I)=e_1\wedge e_2\wedge e_I,\\
&(e_1\wedge i(e_1)+i(e_1)e_1\wedge)(e_1\wedge e_I)=e_1\wedge e_I,\\
&(e_1\wedge i(e_1)+i(e_1)e_1\wedge)(e_2\wedge e_I)=e_2\wedge e_I,\\
&(e_1\wedge i(e_1)+i(e_1)e_1\wedge)(e_I)=e_I,
\end{aligned}$$

がわかる．これらの式から一般の場合も明らかであろう． ■

さて，クリフォード代数を右からかけることもできた．つまり

$$\mathbb{C}l_n\times\mathbb{C}l_n\ni(\phi,w)\mapsto w\cdot\phi^t\in\mathbb{C}l_n$$

（ここで左作用にするために転置をしている）．外積代数への作用だとみなした場合には次のようになる．まず

$$(e_{i_1}\cdots e_{i_p})e_i=\begin{cases}-(-1)^{p-k}e_{i_1}\cdots\widehat{e_{i_k}}\cdots e_{i_p} & i=i_k\\ (-1)^p e_ie_{i_1}\cdots e_{i_p} & i\notin\{i_1,\cdots,i_p\}\end{cases}$$

であり，

$$(-1)^p(e_i\wedge+i(e_i))(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})=\begin{cases}-(-1)^{p-k}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{e_{i_k}}\wedge\cdots\wedge e_{i_p} & i=i_k\\ (-1)^p e_i\wedge e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\phi & i\notin\{i_1,\cdots,i_p\}\end{cases}$$

となるので，$v\in\mathbb{R}^n$, $w\in\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ と考えたとき

$$R(v)w:=(-1)^p(v\wedge+i(v))w$$

となる．実際にクリフォード代数の作用であることを確かめてみよう．

$$\begin{aligned} R(u)R(v)w &= R(u)(-1)^p(v\wedge +i(v))w \\ &= (-1)^{p+1}(-1)^p(u\wedge +i(u))v\wedge w + (-1)^{p-1}(-1)^p(u\wedge +i(u))i(v)w \\ &= -u\wedge v\wedge w - i(u)(v\wedge w) - u\wedge (i(v)w) - i(u)i(v)w \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} (R(u)R(v)+R(v)R(u))w &= -i(u)(v\wedge w) - u\wedge (i(v)w) - i(v)(u\wedge w) - v\wedge (i(u)w) \\ &= -2\langle u, v\rangle w \end{aligned}$$

となる．以上をまとめると

Proposition 3.2. クリフォード代数 $\mathbb{C}l_n$ は，自分自身に右または左から作用する．このとき表現空間である**クリフォード代数を外積代数とみなせば作用は次のように表せる**． $v\in\mathbb{R}^n$， $w\in\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ とすれば，

$$L(v)w = (v\wedge -i(v))w, \quad R(v) = (-1)^p(v\wedge +i(v))w.$$

となる．ここで縮約はユークリッド内積による同型 $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$ を用いている．また $u, v\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$u\wedge i(v) + i(v)u\wedge = \langle u, v\rangle$$

が成立する．

また，w を p-from とすれば，$v\in\mathbb{R}^n$ とすれば，スピノール空間への作用として次が成立する．

$$(w\wedge v)\cdot\phi = (-1)^p w\cdot v\cdot\phi - (i(v)w)\cdot\phi$$

参考文献

[1] Th. Friedrich *Dirac operators in Riemannian Geometry,* Graduate Studies in Mathematics 25, AMS

[2] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, *Spin Geometry,* Princeton Univ. Press, Princeton, 1989.

索 引