リーマン対称空間入門

このノートは Eschenburg の「Lecture Notes on Symmteric Spaces」を解説し，いろいろと付け加えたものです．また，Jost のリーマン幾何の本「Riemannian geometry and geometric analysis, Third edition」の対称空間の章も載せてあります．第一章は，対称空間を学ぶための微分幾何の基本事項が載せてあります．

自分用の講義ノートなので，タイプミスなどの間違いはあります．本質的な間違いなどもあったりするかもしれません．ミスがあったら知らせてくれればと思います．

2010/11/26 本間泰史

目次

第 1 章

微分幾何学ショートコース

1.1　リー群とリー環

1.1.1　リー群とリー環

Definition 1.1.1. 集合 G がリー群であるとは，

1. G は群
2. G は滑らかな多様体.
3. $G \times G \ni (x, y) \to xy \in G$，$G \ni x \to x^{-1} \in G$ が滑らか.

また，G が多様体としてコンパクトのとき G をコンパクトリー群とよぶ．G が複素多様体であり，$(x, y) \to xy$, $x \to x^{-1}$ が正則写像のとき G を複素リー群とよぶ.

Exercise 1.1.1. $O(n)$，$SO(n)$ が $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次元のコンパクトリー群であることを証明せよ．（ヒント：$SO(n) \subset \mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}(n)$ であり，$SO(n)$ の定義から陰関数定理を使えばよい．$F : \mathbb{R}(n) = \mathbb{R}^{n^2} \ni A \mapsto A^t A \in S(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ を考えると $F^{-1}(I) = O(n)$ である．コンパクトであることも容易．積が滑らかであることも容易）.

　さて，

$$L_g : G \ni x \mapsto gx \in G, \quad R_g : G \ni \mapsto xg \in G$$

とする．これらの微分写像を考えると，

$$dL_g : T_x G \to T_{gx} G, \quad dR_g : T_x G \to T_{xg} G$$

という線形写像を得る．特に，

$$dL_g : T_e G \to T_g G, \quad dR_g : T_e G \to T_g G, \quad \mathrm{Ad}_g := dL_g dR_{g^{-1}} : T_e G \to T_e G$$

を得る．また，L_g は微分同相写像であるので，ベクトル場 X に対して，$(dL_gX)_{gh} := (dL_g)_h(X_h)$ と定めることにより，ベクトル場 dL_gX が定まる．

$$dL_g : \mathfrak{X}(G) \ni X \mapsto dL_gX \in \mathfrak{X}(G)$$

（これは微分同相だからできることである．また一般に $\phi : M \to M$ が微分同相なら $d\phi$ は $d\phi[X, Y] = [d\phi X, d\phi Y]$ を満たす．「多様体の基礎」page 234）．

さて，$X \in T_eG$ に対して，ベクトル場 $\tilde{X}$ を $\tilde{X}(g) := dL_g(X)$ として定めると，$L_gL_h = L_{gh}$ であることから．$dL_h\tilde{X}(g) = dL_hdL_g(X) = dL_{hg}(X) = \tilde{X}(gh)$ となるので，ベクトル場 $\tilde{X}$ は dL_g によって不変である．これを**左不変ベクトル場**と呼ぶ．逆に，左不変ベクトル場全体は T_eG の値で定まってしまうので，左不変ベクトル場全体と $T_e(G)$ を同一視できる．特に次元は $\dim G$ である．

Definition 1.1.2. 左不変ベクトル場全体を $\mathfrak{g}$ で表すことにして，G の**リー環**と呼ぶ．

環となることを見ていこう．X, Y を左不変ベクトル場として，ベクトル場のリー括弧積 $[X, Y]$ をとると，これも左不変ベクトル場である．実際，左作用 $L_g : G \to G$ は微分同相写像であるので，$dL_g([X, Y]) = [dL_gX, dL_gY] = [X, Y]$ が成立する．つまり，$\mathfrak{g}$ に環構造を入れることができる．特に，$T_e(G) \cong \mathfrak{g}$ のもとで，$X, Y \in T_e(G)$ に対して，

$$[X, Y] := [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e$$

とすれば，$T_e(G)$ に環構造がはいる．そこで，$T_e(G)$ も $\mathfrak{g}$ と書くことにする．

また，左不変ベクトル場 X は完備ベクトル場（証明略）であり，その 1 パラメータ変換群を $\mathrm{Exp}\,(tX)$ と書くことにする．つまり，

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{Exp}\; tX)(p)|_{t=0} = X_p$$

を満たす微分同相の 1 パラメータ群である．さて，微分同相 $L_g : G \to G$ に対して $L_g(\mathrm{Exp}\; tX)L_g^{-1}$ も 1 パラメータ変換群であるが，これに対するベクトル場を考えると dL_gX となる．

Proof. 点 $p \in G$ において，$(dL_gX)_p = (dL_g)_{g^{-1}p}X_{g^{-1}p}$ であった．そこで接ベクトルとして．$(dL_gX)_pf = X_{g^{-1}p}(L_g^*f) = X_{g^{-1}p}(f \circ L_g)$ であるので，

$$X_{g^{-1}p}(f \circ L_g) = \frac{d}{dt}f(g\mathrm{Exp}\; tX(g^{-1}p))|_{t=0}$$

となる．一方，$L_g(\mathrm{Exp}\; tX)L_g^{-1}(p) = g(\mathrm{Exp}\; tX)(g^{-1}p)$ であるので，

$$\frac{d}{dt}f(g(\mathrm{Exp}\; tX)(g^{-1}p))|_{t=0} = (dL_gX)_pf$$

となる．よって，$L_g(\mathrm{Exp}\; tX)L_g^{-1}$ に対するベクトル場は dL_gX となる． □

そこで，X が左不変であるので．$L_g(\mathrm{Exp}\ tX)L_g^{-1} = \mathrm{Exp}\ tdL_gX = \mathrm{Exp}\ tX$ となり．$L_g(\mathrm{Exp}\ tX) = (\mathrm{Exp}\ tX)L_g$ を得る．つまり，左不変ベクトル場に対する 1 パラメータ変換群は g の左作用と可換である．逆をたどれば，1 パラメータ変換群が任意の g に対する左作用と可換ならば，対応するベクトル場は左不変ベクトル場である．

リー群 G 内の曲線 $a(t)$ で $s, t \in \mathbb{R}$ に対して．$a(s)a(t) = a(t+s)$ を満たすものを **1 パラメータ部分群**という．$a(0)a(t) = a(t)$ であるので，$a(t)^{-1}$ をかければ．$a(0) = e$ となる．同様に，$a(t)^{-1} = a(-t)$．また，$a(t)$ は G 内の可換部分群である．この部分群に対して，$L_{a(t)}, R_{a(t)}$ は G の 1 パラメータ変換群であり，$a(t) = L_{a(t)}(e) = R_{a(t)}(e)$ となる．$R_{a(t)}$ は $L_gR_{a(t)} = R_{a(t)}L_g$ を満たすので，対応するベクトル場 X は左不変ベクトル場であり，$X_e = a'(0)$ となる．

このように 1 パラメータ部分群 $a(t)$ に対して，$X_e = a'(0)$ とし，対応する左不変ベクトル場を X とすれば，$R_{a(t)} = \mathrm{Exp}\ tX$ であり，$a(t) = (\mathrm{Exp}\ tX)(e)$ を満たす．逆に，左不変ベクトル場 X に対して，$a(t) = (\mathrm{Exp}\ tX)(e)$ は 1 パラメータ部分群であり，$R_{a(t)} = \mathrm{Exp}\ tX$ を満たす．

以上から，1 パラメータ部分群と左不変ベクトル場は 1 : 1 に対応することがわかった．また，

Definition 1.1.3. G をリー群として，$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする．$X \in \mathfrak{g}$ に対して，$t = 0$ で原点を通る X の積分曲線

$$\exp tX := (\mathrm{Exp}\ tX)(e)$$

を考える．このとき，$t = 1$ として

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto \exp X \in G$$

という写像を**指数写像**とよぶ．

Proposition 1.1.2. $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は滑らかであり，$0 \in \mathfrak{g}$ での微分のランクは n である．そこで逆関数定理より，$\exists U \subset \mathfrak{g}, V \subset G$ が存在して，$\exp : U \to V$ は微分同相となる．とくに，$\{X_1, \cdots, X_n\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底をとり．V の局所座標系として，

$$x^i(\exp(\sum a^iX_i)) = a^i$$

により定義できる．これを**標準座標**とよぶ．

これまでは一般論であるが，我々が考えるのは行列群の場合であり，これまでの話はかなり具体的に書くことができる．

Example 1.1.3. $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}(n) | \det A \neq 0\}$ はリー群である（$\mathbb{R}(n)$ の開部分多様体）．点 $g \in GL(,\mathbb{R})$ を通る曲線として，

$$g \exp tX, \quad X \in \mathbb{R}(n)$$

を考える．ただし．ここでの $\exp tX$ は次のような行列の指数関数である．ここで行列 $A \in \mathbb{R}(n)$ の指数関数

$$e^A = \exp A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \in GL(n,\mathbb{R})$$

は行列のノルムについて絶対収束し，$\exp A$ は存在する．また，次を満たす．

Proposition 1.1.4.

1. $AB = BA$ なら $\exp A \exp B = \exp(A+B)$（つまり可換な場合には指数法則が成立する）．
2. $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$, $(\exp A)^m = \exp mA$（$m \in \mathbb{Z}$）
3. P を正則行列とすれば，$P^{-1}(\exp A)P = \exp(P^{-1}AP)$ となる．
4. $\exp({}^tA) = {}^t(\exp A)$, $\exp \bar{A} = \overline{\exp A}$, $\exp A^* = (\exp A)^*$.
5. $\det \exp A = e^{\operatorname{tr} A}$（$P^{-1}AP$ が三角行列の場合に考えれば証明できる）

そこで $g \exp tX$ は $t=0$ で g を通る $GL(n,\mathbb{R})$ の曲線である．これを微分したものが接ベクトルであるので，$gX \in T_g(G)$ とみなせる．さらに次元を考えれば $T_g(G) = \{gX | X \in \mathbb{R}(n)\}$ となる．特に，$T_e(G) = \mathbb{R}(n)$ となる．$g = e$ の場合を考えると，$X \in T_e(G) = \mathbb{R}(n)$ に対して，$a(t) = \exp tX$ が $a'(0) = X$ となり，1 パラメータ部分群である．そこで，指数写像 exp は，行列の指数関数に一致する．

さて，微分同相 $L_g : GL(n,\mathbb{R}) \ni g' \to gg' \in GL(n,\mathbb{R})$ の微分は

$$dL_g : T_e(G) \ni X \mapsto gX \in T_g(G)$$

となる．そこで，$X \in T_e(G)$ に対する左不変ベクトル場 $\tilde{X}$ は $\tilde{X}(g) = gX$ で与えられる．またこのベクトル場に対する 1 パラメータ変換群は $R_{\exp tX}$ で与えられる．実際，

$$\frac{d}{dt} R_{\exp tX}(g)|_{t=0} = \frac{d}{dt} g \exp tX|_{t=0} = gX = \tilde{X}(g)$$

である．

さて．ベクトル場のリー微分がリー括弧であったので，リー微分の定義から，

$$\begin{aligned}[\tilde{X},\tilde{Y}]_g =& \lim_{t=0} \frac{\tilde{Y}(g) - dR_{\exp tX}\tilde{Y}(g \exp -tX)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{gY - g\exp(-tX)Y\exp(tX)}{t} \\ =& g(XY - YX)\end{aligned}$$

となる．よって，

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{XY - YX}$$

となる．このように，リー環 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ のリー括弧積は，$\mathbb{R}(n) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の同一視のもとで，$X, Y \in \mathbb{R}(n)$ のもとで

$$[X, Y] = XY - YX$$

となっている．

一般のリー環を定義しよう．

Definition 1.1.4. $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ が**リー環**であるとは，リー括弧とよばれる積 $[x, y]$ が定まり，次をみたすこと

1. $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (x, y) \to [x, y] \in \mathfrak{g}$ は双線形
2. $[x, y] = -[y, x]$.
3. ヤコビ律が成立
$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

$\mathbb{R}$ 上なら実リー環とよび，$\mathbb{C}$ 上なら複素リー環とよぶ.

リー群の左不変ベクトル場の全体であるリー環は，ベクトル場全体の部分環であるので，リー括弧という環構造が入りリー環である.

Example 1.1.5. $GL(n, \mathbb{C})$ は複素リー群である．また，単位元での接空間は $\mathbb{C}(n)$ であり，これを $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ とかく．$[X, Y] := XY - YX$ により，複素リー環となる．

さて，$\mathrm{Ad}_g = dL_g dR_{g^{-1}} : T_eG \to T_eG$ を考える．このとき $\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_h$ を満たす．つまり，群の準同型

$$\mathrm{Ad} : G \ni g \to \mathrm{Ad}_g \in GL(\mathfrak{g})$$

を得る．また，Ad_g は微分同相であるので，リー環構造に対して，$\mathrm{Ad}_g[X, Y] = [\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y]$ が成立．つまり Ad_g はリー環 $\mathfrak{g}$ の自己同型である．また，リー環の積をこの Ad を使えば，

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{Y - \mathrm{Ad}(\exp -tX))Y}{t}$$

となる．そこで，$e \in G$ における Ad の微分を考えると，

$$\mathrm{ad} := d\mathrm{Ad}_e : \mathfrak{g} = T_eG \to T_e(GL(\mathfrak{g})) = \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

は

$$\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$$

となる．そして，$\mathrm{Ad}(\exp tX) = \exp t\mathrm{ad}(X)$ が成立する．ここで右辺の exp は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ での指数関数である．実際，$\mathrm{Ad}(\exp tX)$，$\exp t\mathrm{ad}(X)$ は $GL(\mathfrak{g})$ 内の 1 パラメータ部分群であり，原点での微分を考えると，どちらも $Y \mapsto [X, Y]$ という $\mathfrak{gl}(g)$ の元を与える．よって，1 パラメータ群は一致するので，$\mathrm{Ad}(\exp tX) = \exp t\mathrm{ad}(X)$ となる．また，Ad_g が自己同型であることから $\mathrm{ad}(X)[Y, Z] = [\mathrm{ad}(X)Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}(X)Z]$ を満たすが，これはヤコビ律である．

Proof. $GL(n, \mathbb{R})$ の場合に証明する．一般のリー群でも根本的な考え方は同じである．

$$\mathrm{Ad}_g(X) = gXg^{-1}$$

となる．よって，

$$\mathrm{Ad}_g([X, Y]) = g(XY - YX)g^{-1} = gXg^{-1}gYg^{-1} - gYg^{-1}gXg^{-1} = [\mathrm{Ad}_g(X), \mathrm{Ad}_g(Y)]$$

となる．また，

$$[X, Y]_e = \lim_{t\to 0} \frac{Y - \exp(-tX)Y\exp(tX)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Y - \mathrm{Ad}(\exp -tX))Y}{t}$$

となる．

この Ad の e における微分写像を考える．$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = T_e(GL(n, \mathbb{R}))$ に対して，$X(t) := \exp tX$ は $X(0) = \mathrm{id}$, $X'(0) = X$ であるので，X を接ベクトルとする $GL(n, \mathbb{R})$ 内の曲線である．そこで $d\mathrm{Ad}_e(X)$ を計算すると，$Y \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$\begin{aligned} d\mathrm{Ad}_e(X)(Y) &= \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp tX)Y|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp tX)Y(\exp tX)^{-1}|_{t=0} \\ &= XY - YX = [X, Y] \end{aligned}$$

となる． □

Exercise 1.1.6. 一般のリー群の場合に上で述べたことを証明せよ（参考：松島「多様体入門」）

Theorem 1.1.7. リー群 G の閉部分群 H は G の部分多様体であり，リー群である．また，単位元の接空間を考えると $T_e(H) \subset T_e(G)$ となるが，$\mathfrak{h} = T_e(H)$ は $\mathfrak{g} = T_e(G)$ の部分環となる．

Corollary 1.1.8. 一般線形群 $GL(n, \mathbb{R})$ の閉部分群 G はリー群である，また，G の単位元での接空間に $[X, Y] = XY - YX$ としてリー括弧を定義でき，リー環 $\mathfrak{g}$ を得る．そして，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の部分環である．

Example 1.1.9. $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ とみなせば，

$$GL(n,\mathbb{C}) \subset GL(2n,\mathbb{R})$$

となる．そして，

$$U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) | A^*A = \mathrm{id}\}, \quad SU(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) | A^*A = \mathrm{id}, \det A = 1\}$$

とすれば，

$$U(n), SU(n) \subset GL(2n,\mathbb{R})$$

となり，これらは閉部分群であるので，リー群となる（次元は n^2, n^2-1）．さらにコンパクトリー群である．$U(n)$ をユニタリ群，$SU(n)$ を特殊ユニタリ群とよぶ．

　また $U(n), SU(n)$ のリー環は，単位元での接空間を考えれば，

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) | A + A^* = 0\}, \quad \mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathfrak{u}(n) | \mathrm{tr}\, A = 0\}$$

Example 1.1.10.

$$Sp(n) := \{A \in \mathbb{H}(n) | A^*A = \mathrm{id}\}$$

をシンプレクティック群とよぶ．ここで共役は $\overline{a+bi+cj+dk} = a - bi - cj - k$ としている．これはコンパクトリー群である．

　$(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ をシンプレクティックベクトル空間とすれば，

$$Sp(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}(2n) | \omega(Av, Aw) = \omega(v, w)\}$$

とすれば，これは非コンパクトなリー群である．実シンプレクティック群とよぶ．

Exercise 1.1.11. $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$ とみなして，$Sp(1) \cong SU(2)$ となることを証明せよ．

1.1.2　直交群

Definition 1.1.5. 直交群 $O(n)$ とは

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}(n) | {}^tAA = \mathrm{id}\}$$

このとき，$\det A = \pm 1$ となる．さらに，$O(n)$ の単位元連結成分を $SO(n)$ と書く．このとき，

$$SO(n) = \{A \in O(n) | \det A = 1\}$$

となる．

実直交行列の全体を $O(n)$ と書くことにする．${}^tAA = \mathrm{Id}$ なので，$\det A = \pm 1$ となる．また，

$$T_0 = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(n)$$

に対しては，$\det T_0 = -1$．また $\mathrm{Id} \in O(n)$ に対して $\det I = 1$ となるので，行列式という写像

$$\det : O(n) \to \mathbb{R}$$

の像は $\{\pm 1\}$ であり，連結でない．そして，det という写像は連続写像であるので，$O(n)$ は連結でないことがわかる．

実は，$O(n)$ は二つの連結成分にわかれることを見てみよう．まず，

$$SO(n) = \{A \in O(n) | \det A = 1\} \subset O(n)$$

とする．直交行列の固有値は 1，-1，$\alpha_{r_1+j} = \cos\theta_j + \sqrt{-1}\sin\theta_j$ 及びその共役である $\overline{\alpha_{r_1+j}}$ であった．$A \in SO(n)$ は $\det A = 1$ であるので，-1 の固有値の数は偶数個となる．そこで，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ -\sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$$

とかけば，直交変換によって，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_p & & & & & \\ & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & & & \\ & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ & & & & -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

とできる．そこで，

$$T(t) = P^{-1}(t)AP(t) = \begin{pmatrix} I_p & & & & & \\ & \cos t\theta_1 & \sin t\theta_1 & & & \\ & -\sin t\theta_1 & \cos t\theta_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \cos t\theta_k & \sin t\theta_k \\ & & & & -\sin t\theta_k & \cos t\theta_k \end{pmatrix}$$

とすれば，$T(t) \in SO(n)$（$0 \le t \le 1$）であり，$T(0) = \mathrm{Id}$, $T(1) = P^{-1}AP$ となる．つまり．$T(t)$ は $SO(n)$ 内で Id と $P^{-1}AP$ を結ぶ連続曲線である．そして，$PT(t)P^{-1}$ は Id と A を結ぶ $SO(n)$ 内の連続曲線である．このように，$SO(n)$ 内の任意の 2 点を連続曲線で結ぶことができるので，$SO(n)$ は連結となる．

また，

$$O(n)^- = \{A \in O(n) | \det A = -1\}$$

とすると，$A \in O(n)^-$ に対して，$AT_0 \in SO(n)$ であり，$B \in SO(n)$ に対して，$BT_0 \in O(n)^-$ であるので，$O(n)^- = SO(n)T_0$ となる．先ほどの議論から，この $O(n)^-$ も連結であることがわかる．

以上から，$O(n)$ は二つの連結成分に分解できるこがわかった．

次に $SO(n)$ の基本群を調べよう．

Theorem 1.1.12. $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$ となる（$n \geq 3$）．$\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$．$\pi_1(SO(1)) = \{1\}$.

Proof. まず，$SO(1) = \{1\}$ であるので，$\pi_1(SO(1)) = \{1\}$．$SO(2) \cong S^1$（２次の回転行列全体）であるので，$\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$ となる．また，$SO(3) \cong \mathbb{R}P^2$ であるので，$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$ を得る．

$n \geq 4$ の場合には帰納法を用いる．$SO(n)$ を $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ へ回転として作用させる．このとき，等質空間として $SO(n)/SO(n-1) = S^{n-1}$ となる．特に，主 $SO(n-1)$ 束

$$SO(n) \xrightarrow{SO(n-1)} S^{n-1}$$

を得る．そこでホモトピー完全系列から，

$$\pi_2(S^{n-1}) \to \pi_1(SO(n-1)) \to \pi_1(SO(n)) \to \pi_1(S^{n-1}) \to \pi_0(SO(n-1))$$

を得る．つまり，$n \geq 4$ なら

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \pi_1(SO(n)) \to 1$$

となるので，$\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$ となる． □

Exercise 1.1.13. $SO(3) = \mathbb{R}P^3$ となることを証明せよ．

Example 1.1.14. $SO(n)$ の単位元での接空間を考えよう

$$\mathfrak{so}(n) := \{X \in \mathbb{R}(n) | {}^tX + X = 0, \mathrm{tr}\, X\}$$

というベクトル空間を考えて，$\exp tX$ は $\det \exp tX = 1$ および ${}^t(\exp tX) \exp tX = \mathrm{id}$ みたす．つまり $\exp tX \in SO(n)$ かつ $\exp 0X = \mathrm{id}$ であるので，$\exp tX$ は単位元をとおる $SO(n)$ 内の曲線である．さらに微分すれば $\exp tX|_{t=0} = X$ となるので，上のベクトル空間は接空間の部分空間である．そして，次元を考えれば一致する．

つまり $\mathfrak{so}(n)$ は $SO(n)$ の単位元での接空間となる．

さて，$\mathfrak{so}(n)$ にリー括弧を次で定義する．$X, Y \in \mathfrak{so}(n)$，$[X, Y] := XY - YX$ とすれば，$[X, Y] \in \mathfrak{so}(n)$ であり，リー環構造がはいることがわかる．よって，$\mathfrak{so}(n)$ はリー環である．($SO(n)$ の群構造がリー括弧に反映しているのである)．

リー環 $\mathfrak{so}(n)$ は $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ と同一視できる．

$$\mathfrak{so}(n) = \{a \in \mathbb{R}(n) | \langle Xv, w\rangle + \langle v, Xw\rangle = 0, \forall v \in \mathbb{R}^n\}$$

であった．これは次のようにして $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ と同一視できる，$v \wedge w \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$(v \wedge w)(u) = \langle v, u\rangle w - \langle w, u\rangle v$$

とすることにより，$\Lambda^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}(n)$ を $\mathbb{R}^n$ に作用させることができる．この対応で

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{so}(n)$$

となる．つまり

$$\mathfrak{so}(n) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_i \wedge e_j | 1 \leq i < j \leq n\}$$

となる．

1.1.3　リー群の表現

表現論の基本的な結果を述べる．

1.1.4　基本的な事柄

Definition 1.1.6. リー群 G の**表現**とは，複素ベクトル空間 V と（C^∞ な）準同形 $\pi : G \to GL(V)$ の組のことである．V を表現空間または G **加群**とよぶ．また表現を G が V へ作用しているということもある．

リー環 $\mathfrak{g}$ の**表現**とは，複素ベクトル空間 V と環準同形 $\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ の組のこと．

Definition 1.1.7. エルミート内積 $(\cdot, \cdot)$ の入った表現空間 V を考える．この空間に G が作用して，$(\pi(g)v, \pi(g)w) = (v, w)$（$\forall g \in G$, $\forall v, w \in V$）が成立するとき，表現を**ユニタリ表現**とよぶ.

リー環の場合には，$(\pi(X)v, w) + (v, \pi(X)w) = 0$（$\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall v, w \in V$）が成立するときにユニタリ表現とよぶ.

Remark 1.1.1. リー環はリー群の無限小表示であるので，$(\pi(\exp tX)v, \pi(\exp tX)w) = (v, w)$ を微分すれば，$(\pi(X)v, w) + (v, \pi(X)w) = 0$ を得る．

Proposition 1.1.15. コンパクトリー群 G の有限次元表現を考える．このとき，ユニタリ表現になるようにエルミート内積を入れることができる．

Proof. V の勝手なエルミート内積 $(\cdot,\cdot)$ を選ぶ．そして，

$$(v,w)_{inv} = \frac{1}{vol(G)}\int_G (gv,gw)dg = \frac{1}{vol(G)}\int_G (ghv,ghw)dg = (hv,hw)_{inv}, \quad h\in G$$

と積分すればよい．ここで，G がコンパクト群であるので，不変積分要素 dg が存在する．つまり $\int_G f(gg')dg = \int_G f(g)dg = \int_G f(g'g)dg$ が成立する． □

我々が扱うのはコンパクト群の表現なので，最初から表現はユニタリ表現と仮定する．

Definition 1.1.8. 表現空間 V が非自明な G 不変部分空間をもつとき可約とよぶ．それ以外の時を既約とよぶ．（部分空間 W が G 不変とは，$GW \subset W$ となること．また V, $\{0\}$ は不変部分空間であるが，これらは自明な不変部分空間とよぶ）．また表現空間が既約表現空間の直和に分解できるとき，完全可約とよぶ．

リー環の表現の既約や可約なども同様である．

Proposition 1.1.16. コンパクトリー群 G の表現は完全可約である．

Proof. V を G の表現として，ユニタリ表現としておく．$W\subset V$ が G 不変であるとすれば．$W\oplus W^{\perp}$ と分解できる．ここでユニタリ表現であることから $W^{\perp}$ も G 不変である．以下この作業を繰り返せばよい． □

そこで，我々は主に既約表現空間を考えることにする．

Definition 1.1.9. G の表現 $(\pi,V),(\pi',V')$ が同値とは，$\Phi: V\to V'$ というベクトル空間としての同型写像で，G の作用と可換なものが存在することをいう．（$\Phi(\pi(g)v) = \pi'(g)\Phi(v)$（$\forall g\in G, \forall v\in V$） G 加群として同型のことである）．また，同値でないときは非同値とよぶ．

Proposition 1.1.17 (シューアの補題)**.** G の既約表現 $(\pi,V),(\pi',V')$ を考える．$\Phi: V\to V'$ が G 線形とする．つまり $\Phi(\pi(g)v) = \pi'(g)\Phi(v)$（$\forall g\in G, \forall v\in V$）が成立するとする．このとき，$V$ と V' が非同値なら $\Phi=0$ である．同値なら，V と V' を同一視することにより，$\Phi=\lambda\mathrm{id}$（$\lambda\in\mathbb{C}$）となる（$\lambda=0$ もありえることに注意）．

Definition 1.1.10. 表現 $(\pi,V),(\pi',V')$ に対して G 線形写像の全体を $\mathrm{Hom}_G(V,V')$ と書く．

Corollary 1.1.18. 既約表現 $(\pi, V), (\pi', V')$ に対して，

$$\mathrm{Hom}_G(V, V') = \begin{cases} 0 & \pi \ncong \pi' \\ \mathbb{C} & \pi \cong \pi' \end{cases}$$

Proof of proposition. 線形写像 $\Phi : V \to V'$ が G 線形であるので，$\ker\Phi$, $\mathrm{Image}\Phi$ は G 不変部分空間である．そこで，$\Phi \neq 0$ なら，既約性から $\ker\Phi = 0$ および，$\mathrm{Image}\Phi = V'$ を得る．よって．Φ は同型写像であり，$\pi \cong \pi'$ となる．このように，$\pi \ncong \pi'$ なら $\Phi = 0$ となる．

同値な場合には，G 線形同型写像 $T : V \to V'$ が存在する．そこで，$T^{-1} \circ \Phi : V \to V$ を，新たに Φ として考えてよい．Φ の固有値の一つを λ とする．このとき $\Phi - \lambda$ も G 線形写像である．$\ker(\Phi - \lambda)$ は $\{0\}$ でない G 不変部分空間であるので既約性から $\ker(\Phi - \lambda) = V$ となる，よって，$\Phi = \lambda \mathrm{id}$ となる． □

Example 1.1.19. G のユニタリ表現 (π, V) を考える．このとき双対空間 V^* 上で，

$$(\pi(g)f)(v) = f(\pi(g^{-1})v), \quad f \in V^*, v \in V$$

により，V^* 上の表現を得ることができる（表現になることは演習問題）．これを**転置表現**または**双対表現**とよぶ．

また，V の共役空間 $\bar{V}$ を考える．つまり

$$\bar{V} := \{\bar{v} \mid v \in V\}$$

という集合であり，$\bar{v} + \bar{w} = \overline{v + w}$, $z \cdot \bar{v} = \overline{\bar{z}v}$ によりベクトル空間の構造を入れたものである．（$\bar{v}$ は v の複素共役とは限らない．複素共役が定義できるには V に実構造が必要である）．このとき，

$$\pi(g)\bar{v} = \overline{\pi(g)v}, \quad v \in V$$

により，$\bar{V}$ は G の表現空間になる．これを**共役表現**という．さらにユニタリ表現なら，エルミート内積を使って $V^* \cong \bar{V}$ という線形同型が作れるが，これは G 線形になる．よって，V **の共役表現と双対表現は同値になる**ことがわかる．

Example 1.1.20. 表現 (π, V), (π', V') から，表現を作ることができる．

1. $V \otimes V'$ は $(\pi \otimes \pi')(g) := \pi(g) \otimes \pi'(g)$ とすれば，G 加群になる．$(\pi(g) \otimes \pi'(g)(v \otimes v') = \pi(g)v \otimes \pi'(g)v'$ を線形に拡張）これを**テンソル積表現**とよぶ．
2. V の**交代テンソル積** $\Lambda^k(V)$ を考える．上と同様に G 加群であることがわかる．つまり $\pi(g)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) := \pi(g)v_1 \wedge \cdots \wedge \pi(g)v_k$ とすればよい．
3. V の**対称テンソル積** $S^k(V)$ を考えると，これは G 加群．

4. $\mathrm{Hom}(V, V')$ は G 加群.

などなど，線形代数の基本的な操作を使えば，表現をたくさんつくることができる.

1.1.5　等質空間

さて，最後に，等質空間について触れておく．リー群は多様体の例であった．リー群とそのリー部分群の商空間を考えることにより，新たに多様体を作ることができる.

Theorem 1.1.21. G をリー群として，H を閉リー部分群とする．このとき，同値関係を $g \sim g' \iff g^{-1}g' \in H$ で入れて，その商空間

$$G/H := G/\sim = \{[g] = gH \mid g \in G\}$$

を考えると，自然に $\dim G - \dim H$ 次元の多様体となる.

Proof. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ となるように $\mathfrak{m}$ となる部分空間をとる．このとき．$\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \ni (X, Y) \mapsto \exp X \exp Y \in G$ は十分小さい近傍をとれば微分同相であり，G の局所座標を作ることができる.

さて，U を十分小さくとれば

$$\mathfrak{m} \supset U \ni X \mapsto (\exp X)H \in G/H$$

は G/H 内の開集合への同相写像となり，これが局所座標を与える.　□

Remark 1.1.2. H が閉集合であることに注意．G/H がハウスドルフ空間になるために必要.

Definition 1.1.11. リー群 G の多様体 M への**作用**とは，群準同型

$$\psi : G \ni g \mapsto \psi_g \in Diff(M)$$

のことである．そして，

$$M \times G \ni (p, g) \mapsto g \cdot p = \psi_g(p) \in M$$

が滑らかな時，作用は滑らかという．また，$p \in M$ を通る G **軌道**とは

$$G \cdot p = \{\psi_g(p) | g \in G\}$$

のことである．また，**イソトロピー部分群**とは $G_p := \{g \in G | gp = p\} \subset G$ のことである（閉部分群であるので，部分リー群である）．そして軌道空間とは商空間 M/G のことである（これは多様体になるとは限らない）.

Example 1.1.22. $G \times G$ は G に作用している．

$$(G \times G) \times G \ni ((g_1, g_2), g) \mapsto g_1 g g_2^{-1} \in G$$

ここで，g_2^{-1} としているのは準同型とするためである．

Theorem 1.1.23. G が多様体 M に**推移的に**（*transitively*）に左から作用しているとする．（推移的とは $\forall x, x' \in M$ に対して，$\exists g \in G$，$gx = x'$．つまり軌道が 1 つのみ）．このとき，$x \in M$ を固定して，*isotropy subgroup* を

$$H = \{g \in G | gx = x\}$$

とすると閉部分群であり，多様体として $M = G/H$ となる．このような多様体を**等質空間**という．

Proof. x を固定して．$G/H \ni gH \mapsto gx \in M$ を考えると全単射微分同相である．
単射性：$gx = g'x$ ならば，$g^{-1}g'x = x$ であるので，$g^{-1}g' \in H$ であるので，$gH = g'H$ である．
全射性：$x' \in M$ に対して推移的であるので，ある $g' \in G$ が存在して，$x' = g'x$ となるので，$g'H \to x' = g'x$ となるので全射である．微分同相であることは省略． □

Example 1.1.24. 球面は $S^n = SO(n+1)/SO(n) = O(n+1)/O(n)$，複素射影空間は $\mathbb{C}P^n = U(n)/(U(1) \times U(n-1))$．このようにしてリー群から，さまざまな新しい多様体を構成することができる（で，このような空間は幾何学では重要）．

G が M に作用しているとき（推移的とは限らない），M 上の任意の点での isotropy group が $\{e\} \subset G$ となるとき（よって軌道はすべて G と同型），作用は**自由**であるという．

1.2　接続と曲率

1.2.1　主束上の接続

G をリー群，M を多様体とする．

Definition 1.2.1. P が M 上の**主** G **束**とは

1. G が P に右から自由に作用している．$P \times G \ni (p, g) \mapsto pg \in P$．($pg = p$ なら $g = e$ となる)．
2. 作用に関する軌道空間 P/G（自由に作用しているので多様体）が M であり，$\pi : P \to M$ を射影とする．このとき（G の作用も含めて）局所自明性が成立する．

Example 1.2.1.

Theorem 1.2.2. リー群 G に右から閉部分リー群 H が作用しているとする．この作用は自由である．そして軌道空間は G/H であり多様体となる．また，$\pi : G \to M = G/H$ は主 H 束である．

Proof. 多様体であることはすでに述べたが，その証明から $G \to G/H$ に局所的に切断が存在することがわかる．これを使えば局所自明性がわかり，主 G 束であることがわかる． □

G の主 G 束 P への作用の無限小作用を考えると

$$\mathfrak{g} \ni X \to X^* \in \mathfrak{X}(P)$$

という**基本ベクトル場**を得る．つまり $p \in P$ に対して $X^*_p := \frac{d}{dt}(p \exp tX)|_{t=0}$ とする．（注意すべきは $\exp tX$ を便宜上とることが多いが $X \in T_e(G) = \mathfrak{g}$ を与える G 内の曲線ならなんでもよい）.

Proposition 1.2.3. 基本ベクトル場を与える写像 $\mathfrak{g} \ni X \mapsto X^* \in \mathfrak{X}(P)$ はリー環の準同型である．つまり $[X, Y]^* = [X^*, Y^*]$.

Proof. 右作用を R_g とすれば，$(R_g)_* X^* = (\mathrm{Ad}(g^{-1})X)^*$ であることを証明する．$((R_g)_* X^*)_p = (R_g)_* X^*_{pg^{-1}}$ である．$X^*_{pg^{-1}}$ は $pg^{-1} \exp tX$ に対する $t = 0$ での微分である．この $(R_g)_*$ による像は $pg^{-1}(\exp tX)g$ の $t = 0$ での微分である．よって $p(\exp t\mathrm{Ad}(g^{-1})X)$ の $t = 0$ での微分となり $(\mathrm{Ad}(g^{-1})X)^*_p$ となる．

さてベクトル場のリー環の定義は,

$$[X, Y]_p = \lim_{t \to 0} \frac{Y_p - (\phi_t)_* Y_{\phi_{-t}(p)}}{t}$$

である．ここで $Y_p, (\phi_t)_* Y_{\phi_{-t}(p)} \in T_p P$ であるので極限をとることには意味がある．また ϕ_t は局所 1 パラメータ変換群．一方でリー環の積は

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{Y - \mathrm{Ad}(\exp -tX)Y}{t}$$

である．そこで

$$[X^*, Y^*]_p = \lim_{t \to 0} \frac{Y^*_p - (\exp tX)_* Y^*_{p(\exp -tX)}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{X^*_p - (\mathrm{Ad}(\exp -tX)Y)^*_p}{t} = [X, Y]^*_p$$

となる． □

$\mathfrak{g}$ の基底を $X_1, \cdots, X_k$ として，対応するベクトル場を $X_1^*, \cdots, X_k^*$ とすれば，作用が自由なので各点 p において一次独立であり，これらから生成される P 上のベクトル束を**垂直束**といい $V \subset TP$ と書く．$V = \ker d\pi$ であることに注意．一方で TM を引き戻した P 上の束 π^*TM を得る．このとき次のベクトル束の完全系列を得る

$$0 \to V \to TP \to \pi^*TM \to 0$$

これをスプリットさせることは必ずできるが，スプリットのさせ方はたくさんある．それを定めるのが接続である．

Definition 1.2.2. P 上の**接続**とは,

$$TP = V \oplus H$$

と **splitting を与えるもの**である．ここで $H \cong \pi^*TM$ は G 不変（$(dR_g)H_p = H_{pg}$）な TP の部分束である．これを**水平束**とよぶ.

この接続の定義を微分形式を使って書き換えよう．

Definition 1.2.3. P **上の接続形式とは，**P **上の** $\mathfrak{g}$ **値 1-form**

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i \otimes X_i \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$$

で次をみたすもの

1. A **は** G **不変である．**P 上の G 作用から $\Omega^1(P)$ への作用が定義でき，$\mathfrak{g}$ には随伴作用で作用させる．式で書けば,

$$g \cdot A = \sum (R_g)^* A_i \otimes \mathrm{Ad}_g(X_i) = \sum A_i \otimes X_i$$

ここで R_g は右作用なので R_g^* は左作用である.

2. A **は垂直的**である．つまり $\iota_{X^*} A = A(X^*) = X$ $(\forall X \in \mathfrak{g})$.

Proof. 先ほどの定義と同値であることを見てみる．上のような 1-from に対して,

$$H = \ker A = \{v \in TP | \iota_v A = 0\}$$

とすれば，水平束が定まる．逆に，H が定まれば上の条件をみたす 1-form で水平ベクトルに対してゼロとなるものがただ一つ定まる □

1.2.2　主束上の曲率

P に接続が与えられれば，次の分解を得る．

$$T^*P = V^* \oplus H^*, \quad \wedge^2 T^*P = (\wedge^2 V^*) \oplus (V^* \wedge H^*) \oplus (\wedge^2 H^*), \quad \cdots$$

よって

$$\Omega^1(P) = \Omega^1_v(P) \oplus \Omega^1_h(P), \quad \Omega^2(P) = \Omega^2_v(P) \oplus \Omega^2_{mix}(P) \oplus \Omega^2_h(P), \cdots$$

となる．そこで接続 $A \in \Omega^1_v \otimes \mathfrak{g}$ の微分を考えると

$$dA \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g} = (\Omega^2_v(P) \oplus \Omega^2_{mix}(P) \oplus \Omega^2_h(P)) \otimes \mathfrak{g}$$

となる．つまり $dA = dA_v + dA_{mix} + dA_h$ と三つに分解できる．

Lemma 1.2.4. $dA_v(X^*, Y^*) = -[X, Y]$, $dA_{mix} = 0$ となる

Proof. $(dA)(V, W) = VA(W) - WA(V) - A([V, W])$ であった．また $[X^*, Y^*] = [X, Y]^*$ となることとあわせれば $dA_v(X^*, Y^*) = -[X, Y]$ がわかる．$dA_{mix}(X^*, W) = X^*A(W) - WA(X^*) - A([X^*, W]) = -A([X^*, W])$（$X \in \mathfrak{g}, W \in H$）となるが，$H$ は G 不変であるので $L_{X^*}W \in H$ である．実際，X^* が引き起こす 1 パラメータ変換は $\phi^t(p) = p \exp tX$ であるので，$\phi^t_* = dR_{\exp tX}$ となる．また，H が G 不変とは $(dR_g)H_p = H_{pg}$ のことであった．このことから $L_{X^*}W \in H$ がわかる．よって $A([X^*, W]) = 0$ となる． □

さて，P 上 $\mathfrak{g}$ 値微分形式 $\omega = \sum \omega_i \otimes X_i \in \Omega^k(P) \otimes \mathfrak{g}$, $\tau = \sum \tau_i \otimes X_i \in \Omega^l(P) \otimes \mathfrak{g}$ に対して $[\omega \wedge \tau]$ を

$$[\omega \wedge \tau] := \sum_{i,j} \omega_i \wedge \tau_j \otimes [X_i, X_j]$$

と定義する．例えば $[A \wedge A]$ なら

$$[A \wedge A] = \sum_{i,j} A_i \wedge A_j \otimes [X_i, X_j]$$

となるので，

$$\begin{aligned} [A \wedge A](X, Y) &= \sum A_i(X)A_j(Y)[X_i, X_j] - \sum A_i(Y)A_j(X)[X_i, X_j] \\ &= [A(X), A(Y)] - [A(Y), A(X)] = 2[A(X), A(Y)] \end{aligned}$$

を得る．

Remark 1.2.1. 教科書によっては微分形式の定義がことなり，$(A \wedge B)(X,Y) = \frac{1}{2}(A(X)B(Y) - A(Y)B(X))$ とすることもあるので注意.

Definition 1.2.4. 接続の曲率とは dA の水平方向成分である．つまり

$$F_A = (dA)_h \in \Omega_h^2(P) \otimes \mathfrak{g}$$

である．また上で述べた補題などを使えば,

$$F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]$$

ともかける（演習問題).

定義から次は明らかであろう.

Proposition 1.2.5. F_A は G 不変であり，$\iota_{X^*} F_A = 0$ をみたす．特に，M 上のベクトル束 $\Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{g}_P$ の切断である．ここで $\mathfrak{g}_P$ は同伴束 $P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$.

Remark 1.2.2. G 不変で $\iota_{X^*}\omega = 0$（つまり V 方向の成分がない）を満たす P 上の微分形式を basic とよぶ．baisc 微分形式は M 上の微分形式に対応する.

平坦接続とは $F_A = 0$ となる接続である．曲率の定義から水平分布が可積分である．M の単連結近傍をとれば，その上に，積分多様体がつくれ，$P = U \times G$ と局所自明化でき，接続が局所的に自明接続にできる.

Proof. 曲率の定義を考えると $V, W \in H$ とする．このとき

$$\begin{aligned} 0 = F_A(V,W) &= dA(V,W) + \frac{1}{2}[A(V), A(W)] = A([V,W]) \\ &= A([V,W]_h + [V,W]_v) = A([V,W]_v) \end{aligned}$$

となり $[V,W]$ の垂直方向がないことを意味する．つまり $[V,W] \in H$ であり，水平方向が可積分となる. □

1.2.3　接続，曲率の局所表示

接続の局所表示を与えよう．まず主束を局所自明化する．つまり $M = \cup_i U_i$ として U_i 上の切断 $s^i(x) : U_i \to P$ をとることにより局所自明化 $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times G$ を行う．このとき $U_i \cap U_j$ 上では切断 $s^i(x), s^j(x)$ の差を $g_{ij}(x) : U_i \cap U_j \to G$ で表す（$s^j = s^i g_{ij}$).
これが推移関数と呼ばれるものであり，cocycle 条件 $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ を満たす.

Remark 1.2.3. 逆に，推移関数が与えられていれば，$U_i \times G$ を推移関数で張り合わせれば，主束 P が得られる.

接続 A を切断 s^i で引き戻せば U_i 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-form $A_i(x) = (s^i)^*(A)$ が定まる．このとき A_i と A_j は次のように関係する：

$$A_j = g_{ij}^{-1} A_i g_{ij} + g_{ij}^{-1} dg_{ij} \tag{1.2.1}$$

Proof. $X \in T_xM$ に対して，$\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = X$ となる曲線を $\gamma(t)$ とする．$A_j(X) = (s^j)^*A(X) = A(\frac{d}{dt}s^j(\gamma(t))|_{t=0})$ となるので，$\frac{d}{dt}s^j(\gamma(t))|_{t=0}$ の意味を考える．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}s^j(\gamma(t))|_{t=0} &= \frac{d}{dt}s^i(\gamma(t))|_{t=0}g_{ij}(x) + s^j(x)g_{ij}(x)^{-1}\frac{d}{dt}g_{ij}(\gamma(t))|_{t=0} \\ &= dR_{g_{ij}(x)}\frac{d}{dt}s^i(\gamma(t))|_{t=0} + s^j(x)g_{ij}(x)^{-1}\frac{d}{dt}g_{ij}(\gamma(t))|_{t=0}\end{aligned}$$

第二項の意味を考える．$g_{ij}(x)^{-1}g_{ij}(\gamma(t))$ は $t = 0$ のときに $e \in G$ を通る曲線でありその接ベクトルは $g_{ij}(x)^{-1}\frac{d}{dt}g_{ij}(\gamma(t))|_{t=0} = g_{ij}(x)^{-1}(dg_{ij})_x(X)$ である．そこで $s^j(x)g_{ij}(x)^{-1}\frac{d}{dt}g_{ij}(\gamma(t))|_{t=0}$ は対応する基本ベクトル場の $s^j(x)$ での値である．よって A をかぶせれば

$$A_j(X) = A(R_{g_{ij}(x)}(s^i)_*(X)) + g_{ij}(x)^{-1}dg_{ij}(X) = g_{ij}^{-1}A_i(X)g_{ij} + g_{ij}^{-1}dg_{ij}(X)$$

□

Remark 1.2.4. 逆に (1.2.1) を満たす $\{A_i\}_i$ があれば P 上の接続をつくることができる：切断 s^j 上に接する P 上接ベクトルに対しては A_i できまる．さらに G 不変性と $A(X^*) = X$ を考えれば P 全体に拡張できる．そして，(1.2.1) から well-defined である．

次に曲率の局所表示をみていく．それは $F_i := (s^i)^*F_A$ によって定義される U_i 上の $\mathfrak{g}$ 値 2-form である．定義から

$$F_i = (s^i)^*(dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]) = dA_i + \frac{1}{2}[A_i \wedge A_i]$$

である．また F_i, F_j は次のように関係する．

$$F_j = g_{ij}^{-1}F_i g_{ij}$$

Proof. 直接代入すればわかる． □

このことから，以前述べたように，曲率は同伴ベクトル束 $\mathfrak{g}_P = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ に値をもつ 2-form であることがわかる．つまり $\Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{g}_P$ の切断である．

1.2.4　平行移動とホロノミー

主束における平行移動とホロノミーについて考えよう．

$\gamma(t)$ を M 内の曲線とする．また $\pi(p) = \gamma(0)$ となる点 $p \in P$ を固定する．このとき $\gamma(t)$ の**水平リフト**とは p を始点とする P 内の曲線 $\tilde{\gamma}(t)$ で $\tilde{\gamma}'(t) \in H_{\tilde{\gamma}(t)}$ かつ $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ となるものである．このような水平リフトは常微分方程式の解の存在と一意性から．唯一つ存在することがわかる．さらに同じファイバーにある点 pg を始点とする $\gamma(t)$ の水平リフトは $\tilde{\gamma}(t)g$ となる．

そこでファイバー $\pi^{-1}(\gamma(0))$ を曲線 $\gamma(t)$ にそって平行移動させてファイバー $\pi^{-1}(\gamma(1))$ へ移すことが出来る．つまり $\Phi(\gamma) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \to \pi^{-1}(\gamma(1))$ という微分同相写像で $\Phi(\gamma)(pg) = \Phi(\gamma)(p)g$ を満たすものを作ることができる．これを**平行移動**と呼ぶ．

x を固定して $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ となるループを考え，その全体を $\Omega_x(M)$ とする．これは群になる．ループ γ に対して平行移動を考えると $\Phi(\gamma) : \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x)$ であるので $\Phi(\gamma)$ は $\pi^{-1}(x)$ の変換を与える．そして $\Phi(\gamma')\Phi(\gamma) = \Phi(\gamma'\gamma)$ であるので，

$$\Phi : \Omega_x(M) \ni \gamma \mapsto \Phi(\gamma) \in \{F \in Diff(\pi^{-1}(x)) | F(pa) = F(p)a\}$$

は準同形である．

点 $p \in \pi^{-1}(x)$ を固定すれば，上の F に対して $F(p) = pg_F$ となる $g_F \in G$ が定まる．また $F \circ F'(p) = pg_F g_{F'}$ となるので，

$$\Psi_p : \{F \in Diff(\pi^{-1}(x)) | F(pa) = F(p)a\} \ni F \mapsto g_F \in G$$

という準同形が定まる．そこで像

$$Hol(M, A) := \Psi_p \circ \Phi(\Omega_x(M)) \subset G$$

を**接続 A に対するホロノミー群**とよぶ．（面倒なので Ψ は書かずに $\Phi(\gamma)$ で G の元を表すことが多い）．

Remark 1.2.5. ホロノミー群は点 x や p のとり方で変わるが互いに同型（または共役）になるので，x や p を明記せず $Hol(M, A)$ と書く．

また定数ループにホモトピック（0 ホモトピック）なループの全体を $\Omega_x^0(M)$ と書く．この像

$$Hol^0(M, A) := \Psi_p \circ \Phi(\Omega_x^0(M)) \subset G$$

を**制限ホロノミー群**と呼ぶ．

Proposition 1.2.6. 制限ホロノミー群は構造群 G の連結リー部分群になる．さらに $Hol(M, A)$ の正規部分群であり，全射準同形 $\pi_1(M) \to Hol(M, A)/Hol^0(M, A)$ を得る．

よって $Hol(M,A)/Hol^0(M,A)$ は可算であり，$Hol(M,A)$ はリー群で，$Hol^0(M,A)$ はその単位元連結成分になる．

outline of proof. 証明は outline のみ述べる．詳しいことは小林-野水 [5] などをみよ．0 ホモトピックなループ γ^0 と定数ループ $const$ はホモトピーで結べる．よってそれぞれに対応した平行移動 $\Phi(\gamma^0)$, $\Phi(const)$ もホモトピーで結べる．$\Phi(const) = \mathrm{id}$ であるので，$\Phi(\gamma^0)$ は単位元と path で結べることになる．よって制限ホロノミー群は path 連結である．リー群の一般論から G の path 連結な部分群はリー群であり，連結になる．

次に正規部分群になることを見る．γ をループとして γ^0 を 0 ホモトピックなループとすれば，$\gamma\gamma^0\gamma^{-1}$ は 0 ホモトピックである．よって $\Phi(\gamma)\Phi(\gamma^0)\Phi(\gamma)^{-1} \in Hol^0(M,A)$ となるので $Hol^0(M,A)$ は正規部分群である．

また $\pi_1(M) \ni [\gamma] \to [\Phi(\gamma)] \in Hol(M,A)/Hol^0(M,A)$ とすれば全射準同形である． □

Remark 1.2.6. $Hol(M,A)$ は G の閉部分群になるかはわからないが，我々が扱うものはすべて閉部分群となるものである．

このホロノミー群で重要なことは次の reduction 定理である．

Proposition 1.2.7. M 上の主束 P および接続 A を考える．このとき構造群が $Hol(M,A)$ である P の主部分束 Q および接続 $A|_Q$ を得る．逆に，この Q, $A|_Q$ から P と A を作ることができる．

outline of proof. $p \in P$ の点を固定して，p から水平曲線で結べる点全体の集合を Q とする．この Q は主 $Hol(M,A)$ 束であることがわかる．接続を与えるには splitting を与えればよかったので $TP = H \oplus V$ なら $TQ = H \oplus (V \cap TQ)$ とすればよい．また Q と接続 A' があれば $P = Q \times_i G$ として主束 P を再現でき，また接続も水平方向がすでに定まっているので P 上の接続へ（一意的に）拡張できる． □

ホロノミー群のリー環と曲率の関係について述べよう．ホロノミー群のリー環を $\mathfrak{h}(M,A)$ とする．リー環なので単位元連結成分である $Hol^0(M,A)$ のみから定まるものである．曲率 F_A は $\Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{g}_P$ に値を持った，しかし接続は部分束 Q に落ちることがわかったので，実際には F_A は $\Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{h}(M,A)_P$ に値を持つ．

Proposition 1.2.8. 曲率 F_A は $\Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{h}(M,A)_P$ に値を持つ．

ある意味でこの逆も言える．

Proposition 1.2.9. ホロノミー群のリー環 $\mathfrak{h}(M,A)$ は次のような元で生成されるリー

環である．

$$\{F_A(v,w)_q | q \in Q,\ v,w \in T_{\pi(q)}M\} \subset \mathfrak{g} \tag{1.2.2}$$

ここで $q \in Q$ も動かすことに注意．

outline of proof. $p_0 \in P$ を固定して水平曲線で結べる点全体が Q であった．まず $Q = P$ の場合を考える．(1.2.2) で生成されるリー環を $\mathfrak{g}'$ として，$\mathfrak{g}'$ に対する基本ベクトル場による垂直部分空間を V' とする．そして $H \oplus V'$ という接分布を考えると $\mathfrak{g}'$ の定義から可積分であることがわかる．そこで p_0 を通る積分多様体を考えるとその積分多様体の点は水平曲線で結べるよって P と一致する．このことから $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ となる．

$Q \neq P$ の場合を考える．Q に対して上と同様にして $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}(M, A)$ となる．□

Remark 1.2.7. (1.2.2) で定義されるベクトル空間を $\mathfrak{g}_0$ とすると $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$ となる．このことを証明しておこう．proposition 1.2.8 から $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{h}(M, A)$ である．また，$\mathfrak{g}_0$ の定義と曲率が G 不変（$(R_g)^* F_A = \mathrm{Ad}(g^{-1})F_A$）であったことから，$\mathfrak{g}_0$ は $Hol(M, A)$ 不変である．よって $[\mathfrak{h}(M, A), \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$ である．そこで $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$ が成立する．上の命題の証明のおける $\mathfrak{g}_0$ で生成される $\mathfrak{g}'$ は実は $\mathfrak{g}_0$ に一致する．

Example 1.2.10. $F_A = 0$ の場合を考える．これは水平方向による接分布の積分多様体である．ホロノミー群のリー環は零である．そして $Hol(M, A)$ は離散群となる．*reduction* した主 $Hol(M, A)$ 束は M の被覆を与える．（この被覆は $\pi_1(M) \to Hol(M, A)/Hol^0(M, A) = Hol(M, A)$ から作れる）．

1.2.5　同伴束上の共変微分

主束上の接続 A から同伴ベクトル束上の共変微分 ∇ を定義していこう．

構造群 G の表現空間 (ρ, V) を考え，対応する同伴束 $\mathbf{V} := P \times_\rho V$ を考える．ここで

$$[p, v] \sim [pg.\rho(g^{-1})v]$$

として $P \times V$ に同値関係を入れて，商空間を考えたものが $\mathbf{V}$ である．主束の局所自明性から，$\mathbf{V}$ は局所的に $U \times V$ である．

このベクトル束上に共変微分を定義したい．

Definition 1.2.5. 共変微分とは次をみたす微分作用素 ∇ である

1. $\nabla : \Gamma(\mathbf{V}) \to \Gamma(\mathbf{V} \otimes T^*(M))$ は線形である．ここで $\Gamma(\mathbf{V})$ は滑らかな切断全体．
2. $e \in \Gamma(\mathbf{V})$, $f \in C^\infty(M)$ に対して，

$$\nabla fe = df \otimes e + f\nabla e$$

をみたす（ライプニッツ則）．

このときベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla_X e := (\nabla e)(X)$ と定義する．これはベクトル場 X に沿った共変微分である．定義から $\nabla_{fX} = f\nabla_X$ であるので，$v \in T_xM$ に対して点 x での v 方向の共変微分 $\nabla_v e$ が定まることに注意する．

主束に接続が与えられているときに，同伴束に自然に共変微分が定まることを見てみよう．P に接続 A が与えられているとする．$s(x)$ を P の局所切断とし，表現空間 V の基底 $\{e\}_i$ を選んでおく．このとき $e_i(x) := [s(x), e_i]$ により $\mathbf{V}$ の局所フレーム $\{e_i(x)\}_i$ が定まる．

この $\mathbf{V}$ の局所フレーム $e_i(x)$ に対して共変微分を

$$\nabla e_i(x) = \rho_*(s^*(A))e_i(x) = [s(x), \rho_*(s^*(A))e_i]$$

と定め，任意の切断 $e(x) = \sum \xi^i(x)e_i$ に対してはライプニッツ則により

$$\nabla e(x) = \sum d\xi^i \otimes e_i + \xi^i \rho_*(s^*(A))e_i = (d + \rho_*(s^*(A)))e(x)$$

と定義する（最後の等号は慣習上このように書くという意味）．このようにして定義した共変微分は well-defined である．

Proof. これが well-defined であることを確かめよう．$[s(x)g, \rho(g^{-1})e_i]$ に対して

$$\begin{aligned}
\nabla e_i(x) &= [s(x)g, \rho_*((s\cdot g)^*(A))\rho(g^{-1})e_i] \\
&= [s(x)g, \rho_*(R_g(s)^*(A))\rho(g^{-1})e_i] = [s(x)g, \rho(g^{-1})\rho_*((s)^*(A))\rho(g)\rho(g^{-1})e_i] \\
&= [s(x), \rho_*(s^*(A))e_i]
\end{aligned}$$

次に他のフレームをとった場合に定義が一致することを見る．他のフレームを s' とする．$s'(x) = s(x)g(x)$ とかけたとするとる．さらに $\rho(g(x))e_i = \sum g(x)_i^j e_j$ とする（表現の表現行列が $(g(x)_i^j)_{ij}$）．このとき

$$\rho(g(x))\rho_*(g(x)^{-1}dg(x))e_i = \sum dg(x)_i^j e_j$$

となる．s' に対する局所フレームを e'_i とすれば

$$e'_i(x) = [s'(x), e_i] = [s(x)g(x), e_i] = [s(x), \rho(g(x))e_i] = \sum g(x)_i^j e_j(x)$$

であり，

$$\nabla e'_i(x) = \sum dg(x)_i^j e_j(x) + \sum g(x)_i^j \nabla e_j(x)$$

が成立する．一方で，接続の局所表示のときと同じようにして，

$$\begin{aligned}\nabla e'_i &= \rho_*(s'^*(A))e'_i(x) = [s'(x), \rho_*(s'^*(A))e_i] \\ &= [s(x)g(x), (\rho(g(x)^{-1})\rho_*(s^*A)\rho(g(x)) + \rho_*(g(x)^{-1}dg(x))e_i] \\ &= [s(x), (\rho_*(s^*A)\rho(g(x)) + \rho_*(dg(x))e_i] \\ &= \sum_j g(x)_i^j \nabla e_j + \sum dg(x)_i^j e_j(x)\end{aligned}$$

となる．よって異なるフレームをとっても同じ共変微分を与える． □

記号が面倒なので，少しの間

$$\nabla e_i(x) = \rho_*(s^*(A))e_i(x) = \sum \omega_i^j \otimes e_j$$

と表示することにする．ここで ω_i^j は局所 1-form である．

この共変微分に対する曲率について考える．

Definition 1.2.6. 共変微分 ∇ に対する曲率とは

$$R_\rho(X,Y) := \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

のこと．

$R_\rho(fX,Y)e = R_\rho(X,fY)e = R_\rho(X,Y)(fe) = fR_\rho(X,Y)e$ であり，R_ρ は M 上 $\mathrm{End}(\mathbf{V})$ 値二次微分形式となる．曲率を局所フレームを使って書けば

$$R_\rho(X,Y)e_i = \rho_*((s^*F_A)(X,Y))e_i$$

となることがわかる．

Proof.

$$\nabla_X\nabla_Y e_i = \nabla_X(\sum \omega_i^j(Y)e_j) = \sum X\omega_i^j(Y)e_j + \sum \omega_i^j(Y)\omega_j^k(X)e_k$$

であるので

$$\begin{aligned}&(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})e_i \\ =&\sum(X\omega_i^j(Y) - Y\omega_i^j(X))e_j + \sum(\omega_i^j(Y)\omega_j^k(X) - \omega_i^j(X)\omega_j^k(Y))e_k - \sum \omega_i^j([X,Y])e_j \\ =&\sum d\omega(X,Y)e_i + [\omega(X),\omega(Y)]e_i = \rho_*((s^*(dA + \frac{1}{2}[A\wedge A]))(X,Y))e_i \\ =&\rho_*((s^*F_A)(X,Y))e_i\end{aligned}$$

□

共変外微分についても説明しておこう（しかし，これは使わないと思う）．同伴束と微分形式のベクトル束のテンソル積した M 上のベクトル束 $\Lambda^k(\mathbf{V}) := \Lambda^k(M) \otimes \mathbf{V}$ を考える．このベクトル束上に次のようにして微分作用が定まる．$\alpha \otimes e \in \Gamma(\Lambda^k(\mathbf{V}))$ に対して

$$d^\nabla(\alpha \otimes e) := d\alpha \wedge e + (-1)^k \alpha \wedge \nabla e \in \Gamma(\Lambda^{k+1}(\mathbf{V}))$$

Example 1.2.11. 先ほどの曲率作用素は $R_\rho = d^\nabla \nabla$ となる．

Proof. $\nabla e_i = \sum \omega_i^j \otimes e_j$ とすれば

$$\begin{aligned}
&\sum_j d^\nabla(\omega_i^j \otimes e_j)(X,Y) = \sum d\omega_i^j(X,Y)e_j - (\omega_i^j \wedge \nabla e_j)(X,Y) \\
=&\sum d\omega_i^j(X,Y)e_j - \omega_i^j(X)\nabla_Y e_j + \omega_i^j(Y)\nabla_X e_j \\
=&\sum d\omega_i^j(X,Y)e_j - \omega_i^j(X)\omega_j^k(Y)e_k + \omega_i^j(Y)\omega_j^k(X)e_k \\
=&R_\rho(X,Y)e_i
\end{aligned}$$

となる． □

Example 1.2.12. 曲率 F_A は $\Lambda^2(\mathfrak{g}_P) = \Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{g}_P$ の切断とみなすことができた．実は $d^\nabla F_A = 0$ が成立する（練習問題）．これを**ビアンキ恒等式**とよぶ．後で述べるリーマン曲率の場合には第二ビアンキ恒等式という．

1.2.6　同伴束の平行切断

Definition 1.2.7. 同伴束上に共変微分があった場合に，切断 $e \in \Gamma(\mathbf{V})$ が**平行切断**とは $\nabla e = 0$ のことである．

Example 1.2.13. (ρ, V) を自明表現として，その同伴束を考える．自明表現なので $\mathbf{V} = M \times V$ となる．*non-zero* ベクトル $e \in V$ に対して大域的な切断として $e(x) = [p, e]$ （$\pi(p) = x$）を得る．V の基底を $\{e_i\}_i$ とすれば，$e = \sum v^i e_i$ とかける．自明表現であることから $\nabla e_i(x) = 0$ であるので

$$\nabla e(x) = \sum (dv^i)e_i(x) + v_i(\nabla e_i(x)) = 0 + 0 = 0$$

となるので，これは平行切断である．そして $\dim V$ だけの独立な平行切断をつくることができる．

同伴束での平行移動を考える．主束上の平行移動とは M 内の曲線 $\gamma(t)$ にそってファイバーの同一視を与えるものであった．同伴束 $\mathbf{V}$ 上の点 $[p, v]$ を考える．M 内の $\gamma(t)$ に対

する P での水平リフト $\tilde{\gamma}(t)$ で $\tilde{\gamma}(0)=p$ となるものをとる．このとき $[\tilde{\gamma}(t),v]$ は $\mathbf{V}$ 内の曲線で $\gamma(t)$ のリフトである．そこで

$$\Phi(\gamma):\mathbf{V}_{\gamma(0)}\ni[p,v]\to[\tilde{\gamma}(1),v]\in\mathbf{V}_{\gamma(1)}$$

という写像を考える．これは well-defined かつ線形である．

Proof. $[p,v]=[pg,\rho(g^{-1})v]$ であった．pg から出発する水平リフトは $\tilde{\gamma}(t)g$ である．よって $\Phi([pg,\rho(g^{-1})v])=[\tilde{\gamma}(1)g,\rho(g^{-1})v]=[\tilde{\gamma}(1),v]$ となるので well-defined である．また線形であることも定義から明らか． □

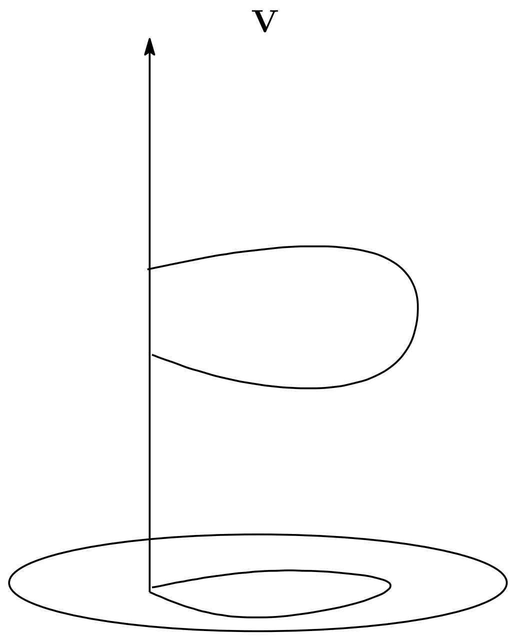
このように定まるファイバー間の線形写像を $\mathbf{V}$ の接続 $\rho_*(A)$ に対する**平行移動**と呼ぶ．またホロノミー群も同様に定義することができる．これは主束のホロノミー群の表現であり，$\rho(Hol(M,A))$ が接続 $\rho_*(A)$ に対するホロノミー群になる．また，平行移動から共変微分を定めることも可能である：ある切断 $e(x)$ に対して，

$$\nabla_{\gamma'(0)}e=\lim_{t\to0}\frac{\Phi(\gamma)^{-1}(e(\gamma(t)))-e(\gamma(0))}{t}$$

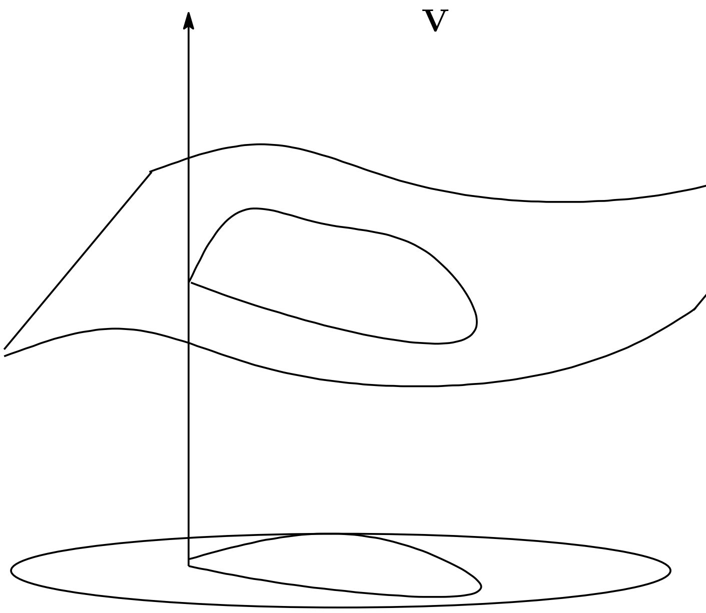
とすれば共変微分になる．逆に ∇ が与えられている場合には曲線 $\gamma(t)$ に対して $\nabla_{\gamma'(t)}s=0$（$\forall t$）となるような $\gamma(t)$ 上の切断を唯一つ構成することができる（常微分方程式の解の存在と一意性）．これより平行移動が定まる．つまり平行移動と共変微分は同値な概念である．

さて，平行移動が定まった場合に，切断 $e(x)$ が**平行切断であるとは，**$e(x)$ **が平行移動によって不変**であることである．これが先ほどの定義 $\nabla e=0$ と一致することは上記の平行移動と共変微分の同値性から明らかであろう．

Remark 1.2.8. 点 x_0 のファイバー $\mathbf{V}_{x_0}$ の点 $e(x_0)$ を固定して，これを平行移動で全体に拡張しようとしても，大域的切断が構成できるとは限らない．例えばあるループをとって，その水平リフトを $\tilde{\gamma}(t)$ とする．このとき $[\tilde{\gamma}(1),v]\neq[\tilde{\gamma}(0),v]$ であるので切断とはならない．平行切断とは，まず大域的な切断 $e(x)$ が存在していて，さらにそれが平行であるとしている．



単なる平行移動の図



平行切断の図

Remark 1.2.9. 平行切断には零点がないことに注意．もし $\nabla e = 0$ で，ある点で $e(x) = 0$ となるとすれば，$e(x) = 0$ からの平行移動は零切断となってしまう．

平行切断に対しての重要な命題は次である．

Proposition 1.2.14. 構造群 G の表現 (ρ, V) の同伴束および共変微分を考える．平行切断 $\nabla e = 0$ を考える．このとき $e(x_0)$ は x_0 でのホロノミー群の作用により不変である．逆に，ホロノミー群で不変なベクトル $v \in V$ が存在すれば，平行切断 e で $e(x_0) = [p, v]$ となるものが存在する．

Proof. $\nabla e = 0$ とする．このとき平行切断は平行移動によって不変である．特に，勝手なループに対する平行移動によって不変．つまりホロノミー群 $\rho(Hol(M, A))$ によって不変である．

逆に $\rho(Hol(M, A))$ で不変なベクトル v を考える．ここで $Hol(M, A)$ は点 p_0 を基点とするホロノミー群とする．$e(x_0) = e(\pi(p_0)) = [p_0, v]$ とする．点 x での値 $e(x)$ を，x と x_0 を結ぶ曲線 γ に対する平行移動によって定める．つまり $e(x) = \Phi(\gamma)(e(x_0))$．

別の曲線 γ' をとった場合に $\Phi(\gamma)(e(x_0)) = \Phi(\gamma')(e(x_0))$ つまり $\Phi(\gamma')^{-1}\Phi(\gamma)(e(x_0)) = e(x_0)$ を証明すべきである．このことは，$\Phi(\gamma')^{-1}\Phi(\gamma) = \Phi(\gamma'^{-1}\gamma) = \rho(\exists g) \in \rho(Hol(M, A))$ であり，v がホロノミー群で不変であることからわかる．よって大域的な切断が定義でき，作り方から平行切断である． □

この命題から次のことがわかる．すべての同伴束のすべての平行切断を考え，それらを

固定する群を H とする．このとき $Hol(M, A)$ は H の部分群である．このように，平行切断を考えれば，ホロノミー群がわかる（もちろん一致するとは限らないが）．

Example 1.2.15. ある表現空間 (ρ, V) に対する G 不変幾何構造を考える．例えば，エルミート内積，実構造などである．エルミート内積や実構造はある表現空間の G 不変元である．よって，同伴束に導かれるエルミート内積や実構造はすべて平行である．例えば，V 上の G 不変エルミート内積 h から $\mathbf{V}$ 上のファイバー計量 h を定義する．このとき $\nabla h = 0$ が成り立つ．つまり

$$\nabla(h(\phi, \psi)) = h(\nabla\phi, \psi) + h(\phi, \nabla\psi)$$

が成立する．

最後に計算上たびたび使用する命題を述べておく

Proposition 1.2.16. 同伴束上の共変微分を考える．多様体上の点 x_0 を固定する．同伴ベクトル束の局所フレーム $\{e_i(x)\}_i$ で $(\nabla e_i)_{x_0} = 0$ となるものが存在する．また平行な計量が入っている場合に正規直交フレームで同様なものが存在する．

Proof. 固定した点 x のファイバーのフレームを $\{e_i(x_0)\}_i$ も固定する．点 x_0 から放射線状に $\{e_i(x_0)\}_i$ を平行移動させる．このとき x_0 の近傍を十分小さくとれば，$e_i(x)$ は局所切断になり，さらに近傍を小さくとれば一次独立性が保たれるので局所フレームとなる．定義から $(\nabla e_i)_{x_0} = 0$ である．二番目の主張は平行移動によって，計量が平行であることから正規直交性が保たれることによる．

注意すべきは，構成した局所フレームは点 x_0 では $(\nabla e_i)_{x_0} = 0$ であるが，その近傍で平行切断になるとは限らないことである．平行切断になるためには曲率が零であることが必要．

□

1.3　レビチビタ接続

この章ではレビチビタ接続およびリーマン曲率テンソルについて考える．

1.3.1　レビチビタ接続

多様体上には特別な主束としてフレーム束という主 $GL(n, \mathbb{R})$ 束を考えることができる．すなわち各点でのフレームをすべて集めたものをファイバーとする主束である．このとき $GL(n, \mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^n$ への自然表現に対する同伴束は接束 $T(M)$ である．主フレーム

束上の接続から導かれる $T(M)$ 上の共変微分 ∇ に対して，次の振率テンソル（**torsion tensor**）をかんがえることができる：

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y].$$

我々が考える接続は，この **torsion tensor** が零のものに限ることにする．

多様体にリーマン計量が入る場合には，主 $O(n)$ 束を得ることができる．リーマン計量とは，対称テンソル場

$$g\in\Gamma(M,T^*(M)\otimes T^*(M))$$

であり，各点で正定値内積を与えるものである．つまり，$v,w\in T_x(M)$ に対して

$$g_x(v,w)=g_x(w,v),\quad g_x(v,v)\geq 0,\quad \text{等号成立なら } v=0$$

を満たす．そして，局所座標系で

$$g=\sum g_{ij}(x)dx_i\otimes dx_j,$$

としたとき $g_{ij}(x)$ は滑らか．このとき，$(g_{ij})_{ij}$ が正定値対称行列となることに注意．

Remark 1.3.1. 多様体には 1 の分割を使えば，必ずリーマン計量が入る．

Definition 1.3.1. 各点 x に対する接空間 T_xM の正規直交フレーム全体を O_x とする

$$O_x=\{X_1,\cdots,X_n|g(X_i,X_j)=\delta_{ij}\}$$

このとき $O(M)=\cup_{x\in M}O_x$ は主 $O(n)$ 束になる．これを正規直交フレーム束という．

さらに，多様体に向きが入る場合を考えれば，向きつき正規直交フレーム束 $SO(M)$ を得る（主 $SO(n)$ 束となる）．

正規直交フレーム束 $\mathbf{O}(M)$ を考えることができる．この主束上の接続は

$$\nabla g=0,\quad (\iff X(g(Y,Z))=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z),\ \forall X,Y.Z)$$

をみたす．逆に，$\nabla g=0$ を満たす接続は $\mathbf{O}(M)$ 上の接続を与える．

Definition 1.3.2. $\nabla g=0$ と $T=0$ を満たす接続をリーマン多様体上のレビ-チビタ接続という．

Proposition 1.3.1. レビ-チビタ接続は固定したリーマン計量に対して唯一つ存在することがわかる．

Proof. 天下り的に与える．

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y,Z)&=Xg(Y,Z)+Yg(X,Z)-Zg(X,Y)\\&+g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)-g(X,[Y,Z])\quad\forall Z\end{aligned}$$

により $\nabla_X Y$ を定義すると，共変微分であり計量を保存し torsion が零であることがわかる．一意性は $\nabla g = 0$, $T = 0$ なら上の式を満たさなければならないことがわかるので． □

Example 1.3.2. M をユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の n 次元部分多様体として，$\phi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ を埋め込みの写像とする（つまり M は超曲面とする）．このとき，ユークリッド計量 g_E の引き戻しを $g := \phi^* g_E$ とすれば，$x \in M$ で $\phi_* : T_x M \to T_{\phi(x)}\mathbb{R}^{n+1}$ は単射であるので，g は M 上のリーマン計量となる．さて，M の局所座標を $x_1, \cdots, x_n$ とする．このとき，$\frac{\partial}{\partial x_i}$ は M 上の局所的なベクトル場であるが，$\phi = \phi(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ と表したとき，M に接しているベクトル場

$$\phi_{x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

と同一視される．そして，M 上のリーマン計量は，この局所座標に対して

$$g_{ij} = g(\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

と表せる．

さて，ϕ_{x_i} は M 上のベクトル場であるが，これをさらに x_j で微分したとき，M に接するかどうかはわからず，接空間方向（*tangential*）と法線方向（*normal*）に分解することができる．つまり，単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とすれば，

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = pr_{tan}(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i}) + (\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

と分解されるが，

$$\nabla_{\partial_j}\partial_i := pr_{tan}(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i})$$

とすれば，これが (M, g) 上のレビチビタ接続となる．実際，計量を保存し，捩れ率ゼロが簡単にわかる．また，$\phi_{x_i} \cdot \mathbf{n} = 0$，$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ であることから，$\phi_{x_i x_j} \cdot \mathbf{n} = -\phi_{x_i} \cdot \mathbf{n}_{x_j}$，$\mathbf{n}_{x_i} \cdot \mathbf{n}$ となる．つまり，$\mathbf{n}_{x_i}$ は M に接している．そして，

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = \nabla_{\partial_j}\partial_i - (\phi_{x_i} \cdot \mathbf{n}_{x_j})\mathbf{n}$$

となる．右辺の第二項は第二基本形式とよばれるものである．

以下では，リーマン多様体上のレビチビタ接続を考察する．

レビチビタ接続からみちびかれる接束上の共変微分を ∇ とする．U 上の局所正規直交フレームを $(e_1, \cdots, e_n)$ とする．この $(e_1, \cdots, e_n)$ は主フレーム束の局所切断であるの

で，この切断によってレビチビタ接続を引き戻すと U 上の $\mathfrak{so}(n)$ 値 1-form A_U を得るが，それは接束上の共変微分を用いて

$$A_U = \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n} g(\nabla e_i, e_j) e_i \wedge e_j = \sum_{1\le i<j\le n} g(\nabla e_i, e_j) e_i \wedge e_j$$

となる．

Proof.

$$g(\rho_*(A_U(X))e_k, e_t) = \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n} g(g(\nabla_X e_i, e_j)(e_i\wedge e_j)(e_k), e_t)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{ij}(\delta_{ki}\delta_{jt} g(\nabla_X e_i, e_j) - \delta_{jk}\delta_{it} g(\nabla_X e_i, e_j))$$
$$= \frac{1}{2}(g(\nabla_X e_k, e_t) - g(\nabla_X e_t, e_k)) = g(\nabla_X e_k, e_t)$$

となるので $\rho_*(A_U(X))e_k = \nabla_X e_k$ となる．主フレーム束上の接続は自然表現に対する同伴束上の共変微分から定めることができるので，この式からレビチビタ接続の局所表示が上のようになることがわかる． □

曲率形式の局所表示は，同じ局所フレームを使って

$$F_U(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g(R(X,Y)e_i, e_j) e_i \wedge e_j$$

となる．ここで $R(X,Y)$ は接束上の曲率であり

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{1.3.1}$$

である．また

$$R_{ijkl} := g(R(e_i,e_j)e_k, e_l) \tag{1.3.2}$$

とすれば，

$$F_U(e_i,e_j) = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl} e_k \wedge e_l$$

ともかける．

Remark 1.3.2. R_{ijkl} の定義は論文によってことなる．このマイナス倍を R_{ijkl} としている論文のほうが多い．

1.3.2　曲率テンソル

式 (1.3.1) で定義した接束での曲率を**リーマン曲率テンソル**とよぶ．リーマン曲率テンソルに関する事実をいくつか述べる．通常のテキストではある局所座標系に対するフレーム $(\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n)$ について考えることが多いが，ここでは，ある正規直交基底 $\{e_i\}$ に対しての表示を考えることにする．（個人的に，g^{ij} などの記号は邪魔でしょうがない）．

リーマン曲率テンソル R に対して (1.3.2) で与えられる R_{ijkl} を考える．この R_{ijkl} を縮約することによりいくつかの微分幾何で重要なテンソルを得る．

1. **リッチ曲率**を
$$R_{ij} = \sum_b R_{bijb}$$
で定義する．これは $R_{ij} = R_{ji}$ を満たす対称テンソルであり，
$$Ric(X, Y) = \sum R_{ij} X^i Y^j$$
と書くこともある．またリッチ変換（対称変換）$Ric : TM \to TM$ を
$$Ric(X) := Ric(\sum X^i e_i) = \sum R_{ij} e_j X^i$$
とする．
Ric は対称テンソルであるので，各点で対角化することができる．その各固有値がすべての点で $> r$ のとき $Ric > r$ と書く．
2. **スカラー曲率**と呼ばれる多様体上の関数を
$$\kappa = \sum R_{ii}$$
で定義する．
3. リッチテンソルは同伴ベクトル束 $S^2(T(M)) \cong S^2(T^*(M))$ の切断とみなすことができるが，これは既約ベクトル束ではない．実際，$O(n)$ に関する既約分解 $S^2(\mathbb{R}^n) = S^2_0(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{R}$（トレース零部分とトレース部分）が成立する．そこで，この分解に関してリッチを分解すれば，
$$R_{ij} = (R_{ij} - \frac{\kappa}{n}\delta_{ij}) + \frac{\kappa}{n}\delta_{ij}$$
となる．我々は
$$E_{ij} := \frac{1}{n-2}(\frac{\kappa}{n}\delta_{ij} - R_{ij})$$
と定義して，これを**アインシュタインテンソル**と呼ぶ．このテンソルは $E_{ij} = E_{ji}$, $\sum E_{ii} = 0$ を満たす． そして $E_{ij} = 0$ となる多様体を**アインシュタイン多様体**と呼ぶ．（テキストによっては E_{ij} の適当な定数倍がアインシュタインテンソル）．

第二ビアンキ恒等式 $d^\nabla R = 0$ を使えば，連結リーマン多様体上で $Ric = f(x)g$（我々の記号では $R_{ij} = f(x)\delta_{ij}$）となるなら f は定数であることがわかる（ただし $n \geq 3$）．よって**アインシュタイン多様体上でスカラー曲率** $\kappa = \sum R_{ii}$ **は定数**であるので，アインシュタイン多様体は定スカラー曲率多様体である．

上でリッチテンソルの既約分解を与えたが，リーマン曲率テンソルそのものを既約分解することを考える．まず，曲率テンソルは，同伴束 $\Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{so}(n)_P \cong \Lambda^2(M) \otimes \Lambda^2(M)$ の切断とみなせる．そこで，この同伴束の既約分解を行えば R の既約分解ができる．まずリーマン曲率テンソルは

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} \tag{1.3.3}$$
$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0 \tag{1.3.4}$$

を満たすことがわかる．(1.3.3) は明らか．(1.3.4) は torsion が零から従う．(1.3.4) を**第一ビアンキ恒等式**とよぶ．この二つの条件から

$$R_{ijkl} = R_{klij} \tag{1.3.5}$$

を得る．

Remark 1.3.3. 式 (1.3.3) と (1.3.5) から (1.3.4) は導けない．

リーマン多様体上のレビチビタ接続に対するホロノミー群に対する概略を述べる（例えば酒井隆「リーマン幾何学」を見よ）．

Definition 1.3.3. リーマン多様体 (M, g) に対して，レビチビタ接続に対するホロノミー群を $Hol(M) \subset O(n)$（または $Hol(M, g)$），制限ホロノミー群を $Hol^0(M) \subset SO(n)$ と書く．それぞれ，**リーマンホロノミー群**，**制限リーマンホロノミー群**とよぶ．また，ホロノミー環を $\mathfrak{h}(M)$ と書く．

Section 1.2.4 で述べた，主束のホロノミー群について成立したことは，すべてリーマンホロノミー群について成立する．また，ビアンキ恒等式から，**レビチビタ接続の曲率は** $S^2(\mathfrak{h}(M))$ **に値をもつ**．

さて，ふたつのリーマン多様体 (M_1, g_1), (M_2, g_2) があって，その積 $M_1 \times M_2$ はリーマン計量 $g_1 \times g_2$ によって，リーマン多様体になる．これは $T_{(x_1,x_2)}(M_1 \times M_2) = T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$ に $g_1 \times g_2$ というリーマン計量をいれることによる．このとき

$$Hol(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) = Hol(M_1, g_1) \times Hol(M_2, g_2),$$
$$Hol^0(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) = Hol^0(M_1, g_1) \times Hol^0(M_2, g_2)$$

になることは明らかである．

Definition 1.3.4. リーマン多様体が**可約**とは，上のようにリーマン多様体の積になること．**局所可約**とは局所的にリーマン多様体の積になること．また，可約でないときにリーマン多様体が**既約**とよぶ.

ホロノミー群の $\mathbb{R}^n$ への表現を既約分解すると，実はホロノミー群自信が分解されることがわかる．そして，リーマン多様体としても分解されることになる，そこで，次の有名な定理が導ける．

Theorem 1.3.3 (de-Rham 分解定理). **完備単連結リーマン多様体** (M, g) **に対して，完備単連結リーマン多様体** (M_i, g_i) **（**$i = 1, \cdots, k$**）で** $Hol(M_i, g_i)$ **が** $\mathbb{R}^{n_i}$ **へ既約に作用するもので，**$(M, g) = (M_1, g_1) \times \cdots \times (M_k, g_k)$ **かつ** $Hol(M, g) = Hol(M_1, g_1) \times \cdots \times Hol(M_k, g_k)$ **となるものが存在する．**

また，単連結を仮定しない場合には，局所的に，つまり制限ホロノミー群に対して上の定理が成立する（完備性がなくてもよい）.

1.3.3　測地線

(M, g) をリーマン多様体とする. 我々は $g(X, X) = \|X\|^2$ と書くことにする．また，リーマン計量から導かれたレビチビタ接続を ∇ とする．このとき**測地線**とは次のような M 内の曲線 $\gamma(t)$ のことである．

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0 \tag{1.3.6}$$

つまり $\gamma'(t)$ が曲線 $\gamma(t)$ に沿って平行であること．

Lemma 1.3.4. $\gamma(t)$ が測地線なら $\|\gamma'(t)\|$ は定数である．（つまり速さ一定）.

Proof.

$$\frac{d}{dt}g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 2g(\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0. \tag{1.3.7}$$

ここでレビチビタ接続が計量を保つことを用いた．よって $\|\gamma'(t)\|$ は定数. □

Remark 1.3.4. この補題は重要である．なぜなら測地線が arclength に proportional なパラメータ付けをもつことが分かるからである．（注意：あとで述べるが $\gamma(t)$ が測地線なら $\gamma(ct)$ や $\gamma(t + c)$ も測地線である．ただし前者の初期値ベクトルは異なる．また $\gamma(t)$ が測地線だからといって $\gamma(f(t))$ が測地線になるわけではない．例えば $\gamma(t^2)$ 測地線ではない．$\mathbb{R}^2$ の場合に $(x, y) = (t^2, t^2)$ は測地線でない．つまり見かけが測地線だからといって，安易に測地線といってはいけない.）

測地線の定義から局所座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ において，測地線は次のような 2 階の非線

形常微分方程式系の解であることがわかる．

$$\frac{d^2\gamma^i(t)}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\frac{d\gamma^j(t)}{dt}\frac{d\gamma^k(t)}{dt} = 0 \quad \text{for any } i \tag{1.3.8}$$

ただし $\gamma^i(t) := x^i(\gamma(t))$ であり，Γ^i_{jk} は $\nabla_{\partial_j}\partial_k = \sum_i \Gamma^i_{jk}\partial_i$ で定義されるクリストッフェル記号である．

Exercise 1.3.5. 測地線の定義から，上の微分方程式を導け．

Exercise 1.3.6. 捩れ率ゼロであることから，$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ となることを示せ．

常微分方程式の解の存在，一意性，初期条件に関する微分可能性から次の性質がわかる

Proposition 1.3.7. *1.* 任意の点 $p \in M$ 及び任意のベクトル $X \in T_p(M)$ に対して，0 を含む開区間 I 及び測地線 $\gamma : I \to M$ で $\gamma(0) = p$，$\gamma'(0) = X$ となるものが存在

2. $\gamma_1 : I_1 \to M$，$\gamma_2 : I_2 \to M$ 測地線で $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$，$\gamma_1'(0) = \gamma'(0) = X$ となるものが存在するなら $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ *for* $t \in I_1 \cap I_2$

3. 各点 p に対して，閉区間 $I = [-a, a]$，$T_p(M)$ 内の開円板 $D = D(0, r_0) = \{X \in T_p(M) | \|X\| < r_0\}$ 及び，滑らかな写像 $\Psi : I \times D \to M$ で次のようなものが存在する：
任意の $X \in D$ に対して $\gamma_X(t) := \Psi(t, X)$ が $\gamma_X(0) = p$，$\gamma_X'(0) = X$ となる測地線となる．

4. $\gamma(t)$ 測地線なら $\gamma(ct)$ も測地線である．ここで c はゼロでない定数．

Proof. 最後の主張は $\gamma(t)$ が測地線の方程式を満たせば $\gamma(ct)$ も明らかに測地線の方程式をみたすことからわかる．（c^2 が前にでるだけ）．その他は常微分方程式の理論からしたがう． □

命題における $I = [-a, a]$ の a は，各点により異なるが我々は円板 D の方を小さくとることにより $I = [-1, 1]$ とすることが可能である．例えば X に対する測地線 $\gamma_X(t)$ が $t = a < 1$ まで伸ばせたとする．このとき $\tilde{\gamma}(t) := \gamma_X(at)$ を考えるとこれは測地線であり，さらに $t = 1$ まで伸ばせる，しかし $\tilde{\gamma}'(0) = aX$ である（つまり $\gamma_{aX}(t) = \gamma_X(at)$）．よって開円板を小さくとれば $I = [-1, 1]$ としてよい．

Example 1.3.8. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の場合，誘導計量からくるレビチビタ接続の定義はすでに述べた．その場合の測地線の方程式は

$$pr_{\tan}\gamma''(t) = 0$$

と書ける．つまり，

$$\gamma''(t) = (\gamma''(t) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

となる．これは，M という超曲面に拘束された質点の等速直線運動を表している．実際，運動方程式 $F = ma$ を考えたとき，力が働くのは垂直抗力のみであり，M に接する方向の力は測地線の方程式からゼロである．

半径 1 の球面の測地線が大円になることはよく知られているが，それを見ていこう．$\gamma(t) \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ として，$\gamma(0) = x$，$\gamma'(0) = X \in T_x S^n$ とする．また，測地線のパラメータとして弧長パラメータを取っておくことにする．つまり $\gamma'(t) \cdot \gamma'(t) = 1$ とすれば，$\gamma''(t) \cdot \gamma'(t) = 0$ となる．また $\mathbf{n}(\gamma(t)) = \gamma(t)$ であるので，

$$\gamma''(t) = (\gamma''(t) \cdot \gamma(t))\gamma(t) = -(\gamma'(t) \cdot \gamma'(t))\gamma(t) = -\gamma(t)$$

である．そこで，この常微分方程式の解は

$$\gamma(t) = \gamma(0)\cos t + \gamma'(0)\sin t = x\cos t + X\sin t$$

であり，x と X が張る平面と球面の交わりである大円となる．

1.3.4　指数写像と正規座標

以上から，次の指数写像を定義する：

Definition 1.3.5. 点 p における**指数写像**とは，上のような開円板 $D \subset T_p(M)$ をとり，

$$\exp_p : D \ni X \to \gamma_X(1) \in M \tag{1.3.9}$$

特に，このとき $\gamma(t) := \exp_p(tX)$ は $\gamma(0) = p$ かつ $\gamma'(0) = X$ の測地線である．

Proof. $\exp_p(tX) = \gamma_{tX}(1) = \gamma_X(t)$ であるので． □

この指数写像の T_pM の原点 0 における微分を考えると

$$(\exp_p)_{*0}(X) = \frac{d}{dt}(\exp_p(tX))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma_X(t)|_{t=0} = X$$

よって $(\exp_p)_{*0} = \mathrm{id}$ である．そこで逆関数定理から開円板 D をさらに小さくとることで

$$\exp_p : D \to \exp_p(D) \subset M$$

を微分同相写像とできる．これを用いて，次のように p の近傍 $\exp_p(D)$ 上で局所座標をつくる：$\{e_i\}_{i=1}^n$ を $T_p(M)$ の正規直交基底とする．$y \in \exp_p(D)$ に対して $\exp_p(\sum x^i e_i) = y$

となるようなベクトル $\sum x^i e_i \in T_p(M)$ が唯一つ存在するので $x^i(y) = x^i$ として局所座標をいれる．つまり

$$x^i = x^i(\exp_p(\sum x^i e_i)) \tag{1.3.10}$$

この $(\exp_p(D), x^1, \cdots, x^n)$ を点 p での**正規座標系（測地線座標）**とよぶ．より詳しく言えば $T_p(M)$ のある正規直交基底 $\{e_i\}$ を固定して

$$\mathbb{R}^n \to \qquad T_p(M) \to \qquad X \tag{1.3.11}$$

$$(x^1, \cdots, x^n) \mapsto \qquad \sum x_i e_i \mapsto \qquad \exp_p(\sum x_i e_i) \tag{1.3.12}$$

という写像が正規座標である．特に，正規直交基底 $\{e_i\}$ を用いているので，

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} \tag{1.3.13}$$

成立する．

さて，正規座標に関して次が成立する

Proposition 1.3.9. *1.* 任意のベクトル $X \in D$ に対して

$$d(p, \exp_p(X)) = \|X\| \tag{1.3.14}$$

ただし d の定義は次のよう

$$d(p,q) = \inf\{L(c) | c \text{ は } p \text{ と } q \text{ を結ぶ区分的に滑らかな曲線 }\} \tag{1.3.15}$$

ここで，$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$ であり，リーマン計量に関する曲線の長さ．

2.

$$\exp_p(D) = \{q \in M | d(q,p) < (D \text{ の半径})\}$$

3. D の半径 r を十分小さくとれば $\exp_p(D)$ は凸集合である．つまり $q, q' \in \exp_p(D)$ は $\exp_p(D)$ 内で唯一つの測地線 γ で結べる．さらに $L(\gamma) = d(q,q')$（このように $L(\gamma) = d(q,q')$ が成り立つような測地線を**最短測地線**と呼ぶ）

Remark 1.3.5. 上の命題から d が距離になることがわかる．$d(p,q) = 0$ とすると $q \in \exp_p(D(r))$ となる．よって $q = \exp_p(X)$ となる X が存在するが $d(p,q) = \|X\| = 0$ であるので $p = q$ となる．

この命題を証明する前に補題を二つ用意する．

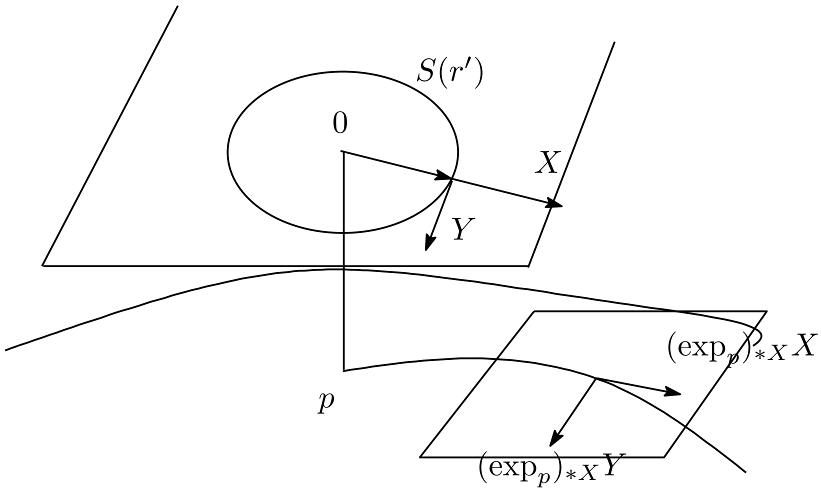
Lemma 1.3.10. 円板 D の半径 r として $0 < r' < r$ となる r' に対して次のことが成立：$T_p(M)$ 内の半径 r' の球を

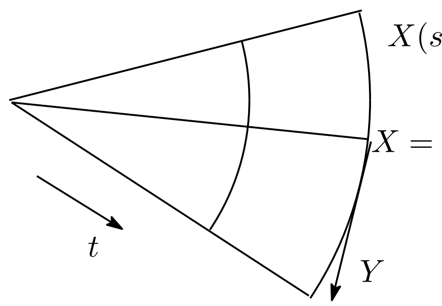
$$S(r') := \{X \in T_p(M) | \|X\| = r'\}$$

とする．このとき $X \in S(r')$, $Y \in T_X(S(r'))$ に対して

$$g_{\exp_p(X)}((\exp_p)_{*X}X, (\exp_p)_{*X}Y) = 0$$

つまり指数写像で移したときリーマン計量に関して X と Y は直交している．





Proof. 球面 $S'(r)$ 内の曲線 $X(s)$ で $X(0) = X$ かつ $X'(0) = Y$ となるものをとる．さらに

$$\phi(t, s) := \exp_p(tX(s)) \in M$$

とする．つまり s を固定して t を動かせば測地線である．さて

$$g_{\phi(t,s)}(\phi_t, \phi_t) = g_p(X(s), X(s)) = r'^2$$

である．（ここで測地線は長さを変えないことを用いた. また ϕ_t は t に関しての微分）．さらに両辺を s で微分して

$$\begin{aligned}
0 =& 2g(\phi_t, \nabla_{\partial/\partial s}\phi_t) \\
=& 2g(\phi_t, \nabla_{\partial/\partial t}\phi_s + \phi_*([\partial/\partial s, \partial/\partial t])) \quad (\text{捩れゼロから}) \\
=& 2g(\phi_t, \nabla_{\partial/\partial t}\phi_s) \\
=& 2\{\frac{\partial}{\partial t} g(\phi_t, \phi_s) - g(\nabla_{\partial/\partial t}\phi_t, \phi_s)\} \\
=& 2\frac{\partial}{\partial t} g(\phi_t, \phi_s) \quad (\text{測地線より})
\end{aligned}$$

となるので $g(\phi_t, \phi_s)$ は t に関して定数である．特に $t = 0$ の時を考えると $\phi_s(0, s) = 0$ であるので $g(\phi_t, \phi_s) = 0$ を得る．また

$$\phi_t(1, 0) = (\exp_p)_{*X}X, \quad \phi_s(1, 0) = (\exp_p)_{*X}Y$$

であるので補題が証明できた． □

Remark 1.3.6. $\nabla_{\partial s}\phi_t = \nabla_{\partial t}\phi_s$ について補足しておく．$\phi : I \times J \ni (t,s) \mapsto \phi(t,s) \in M$ は，ある局所座標を使えば，$\phi(t,s) = (x^1(t,s), \cdots, x^n(t,s))$ とかける．そこで t について微分すれば $\phi_t = \sum \frac{\partial x^i}{\partial t}(t,s)\frac{\partial}{\partial x^i}$，$\phi_s = \sum \frac{\partial x^i}{\partial s}(t,s)\frac{\partial}{\partial x^i}$ となる．ベクトル場 ϕ_t をベクトル場 ϕ_s にそって共変微分すれば，

$$\nabla_{\partial s}\phi_t = \sum \frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial s}\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum \frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial s}\Gamma^k_{i,j}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

同様に，$\nabla_{\partial t}\phi_s$ を計算すれば，$\nabla_{\partial t}\phi_s = \nabla_{\partial s}\phi_t$ を得る．

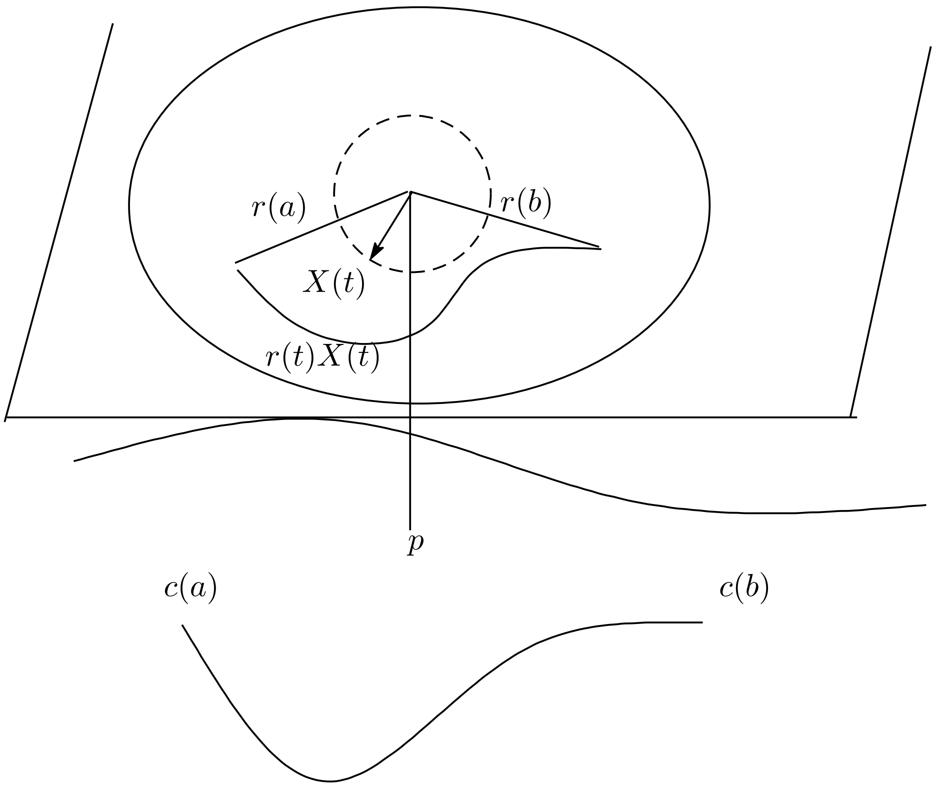
Lemma 1.3.11. $\exp_p(D)$ 内の滑らかな曲線 $c(t)$ を考える（$a \le t \le b$）．この曲線を極座標表示する

$$c(t) = \exp_p(r(t)X(t)), \quad \|X(t)\| = 1, \quad r(t) \in \mathbb{R}$$

このとき

$$\int_a^b \|c'(t)\|dt \ge |r(b) - r(a)| \tag{1.3.16}$$

（左辺は曲線の M 内での長さ）．さらに等号成立は $r(t)$ が単調増加で $X(t)$ が定ベクトルのとき．



Proof. $\phi(r,t) = \exp_p(rX(t))$ とすると，$c(t) = \phi(r(t),t)$ である．さて

$$c'(t) = \frac{dr}{dt}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

となる．よって先ほどの補題を用いれば

$$\|c'(t)\|^2 = (\frac{dr}{dt})^2 g(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{\partial\phi}{\partial r}) + g(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial t})$$

となるが $g(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{\partial\phi}{\partial r}) = \|X(t)\|^2 = 1$ となるので

$$\|c'(t)\|^2 \geq (\frac{dr}{dt})^2$$

を得る．（等号成立は $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$，つまり $X(t)$ が定ベクトル）．よって

$$\int_a^b \|c'(t)\|dt \geq \int_a^b |\frac{dr}{dt}|dt \geq |\int_a^b \frac{dr}{dt}dt| \geq |r(b) - r(a)|$$

となる．（ここで等号成立は $r(t)$ が単調増加）．□

Proof of Proposition. 第一の主張を示そう．上の補題において $c(0) = p, c(b) = \exp_p(X)$ となる任意の曲線を選ぶ．（$a = 0$ としている）．特に $r(0) = 0$ である．よって

$$\int_a^b \|c'(t)\|dt \geq r(b)$$

となる．このように p と $\exp_p(X)$ を結ぶ曲線は $r(b)$ で抑えることができる．我々は p から $c(b)$ への曲線として $c(t) = \exp_p(tX)$ をとれば，$r(b) = \|X\| = \int_0^b \|\gamma'_X(t)\|dt$ となる．

第二の主張は第一の主張から言える．

第三の主張を考える．p に関する開円板を D_p とかく．この円板の半径 r を十分小さくとって $\exp_q(D(r'))$ 内に q' が入るようにすれば q と q' は測地線で結べる．さらに微分同相 $\exp_p : D(r) \mapsto \exp_p(D(r))$ において，半径 r は p に対して連続的に変化することがわかる．つまり p と p' が十分近ければ r と r' も十分近い．よって r を十分小さくとれば主張がいえる．□

さて指数写像 $\exp_p$ の定義域である開円板 D_p を $T_p(M)$ 全体へと拡張できるであろうか？これに対しては次の結果が知られている．

Proposition 1.3.12 (Hopf-Rinow, [4])**.** 連結なリーマン多様体に対して以下は同値

1. d を距離として M は完備である．（コーシー列が収束）
2. ある点 $p \in M$ で $D_p = T_p(M)$ となるものが存在
3. 任意の点 $p \in M$ に対して $D_p = T_p(M)$
4. 任意の点 $p \in M$ と任意の $r > 0$ に対して $\{q \in M | d(p,q) < r\}$ が相対コンパクト
5. M 内の有界閉集合はコンパクト

さらにこのようなときに (M, g) を完備リーマン多様体とよぶ．またそのとき任意の点 p, q に対して，それらを結ぶ最短測地線が存在する．

Remark 1.3.7.

1. (M, g) を距離空間とみなしたときに入る位相はもともとある M の位相と一致する．
2. $T_p(M)$ 全体で $\exp_p$ が拡張できるわけだが，単射性は（一般に）明らかに崩れることに注意する．よって座標系になるわけではない．このため単射半径という概念がある．リーマン幾何においてはこの単射半径は重要な概念の一つである．

第 2 章

リーマン対称空間入門

2.1 リーマン対称空間の定義と例

Definition 2.1.1. リーマン多様体 (M, g) が**リーマン対称空間**とは，任意の点 $p \in M$ に対して，等長同型 $\sigma_p : M \to M$ で $\sigma_p(p) = p$ かつ $(d\sigma_p)_p = -\mathrm{id} : T_pM \to T_pM$ となるものが存在すること．

ここで，リーマン多様体 (M, g)，(N, g') が等長同型とは，微分同相写像 $\phi : M \to N$ が存在して，$\phi^* g' = g$ となるときをいう．また，この ϕ を等長同型という．

上の条件から σ_p に対して p は孤立固定点になることがわかる．また $d\sigma_p(p) = -\mathrm{id}$ から，σ_p が「点対称（point symmetry）」であることがわかる．つまり対称空間とは，**各点に点対称がある空間**である．実際，後で見るように，ある点 p と点 x を測地線で結んだとき，その反対側の点が $\sigma_p(x)$ である．

Proof. 孤立固定点となることを証明しておこう．$M \times M$ 内で σ_p のグラフと恒等写像のグラフの交点が固定点である．

$$T_p\mathrm{diagonal}(M) + T_p\mathrm{graph}\sigma_p = T_p(M \times M)$$

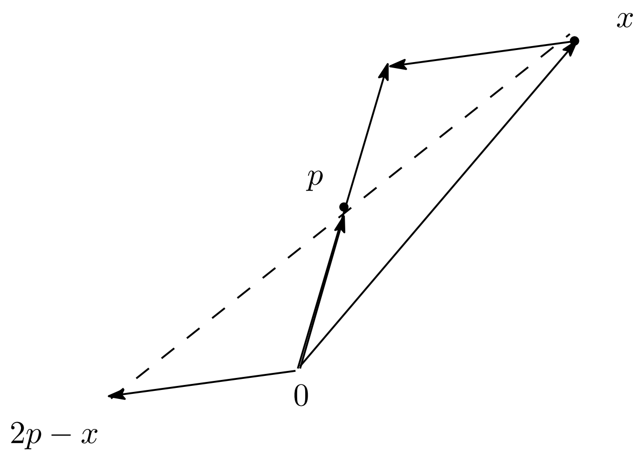
となるので，点 p で横断的に交わっている．よって，固定点は孤立点である． □

Remark 2.1.1. リーマン対称空間とは G 不変計量をもつ**対称空間**のことである（一般の対称空間の定義は後述）．しかし，**このノートで扱うのはリーマン対称空間に限るので，リーマン対称空間のことを単に対称空間とよぶことにする．**

Example 2.1.1. $\mathbb{R}^n$ に標準的な計量を入れておく．このとき任意の点 $p \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\sigma_p(x) = 2p - x$$

とする．



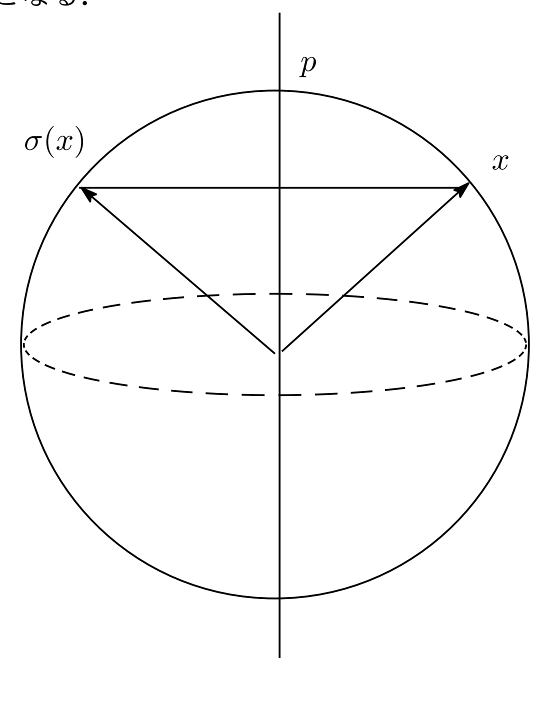
これは点 p に対する点対称な変換である．そして，$\sigma_p(p) = p$ かつ $d\sigma_p(p) = -\mathrm{id}$ であるので，$\mathbb{R}^n$ は対称空間である．

Example 2.1.2. 球面 S^n を考える．等長群 $SO(n+1)$ は S^n に推移的に作用するので，ある点 p で σ_p を見つければよい．そこで p を北極 $(1, 0, \cdots, 0)$ とする．このとき

$$\sigma_p(x_1, \cdots, x_{n+1}) = (x_1, -x_2, \cdots, -x_{n+1})$$

とする．このようにすれば条件を満たす（σ_p が等長であることは球面のリーマン計量が $\mathbb{R}^n$ から導かれていることからわかる．ただし，n が奇数なら $\sigma_p \notin SO(n+1)$．$\sigma_p \in O(n+1)$ に注意）．この点対称は $(0, x_2, \cdots, x_{n+1})$ という平面に対する鏡映をマイナス倍したものである．

また，点 p を通る測地線は，p と原点を通る 2 次元平面と球面との交わりであり，大円となる．



Exercise 2.1.3. 点 $y \in S^n$ での点対称が $\sigma_y(x) = -x + 2(x, y)y$ となることを確かめよ．

Example 2.1.4. $\mathbb{C}P^n$ を考える．まず *Fubini-Study* 計量の説明をする．$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ を射影とする．$U \subset \mathbb{C}P^n$ に対して，$Z : U \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ を $\pi \circ Z = \mathrm{id}$ となる正則写像（正則切断）とする．このとき

$$\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log\|Z\|^2$$

とすれば，これはケーラー形式となる．ケーラー形式とは複素多様体上の *nondegenerate* な *real-closed-2-form* ω であり，複素構造 J に対して $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$ をみたすものである．このとき，$g(u, v) = \omega(u, Jv)$ とすれば，g は M 上のリーマン計量になる（これをケーラー計量という）．他の正則切断 Z' をとっても零点がない正則関数 ϕ を使って $Z' = \phi Z$ と書けるので，上の式に代入すれば同じ 2-*form* を定めることがわかる．例えば

$$U_0 = \{[Z^0, \cdots, Z^n] \mid Z^0 \neq 0\}$$

として，$z^i = Z^i/Z^0$ を U_0 の局所座標とすれば，正則切断として $Z = (1, z^1, \cdots, z^n)$ をとることができる．このとき

$$\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log\|Z\|^2 = \frac{i}{2}\left\{\frac{\sum_j dz^i \wedge d\bar{z}^j}{1+|z|^2} - \frac{\sum_{k,j}\bar{z}^j z^k dz^j \wedge d\bar{z}^k}{(1+|z|^2)^2}\right\}$$

となる（$\log(1+|z|^2)$ がケーラーポテンシャル）．このケーラー形式に対する計量を ***Fubini-Study*** 計量と呼ぶ．つまり，

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\sum_j dz^i d\bar{z}^j}{1+|z|^2} - \frac{(\sum_j \bar{z}^j dz^j)(\sum_k z^k d\bar{z}^k)}{(1+|z|^2)^2}\right\}$$

また，$U(n+1)$ の $\mathbb{C}^{n+1}$ への作用は $\|Z\|^2$ を不変にするので，$\mathbb{C}P^n$ の等長変換を導く．$[L] \in \mathbb{C}P^n$ に対して，$L \subset \mathbb{C}^{n+1}$ は直線である．この直線に対して

$$s|_L = \mathrm{id}, \quad s|_{L^\perp} = -\mathrm{id}$$

として $\mathbb{C}^{n+1}$ での L に対する鏡映を考える．これは $U(n+1)$ の元であり，$\mathbb{C}P^n$ の等長変換 σ を与える．そして $[L]$ が固定点であり，$d\sigma([L]) = -\mathrm{id}$ となる．よって $\mathbb{C}P^n$ は対称空間である．

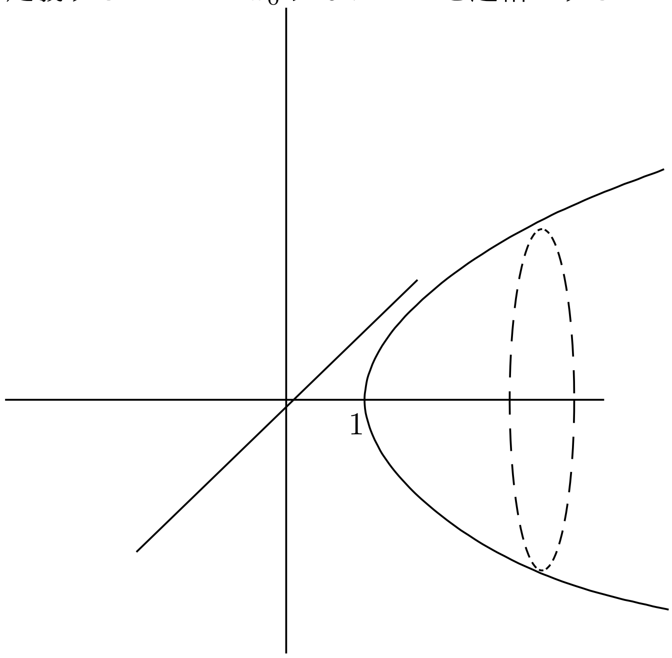
Example 2.1.5. 双曲空間 H^n を考える．$\mathbb{R}^{1,n}$ を内積が

$$(x, x) = -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

となるローレンツ空間とする．このとき

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{1,n} \mid (x, x) = -1, x_0 > 0\}$$

と定義する．ここで $x_0>0$ は H^n を連結にするための条件である．



ある点 p での接空間を求めよう．x を通る H^n 内の曲線 γ_t に対して $(\gamma_t,\gamma_t)=-1$ であるので，微分して $(x,\gamma'(0))=0$ となる．そこで $n(x)=x$ という H^n 上の法ベクトル場を考えると，

$$\mathbb{R}^{1,n}=n(x)\oplus T_xH^n,\quad \text{直交直和}$$

となる，$(x,x)=-1$ であるので T_xH^n に $\mathbb{R}^{1,n}$ の内積を制限すれば正定値内積である．よって，リーマン計量が入るので，この**リーマン多様体** H^n **を双曲空間**と呼ぶ．

$O(1,n)$ は $\mathbb{R}^{1,n}$ の内積を保存する変換全体の群である．x_0 軸の向きを変えない変換全体の群 $O^+(1,n)$ は（$O(1,n)$ の部分群）H^n に推移的に等長に作用する（正規直交基底が $O(1,n)$ で写りあうので）．また球面のときと同様に**測地線は** H^n **と原点を通る 2 次元平面との交わり**である．さらに**断面曲率が** -1 **となる**こともわかる（例 *2.6.10* を参照）．

$O^+(1,n)$ が推移的に等長に作用するので，対称空間であることをみるには，点 $(1,0,\cdots,0)$ で考えればよい．

$$\sigma(x_0,\cdots,x_n)=(x_0,-x_1,\cdots,-x_n)$$

とすれば，$\sigma\in O^+(1,n)$ であり，$\sigma(p)=p$ かつ $d\sigma(p)=-\mathrm{id}$ であるので対称空間である．

Exercise 2.1.6. $\sigma_p(x)=-x+2(x,p)_{1,n}p$ であることを示せ．

この双曲空間のポアンカレ模型を考えてみる．

$$B^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n|\sum x_i^2<1\}$$

として，計量を

$$g = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}\sum dx^i dx^i$$

で入れる．また $B^n \ni (x_1, \cdots, x_n) \to (y_0, y_1, \cdots, y_n) \in H^n \subset \mathbb{R}^{1,n}$ を

$$y_0 = \frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}, \quad y_i = \frac{2x_i}{1-|x|^2}$$

とすれば，

$$y_0 > 0, \quad -y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2 = \frac{-1-|x|^4-2|x|^2+4|x|^2}{(1-|x|^2)^2} = \frac{-(1-|x|^2)^2}{(1-|x|^2)^2} = -1$$

をみたす．逆写像は

$$x_i = \frac{y_i}{1+y_0}$$

とすればよい．このように，$H^n = B^n$（微分同相）であり，等長同型であることもわかる（H^n の局所座標は B^n で入れればよい）．また，原点 $0 \in B_n$ における点対称は $\sigma_0(x) = -x$ である．

Example 2.1.7. コンパクトリー群 G を考える．G には左作用で不変な計量がはいる．それを平均化して右不変な計量が入る．右作用と左作用は可換なので，左 G 作用，右 G 作用で不変な計量がはいる．単位元での点対称は $\sigma_e(g) = g^{-1}$．実際，$\sigma_e(e) = e$, $d\sigma_e(v) = -v$（$\forall v \in T_e(G)$）．σ_e が等長変換であることを確かめよう．単位元 e で等長であることは明らか．次に点 g で見てみる．まず，$\sigma_e \circ L_g(e) = g^{-1} = R_{g^{-1}} \circ \sigma_e(e)$ であるので，

$$(d\sigma_e)_g \circ (dL_g)_e = (dR_{g^{-1}})_e \circ (d\sigma_e)_e \ : T_e(G) \to T_{g^{-1}}(G)$$

となる．$(d\sigma_e)_g = (dR_{g^{-1}})_e \circ (d\sigma_e)_e \circ ((dL_g)_e)^{-1} \ : T_g(G) \to T_{g^{-1}}(G)$ となるが，dR, dL, $d\sigma_e$ は等長であるので $(d\sigma_e)_g$ は点 g において等長である．

Exercise 2.1.8. $h \in G$ における点対称が $\sigma_h(g) = hg^{-1}h$ となることを確かめよ．

Proof. $L_h : G \to G$ を使って，h を e に戻して，σ_e を施して，再び h に戻すことによる（$(h,e)e = hee^{-1} = h$ であるので，$\sigma_h = (h,e)\sigma_e(h,e)^{-1} = L_h\sigma_e L_{h^{-1}}$）．つまり，

$$\sigma_h(g) = L_h \circ \sigma_e \circ L_{h^{-1}}(g) = h(h^{-1}g)^{-1} = hg^{-1}h$$

となる（$d\sigma_h = dL_h d\sigma_e dL_{h^{-1}} = dL_h(-\mathrm{id})dL_h^{-1} = -\mathrm{id}$）．

□

2.2　リーマン対称空間の基本性質

さて，以下で対称空間の性質を見ていく．連結は仮定しておく．

2.2.1　基本的性質

Lemma 2.2.1. (M,g) を対称空間とする．$\sigma_p : M \to M$ は p を通る測地線を保存する．そこで $c : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ が $c(0)=p$ となる測地線とすれば．$\sigma_p(c(t)) = c(-t)$ となる．（この意味で点対称を測地対称変換ともいう）．

Proof. 等長変換であるので測地線を測地線にうつす．そこで上のような測地線 c に対して，

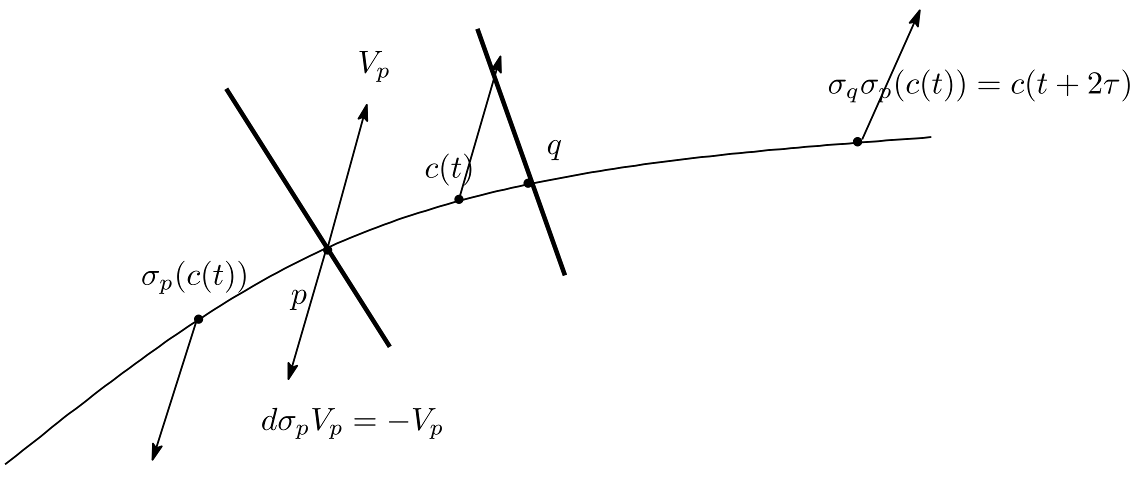
$$d\sigma_p(c'(0)) = -c'(0)$$

となる．測地線は初期点と初期方向で唯一つに定まるのであった．また $c(t)$ を測地線とすれば,$c(\lambda t)$(λ は定数)も測地線である．特に,$c(-t)$ は測地線であり,$\frac{d}{dt}c(-t)|_{t=0} = -c'(0)$ であるので，$\sigma_p(c(t)) = c(-t)$ となる． □

Lemma 2.2.2. c を M の測地線とする．$c(0)=p$, $c(\tau)=q$ とすると，

$$\sigma_q\sigma_p(c(t)) = c(t+2\tau)$$

となる．また $v \in T_{c(t)}M$ に対して $d\sigma_q d\sigma_p(v) \in T_{c(t+2\tau)}M$ は v を c に沿った平行移動によって $c(t+2\tau)$ 上へ移したものである．



Proof. まず測地線 $c(t)$ とは $\nabla_{c'(t)}c'(t) = 0$，つまり測地線方程式を満たす．その方程式をみれば $c(at)$, $c(t+b)$ も測地線になることがわかる．そこで $\tilde{c}(t) := c(t+\tau)$ とすると，

これは測地線であり $\tilde{c}(0) = q$ となる．よって

$$\begin{aligned}\sigma_q\sigma_p(c(t)) &= \sigma_q(c(-t)) = \sigma_q(\tilde{c}(-t-\tau)) \\ &= \tilde{c}(t+\tau) = c(t+2\tau)\end{aligned}$$

となる．$v \in T_pM$ として，V を c に沿った平行ベクトル場で $V_p = v$ を満たすものとする．σ_p は等長変換であるので $d\sigma_p(V)$ も平行ベクトル場である．そして $d\sigma_p V_p = -V_p$ となる．よって $d\sigma_p(V)$ は $-v$ を平行移動したものであり $-V$ である．よって

$$d\sigma_p V_{c(t)} = -V_{c(-t)}$$

が成立する．同様にして

$$d\sigma_q d\sigma_p V_{c(t)} = V_{c(t+2\tau)}$$

となる． □

上の補題では $c(t)$, $c(t+2\tau)$ が定義されるような t に対して成立する．例えば，t が定義される範囲が $(-\epsilon, \epsilon)$ であるとすると，$q = c(\tau)$（$|\tau| < \epsilon$）に対して, 上の補題を使えば，c は $c(t+2\tau)$ まで伸ばせる．これを繰り返せば，t は $\mathbb{R}$ 上全体へ拡張できることがわかる．よって，

Corollary 2.2.3. 対称空間は測地的完備である．つまり測地線はパラメータ $\mathbb{R}$ の両方の方向に無限の伸ばせる．

測地線や完備性に対する有名な Hopf-Rinow の定理を使えば（対称空間が連結は仮定）

Corollary 2.2.4. 対称空間では，任意の二点は測地線で結べる．

Remark 2.2.1. Hopf-Rinow の定理とは，次が同値であること．

- (M, g) が点 p で測地的完備（p からの測地線が完備）
- (M, g) が測地的完備
- p を固定して，任意の $r > 0$ に対して $\bar{B}_r(p) = \{q \in M | d(p, q) \le r\}$ がコンパクト．
- 任意の p と任意の $r > 0$ に対して $\bar{B}_r(p)$ がコンパクト．
- (M, g) が距離空間として完備（コーシー列は収束列）

このとき，(M, g) を完備リーマン多様体とよぶ．さらに，完備リーマン多様体なら任意の２点は測地線で結べる．例えば，(M, g) がコンパクトリーマン多様体なら完備である．

Corollary 2.2.5. 対称空間上で，点対称 σ_p は唯一つに決まる．また $\sigma_p^2 = \mathrm{id}$ であり，p は σ_p は孤立固定点である．

Proof. 今まで見てきたことから，$\sigma_p : M \to M$ 等長，$\sigma_p(p) = p$, $d\sigma_p(p) = -\mathrm{id}$ となるものがあれば，p を通る測地線上で向きを反対にするものである．そこで p と任意の点が測地線で結べるので，σ_p は一つしかない．

また $\sigma_p^2 = \mathrm{id}$ であること，p が孤立固定点であることも明らかである（ただし σ_p の固定点は一つとは限らない）． □

Remark 2.2.2. 上の命題から対称空間は次のように定義してもよい．リーマン多様体で任意の点 p に対して等長同型 $\sigma_p : M \to M$ で $\sigma_p^2 = \mathrm{id}$ であり，p は σ_p は孤立固定点であるものが存在.

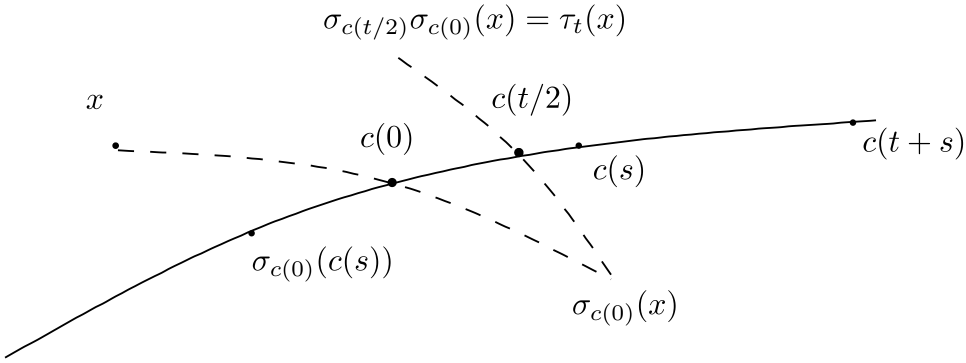
なぜなら $\sigma_p^2 = \mathrm{id}$ かつ p が固定点であるとする．このとき $d\sigma_p(p) = \pm\mathrm{id}$ になるが p が孤立固定点なので $d\sigma_p(p) = -\mathrm{id}$ となる．

Definition 2.2.1. M を対称空間とする．$c : \mathbb{R} \to M$ を測地線とする．このとき

$$\tau_t := \sigma_{c(t/2)} \circ \sigma_{c(0)}$$

を c に沿って t だけ移動する変換とよぶ（c による移換ともいう）．また，この τ_t は $c(s)$ を $c(s+t)$ へ移し，$d\tau_t$ は $c(s)$ から $c(s+t)$ への c に沿った平行移動を与える．

Proof. 補題 2.2.2 から $\sigma_{c(t/2)} \circ \sigma_{c(0)}(c(s)) = c(s + 2 \times t/2) = c(s+t)$ である．平行移動であることも補題 2.2.2 からわかる． □

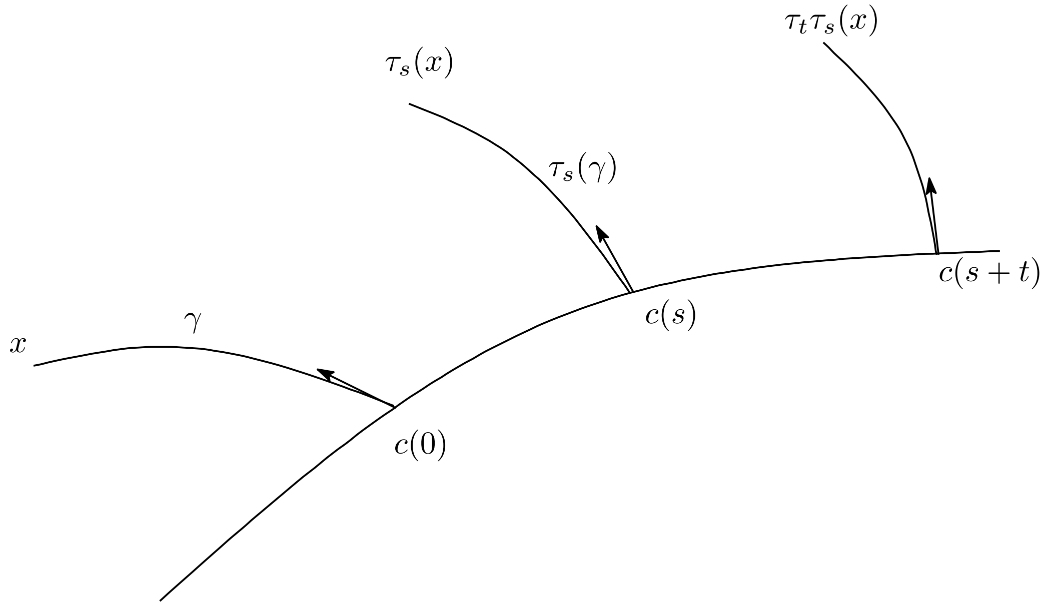


この変換の意味は次の補題の証明をみればわかるであろう．

Lemma 2.2.6. $\tau_{t+s} = \tau_t\tau_s$ となる．特に τ_t は等長 1 パラメータ変換群である．

Proof. $x \in M$ と $c(0)$ を測地線で結ぶ．それを $\gamma(0) = c(0)$, $\gamma(1) = x$, $\gamma'(0) = v$ とする．τ_s は isometry であるので測地線を測地線へ移す．始点は $c(s)$ であり，初期ベクトルが $d\tau_s(v)$ となる測地線である．さらにこれを τ_t で移せば，始点が $c(s+t)$ で，初期ベクトルが $d\tau_t d\tau_s(v)$ となるものであるが，v を c に沿って平行移動したものである．一方 τ_{t+s} は測地線 γ を始点が $c(t+s)$ で初期ベクトルが v を c に沿って平行移動したものに移す．

よって τ_{t+s} と $\tau_s\tau_t$ は測地線 γ を同じ測地線にうつすので，$\tau_{t+s}(x)=\tau_s\tau_t(x)$ となる．x は任意でよいので，$\tau_{t+s}=\tau_s\tau_t$ となる． □



一般のリーマン多様体では等長変換群は推移的に作用するわけではないが，対称空間なら推移的に作用することをみてみよう．

G を対称空間 M の等長変換全体の群．G_0 は次の G の部分集合とする．

$$G_0 := \{g_t \mid t\in\mathbb{R}, g_t \text{ は 1 パラメタ群 }\}.$$

つまり G_0 はすべての 1 パラメータ群を集めたもの．例えば τ_t は G_0 に入る．

Theorem 2.2.7. G_0 は M に推移的に作用している．よって等長変換群 G およびその単位元連結成分も M に推移的に作用している．特に M は等質空間である．また，点 p の点対称を σ_p とすれば，点 $q=gp$（$\exists g\in G$）の点対称は $\sigma_q=g\sigma_p g^{-1}$ となる．

Proof. M 内の任意の二点 p,q は測地線で結べるのであった．それを c とする（$c(0)=p, c(s)=q$）．今 τ_t を c に沿った移換とすれば

$$q=c(s)=\tau_s(c(0))=\tau_s(p)$$

である．よって G_0 は M に推移的に作用する．

任意の点 $q=gp$（$\exists g\in G$）の点対称は $\sigma_q=g\sigma_p g^{-1}$ となることを証明する．$(g\sigma_p g^{-1})^2=\mathrm{id}$ であり，$((dg)(d\sigma_p)(dg)^{-1})_q=-\mathrm{id}$ である．また $g\sigma_p g^{-1}$ は等長である．点対称は一つしかないので $\sigma_q=g\sigma_p g^{-1}$ となる． □

Corollary 2.2.8. 測地線 $c(t)$ に沿った移換を τ_t とする．測地線 $g(c(t))$ に沿った移換は $g\tau_t g^{-1}$ となる．

Proof. $\tau_t = \sigma_{c(t/2)}\sigma_{c(0)}$ であった．そこで，

$$\sigma_{g(c(t/2))}\sigma_{g(c(0))} = g\sigma_{c(t/2)}g^{-1}g\sigma_{c(0)}g^{-1} = g\tau_t g^{-1}$$

となる． □

Definition 2.2.2. $p \in M$ を固定して，$G_p = \{g \in G \mid gp = p\}$ を点 p でのイソトロピー群とよび，K で書く．

Theorem 2.2.9. 対称空間 M の等長変換群はリー群であり，そのリー環を $\mathfrak{g}$ とする．さらにそのイソトロピー群 K はコンパクト群である．また点 p でのホロノミー群 $Hol(p, M)$ は K に含まれる．つまり $Hol(p, M) \subset K$.

Proof. 一般にリーマン多様体の等長変換群は（有限次元）リー群である．この証明は省略（小林野水に証明がある）．写像 $F : G \ni g \to gp \in M$ を考えると，$K = F(p)^{-1}$ である．よって，K は G の閉部分群である．また，$k \in K$ に対して，$kp = p$ であるので，

$$dk_p : T_p(M) \to T_p(M), \quad g(dk_p v, dk_p w) = g(v, w)$$

という写像を引き起こし，$K \to O(T_p(M))$ という準同形を得る．これをイソトロピー表現とよぶ．いま G は等長変換群であるので M への作用は効果的である（g の M への作用が id となるものは単位元 e だけ）．よって，$K \to O(T_p(M))$ は埋め込みである．$O(T_pM)$ はコンパクトであるので，その閉部分群である K はコンパクト群になる．

次に，ホロノミー群について見ていく．ホロノミー群は点 p からの閉曲線にそった平行移動が作る群（$\subset GL(T_p(M))$）である．閉曲線 γ を区分的滑らかな測地線 γ_n で近似しておく．このとき，各測地線にそった平行移動は $d\tau_t$ である．それらを合わせたもは点 p を p に移すある等長変換 g_n の微分 $d(g_n)_p$ として書ける．よって，$g_n \in K \subset O(T_p(M))$ に含まれる．K はコンパクトであったので，$\gamma_n \to \gamma$ のとき g_n は収束部分列をもち，γ に対する平行移動 $g \in K$ に収束．よって，ホロノミー群は K に含まれる． □

Remark 2.2.3. リーマン多様体 M の主 $O(n)$ 束 $\mathbf{O}(M)$ を考える．g は等長変換群なので微分写像 dg は $\mathbf{O}(M)$ の主束同型となる．このとき主束の勝手な点 q を固定して $G \ni g \mapsto dg(q) \in \mathbf{O}(M)$ とすれば，これが埋め込みになり等長変換群は閉部分多様体になることが知られている（see. 酒井「リーマン幾何」）．よって，リーマン多様体 M がコンパクトなら等長変換群 G もコンパクトであることがわかる．

Corollary 2.2.10. M を単連結でリーマン多様体として既約なら，イソトロピー表現は既約表現である．

Proof. K が可約とする．つまり K の T_pM への表現が $V_1 \oplus V_2$ と分解するとする．先ほど述べたように $Hol_p \subset K$ であったので，ホロノミー群に対しても可約になる．ドラームの分解定理より，M 単連結なので，これはリーマン多様体として可約であることを意味するので矛盾． □

Remark 2.2.4. イソトロピー既約としても，リーマン多様体として可約ということは起こりえる．例えば，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n = E(n)/O(n)$（ここで $E(n)$ はユークリッド群）．

しばしばイソトロピー既約という条件をつけるが，上のようにリーマン多様体として既約ということより，より一般的な条件である．

2.3　例

対称空間の例をいくつか挙げる．

Example 2.3.1 (ユークリッド空間)**.** ユークリッド空間はリーマン対称空間であった．この等長変換群は平行移動と直交変換群の半直積群 $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ であるユークリッド群 $E(n)$ である．つまり $(A,b) \in O(n) \times \mathbb{R}^n$ に積を

$$(A,b)(A',b') = (AA', Ab' + b)$$

として入れたものである．また，原点でのイソトロピー群は $O(n)$ であり，$E(n)/O(n) = \mathbb{R}^n$．また $\sigma_p = (-I, 2p)$ である．もちろん点対称が生成する群は $E(n)$ より小さい．

ユークリッド群は次のようにして定義してもよい．

$$E(n) = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \alpha \in O(n), \beta \in \mathbb{R}^n\} \subset GL(n+1, \mathbb{R})$$

$\mathbb{R}^n$ への作用のさせ方は

$$\mathbb{R}^n \ni v \mapsto \alpha v + \beta$$

で定義する．このときイソトロピー群は

$$K = \{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \alpha \in O(n)\} \cong O(n)$$

となる．

Example 2.3.2 (球面)**.** S^n を考える．北極 $(1, 0, \cdots, 0) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ のイソトロピー群は $O(n)$ である．また等長変換群は $O(n+1)$ であるので，$S^n = O(n+1)/O(n)$ となる．また点 $(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n$ での点対称は $\sigma_x(y) = -y + 2(x,y)x$ となる．さらに点対称全体が生成する群が $O(n+1)$ となる（ただし $n = 2m$ なら $SO(n+1)$ を生成）．

Lemma 2.3.3. $y = (y_1, \cdots, y_{n+1}) \in S^n$，$y \neq e_{n+1}$ とすると，

$$(-2x_1x_{n+1}, \cdots, -2x_nx_{n+1}, 1 - 2x_{n+1}x_{n+1}) = y$$

となる $x \in S^n$ が存在する．さらに，$x_{n+1} > 0$ なら x は y に対して一意に定まる．

Proof. $x_{n+1} > 0$ とすれば．$1 - 2x_{n+1}^2 = y_{n+1}$ より，$x_{n+1} = \frac{\sqrt{1-y_{n+1}}}{\sqrt{2}}$ とする．さらに，$x_k = -\frac{y_k}{2x_{n+1}} = -\frac{y_k}{\sqrt{2(1-y_n)}}$ とすればよい． □

Proposition 2.3.4. $A \in O(n+1)$ とすれば，いくつかの鏡映の積でかける．また $A \in SO(n+1)$ は偶数個の鏡映の積でかける．

Proof. 帰納法で示す．$O(1) = \{-1, 1\}$ は -1 で生成できることはあきらか．次に，$O(k-1)$ の元が鏡映の積で書けるとする．$A = (a_1, \cdots, a_k) \in O(k)$ として，

$$A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対しては仮定から鏡映の積で書ける．A が上の形をしていないときは，$a_k \neq e_k$ であるので，補題の x に対する鏡映を D_x（$D_x(z) = z - 2(x, z)x$）の行列表示は，

$$D_x = I - 2(x_ix_j)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - 2x_1^2 & -2x_1x_2 & \cdots & -2x_1x_k \\ -2x_2x_1 & 1 - 2x_2^2 & \cdots & -2x_2x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x_kx_1 & \cdots & \cdots & 1 - 2x_kx_k \end{pmatrix}$$

となり，最後の行は a_k となる．そこで，$(a_i, a_k) = \delta_{ik}$ 及び $D_x^{-1}A \in O(k)$ を用いれば，

$$D_x^{-1}A = D_x^t(a_1, \cdots, a_k) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．よって仮定が使えば，直交行列が鏡映の積で書けることが示せた． □

さて，点対称は，その点に対する鏡映のマイナス倍である．$n = 2m$ の場合には，$-\sigma_x \in SO(n+1)$．$n = 2m+1$ の場合には，$-\sigma_x \in O(n+1)$ となる．そこで，点対称が生成する群は $n = 2m$ なら $SO(n+1)$ であり，$n = 2m+1$ なら $O(n+1)$ である．

Example 2.3.5 (双曲空間)**.** （実）双曲空間 H^n に対する等長変換は $O^+(1, n)$ である，またイソトロピー群は $O(n)$ である．よって，$O^+(1, n)/O(n) = H^n$．または $SO^+(1, n)/SO(n) = H^n$ と考えてもよい．

Example 2.3.6 (双曲平面)**.** H^2 の上半平面モデルを考える．つまり $H_+ = \{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\}$ である．これは，円板モデル $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ との対応は，

$$H_+ \in z \mapsto \frac{z - i}{z + i} \in D, \quad D \ni w \mapsto \frac{1 + w}{1 - w} \in H_+$$

である．計量の対応は，

$$ds^2_{H_+} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}, \quad ds^2_D = \frac{dx^+ dy^2}{(1-\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

である．

次に，$O^+(1,2)$ の連結成分 $O^+_0(1,2)$ の 2 重被覆が $SL(2,\mathbb{R})$ と同型であることがわかる．つまり，

$$PSL(2,\mathbb{R}) := SL(2,\mathbb{R})/\{\pm 1\} \cong O^+_0(1,2)$$

となる．

Proof.

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{X = \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix} | x,y,z \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^3$$

とする．このとき $-\det(X) = x^2+y^2-z^2$ となり $\mathbb{R}^{1,2}$ と同一視できる．このとき随伴表現を考えると $\det(gXg^{-1}) = \det(X)$ であり，$(x,y,z) = (0,0,1)$ の方向を変えない．また，$SL(2,\mathbb{R})$ は連結であるので，

$$\mathrm{Ad} : SL(2,\mathbb{R}) \mapsto O^+_0(1,2)$$

となることがわかる．また，この微分写像を考えるとリー環の同型を与える．$g \in O^+_0(1,2)$ に対して，$g = \exp X$ となる $X \in \mathfrak{o}(1,2)$ が取れるので（後で一般論を示す）．Ad は全射となる．さらに，$\ker = \{\pm 1\}$ となるので二重被覆となる． □

そこで，$SL(2,\mathbb{R})$ を次のように作用させる．

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} z = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

このとき

$$\begin{aligned} \Im \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} &= \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} - \frac{\alpha \bar{z}+\beta}{\gamma \bar{z}+\delta} \\ &= \frac{(\alpha z+\beta)(\gamma\bar{z}+\delta) - (\alpha\bar{z}+\beta)(\gamma z+\delta)}{(\gamma z+\delta)(\gamma\bar{z}+\delta)} \\ &= \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z-\bar{z})}{|\gamma z+\delta|^2} = \frac{\Im z}{|\gamma z+\delta|^2} > 0 \end{aligned}$$

となるので *well-defined* である．

Exercise 2.3.7. $SL(2,\mathbb{R})$ の H^2 への作用 Ad が，H_+ の上で述べた一次分数変換になることを示せ．また，等長変換となることを示せ．

$i=\sqrt{-1}\in H_+$ の点対称は $\sigma_i(z)=-\frac{1}{z}$ となる．
このとき $z=i\in H_+$ のイソトロピー群は

$$\frac{\alpha i+\beta}{\gamma i+\delta}=i\Rightarrow \alpha i+\beta=-\gamma+\delta i$$

なので $\alpha=\delta,\ \beta=-\gamma$ となる．つまり，

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})$$

となるので，$K=SO(2)$ である．このように $H=SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ となる．

Example 2.3.8 (コンパクトリー群)**.** コンパクトリー群には左 G 作用，右 G 作用で不変な計量が入るのであった．そこで，等長変換の部分群としては，$G\times G$ を考える．このときイソトロピー群は G である．そして $G=G\times G/diag(G)$ となる．

Example 2.3.9 (グラスマン多様体)**.** $\mathbb{R}^n$ 内の実 k 次元部分空間の全体である**グラスマン多様体** $G_k(\mathbb{R}^n)$ を考える．$O(n)$ は推移的に作用し，$\mathbb{R}^k$ のイソトロピー群は $O(k)\times O(n-k)\subset O(n)$ である．また，このとき $E\in G_k(\mathbb{R}^n)$ における点対称 σ_E は E に関する鏡映である（つまり E 上では固有値 1 で，$E^\perp$ で -1 となるような変換のこと．この鏡映で，ある k 次元部分空間を別の k 次元部分空間へうつす）．

もう少し詳しくみていこう．まず，$S(n)$ を $n\times n$ の実対称行列全体とする．**このとき** $G_k(\mathbb{R}^n)$ **を** $S(n)$ **へ埋め込める．** $E\in G_k(\mathbb{R}^n)$ に対して，$p_E:\mathbb{R}^n\to E$ を直交射影行列とする．直交射影なので p_E は対称行列である．そして，

$$G_k(\mathbb{R}^n)=\{p\in S(n)|p^2=p,\quad \mathrm{tr}\,p=k\}$$

となる．実際，$p_E\in G_K(\mathbb{R}^n)$ は明らか．逆に，上のような直交射影行列に対して，その像の k 次元部分空間を考えればよい．また，この空間 $p\in G_K(\mathbb{R}^n)$ に対して，p は対称行列で，固有値は 1 が k 個，0 が $n-k$ 個であるので，$g\in O(n)$ が存在して，

$$gpg^{-1}=p_0=\begin{pmatrix}I_k & 0\\ 0 & 0_{n-k}\end{pmatrix}$$

となる．**つまり** p_0 **の** $O(n)$**-軌道がグラスマン多様体** $G_k(\mathbb{R}^n)$ **である．** また p_0 のイソトロピー群は $O(k)\times O(n-k)$ であるので，

$$O(n)/O(k)\times O(n-k)$$

また $T_I(O(k)\times O(n-k))\subset T_I(O(n))$ の補空間は

$$\begin{pmatrix}0 & -L^t\\ L & 0\end{pmatrix},\quad L\in\mathbb{R}^{(n-k)\times k}$$

である．よって，$\dim G_k(\mathbb{R}^n) = k(n-k)$ である．

$S(n)$ 上の内積 $\langle x, y\rangle = \mathrm{tr}\,(x^t y) = \mathrm{tr}\,(xy)$ を $S(n)$ の部分多様体である $G_k(\mathbb{R}^n)$ へ制限することにより，グラスマン多様体に計量が入る．さらに $O(n)$ の作用で不変である．実際，

$$\mathrm{tr}\,(gxg^{-1}gyg^{-1}) = \mathrm{tr}\,(gxyg^{-1}) = \mathrm{tr}\,xy$$

となる．つまり $O(n)$ は $G_k(\mathbb{R}^n)$ へ等長に作用している．$v \in T_E(G_k(\mathbb{R}^n))$ とする．v を与える曲線を $p(t)$ としておく．このとき

$$p(t)^2 = p(t)$$

であるので，これを微分すれば，

$$p_E v + v p_E = v \Rightarrow v p_E = (I - p_E)v = p_{E^\perp} v$$

となる．よって $v : E \to E^\perp$ という線形写像を与える．そしてそのような線形写像の次元は $k(n-k)$ である．つまり $T_E(G_k(\mathbb{R}^n))$ は $\mathrm{Hom}(E, E^\perp) = \{v | v : E \to E^\perp\}$ と同一視できる．

点 E または p_E での点対称を求めよう．ρ_E を E に対する鏡映とする．そして，$\sigma_E(p) = \rho_E p \rho_E$ とする．$\sigma_E \in O(n)$ であるので等長変換である．また，$\rho_E p_E \rho_E = p_E$ であるので p_E が固定点である．また $v \in T_E(G_k(\mathbb{R}^n))$ は $v : E \to E^\perp$ とみなせた．そして ρ_E は E に対する鏡映であるので，$d\rho_E(x) = -x$ となる．よって，σ_E が点対称となる．

また，$S(n)$ をエルミート行列に変えれば $G_k(\mathbb{C}^n) = U(n)/U(k) \times U(n-k)$ を，四元数エルミート行列にすれば，$G_k(\mathbb{H}^n)$ を得る（$Sp(n)/Sp(k) \times Sp(n-k)$）．

Remark 2.3.1.
1. G を連結にしたい場合には，$SO(n)/S(O(k) \times O(n-k))$ ともできる
2. 複素グラスマン多様体に対して，$U(n)$ より小さいリー群 $SU(n)$ も推移的に作用し，$SU(n)/S(U(k) \times U(n-k))$ と表せる．
3. $\mathbb{R}^n$ の向き付きの k 次元部分空間全体を考えることができ, それは向きづけられたグラスマン多様体とよび, 対称空間となる．その場合には $SO(n)/SO(k) \times SO(n-k)$ となる．また，これは普通のグラスマン多様体の 2 重被覆となっている．例えば，$S^n \to \mathbb{R}P^{n-1}$ である．

Example 2.3.10 (グラスマン多様体その 2)．グラスマン多様体を次のようにしても得ることが出来る．k 次元空間 E に対する鏡映を s_E とする．つまり E 上で固有値 1 で $E^\perp$ 上で -1 となるものである．先ほどの射影行列との対応は，

$$s_E + I = 2p_E$$

となる．そこで，$gs_E g^{-1} + I = 2gp_E g^{-1}$ となるので，$gp_0 g^{-1}$ に対応する鏡映は，$gs_0 g^{-1}$ である．また，$(gs_0 g^{-1})^t = gs_0^t g^t = gs_0 g^{-1}$．また，鏡映は直交行列である．実際，すべての**鏡映の全体** $R(n)$ **は直交行列と対称行列の共通部分**である．

$$R(n) = O(n) \cap S(n) \subset O(n)$$

Proof. $R(n) \subset O(n) \cap S(n)$ はすでに見た．逆に $s \in O(n) \cap S(n)$ とすれば，$s^{-1} = s^t = s$ となるので，$s^2 = \mathrm{id}$ であり，鏡映となる． □

また，グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ は，$\mathrm{tr}\,(gs_0 g^{-1}) = \mathrm{tr}\, s_0 = k - (n-k) = 2k - n$ であるので，

$$G_k(\mathbb{R}^n) = R(n)_k = \{s \in R(n) | \mathrm{tr}\,(s) = 2n - k\}$$

となる．ここで，$\mathrm{tr}\,(s) = 2n - k$ より，固定する部分空間が k 次元となる鏡映となる．また，$R(n)_k \subset O(n) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ とみて，$\mathbb{R}^{n \times n}$ の内積 $\mathrm{tr}\, x^t y$ を $R(n)_k$ へ制限することにより，リーマン計量を入れることができる．

接空間を考えよう．$s_E \in R(n)_k$ に対して，$T_{s_E} R(n)_k \subset T_{s_E} O(n) \cap S(n) = s_E A(n) \cap S(n)$（$A(n)$ は交代行列全体）．そこで，$v \in T_{s_E} R(n)_k$ とは，$v = s_E a$（$a \in A(n) \cap S(n)$）となり，$(s_E a)^t = a^t s_E^t = -as_E$ であるので，また，$v = s_E a \in S(n)$ であるので，$s_E a = -as_E$ を得る．このように，a は s_E の固有空間 $E, E^\perp$ を入れ替える写像であり，$v = s_E a$ も固有空間 $E, E^\perp$ を入れ替える．あとは次元を考えれば，$T_s R(n)_k \cong \mathrm{Hom}(E, E^\perp)$ を得る．

点対称は，s_E における点対称 σ_E は，$p \in R(n)_k$ に対して，$\sigma_E(p) = s_E p s_E = s_E p s_E^{-1} \in R(n)_k$ となる．

Remark 2.3.2. 上のようにグラスマン多様体を定義したのは次の理由による．

$O(n)$ は対称空間であり，点対称は $\sigma_h(g) = hg^{-1}h = hg^t h$ で与えられた．ここで $\mathbb{R}^{n \times n}$ の内積 $(x, y) = \mathrm{tr}\, x^t y$ から導かれるリーマン計量を $O(n)$ にいれておく．このとき，等長変換

$$O(n) \ni x \mapsto x^t \in O(n)$$

を考える（等長であることは $\mathbb{R}^{n \times n}$ の内積が不変であることからわかる）．等長変換の固定点集合は全測地的部分多様体の disjoint union となる．対称空間内の全測地的部分多様体は再び対称空間となることが知られている（定理 2.8.1）．また，点対称は制限すれば得られる．よって，$R(n) = O(n) \cap S(n)$ は上の等長変換の固定点であり，全測地的部分多様体の直和であり，各成分は対称空間となる．そして，点対称は

$$\sigma_s : R(n) \ni x \mapsto sx^t s = sxs \in R(n)$$

となる．

Example 2.3.11 ($\mathbb{R}^n$ 上の複素構造)**.** S を $\mathbb{R}^n$（$n = 2m$）上の直交複素構造全体とする．つまり

$$S = \{j \in GL(n,\mathbb{R}) | j^2 = -\mathrm{id}, jj^t = \mathrm{id}\}$$

のことである．$-j = j^{-1} = j^t$ であるので，S は交代行列全体 $A(n)$ の部分集合である．特に，

$$S = O(n) \cap A(n) = \{j \in A(n) | j^2 = -\mathrm{id}\}$$

となる．任意の $j \in S$ は，直交行列であり固有値は $\pm\sqrt{-1}$ である．よって，$\forall j \in S$ に対して，$g \in O(n)$ が存在して，

$$gjg^{-1} = j_0 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

とすることが可能である．つまり，S は j_0 の $O(n)$ 軌道（$\subset A(n)$）である：

$$\mathrm{Ad}(O(n))j_0 = S$$

よって，S は部分多様体であるので，$A(n)$ の内積

$$\langle x, y\rangle = \mathrm{tr}\,(x^t y) = -\mathrm{tr}\,(x, y), \quad x, y \in A(n)$$

を S へ制限すれば，S はリーマン多様体になる．そして $O(n) = O(2m)$ が等長に作用する．また，j_0 におけるイソトロピー群は $U(m) \cong \{g \in O(2m) | gj_0 = j_0 g\}$ となる．以上から，

$$S = O(2m)/U(m)$$

となる．また次元は $\dim O(2m) = 2m(2m-1)$ であり，$\dim U(m) = m(m-1)$ であるので，$4m^2 - 2m - m^2 + m = 3m^2 - m = m(3m-1)$ となる．

接空間をもとめよう．$j(t) \in S$ とすれば，$j(t)^2 = -\mathrm{id}$, $j(t) = -j(t)^t$ を満たすので，$vj + jv = 0$, $v = -v^t$ となる．よって次元を考えると，

$$T_j S = \{v \in A(n) | jv + vj = 0\}$$

となることがわかる（$T_j U(m) = \{v \in A(n) | jv = vj\}$ の補空間であることに注意）．

また，点対称は $\sigma_j(k) = jkj^{-1}$ である．実際，j を固定点にもち，$v \in T_j S$ に対して，$d\sigma_j(v) = jvj^{-1} = -vjj^{-1} = -v$ となる．

Example 2.3.12 ($\mathbb{C}^n$ 上の四元数構造)**.**

Definition 2.3.1. $\mathbb{C}^{2m}$ 上の四元数構造とは，歪線形同型 $\mathbf{j}:\mathbb{C}^{2m}\to\mathbb{C}^{2m}$ で，$\mathbf{j}^2=-1$ を満たすものである．さらに，$\mathbb{C}^{2m}$ にエルミート計量を入れたとき，エルミート計量を保つ四元数構造を四元数エルミート構造とよぶ．つまり，$(v,w)=\overline{(\mathbf{j}_0 v,\mathbf{j}_0 w)}$.

$\mathbb{C}^n=\mathbb{C}^{2m}$ 上の複素シンプレクティック構造

$$j_0=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}&&\\&\ddots&\\&&\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

を考える．このとき

$$\mathbf{j}_0: v\mapsto \overline{j_0 v}$$

は，複素歪線形写像であり，$\mathbf{j}_0^2(v)=\overline{j_0\overline{j_0 v}}=-v$ となるので，四元数構造を与える．

また，エルミート内積を次の意味で保つ．

$$(v,w)=\overline{(\mathbf{j}_0 v,\mathbf{j}_0 w)}=(\mathbf{j}_0 w,\mathbf{j}_0 v).$$

べつの見方をすれば，

$$(v,w)=(j_0 v,j_0 w)$$

といってもよい．このように $\mathbf{j}_0$ は四元数エルミート構造である．

この j_0 の $U(2m)$ 随伴軌道を考える．$j=gj_0g^{-1}$ とすれば，

$$\mathbf{j}: v\mapsto \overline{gj_0g^{-1}v}$$

は複素歪線形写像であり，

$$\overline{gj_0g^{-1}\overline{gj_0g^{-1}v}}=\bar g j_0\bar g^{-1}\bar g j_0\bar g^{-1}v=-v$$

となる．また，エルミート内積も保つことがわかるので，これも四元数エルミート構造を与える．また，

$$(gj_0g^{-1})^*=gj_0^t g^{-1}=-gj_0g^{-1},\quad (gj_0g)^2=-\mathrm{id}$$

を満たすので，

$$S=\{j\in\mathfrak{u}(2m)|j^2=-\mathrm{id}\}=U(2m)\cdot j_0$$

となる．逆に，四元数エルミート構造は軌道 $U(2m)\cdot j_0$ 上にある（歪エルミート行列で，固有値が $\pm i$ となるものであるので，ユニタリ行列により $gjg^{-1}=j_0$ とできる）.

また j_0 のイソトロピー群は $gj_0=j_0g$ となるものなので，$g\in Sp(m)$ となることがわかる．よって，

$$S=U(2m)/Sp(m)$$

また点対称は

$$\sigma_j(k) = jkj^{-1}$$

とすればよい．接空間なども前例と同様である．

Example 2.3.13 ($\mathbb{C}^n$ 上の実構造)**.** $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ 上の実構造全体を考える．**実構造は $iE \perp E$ となる実 n 次元部分空間 E に関する鏡映 κ で与えられる（$iE \perp E$ となる実部分空間を *totally real* という）**．別の言い方をすれば，複素構造 i と反可換（歪複素線形）な鏡映全体である．

Proof. 鏡映なので $\kappa^2 = \mathrm{id}$ を満たす．κ の ± 1 固有空間を $E_\pm$ とすれば，$\kappa(iv) = -i\kappa(v)$ を満たすので，$i : E_\pm \to E_\mp$ となる．そして，$E_+ \perp iE_+ = E_+ \perp E_-$ となる． □

鏡映は $(\kappa v, w) = (v, \kappa w)$ を満たすので，対称行列で実現できる．対称行列の全体を $S(2n)$ として，$\mathbb{C}^n$ 上歪複素線形な写像全体との共通部分を $S(2n)_-$ と書く．このとき，

$$S = S(2n)_- \cap O(2n) = \{\kappa \in S(2n)_- : \kappa^t\kappa = \mathrm{id}\} = \{\kappa \in S(2n) | \kappa^t\kappa = \mathrm{id},\ i\kappa = -\kappa i\}$$

となる．例えば，標準的な複素共役 $\kappa_0(v) = \bar{v}$ を考える．複素構造 i を

$$i = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

とする．このとき

$$\kappa_0 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

とすれば，$\kappa_0 i = -i\kappa_0$ を満たす．そして $\kappa_0 \in S$ となる．

さて，この空間 S には $U(n)$ が推移的に作用する（ただし $U(n) \subset SO(2n)$ とみなして）．まず，$g\kappa g^{-1} \in S$ となる．

Proof. $g \in U(n) \subset SO(2n)$ は $g^t g = \mathrm{id}$ かつ $ig = gi$ となる．よって，$(g\kappa g^{-1})^t(g\kappa g^{-1}) = g\kappa^t\kappa g^{-1} = \mathrm{id}$．また $g\kappa g^{-1} i = -ig\kappa g^{-1}$．$(g\kappa g^{-1})^t = g\kappa^t g^{-1} = g\kappa g^{-1}$．以上から $g\kappa g^{-1} \in S$ となる． □

次に推移的に作用していることを見てみる．

Proof. totally real な E の正規直交基底は $\mathbb{C}^n$ のユニタリ基底を与える．一方ユニタリ基底が張る実空間は totally real である．よって $U(n)$ が $\mathbb{C}^n$ のユニタリ基底の全体に推移的に作用するので，totally real 実部分空間全体にも推移的に作用する． □

また κ_0 におけるイソトロピー群は $O(n)$ である

Proof. κ_0 を基底の変換を行って，

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

としておく．このとき $U(n) \subset O(2n)$ は

$$A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

で与えられる．そこで，κ_0 のイソトロピー群は

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in O(2n)$$

となることがわかる．よって，$O(n)$ となる． □

以上から，

$$S = U(n)/O(n).$$

また接空間は

$$T_\kappa S = \{v \in SO(2n)_- | v\kappa + \kappa v = 0\}$$

となる．そして，点対称は

$$\sigma_\kappa(x) = \kappa x \kappa$$

となる．これは κ を保存して $T_\kappa S$ 上で

$$\kappa v \kappa = -v\kappa^2 = -v$$

であるので，$d\sigma_\kappa = -\mathrm{id}$ となる．

Example 2.3.14 (正定値対称行列). $S = P(n)$ を $n \times n$ の正定値対称行列全体とする．これは対称行列 $S(n)$ 内の開部分集合である．特に，$T_pP(n) = S(n)$ である．正定値対称行列 $p \in P(n)$ に対して，$g \in O(n)$ が存在して，$p = g(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)g^{-1}$ とできる．そこで，$\sqrt{p} := g(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})g^{-1}$ とする．また $\sqrt{p}^t = (g^{-1})^t(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})g^t$ となるので，

$$\begin{aligned} \sqrt{p}\sqrt{p}^t =& g(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})g^{-1}(g^{-1})^t(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})g^t \\ =& g(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)g^{-1} = p \end{aligned}$$

となる．そこで，$GL(n,\mathbb{R})$ の作用を

$$GL(n,\mathbb{R})\times P(n)\ni(g,p)\mapsto gpg^t\in P(n)$$

とすれば，任意の $p\in P(n)$ に対して，$g=\sqrt{p}\in GL(n,\mathbb{R})$ が存在して，$p=g\mathrm{id}g^t$ となる．よって，推移的作用であり $\mathrm{id}\in P(n)$ におけるイソトロピー群は $O(n)$ である．つまり，

$$P(n)=GL(n,\mathbb{R})/O(n)$$

となる．この空間に計量をいれよう．$T_eP(n)=S(n)$ の計量を

$$\langle v,w\rangle_e=\mathrm{tr}\,(vw)$$

とする．また点 $p=gg^t$ での計量は $\mathrm{id}=e$ へ引き戻して入れればよいので，

$$\langle v,w\rangle_p=\mathrm{tr}\,(g^{-1}v(g^{-1})^t)(g^{-1}w(g^{-1})^t)=\mathrm{tr}\,(v(g^{-1})^tg^{-1}w(g^{-1})^tg^{-1})=\mathrm{tr}\,(vp^{-1}wp^{-1})$$

つまり，

$$\langle v,w\rangle_p=\mathrm{tr}\,(vp^{-1}wp^{-1})$$

とすればよい．特に $GL(n,\mathbb{R})$ の作用は等長作用である．また，$\sigma_p(q):=pq^{-1}p$ とする．このとき p は固定点である．また微分写像は

$$d\sigma_p(v)=-p(p^{-1}vp^{-1})p=-v$$

であるので，$d\sigma_p=-\mathrm{id}$ となる．よって σ_p が点対称となる．

2.4　局所リーマン対称空間

対称空間のリーマン多様体としての性質（曲率）を調べる．そして，局所的に対称空間となる局所対称空間の概念を導入する．

Theorem 2.4.1. リーマン対称空間 M のリーマン曲率は $\nabla R=0$ を満たす．

Proof. c を測地線として，X,Y,Z,W を c にそって平行なベクトル場とする．また $p=c(t_0)$, $q=c(t+t_0)$ とする．このとき $q=\tau_t(p)$ となる（τ_t は c にそった移換）．そして $d\tau_t$ が c に沿った平行移動であった．よって，曲率は等長変換で不変であるので

$$\begin{aligned}g(R(X_q,Y_q)Z_q,W_q)&=g(R(d\tau_tX_p,d\tau_tY_p)d\tau_tZ_p,d\tau_tW_p)\\&=g(R(X_p,Y_p)Z_p,W_p)\quad(\tau_t\text{ は等長})\end{aligned}$$

となる．よって，$v=c'(t_0)$ とすれば，共変微分の定義から

$$\nabla_vR=0$$

を得る．また v は任意にとれるので，$\nabla R=0$. □

対称空間は $\nabla R = 0$ を満たすことがわかった．そこで，点対称があるとはかぎらないが $\nabla R = 0$ となる空間を考えることができる．

Definition 2.4.1. （完備）リーマン多様体で $\nabla R = 0$ を満たすとき，**局所対称空間**とよぶ．

Remark 2.4.1. 局所対称空間は，テキストによっては完備性を仮定しないこともある．また任意の点 p に対して，p の**近傍で点対称等長変換がある時**に局所対称空間と定義する場合もある．p の近傍での点対称があった場合には，曲率は局所的な話なので $\nabla R = 0$ であることは明らか．逆は後で述べる．

Example 2.4.2 (リーマン面)**.** *genus* が 2 以上のコンパクトリーマン面 M に対して，その普遍被覆複素多様体は上半平面 H^2 である．さらに，H^2 の正則同型群は $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\pm 1$ に一致する．(H^2, g) はリーマン対称空間であり単連結であるので，M は局所対称空間である（$PSL(2,\mathbb{R})$ の有限部分群で割ったものが M）．実は，M の等長変換群は有限群である（コンパクトで，リッチ曲率が負ならボホナー公式を使ってキリング場の空間は零次元．よって等長変換群も有限）ので，等質リーマン多様体でない．よって，***genus* 2 以上のコンパクトリーマン面は局所対称空間であるが対称空間ではない例**である．

Example 2.4.3 (レンズ空間)**.** $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ とする．

$$S^3 = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1\}$$

このとき $T^2 = S^1 \times S^1$ を次で作用させると等長変換である．

$$(z^1, z^2) \mapsto (e^{i\phi^1} z^1, e^{i\phi^2} z^2).$$

p, q を互いに素な自然数で $1 \leq p < q$ とする．そして

$$\mathbb{Z}_q \ni r \mapsto (e^{2\pi i r/q}, e^{2\pi i p r/q}) \in S^1 \times S^1$$

として埋め込む．そこで $\mathbb{Z}_q$ を S^3 へ作用させることができる．このとき p, q が互いに素であることから固定点は存在しない．

Proof. $0 < r < q$ としてよい．$(e^{2i\pi r/q} z^1, e^{2i\pi p r/q} z^2) = (z^1, z^2)$ とすると，$e^{2i\pi r/q} z^1 = z^1$ となるのは $z^1 = 0$ のときであり，$z^2 = 1$ となる．よって $e^{2i\pi p r/q} = 1$ となるので $pr/q = l \in \mathbb{Z}$ と書ける．$p/q = l/r$ で $0 < r < q$ であるので，これは互いに素にあることに反する．よって固定点は存在しない． □

そこで

$$L(q,p)=S^3/\mathbb{Z}_q$$

はリーマン多様体であり**レンズ空間**とよばれる（もちろんリーマン計量は S^3 から来るものを入れる）．$L(2,1)$ が 3 次元射影空間であるので，対称空間になる（実際 S^3 の点対称は $L(2,1)$ へ落ちる）．しかし $q>2$ なら $L(q,2)$ **は対称空間でない局所対称空間である．**

Proof. $p=(0,1)\in S^3$ に対しての点対称は

$$\sigma_p(z^1,z^2)=(\bar{z}^1,-z^2)$$

となる．しかし，これは $\mathbb{Z}^p$ と可換でない．実際

$$\sigma_p(e^{2i\pi r/q}z^1,e^{2i\pi pr/q}z^2)=(e^{-2i\pi r/q}\bar{z}^1,-e^{2i\pi pr/q}z^2)=(e^{2i\pi r/q}\bar{z}^1,-e^{2i\pi pr/q}z^2)$$

と仮定すると，$e^{-2i\pi r/q}=e^{2i\pi r/q}$ となる．よって $2r/q=l$ となるが，例えば $r=q-1>1$ とすれば $(2-l)q=2$ となるので $q>2$ に矛盾する．

よって σ_p という点対称は $L(q,p)$ へは遺伝しない．

$L(q,p)$ がリーマン対称空間であるとすると，点 p を $\pi:S^3\to L(q,p)$ で落とした点 $\pi(p)$ における点対称が存在するが，これを S^3 へ持ち上げると σ_p になるが，これは矛盾である．よって $L(q,p)$（$q>2$）なら局所対称であるが対称ではない．□

Example 2.4.4. 断面曲率が一定 k のリーマン多様体 M を，定曲率空間とよぶ．定曲率空間では $x,y,z,w\in T_pM$ に対して，

$$(R(x,y)z,w)=k\{(x,w)(y,z)-(z,x)(y,w)\}$$

となることがわかる（*easy*）．このことから，$\nabla R=0$ を得る．つまり，**定曲率空間は局所対称空間**である．

Proof. 両辺を微分すれば，

$$\begin{aligned}
&k((\nabla x,w)+(x,\nabla w))(y,z)+k(x,w)((\nabla y,z)+(y,\nabla z))\\
&\quad-k((\nabla z,x)+(z,\nabla x))(y,w)-k(z,x)((\nabla y,w)+(w,\nabla y))\\
=&((\nabla R)(x,y)z,w)+(R(\nabla x,y)z,w)+(R(x,\nabla y)z,w)\\
&\qquad+(R(x,y)\nabla z,w)+(R(x,y)z,\nabla w)\\
=&((\nabla R)(x,y)z,w)+k\{(\nabla x,w)(y,z)-(z,\nabla x)(y,w)\}\\
&\qquad+k\{(x,w)(\nabla y,z)-(z,x)(\nabla y,w)\}\\
&\quad+k\{(x,w)(y,\nabla z)-(\nabla z,x)(y,w)\}+k\{(x,\nabla w)(y,z)-(z,x)(y,\nabla w)\}
\end{aligned}$$

となるので，$((\nabla R)(x,y)z,w)=0$ を得るので，$\nabla R=0$ となる．

□

また，次は単連結，完備，定曲率空間である．

- $\mathbb{R}^n$．これは定曲率 $k=0$．
- $S^n(k)=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}|\|x\|^2=1/k\}$．定曲率 $k>0$
- $H^n(k)$，つまり $B^n=\{x\in\mathbb{R}^n|\|x\|^2<-k\}$ に $g=\frac{4}{(-k-|x|^2)^2}\sum dx^idx^i$ で計量をいれたもの．定曲率は $k<0$ となる．

逆に，単連結，完備，定曲率空間を考えると $\nabla R=0$ 及びアムブローズの拡張定理をつかえば，上のいずれかに等長同型であることがわかる．

Exercise 2.4.5. リーマン多様体に対するアムブローズの拡張定理とはどのような定理か調べよ（酒井「リーマン幾何学」を参照）．

さて局所対称空間上の測地線 $c(t)$ に沿った**ヤコビ場**を考えよう（定義は後で）．リーマン多様体 N の曲率を R とする．点 $p\in N$ およびベクトル $v\in T_pN$ に対して，

$$R_v:T_pN\ni w\mapsto R(w,v)v\in T_pN$$

を考えると，

$$\begin{aligned}g(R_v(w),w')=&g(R(w,v)v,w')=g(R(v,w')w,v)=g(R(w',v)v,w)\\=&g(R_v(w'),w)=g(w,R_v(w'))\end{aligned}$$

となるので R_v は計量に関して自己共役であるので対角化可能である．また $R_v(v)=0$ であるので v は固有値零の固有ベクトルである．

局所対称空間 N に対しては R は平行なので，平行移動 $P_{c(t)}$ と $R_{c'(t)}$ は可換である．つまり

$$\begin{aligned}R_{c'(t)}(P_{c(t)}w)&=R(P_{c(t)}w,c'(t))c'(t)=R(P_{c(t)}w,P_{c(t)}c'(0))P_{c(t)}c'(0))\\&=P_{c(t)}(R(w,c'(0))c'(0))=P_{c(t)}R_{c'(0)}(w).\end{aligned}$$

測地線のパラメータを変えて $\|c'(0)\|=1$ として $R_{c'(0)}$ を考える．v を $R_{c'(0)}$ に関して固有値 ρ の単位固有ベクトル（$\|v\|=1$）で $g(v,c'(0))=0$ を満たすものとする．$v(t)$ を $c(t)$ にそって v を平行移動したものとする．平行移動と $R_{c'(t)}$ は可換なので，$v(t)$ は $R_{c'(t)}$ に対して固有値 ρ の固有ベクトルである．このとき

$$c_\rho(t):=\begin{cases}\cos(\sqrt{\rho}t) & \rho>0\\ 1 & \rho=0\\ \cosh(\sqrt{-\rho}t) & \rho<0\end{cases},\quad s_\rho(t):=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\sin(\sqrt{\rho}t) & \rho>0\\ t & \rho=0\\ \frac{1}{\sqrt{-\rho}}\sinh(\sqrt{-\rho}t) & \rho<0\end{cases}$$

として，

$$J_1(t):=c_\rho(t)v(t),\quad J_2(t):=s_\rho(t)v(t)$$

とすればヤコビ場の方程式を満たす．つまり

$$\nabla_{c'(t)}\nabla_{c'(t)}J_i(t)+R(J_i(t),c'(t))c'(t)=0 \quad i=1,2$$

Proof. $J_i(t)=f_\rho(t)v(t)$ とすれば，

$$\begin{aligned}&\nabla_{c'(t)}\nabla_{c'(t)}J_i(t)+R(J_i(t),c'(t))c'(t)\\=&(f''_\rho(t)+\rho f_\rho(t))v(t)=0\end{aligned}$$

となる．この方程式の解として $f_\rho(0)=1$, $f'_\rho(0)=0$ の解が $c_\rho(t)$ であり $f_\rho(0)=0$, $f'(0)=1$ の解が $s_\rho(t)$ である．よってヤコビ場である，$J_1(t)$ は $v(0)=v$ で $v'(0)=0$ となるもの．$J_2(t)$ は $v(0)=0$ で $v'(0)=v$ となるものである． □

よって

Theorem 2.4.6. N を局所対称空間とする．c を測地線として $c(0)=p$, $\|c'(0)\|=1$ とする．また $c'(0)$ の直交補空間の正規直交基底で $R_{c'(0)}$ の固有ベクトルとなるものを $v_1,\cdots,v_{n-1}$ とする．またその固有値を $\rho_1,\cdots,\rho_{n-1}$ とする．$v_1(t),\cdots,v_{n-1}(t)$ を c にそって平行移動したものとすれば，測地線 c に沿ったヤコビ場で c' に直交なものは

$$c_{\rho_j}(t)v_j(t), \quad s_{\rho_j}(t)v_j(t)$$

の線形結合として書ける．

Proof. ヤコビ場とは，測地線の変分の際使うベクトル場である．測地線 $c(t)$ の変分

$$f:(t,s)\in[0,T]\times(-\epsilon,\epsilon)\to M$$

で各 s に対して曲線 $t\to f(t,s)$ が測地線となるものを考える．この変分に対する $c(t)$ に沿ったベクトル場をヤコビ場という．このとき

$$\nabla_{c'(t)}\nabla_{c'(t)}X+R(X,c'(t))c'(t)=0$$

を満たすことがわかる．逆にこの式を満たすベクトル場はヤコビ場である（詳しくはリーマン幾何の本を参照）．これは二階常微分方程式であるので $X_{c(0)}$, $\nabla_{c'(0)}X$ に対して唯一つの解を持つ．よって，$c_{\rho_j}(t)v_j(t)$, $s_{\rho_j}(t)v_j(t)$ の線形結合で勝手な初期値を作ることができることになる．ただし c' に直交なものとしている．（$X_{c(t)}=c'(t)$ は $c'(0)$ を平行移動したものであり，$R_{c'(0)}$ に対して零固有値をもつものであるので，対応するベクトル場は $c'(t)$ および $tc'(t)$ である）． □

ヤコビ場を使って局所対称空間の各点に局所点対称が存在することを証明しよう．上の証明で述べたようにヤコビ場は測地線の変分である．そこで

Lemma 2.4.7. キリングベクトル場はすべての測地線に対するヤコビ場である．（これは対称空間でなくてもよい）．

Proof. キリング場 X の局所 flow は等長変換であるので測地線を測地線にうつす．（注意：M が完備の場合にはキリングベクトル場は完備ベクトル場になる．つまり 1 パラメータ変換群の定義域は $\mathbb{R}$ になる（後述））．．

キリングベクトル場とは $L_X g = 0$ となるベクトル場である．つまり，

$$Xg(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z])$$

を満たすベクトル場である． □

Lemma 2.4.8. 点 p での指数写像を $\exp_p$ とする．測地線 $c(t)$ で $c(0) = p$ となるものは $c(t) = \exp_p tc'(0)$ と書ける．$w \in T_pM$ に対して測地線 c に沿ったヤコビ場で $X(0) = 0$, $X'(0) = w$ となるものは

$$X(t) = (d\exp_p)_{tc'(0)}(tw)$$

と書ける．

Proof. $c(t, s) := \exp_p(t(c'(0) + sw))$ は測地線 $c(t)$ の変分である．そして対応するヤコビ場は

$$X(t) = \frac{\partial}{\partial s} c(t, s)|_{s=0} = (d\exp_p)_{tc'(0)}(tw)$$

となる．さらに $X(0) = 0$ はあきらか．また torsion が零であること及び $\gamma(t) = \exp_p(t(c'(0) + sw))$ は初期ベクトルが $\gamma'(0) = c'(0) + sw$ の測地線なので

$$\nabla_{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} c(t, s)|_{t=s=0} = \nabla_{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} c(t, s)|_{t=s=0} = \nabla_{\partial s}(c'(0) + sw) = w$$

となる．よって解の一意性を使えば補題が証明できる． □

（上の二つの補題は，任意のリーマン多様体で成立）．

Proposition 2.4.9. $\nabla R = 0$ なら局所的に点対称が存在する．

Proof. 点 x に対して T_xM の等長変換 $X \mapsto -X$ を F とする．測地線座標で $\exp_x : T_xM \supset B_0(r) \to B_x(r) \subset M$（微分同相）になるようにとっておく．このとき $\phi := \exp_x \circ F \circ \exp_x^{-1} : B_x(r) \to B_x(r)$ とすれば $\phi^2 = \mathrm{id}$ であり，固定点は x のみである．

さて，x と $B_x(r)$ 内の任意の点 y はただ一つ測地線 c（$c(0) = x$, $c(1) = y$, $c(t) = \exp_p(tc'(0))$）で結べる．P_c を平行移動として $\Phi_{c(t)} = P_{c(t)} \circ F \circ P_{c(t)}^{-1} : T_{c(t)}M \to T_{c(t)}M$ を考える．このとき $\Phi_{c(1)} = (d\phi)_y : T_yM \to T_yM$ であることが証明できれば $\Phi_{c(1)}$ は等長であるので $d\phi_y$ が等長であることがわかり，点対称が存在することになる．

$\nabla R = 0$ 及び点 x で $F(R(X,Y)Z) = R(F(X),F(Y))F(Z)$ となるので

$$\Phi_{c(t)}(R(X,Y)Z) = R(\Phi_{c(t)}X, \Phi_{c(t)}Y)\Phi_{c(t)}Z, \tag{2.4.1}$$

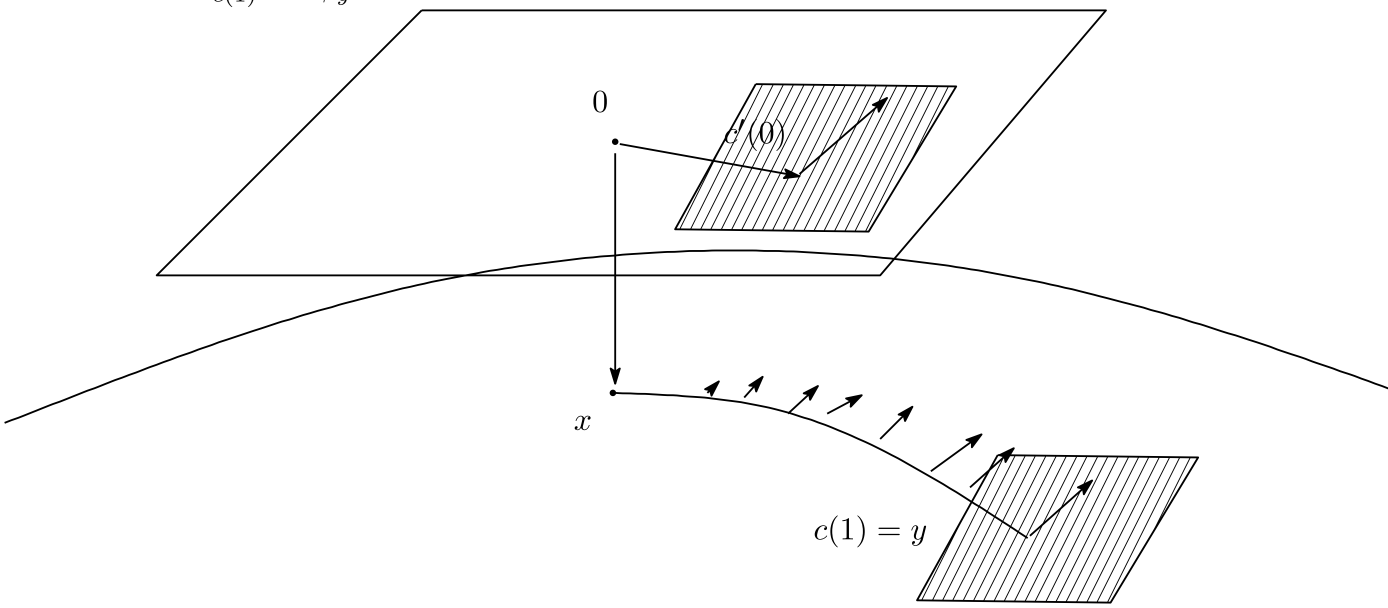
が成立する．$w \in T_yM$ に対して，$(d\exp_p)_{c'(0)} : T_{c'(0)}(T_xM) = T_xM \to T_yM$ の逆像を $((d\exp_p)_{c'(0)})^{-1}w$ とする．c に沿ってのヤコビ場 $V(t)$ で $V(0) = 0$, $V'(0) = ((d\exp_p)_{c'(0)})^{-1}w$ となるものを考えると補題から

$$V(t) = (d\exp_p)_{tc'(0)}(tV'(0)) = d\exp_{tc'(0)}(t((d\exp_p)_{c'(0)})^{-1}w)$$

となるので $V(1) = w$ である．一方 $W(t) = P_{c(t)}FP^{-1}_{c(t)}(V(t))$ とすれば，式 (2.4.1) およびヤコビ場を与える方程式から $W(t)$ も c に沿ったヤコビ場である．そして $W(0) = 0$, $W'(0) = -V'(0)$ となる．そこで

$$\begin{aligned} W(t) &= (d\exp_p)_{tc'(0)}(tW'(0)) = (d\exp_p)_{tc'(0)}(-tV'(0)) \\ &= (d\exp_p)_{tc'(0)}F(d\exp_p)^{-1}_{tc'(0)}V(t) = d\phi_{c(t)}V(t) \end{aligned}$$

となる．よって $\Phi_{c(1)} = d\phi_y$ が証明できた．



□

単連結完備局所対称空間の場合には，局所点対称を大域的な点対称へ拡張できる．これは折れ線の測地線 $c(t)$ に対して，

$$\Phi_{c(t)}(R(X,Y)Z) = R(\Phi_{c(t)}X, \Phi_{c(t)}Y)\Phi_{c(t)}Z$$

が成立することから，アムブローズの拡張定理を使って大域的な点対称となるからである．よって，

Theorem 2.4.10. 完備局所対称空間 N に対して，単連結対称空間 M（N のリーマン普遍被覆）及び，M に作用する固定点なしの等長変換の離散部分群 Γ が存在して $N = M/\Gamma$ と書ける（もちろん逆に，そのような空間があれば $\nabla R = 0$ であるので局所対称である）．

2.5　キリングベクトル場，カルタン分解

以下では対称空間の構造をリー環の言葉で，どのように表されるかについて考える．

2.5.1　キリングベクトル場

リーマン対称空間 $M = G/K$ を考える．等長変換群 G のリー環はキリングベクトル場全体のリー環である．つまり，G の M への作用の無限小作用は $\mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ を与える：

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto X_q := \frac{d}{dt} e^{tX}(q)|_{t=0} \in \mathfrak{X}(M).$$

（左作用なので，$\mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ は反準同形である）．そこで，$M = G/K$ 上のキリングベクトル場について考察しよう．

ある点 p を固定して，M の任意の点 q は測地線 $c(t)$ で結べるのであった．X をキリングベクトル場とする．$X_p = X_{c(0)}, \nabla_{c'(0)} X$ の値が決まれば，キリングベクトル場はすべての測地線に対するヤコビ場であったので，$X_{c(t)}, \nabla_{c'(t)} X$ の値が定まってしまう．つまり，**キリングベクトル場 X に対して，ある点 p での $X_p, (\nabla X)_p$ が決まれば X は定まる．**（対称空間でなくても，任意の二点が測地線で結べるリーマン多様体，つまり完備リーマン多様体でも成立）．

Definition 2.5.1. M を対称空間とする．M のキリングベクトル場のリー環を $\mathfrak{g}$ とする．点 p を固定して，

$$\mathfrak{k} := \{X \in \mathfrak{g} \mid X_p = 0\}, \quad \mathfrak{p} := \{X \in \mathfrak{g} \mid (\nabla X)_p = 0\}$$

とする．

Theorem 2.5.1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ となる．また $X, Y \in \mathfrak{p}$ なら $[X, Y] \in \mathfrak{k}$ である．

Proof. $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ を証明しよう．$X \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}$ とする．上で述べたことから，$X_p, (\nabla X)_p$ での値が定まれば，X は決まってしまう．よって $X_p = 0$, $(\nabla X)_p = 0$ なら $X = 0$.

次に $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を証明する．$X \in \mathfrak{g}$ に対して $X_p = 0$ なら $X \in \mathfrak{k}$ となる．そこで $X_p \neq 0$ とする．$c(t) := \exp_p tX_p$ は測地線であり c に沿った移換を $\tau_t = \sigma_{c(t/2)}\sigma_{c(0)}$ と

する．このとき τ_t は等長変換の 1 パラメータ群なので

$$Y := \frac{d}{dt}\tau_t|_{t=0}$$

はキリングベクトル場である．さらに，$\tau_t(c(0)) = c(t)$ であるので $Y_p = X_p$ となる．

$v \in T_pM$ に対して，$\gamma(s)$ を $\gamma'(0) = v$ となる曲線とすれば，

$$\begin{aligned}(\nabla_v Y)_p &= \nabla_{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\tau_t(\gamma(s))|_{s=t=0}\\ &= \nabla_{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\tau_t(\gamma(s))|_{s=t=0}\\ &= \nabla_{\partial t}(d\tau_t)(v)|_{t=0}\end{aligned}$$

となるが $d\tau_t$ は c の沿っての平行移動であったので，これは零となる．これより $(\nabla Y)_p = 0$ が成立する．よって $X \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$X = (X - Y) + Y \quad (X - Y) \in \mathfrak{k}, \quad Y \in \mathfrak{p}$$

となる．

$X, Y \in \mathfrak{p}$ とする．捩れ率ゼロを使えば，$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ である．このとき $(\nabla Y)_p = 0 = (\nabla X)_p$ であるので，$[X, Y]_p = 0$ となるので，$[X, Y] \in \mathfrak{k}$．特に，$[X, Y]$ を定めるには，$(\nabla[X, Y])_p$ がわかればよい． □

Theorem 2.5.2. ベクトル空間として $\mathfrak{p}$ と T_pM は同型である（$\mathfrak{p} \ni X \to X_p \in T_p(M)$）．またキリングベクトル場 $Y \in \mathfrak{p}$ の生成する等長 1 パラメタ変換群は測地線 $\exp_p(tY_p)$ に沿っての移換 τ_t である．（$e^{tY} = \tau_t$）．

Proof. $w \in T_pM$ とする．測地線 $c(t) = \exp_p(tw)$ に沿った移換を τ_t とする．さらに，

$$Y_q = \frac{d}{dt}\tau_t(q)|_{t=0}$$

とすれば上の証明で見たように $Y \in \mathfrak{p}$ となる．そこで線形写像 $i : T_pM \to \mathfrak{p}$ を得る．線形であることは，キリングベクトル場は点 p での Y_p と $(\nabla Y)_p$ で定まることからわかる．また，単射であることは明らか．また，$X \in \mathfrak{p}$ に対して，$(\nabla X)_p = 0$ であったので，$X_p \in T_p(M)$ がわかれば，X は定まる．よって $\dim \mathfrak{p} \leq \dim T_p(M)$ であるので，$T_p(M) \cong \mathfrak{p}$ を得る．

もう一つの主張は作り方から明らか． □

Corollary 2.5.3 (対称空間の測地線)**.** $X \in \mathfrak{p}$ とすれば，$e^{tX}(p) = \tau_t(p) = \exp tX_p$ となり測地線である．また $de^{tX} : T_pM \to T_{e^{tX}(p)}M$ は測地線 $\exp tX_p$ に沿った平行移動である．

Corollary 2.5.4. S を M 上のテンソル場で G 作用で不変とする．つまり $(dg)_p S_p = S_{g(p)}$ とする．このとき $\nabla S = 0$ となる．

Proof. まず点 p において，測地線 $c(t) = \exp tX_p$ を考えると，上の系から，平行移動がわかっているので共変微分の公式は

$$\nabla_{c'(0)} S = \lim_{t=0} \frac{(de^{-tX})_{c(t)} S_{c(t)} - S_p}{t}$$

となる．G 不変であることから，$\nabla_{c'(0)} S = 0$ となる．他の点でも ∇ と S が G 不変であること，および G が M に推移的に作用していることを考えれば $\nabla S = 0$ を得る． □

Proposition 2.5.5. 上で固定した点 p に対するイソトロピー群 $K := \{g \in G | gp = p\}$ を考えると，この K のリー環は $\mathfrak{k}$ である．

Proof. $X \in \mathfrak{k}$ とはキリング場で $X_p = 0$ となるものである．そこで $e^{tX}(p) = p$ となるので $e^{tX} \in K$ である．逆に K のリー環の元 X は $e^{tX}(p) = p$ を満たすキリングベクトル場であるので $X_p = 0$ となる． □

Proposition 2.5.6. $G = K \exp \mathfrak{p}$ と分解できる．

Proof. 対称空間の点 p と gp は p を通る測地線 $c(t)$ で結べる．また $X \in \mathfrak{p}$ が生成する 1 パラメータ変換群 τ_t に対して $\tau_t(p) = c(t)$ となるのであった．よって，ある t_0 があって，$\tau_{t_0}(p) = gp$ となる．$g^{-1}\tau_{t_0} \in K$ となるので $g = k\tau_{t_0}$ となる．

さてリー群 G において，$X \in \mathfrak{p}$ が生成する 1 パラメータ部分群を $\exp tX$ とすれば，これは τ_t である．そこで，g は任意であるので $G = K \exp \mathfrak{p}$ となる． □

Remark 2.5.1. 上の命題は単に $g \in G$ は $k \exp X$ とかけること述べているだけで，$K \times \mathfrak{p}$ と G が微分同相などは述べていない．

以下，X をキリングベクトル場としたとき，e^{tX} を対応する 1 パラメータ変換群とする．

Remark 2.5.2. リーマン多様体 M の等長変換群 G（リー群）の無限小変換はキリングベクトル場である．逆に，M 上のキリングベクトル場に対して，一般には局所 1 パラメータ変換群しか作れない．つまり等長変換群のリー環とキリングベクトル場の全体が一致しないということは起こりえる．しかし，これは M が完備なら問題ない．特に対称空間でも問題ない．

完備リーマン多様体上のキリングベクトル場は完備ベクトル場である．つまり e^{tX} での t の定義域は $\mathbb{R}$ となる．

Proof. $q \in M$ として $e^{tX}(q)$ がすべての $t \in \mathbb{R}$ に対して定義できればよい．$t > 0$ に対し

て証明する．$t<0$ でも同様.

$$T := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid e^{\tau X}(q) \text{ is defined all } \tau \leq t\}$$

とする．$T<\infty$ と仮定する．

$$m := \sup\{d(q, e^{tX}(q)) | t \leq T/2\}$$

とする．$g \in G$（G は等長変換群）に対して，$d(gx, gy) = d(x, y)$ であるので,

$$d(g^2q, gq) = d(gq, q)$$

となり，

$$d(g^2q, q) \leq d(g^2q, gq) + d(gq, q) = 2d(gq, q)$$

である．よって $0 \leq t < T$ に対して

$$d(e^{tX}(q), q) \leq 2d(e^{tX/2}(q), q) \leq 2m$$

となる．そこで $0 \leq t < T$ に対して，$e^{tX}(q) \in B(q, 2m)$ となる．M は距離空間として完備であるので有界閉集合 $B(q, 2m)$ は完備かつ全有界となるので，コンパクトである，そこで $\epsilon > 0$ で「$x \in B(q, 2m)$ に対して $e^{tX}(x)$ が $|t| \leq \epsilon$ で定義できる（または測地線座標がその範囲で定義できる)」ようなものが存在する．そこで $\tau = T - \epsilon/2$ に対して，

$$e^{\epsilon X}(e^{\tau X}(q)) = e^{(T+\epsilon/2)X}(q)$$

が定義できる．これは T が sup となることに矛盾．よって，$T < \infty$ に矛盾する．以上から $T = \infty$ となる． □

2.5.2　カルタン分解

さて

$$s_p : G \ni g \mapsto \sigma_p \circ g \circ \sigma_p = \sigma_p \circ g \circ \sigma_p^{-1} \in G$$

を考える．これは群準同形であることは明らか．また $\sigma_p^2 = \mathrm{id}$ から $s_p^2 = \mathrm{id}$ となる．この s_p を G の**カルタン対合（involution）**とよぶ．この対合による固定点全体を

$$G^{s_p} = \{g \in G \mid s_p(g) = g\} = \{g \in G \mid \sigma_p g = g\sigma_p\}$$

考えると，s_p が群準同型であるので部分群であり，固定点全体なので閉部分群となる．そして，その単位元連結成分を $(G^{s_p})_0$ とする．

Proposition 2.5.7. 次が成立する

$$(G^{s_p})_0 \subset K \subset G^{s_p}$$

Proof. σ_p は等長変換で $\sigma(p) = p$ かつ $d\sigma_p = -\mathrm{id}$ を満たすもので，ただ一つに定まるのであった．そこで $k \in K$ とすると，$k^{-1}\sigma_p k(p) = p$ であり，$d(k^{-1}\sigma_p k) = (dk)^{-1}(-\mathrm{id})dk = -id$ であるので，$k^{-1}\sigma_p k = \sigma_p$ となるので，$K \subset G^{s_p}$ を得る．

σ_p の M 内の固定点集合を $F_{\sigma_p} := \{x \in M \mid \sigma_p(x) = x\}$ とする．$g \in G^{s_p}$ とすれば，g は F_{σ_p} を保存する．実際，$x \in F_{\sigma_p}$ に対して，

$$\sigma_p(gx) = g\sigma_p(x) = gx$$

となる．また，点 p は σ_p の孤立固定点であった．つまり F_{σ_p} 内で p は孤立点である．さて，$g \in (G^{s_p})^0$ とすれば，g と e は G^{s_p} 内で g_t でつなげることができる．G^{s_p} が F_{σ_p} に作用していると考えたとき，p は孤立してるので $g_t(p) = p$ でなくてはならない．よって $g(p) = p$ となり，$g \in K$ となる． □

さて，$s_p : G \to G$ を単位元 e で微分して

$$\theta_p : \mathfrak{g} = T_e(G) \to \mathfrak{g} = T_e(G), \quad \theta_p(X) = \frac{d}{dt}s_p(e^{tX})|_{t=0} = \frac{d}{dt}\sigma_p e^{tX}\sigma_p^{-1}|_{t=0}$$

を得る．これはリー環の準同形写像である：

$$\theta[X, Y] = [\theta X, \theta Y]$$

また．$\theta_p^2 = \mathrm{id}$ となる．この θ も**カルタン対合**とよぶ．

Proof. リー群の準同形はリー環の環準同形を与えるので． □

$\theta_p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は $\theta_p^2 = \mathrm{id}$ を満たすので，$\mathfrak{g}$ は ± 1 固有空間に分解される．

Theorem 2.5.8 (カルタン分解)**.** $\theta_p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の ± 1 固有空間を $\mathfrak{g} = E(1) \oplus E(-1)$ とすれば，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = E(1) \oplus E(-1)$$

となる．つまり

$$\theta_p|_{\mathfrak{k}} = \mathrm{id}, \quad \theta_p|_{\mathfrak{p}} = -\mathrm{id}$$

さらに，

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$$

が成立する．特に，$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー環である．

Proof. まず $(G^{s_p})_0 \subset K \subset G^{s_p}$ であるので，

$$E(1) = Lie(G^{s_p}) = Lie((G^{s_p})_0) = \mathfrak{k}$$

となる（命題 2.5.5）．

次に $Y \in \mathfrak{p}$ の場合を考える．以前みたように $e^{tY} = \tau_t = \sigma_{c(t/2)}\sigma_p$ である．ここで $c(t) = \exp_p(tY_p)$ である．よって

$$s_p(e^{tY}) = \sigma_p\sigma_{c(t/2)}\sigma_p\sigma_p = \sigma_p\sigma_{c(t/2)} = \sigma_p^{-1}\sigma_{c(t/2)}^{-1} = (\sigma_{c(t/2)}\sigma_p)^{-1}$$

となるが τ_t は 1 パラメータ変換群なので $\tau_t^{-1} = \tau_{-t}$ が成立する．よって

$$s_p(e^{tY}) = \tau_{-t} = e^{-tY}$$

となる．これを微分すれば $\theta_p(Y) = -Y$ を得る．よって，$\mathfrak{p} \subset E(-1)$ となる．一方 $\dim\mathfrak{p} = \dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{k} = \dim\mathfrak{g} - \dim E(1) = \dim E(-1)$ であるので，$\mathfrak{p} = E(-1)$ を得る．

θ_p がリー環の準同形であるので，$X, Y \in \mathfrak{k}$ なら，$[X,Y] = [\theta_p(X), \theta_p(Y)] = \theta_p([X,Y])$ であるので $[X,Y] \in \mathfrak{k}$ がわかる．他も同様.　□

Lemma 2.5.9. $\mathfrak{p}$ は $\mathrm{Ad}(K)$ 不変である．

Proof. $k \in K$ として，$s_p(k) = k$ であったので，

$$\begin{aligned}\theta_p\mathrm{Ad}(k)X &= \frac{d}{dt}s_p(e^{\mathrm{Ad}(k)tX})|_{t=0} = \frac{d}{dt}s_p(ke^{tX}k^{-1})|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}s_p(k)s_p(e^{tX})s_p(k^{-1})|_{t=0} = k\frac{d}{dt}s_p(e^{tX})|_{t=0}k^{-1}\\ &= \mathrm{Ad}(k)\theta_pX\end{aligned}$$

となる．つまり $k \in K$ なら，$\mathrm{Ad}(k) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ と $\theta_p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は可換である．そこで，$X \in \mathfrak{p}$ に対して，$\theta_p(\mathrm{Ad}(k)X) = -\mathrm{Ad}(k)X$ となるので，$\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ となる．　□

このように $\mathfrak{p}$ 上で K の表現を得た．一方，$T_p(M)$ 上には K のイソトロピー表現が存在した．これらが一致することを確かめておこう．

$X \in \mathfrak{g}$ というキリングベクトル場を考える．この X が生成する 1 パラメータ変換群を e^{tX} とする．つまり，

$$X_q = \frac{d}{dt}e^{tX}(q)|_{t=0}$$

のことである．$\mathrm{Ad}(g)X \in \mathfrak{g}$ に対する 1 パラメータ変換群 $e^{t\mathrm{Ad}(g)X}$ を考えると，

$$(\mathrm{Ad}(g)X)_q = \frac{d}{dt}(e^{t\mathrm{Ad}(g)X})(q)|_{t=0} = \frac{d}{dt}ge^{tX}(g^{-1}q) = dg_{g^{-1}(q)}X_{g^{-1}(q)}$$

となる．特に，$X \in \mathfrak{p}$, $k \in K$ とすれば，$k(p) = p$ であるので，

$$(\mathrm{Ad}(k)X)_p = dk_p X_p$$

となるので，$\mathfrak{p}$ 上の K の Ad 表現と T_pM 上のイソトロピー表現は一致している（このことからも $\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ がわかる）．

Proposition 2.5.10. リー群 G が多様体 M に左から作用しているとする．このとき

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto X \in \mathfrak{X}(M)$$

はリー環の反準同形である．

Proof. $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して，$[X, Y] \in \mathfrak{g}$ というベクトル場を計算する．$(\mathrm{Ad}(g)Y)_p = (dg)_{g^{-1}(p)} Y_{g^{-1}(p)}$ であった．$g = \phi_t = e^{tX}$ とする．リー微分の定義を思い出すと

$$[X, Y]_p = \lim_{t \to 0} \frac{Y_p - (d\phi_t)_{\phi_{-t}(p)} Y_{\phi_{-t}(p)}}{t} = \frac{d}{dt}(d\phi_{-t})_{\phi_t(p)} Y_{\phi_t(p)}|_{t=0}$$

であったので

$$(\mathrm{ad}(X)Y)_p = \lim_{t=0} \frac{(\mathrm{Ad}(\phi_t)Y)_p - Y_p}{t} = -\lim_{t=0} \frac{Y_p - (d\phi_t)_{\phi_t^{-1}(p)} Y_{\phi_t^{-1}(p)}}{t} = -[X, Y]_p$$

となる．多様体に左から作用させる場合には，$\mathfrak{g}$ のリー括弧とベクトル場としてリー括弧は，符号が逆になる． □

Example 2.5.11. $M = G/K$ というリーマン対称空間を考える．リーマン計量は G 不変であったので，接続も G 不変である．つまり，

$$dg(\nabla_Y X) = \nabla_{dgY} dgX, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

が成立する．G は M に推移的に作用していたので，∇ を調べるには基点 p での様子を調べればよい．そこで，$T_p(M) = \mathfrak{p}$ という同一視のもとで，

1. $X \in \mathfrak{p}$, $Y \in \mathfrak{p}$ のとき，

$$(\nabla_X Y)_p = 0, \quad [X, Y]_p = -([X, Y]_{\mathfrak{g}})_p = 0$$

2. $X \in \mathfrak{k}$, $Y \in \mathfrak{k}$ のとき，

$$(\nabla_X Y)_p = 0, \quad [X, Y]_p = -([X, Y]_{\mathfrak{g}})_p = 0$$

3. $X \in \mathfrak{p}$, $Y \in \mathfrak{k}$ のとき，

$$(\nabla_X Y)_p = (\nabla_Y X)_p - [X, Y]_p = ([X, Y]_{\mathfrak{g}})_p, \quad (\nabla_Y X)_p = 0$$

となる．

2.5.3　標準接続

reductive 等質空間上には標準接続という接続が定義できる．リーマン対称空間の場合には標準接続とレビチビタ接続が一致することを見てみたい．（対称空間上で解析を行う場合には，標準接続による表示の方が便利なので）．

さて，等質空間 $M = G/H$ を考える．このとき $T_p(M) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ である．

Proof.

$$G \ni g \mapsto gp \in M$$

という写像を考える．この写像の単位元 $e \in G$ での微分を考えれば，

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto \frac{d}{dt}(\exp tX)p \in T_pM$$

という線形写像を得る．$M = G/H$ に対して，g の周りの局所座標 $(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)$ で，$(x_1, \cdots, x_k)$ が H の局所座標となるものがとれ，$x_{k+1}, \cdots, x_n)$ が M の gH の周りの座標となるようにできる．そこで，上の写像は全射となる．また，この写像の核は H のリー環 $\mathfrak{h}$ である．そこで，同型

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong T_{x_0}M$$

を得る．　□

さらに $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ という分解で $\mathfrak{m}$ が $\mathrm{Ad}(H)$ 不変であるとする．このような M は **reductive 等質空間**と呼ばれる．このとき H 加群として $T_p(M) \cong \mathfrak{m}$ となることに注意（証明は対称空間の時と同様）．

Definition 2.5.2. 等質空間 $M = G/H$ 上が**対称空間**であるとは，G の対合 $s : G \to G$ が存在して $(G^s)_0 \subset H \subset G^s$ が存在することである．また，$ds = \theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を考えると $\theta^2 = \mathrm{id}$ である．そこで $\mathfrak{g}$ を ± 1 固有空間へ分解したとき $+1$ 固有空間を $\mathfrak{h}$, -1 固有空間を $\mathfrak{m}$ とすれば，reducive 等質空間となることがわかる．また，対称空間の場合には $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ となる．

Remark 2.5.3. 上は一般の対称空間の定義である．上の定義の対称空間に G **不変計量が入る場合がリーマン対称空間**である．

さて，reductive 等質空間 M 上の主 H 束 $G \to G/H$ を考える．$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g} = T_e(G)$ を G の左作用で動かせば，左 G 不変な水平分布を定義できる．つまり $T_g(G) = T_g(G)^H \oplus T_g(G)^V = dL_g\mathfrak{m} \oplus dL_g\mathfrak{h}$．この水平分布は右 H 不変であることがわかる．

Proof. 左作用，右作用を

$$L_g : G \ni g' \to gg' \in G, \quad R_g : G \ni g' \to g'g \in G$$

と書く．

証明すべきことは $dR_h(T_g(G)^H) = T_{gh}(G)^H$ である．$\pi : G \to M$ の点 $g \in G$ において，$T_g(G)^H = dL_g\mathfrak{m}$, $T_{gh}(G)^H = dL_{gh}\mathfrak{m}$ であるので，

$$\begin{aligned} T_{gh}(G)^H &= dL_{gh}\mathfrak{m} = dL_g dL_h\mathfrak{m} = dR_h dR_{h^{-1}} dL_g dL_h\mathfrak{m} \\ &= dR_h dL_g dR_{h^{-1}} dL_h\mathfrak{m} = dR_h dL_g \mathrm{Ad}(h)\mathfrak{m} = dR_h dL_g(\mathfrak{m}) = dR_h(T_g(G)^H) \end{aligned}$$

となる． □

そこで，上の水平分布は主 H 束 $G \to M$ 上の G 不変な接続を与える．

Definition 2.5.3. reductive 等質空間 $M = G/H$ を考えて，主 H 束 $\pi : G \to M = G/H$ に入る上の G 不変接続を**標準接続**とよぶ．

Definition 2.5.4. G 上 **Maurer-Cartan** 形式 Θ とは，G 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-form であり，

$$\Theta_g(X) = dL_g^{-1}X \in T_e(G) = \mathfrak{g}$$

となるもの．特に，$X \in \mathfrak{g} = T_e(G)$ に対する左不変ベクトル場 $X_g^* = dL_gX$ に対しては，$\Theta(X^*) = X$ である．

Proposition 2.5.12. *reductive* 等質空間 $M = G/H$ の標準接続を考える．この接続 1*-form* である G 上 $\mathfrak{h}$ 値 1*-form* は $\alpha = pr_{\mathfrak{h}}\Theta$ となる．

Proof. $\alpha = pr_{\mathfrak{h}}\Theta$ が接続であることを確かめる．

まず H 同変である．つまり，

$$(R_h^*\alpha)_g = \mathrm{Ad}(h^{-1})\alpha_g$$

を証明する．$T_g(G) = dL_g\mathfrak{g}$ であるので，$X_g^* = dL_g(X) \in dL_g\mathfrak{g}$ に対して，

$$\begin{aligned} (R_h^*\alpha)_g(X_g^*) &= \alpha_{gh}(dR_hX_g^*) = pr_{\mathfrak{h}}\Theta(dR_hX_g^*) = pr_{\mathfrak{h}}(dL_{(gh)^{-1}}dR_hX_g^*) \\ &= pr_{\mathfrak{h}}dL_{h^{-1}}dL_{g^{-1}}dR_hX_g^* = pr_{\mathfrak{h}}dL_{h^{-1}}dR_hdL_{g^{-1}}X_g^* \\ &= pr_{\mathfrak{h}}dL_{h^{-1}}dR_hdL_{g^{-1}}dL_gX = pr_{\mathfrak{h}}dL_{h^{-1}}dR_hX = pr_{\mathfrak{h}}Ad(h^{-1})X \end{aligned}$$

一方，

$$\alpha_g(X_g^*) = pr_{\mathfrak{h}}\Theta(X_g^*) = pr_{\mathfrak{h}}X$$

そこで $X \in \mathfrak{m}$ なら，$\mathrm{Ad}(H)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ であり，$pr_{\mathfrak{h}}Ad(h^{-1})X = 0 = \mathrm{Ad}(h^{-1})pr_{\mathfrak{h}}X$ となる．また，$X \in \mathfrak{h}$ なら $\mathrm{Ad}(H)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ であるので，$pr_{\mathfrak{h}}Ad(h^{-1})X = \mathrm{Ad}(h^{-1})X = \mathrm{Ad}(h^{-1})pr_{\mathfrak{h}}X$ となる．よって，$(R_h^*\alpha)_g(X_g^*) = \mathrm{Ad}(h^{-1})\alpha_g(X_g^*)$ がいえる．

次に垂直的であることを見る．つまり $X \in \mathfrak{h}$ に対する基本ベクトル場を考えると $\alpha(X^*) = X$ となることを確かめる．基本ベクトル場の定義は

$$X_g^* = \frac{d}{dt} g \exp tX|_{t=0}$$

であるが，これは G 上左不変ベクトル場の定義でもある（基本ベクトル場＝左不変ベクトル場）．そこで，$X_g^* = dL_g X$ であり，

$$\alpha(X^*) = pr_{\mathfrak{h}} \Theta(X_g^*) = pr_{\mathfrak{h}}(X) = X$$

となるので垂直的である．よって主 H 束 $G \to G/H$ 上の接続になる．

さて，この接続 1-form α が標準接続と一致することを確かめよう．$\ker \alpha$ が標準接続の水平分布と一致することを見ればよい．$T_g(G)^H = dL_g(\mathfrak{m})$ であるので $\alpha_g(dL_g(X)) = pr_{\mathfrak{h}}(X) = 0$ となる．よって，$T_g^H(G) \subset \ker \alpha$ となるが次元を考えると一致する． □

Remark 2.5.4. $X \in \mathfrak{m}$ に対して左不変ベクトル場 X^* を作れば，水平分布の定義から水平ベクトル場であるが，右 H 不変ではないので，M へ落ちるわけではない．実際

$$dR_h X_g^* = dR_h dL_g X = dL_g dR_h dL_h dL_{h^{-1}} X = dL_{gh} \mathrm{Ad}(h^{-1}) X = (\mathrm{Ad}(h^{-1}) X^*)_{gh}$$

となる．

Corollary 2.5.13. 標準接続に対する曲率は G 上の 2-*form* として，

$$d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha]$$

となる．これは $\Gamma(M, (G \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{h}) \otimes \Lambda^2(M))$ の切断となることに注意する．

Remark 2.5.5. 曲率の一つの見方は，X, Y を M 上のベクトルとして，$\tilde{X}, \tilde{Y}$ を水平リフトとすれば，

$$\Omega(X, Y) = pr_{hor}[\tilde{X}, \tilde{Y}] - [\tilde{X}, \tilde{Y}]$$

であった．そこで reductive 等質空間上で考えると，$X, Y \in \mathfrak{m}$ とすれば，$\alpha = pr_{\mathfrak{h}}\Theta$ であることから，

$$\begin{aligned}
&(d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha])(X, Y) \\
=& X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]) + \frac{1}{2}[\alpha(X), \alpha(Y)] - \frac{1}{2}[\alpha(Y), \alpha(X)] \\
=& - pr_{\mathfrak{h}}([X, Y]) = pr_{\mathfrak{m}}([X, Y]) - [X, Y]
\end{aligned}$$

となる．

H の表現 (ρ, V) を考えて，同伴束 $\mathbf{V} = G \times_H V$ を考える．これは G 上のベクトル束 $G \times V$ を H で割ったものである．つまり，

$$G \times V \ni (g, v) \mapsto [g, v] \in G \times_H V$$

である．そこで $\pi : G \to M$ に対して，$\pi^* \mathbf{V} = G \times V$ となる．このとことを考慮すれば次が成立する．

Proposition 2.5.14. $\mathbf{V}$ の切断の空間と G 上の V 値関数で H 同変なもの全体は同一視できる．つまり

$$\Gamma(M, \mathbf{V}) \cong \{s : G \to V \mid s(gh) = \rho(h^{-1})s(g), \, \forall h \in H\}$$

また，$s(gh) = \rho(h^{-1})s(g)$（$(R_h^* s)(g) = \rho(h^{-1})s(g)$）を無限小表示すると，

$$X^* s = -\rho_*(X)s, \quad \forall X \in \mathfrak{h}, \quad (X^* s)(g) = \frac{d}{dt} s(g(\exp tX))|_{t=0}$$

となる．ここで，X^* は $X \in \mathfrak{h}$ に対する左不変ベクトル場．さらに $\Gamma(M, \mathbf{V})$ は G の表現空間である．実際，

$$(g' \cdot s)(g) = s(g^{-1} g)$$

とすればよい．

Proof. まず，

$$(X^* s)(g) = \frac{d}{dt} s(g(\exp tX))|_{t=0}$$

が $X \in \mathfrak{g} = T_e(G)$ に対して成立することを見る．$X \in \mathfrak{g}$ に対する左不変ベクトル場 X^* を考える（$dL_g X = X_g^*$）．$\exp tX$ の微分が $X \in T_e(G)$ であるので，$g \exp tX$ の微分は $dL_g X = X_g^* \in T_g(G)$ であった．よって，

$$(X^* s)(g) = (dL_g X)s = \frac{d}{dt} s(g(\exp tX))|_{t=0}$$

となる．

次に切断について考える．$s : G \to V$ に対して $\Gamma(M, \mathbf{V})$ の切断として $s_M(x) = [g, s(g)]$ を対応させれば，s が H 同変であることから well-defined である．逆に切断 $s_M(x)$ を $s_M(x) = [g, v] = [gh, \rho(h^{-1})v]$ とする．このとき $s(g) = v$ とすれば，$s(gh) = \rho(h^{-1})v$ となるので，G 上 V 値で H 同変なものが定まる．

また $(g' \cdot s)(gh) = s(g^{-1}gh) = \rho(h^{-1})s(g^{-1}g) = \rho(h^{-1})(g' \cdot s)(g)$ であるので，$g' \cdot s$ も $\mathbf{V}$ の切断である．よって，G が $\Gamma(\mathbf{V})$ へ作用する．$\square$

この同伴束 $\mathbf{V}$ 上に標準接続から導かれる共変微分を得るが，それは

$$\nabla s = ds + \rho_*(pr_{\mathfrak{k}}\Theta)s$$

となる．これは G 上 V 値 1-form であり，H 同変である．また垂直ベクトルを代入すればゼロとなる（この条件は M 上で $\Gamma(M, \mathbf{V} \otimes T^*(M))$ となることと同値である）．

Proof. $X \in \mathfrak{h}$ とする，$X_g^* \in T_g(G)^V$ である．また．s は $X_g^*s + \rho_*(X)s(g) = 0$ を満たすのであった．そこで，

$$ds(X_g^*) + \rho_*(\alpha(X_g^*))s = X_g^*s + \rho_*(X)s = -\rho_*(X)s + \rho_*(X)s = 0$$

となる．よって垂直ベクトルを代入すればゼロとなる．次に H 同変であることを確かめよう．

$$\begin{aligned}
&R_h^*(ds + \rho_*(\alpha)s) \\
=&dR_h^*s + \rho_*(R_h^*\alpha)R_h^*s \\
=&d\rho(h^{-1})s + \rho_*(\mathrm{Ad}(h^{-1})\alpha)\rho(h^{-1})s \\
=&\rho(h^{-1})ds + \rho(h^{-1})\rho_*(\alpha)\rho(h)\rho(h^{-1})s \\
=&\rho(h^{-1})ds + \rho(h^{-1})\rho_*(\alpha)s = \rho(h^{-1})(ds + \rho_*(\alpha)s)
\end{aligned}$$

となるので H 同変である． □

Remark 2.5.6. M 上の微分形式は G 上の**基本微分形式**と同一視できる．ここで基本微分形式とは G 上の微分形式 ϕ であり，垂直ベクトル X に対して $\iota_X\phi = 0$ で，右 H 不変 $R_h^*\phi = \phi$ となるものである．

Proposition 2.5.15. 切断 s が平行であるための必要十分条件は $\forall X \in \mathfrak{m}$ に対して， $X^*s = 0$（X^* は左不変ベクトル場）．

また，同伴束上の G **不変切断は標準接続に対して平行**である．特に，M 上に G 不変な計量があれば，その計量に対して，標準接続は計量接続（$\nabla g = 0$）になる．また，M 上の G 不変なテンソル場も標準接続に対して平行である．

Proof. まず，接ベクトル $V \in T_q(M)$ に対して，水平リフトとして $\tilde{V} = dL_gX \in dL_g\mathfrak{m}$ を選ぶ．このとき $\nabla_V s$ は X_g^*s に対応する．よって $X^*s = 0$（$\forall X \in \mathfrak{m}$）なら．$s$ は平行である．

同伴束の切断 $s : G \to V$ ($(g\cdot s)(g') = s(g^{-1}g')$) を考える．$G$ 不変とは，$s(g') = s(gg')$ ($\forall g, g'$) となることである．$g' = e$ とすれば，$s(e) = s(g)$ となる．**つまり G 不変切断は $s : G \to V$ としたときに V 値定数関数**である．よって，微分はゼロである．特に $X \in \mathfrak{m}$ に対して，$X^*s = 0$ であるので，平行になる． □

上の命題で述べたように，M 上の G 不変な計量があれば，その計量に対して，接続は計量接続になる．そこで，標準接続がレビチビタ接続になることを見るために，捩れ率について考えよう．

多様体 M のフレーム束 $\mathbf{GL}(M)$ を考え，その線形接続の接続 1-from を ω とする．接束 $T(M)$ は，$\mathbf{GL}(M) \times_{GL(n)} \mathbb{R}^n$ と同型であるが，先ほどと同様に接束は $\mathbf{GL}(M)$ 上の $\mathbb{R}^n$ 値関数で $GL(n)$ 同変なものと同一視できる．また，微分形式はいわゆる $\mathbf{GL}(M)$ 上基本微分形式全体と同一視できる．基本微分形式とは $\mathbf{GL}(M)$ 上の微分形式であり，$GL(n)$ 不変（$R_g^*\alpha = \alpha$）かつ垂直ベクトルを入れたらゼロであるもの．

さて M 上の $(1,1)$ テンソルで θ_0 で $\theta_0(V) = V$ となるものを考える（$T(M) \otimes T^*(M) = \mathrm{End}(M)$ の id のこと）．これに対応した $\mathbf{GL}(M)$ 上の $\mathbb{R}^n$ 値基本 1-form θ を標準形式とよぶ．それは以下のよう：$u \in \mathbf{GL}(M)$ は $u : \mathbb{R}^n \to T_{\pi(u)}(M)$ を定めるが，このとき標準形式 θ は

$$\theta_u(X) = u^{-1}(\pi_*(X))$$

となる．

Proof. $\mathbf{GL}(M)$ 内の曲線 $\gamma(t)$ が接ベクトル X を与えるとすると $\pi(\gamma(t)g) = \pi(\gamma(t))$ であるので，$\pi_*(R_g X) = \pi_*(X)$ であることがわかる．そこで

$$(R_g^*\theta)_u(X) = \theta_{ug}(R_g X) = g^{-1}u^{-1}\pi_*(R_g X) = g^{-1}\theta_u(X)$$

となり $GL(n)$ 同変．また垂直ベクトルを入れたらゼロであることもわかる．よって θ は M 上ある $(1,1)$ テンソルに対応する．V を M 上のベクトルとして，その水平リフトを $\tilde{V}$ とする．$\theta_u(\tilde{V}) = u^{-1}(V)$ となるが，$\mathbf{GL}(M) \times_{GL(n)} \mathbb{R}^n$ と $T(M)$ の同一視は

$$\mathbf{GL}(M) \times_{GL(n)} \mathbb{R}^n \ni [u, v] \to u(v) \in T_{\pi(u)}(M)$$

であったので，θ に対応した M 上 $(1,1)$ テンソル場は θ_0 である． □

さて，θ_0 を共変外微分すると，

$$D\theta_0(X,Y) = \nabla_X(\theta_0(Y)) - \nabla_Y(\theta_0(X)) - \theta_0([X,Y]) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = T(X,Y)$$

となる．このように，捩れ率テンソルは θ_0 を共変外微分したものである．これを $\mathbf{GL}(M)$ 上で考えると，

$$D\theta = d\theta + \omega \wedge \theta$$

となる（ここで ω は $\mathfrak{gl}(n)$ 値 1-form であるので，$\omega\wedge$ は微分形式としての積と $\mathbb{R}^n$ の作用の両方をあらわしている）．この $D\theta$ を捩れ率形式とよぶ．実際，$D\theta$ は $\mathbf{GL}(M)$ 上 $\mathbb{R}^n$ 値の 2-form であり．垂直ベクトルを入れたらゼロであり $GL(n)$ 同変である．よって，M 上の $(1,2)$ テンソルとなり，上で見たように捩れ率テンソル T に対応している．

reducitve 等質空間上で $\mathbf{GL}(M) \cong G \times_{\mathrm{Ad}} GL(\mathfrak{m})$ を考えると標準接続は線形接続を与える．逆に見れば，$G \times_{\mathrm{Ad}} GL(\mathfrak{m})$ の線形接続で主 H 束 $G \to G/H$ の標準接続へ縮約するものが存在する．よって，標準接続から導かれる線形接続に対する捩れ率を調べるには，$G \to G/H = M$ 上で考えればよい．また $T(M) = G \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{m} = G \times_H \mathbb{R}^n$ となるので，標準形式は G 上 $\mathbb{R}^n = \mathfrak{m}$ 値 1-form で H 同変なものである．それは，Maurer-Cartan 形式を使えば，

$$\theta = pr_{\mathfrak{m}}\Theta$$

となる（G 上 **Maurer-Cartan 形式を分解すると，標準接続の接続 1-form と標準形式の和になる！**）．実際，これは H 同変であり，垂直ベクトルに対してはゼロとなる．また，点 $g \in G$ における，任意の水平ベクトルは $X_g^* = dL_g X \in dL_g\mathfrak{m}$ とかけるので，

$$\theta(X_g) = pr_{\mathfrak{m}}\Theta(X) = X$$

となるので，$pr_{\mathfrak{m}}\Theta$ が標準形式である．そこで，標準接続に対する捩れ率形式は，

$$D\theta = dpr_{\mathfrak{m}}\Theta + [pr_{\mathfrak{h}}\Theta, pr_{\mathfrak{m}}\Theta]$$

となる．

Theorem 2.5.16. *reductive* 等質空間上で標準接続の捩れ率形式は

$$d(pr_{\mathfrak{m}}\Theta) + [pr_{\mathfrak{h}}\Theta \wedge pr_{\mathfrak{m}}\Theta]$$

となる．さらに $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ ならば，標準形式の捩れ率はゼロである．特に，**対称空間の標準接続は捩れ率ゼロ．またリーマン対称空間上の標準接続はレビチビタ接続に一致する．**

Proof. $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ とする．捩れ率を調べるには，水平ベクトルを代入すればよいので，$X, Y \in \mathfrak{m}$ として，左不変ベクトル場へ拡張して X^*, Y^* とすれば，

$$\begin{aligned}
&(d\theta + [\alpha \wedge \theta])(X^*, Y^*) \\
=&X^*\theta(Y^*) - Y^*\theta(X^*) - \theta([X^*, Y^*]) + [pr_{\mathfrak{h}}(X), pr_{\mathfrak{m}}(Y)] - [pr_{\mathfrak{h}}(Y), pr_{\mathfrak{m}}(X)] \\
&= 0 - 0 - pr_{\mathfrak{m}}\Theta([X, Y]^*) + 0 - 0 = -pr_{\mathfrak{m}}([X, Y]) = 0
\end{aligned}$$

となる．よって捩れ率はゼロである．

リーマン対称空間とは対称空間で G 不変計量がはいるものであった．そこで，計量が G 不変であることから，標準接続に関して $\nabla g = 0$ であり，捩れ率が零であるので，レビチビタ接続の一意性から標準接続とレビチビタ接続は一致する． □

Remark 2.5.7. 上の証明をみてわかるように，$X, Y \in \mathfrak{m}$ に対して，

$$[\theta \wedge \theta](X^*, Y^*) = [\theta(X^*), \theta(Y^*)] - [\theta(Y^*), \theta(X^*)] = 2[X, Y]$$

である．よって，reductive 等質空間上で

$$d\theta + [\alpha \wedge \theta] = -\frac{1}{2} pr_{\mathfrak{m}}[\theta \wedge \theta]$$

となる．

もう少し θ の意味を考えてみよう．$T(M)$ 上のベクトル場全体と G 上の水平ベクトル場で右 H 不変なもの全体は一対一対応する．さらに，G 上 $\mathfrak{m}$ 値関数で H 同変なもの全体と同一視できる．実際．H 同変な G 上 $\mathfrak{m}$ 値関数を s とすると，切断としては $[g, s(g)]$ が対応する．そこで，右 H 不変な水平ベクトルは

$$X_g = dL_g s(g) \in dL_g \mathfrak{m} = T_g(G)^H$$

とすればよい．s の H 同変性を使えば，これは右 H 不変であることがわかる．さらに，M 上のベクトル場に対応させるには $\pi_*(X_g) = \pi_*(dL_g s(g))$ とすればよい．

また G 上の任意の右 H 不変ベクトル場 X に対して，$g \to \theta_g(X_g)$ を考えると，G 上 $\mathfrak{m}$ 値関数で H 同変であることがわかる．つまり，切断 $[g, \theta_g(X_g)]$ を与える．

Proof. まず $\mathrm{Ad}(h)$ は $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$, $\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ という写像であったので，$pr_{\mathfrak{m}}$, $pr_{\mathfrak{h}}$ とは可換である．そこで，G 上のベクトル場 X を考えると，

$$\begin{aligned}
\theta_{gh}(X_{gh}) &= pr_{\mathfrak{m}} dL_{h^{-1}} dL_{g^{-1}} X_{gh} = pr_{\mathfrak{m}} dL_{h^{-1}} dR_h dL_{g^{-1}} dR_{h^{-1}} X_{gh} \\
&= \mathrm{Ad}(h^{-1}) pr_{\mathfrak{m}} dL_{g^{-1}} dR_{h^{-1}} X_{gh} = \mathrm{Ad}(h) pr_{\mathfrak{m}} dL_{g^{-1}} X_g \\
&= \mathrm{Ad}(h^{-1}) \theta_g(X_g)
\end{aligned}$$

となる． □

また，

$$dL_g \theta_g(X_g) = dL_g pr_{\mathfrak{m}} dL_{g^{-1}} X_g$$

となるので，$X \to dL_g \theta(X)$ は水平射影を与えていることになる．特に X が水平ベクトルなら $dL_g \theta(X) = X$ となる．

以上から，G 上の右 H 不変水平ベクトル場 X があれば，$\theta(X)$ が対応する H 同変な G 上 $\mathfrak{m}$ 値関数になる．

接束上の曲率について考える．$X(g), Y(g), Z(g)$ を H 同変な G 上 $\mathfrak{m}$ 値関数とする．これは G 上の水平ベクトルして $dL_g X(g), dL_g Y(g), dL_g Z(g) \in T_g(G)$ に対応した．そこで曲率は

$$\begin{aligned}
&(d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha])(dL_g X(g), dL_g Y(g)) \\
&= -pr_{\mathfrak{h}}([X(g), Y(g)]) = -\frac{1}{2} pr_{\mathfrak{h}}([\theta \wedge \theta])(dL_g X(g), dL_g Y(g))
\end{aligned}$$

であったので，接束上での作用は $-\mathrm{ad}(pr_{\mathfrak{h}}([X(g),Y(g)])$ である．よって，

$$R(\pi_*(dL_gX(g)),\pi_*(dL_gY(g)))\pi_*(dL_gZ(g))\to-[pr_{\mathfrak{h}}([X(g),Y(g)]),Z(g)]$$

となる．また G 上の $\mathfrak{m}$ 値関数として書けば，

$$-\frac{1}{2}[pr_{\mathfrak{h}}([\theta\wedge\theta]),\theta]$$

ともかける．

また，対称空間上の標準接続に対する曲率 $R(X,Y)Z$ を G 上の $\mathfrak{m}$ 値関数として書くと，$[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h}$ となるので，

$$-[[X(g),Y(g)],Z(g)]$$

となる．（後で別証明を与える）．

2.5.4　カルタン分解２

さて，リーマン対称空間から $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ というカルタン分解を得たが，今度はその逆について考えたい．

Definition 2.5.5. あるリー環 $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ と分解し，

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k},\quad[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{k},\quad[\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{p}$$

を満たし，$\mathrm{ad}(\mathfrak{k})|_{\mathfrak{p}}$ が $GL(\mathfrak{p})$ のあるコンパクト部分群のリー環となるとき，これをカルタン分解とよぶ．また，このとき θ を $\theta|_{\mathfrak{k}}=\mathrm{id}$, $\theta|_{\mathfrak{p}}=-\mathrm{id}$ とすれば，θ はリー環の準同形で $\theta^2=\mathrm{id}$ を満たす．これをカルタン対合（**Cartan involution**）とよぶ．

Example 2.5.17. リーマン対称空間 G/K に対して，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ はカルタン分解である．また θ_p がカルタン対合である．

カルタン分解をもつリー環からリーマン対称空間を構成したい．

いくつかの基本的な事実を述べておく．

1. （有限次元）リー環はある線形リー環 $\mathfrak{g}\subset M(n,\mathbb{F})$（$\mathbb{F}=\mathbb{C},\mathbb{R}$）に同型である．（Ado の定理）．
2. そこで $G\subset GL(n,\mathbb{F})$ を $G=\{\exp X\exp Y\cdots\exp Z\mid X,\cdots,Z\in\mathfrak{g}\}$ として作ると，$Lie(G)=\mathfrak{g}$ となる．以上から，リー環 $\mathfrak{g}$ に対して，必ずリー群 G が存在する．
3. さらに G の普遍被覆多様体 $\tilde{G}$ にリー群の構造を入れることができる．よってリー環 $\mathfrak{g}$ に対して単連結リー群 $\tilde{G}$ が必ず存在する．

4. リー環の環準同形 $\theta : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ に対して，リー群の準同形 $\tau : \tilde{G}_1 \to G_2$ で $(d\tau)_e = \theta$ となるものが唯一つ存在する（ここで $\tilde{G}_1$ は単連結であることに注意).

リー環 $\mathfrak{g}$ に対して対応する単連結リー群を G とする．カルタン対合を G の準同形 τ に拡張する．このとき $\tau^2 = \mathrm{id}$ となる（$\theta^2 = \mathrm{id}$ で id を与える群準同型は id である．よって一意性から $\tau^2 = \mathrm{id}$)．そこで，

$$(G^\tau)_0 \subset K \subset G^\tau$$

となる閉部分群 K を勝手に取ってくる（ここで G^τ は閉部分群となるのであった)．リー環を考えると，

$$Lie(K) = Lie(G^\tau) = \mathfrak{k}$$

となる．そこで，$\mathrm{ad}(\mathfrak{k})|_{\mathfrak{p}}$ が $GL(\mathfrak{g})$ のあるコンパクトな部分群のリー環であるという仮定から，$\mathrm{Ad}(K)$ は $\mathfrak{p}$ へコンパクト群とし作用する．そこで $\mathfrak{p}$ 上に $\mathrm{Ad}(K)$ 不変な内積 $(\cdot,\cdot)$ が入る．$M = G/K$ とすれば，$T_p(M) \cong \mathfrak{p}$ に内積が入る．

$$g_p(X_p, Y_p) = (X, Y)$$

とすればよい．このとき，

$$g_p(dkX_p, dkY_p) = (\mathrm{Ad}(k)X, \mathrm{Ad}(k)Y) = (X, Y) = g_p(X_p, Y_p)$$

となる．つまり，イソトロピー表現は $T_p(M)$ の内積を保存する．

一般の点 $q = gp$ に対しては，

$$g_q(X_q, Y_q) = g_p(dg^{-1}X_q, dg^{-1}Y_q)$$

とすればよい．このとき，

$$g_{gkp}(X_q, Y_q) = g_p(dk^{-1}dg^{-1}X, dk^{-1}dg^{-1}Y) = g_p(dg^{-1}X, dg^{-1}Y) = g_q(X_q, Y_q)$$

となり well-defined である．さらに，

$$\begin{aligned} g_{g'q}(dg'X_q, dg'Y_q) &= g_p(d(g'g)^{-1}dg'X_q, d(g'g)^{-1}dg'Y_q) = g_p(dg^{-1}X_q, dg^{-1}Y_q) \\ &= g_q(X_q, Y_q) \end{aligned}$$

となり G 不変計量となることがわかる．以上から $M = G/K$ 上に G 不変計量を入れることができた．よって，M はリーマン多様体である．カルタン対合 $\tau : G \to G$ から，

$$\bar{\tau} : G/K \ni gK \mapsto \tau(gK) = \tau(g)\tau(K) = \tau(g)K \in G/K$$

という微分同相写像 $\bar{\tau}$ を得るが，これが点対称となる．実際，これは点 $p = eK$ を保存し，微分 $d\bar{\tau} = \theta$ は $T_p(M) \cong \mathfrak{p}$ 上では $-\mathrm{id}$ となる．また，この $\bar{\tau}$ は等長変換となる．

Proof. 任意の $g \in G$ に対して，

$$(\bar{\tau} \circ g)(g'K) = \tau(gg')K = \tau(g)\tau(g')K = (\tau(g) \circ \bar{\tau})(g'K)$$

となる．そこで，

$$d\bar{\tau}dg = d\tau(g)d\bar{\tau}$$

となる．$q = gp = gK$ とすれば，$\bar{\tau}(q) = \tau(g)p$ であるので，

$$\begin{aligned}
&g_{\bar{\tau}(q)}(d\bar{\tau}_q X_q, d\bar{\tau}_q Y_q) = g_p(d\tau(g)^{-1}d\bar{\tau}_q X_q, d\tau(g)^{-1}d\bar{\tau}_q Y_q)\\
=&g_p(d\bar{\tau}dg^{-1}X_q, d\bar{\tau}dg^{-1}Y_q) = g_p(-dg^{-1}X_q, -dg^{-1}Y_q)\\
=&g_q(X_q, Y_q)
\end{aligned}$$

□

このように $\bar{\tau}$ は点対称を与える．**他の点 gK での点対称は $g\bar{\tau}g^{-1}$ とすればよい．**以上から M は対称空間となる．

Remark 2.5.8. 上の構成では，$\bar{\tau}$ は G に入るとは限らない．

また K を連結なものを選べば，G が単連結であること考えれば，ホモトピー完全系列から $M = G/K$ は単連結になることがわかる．逆に G 単連結として $M = G/K$ が単連結なら K は連結になる（つまり $K = (G^\tau)_0$）．

以上から次の定理を得る．

Theorem 2.5.18. 対称空間 M に対して，キリングベクトル場のリー環に対してカルタン分解を得る．逆に，**カルタン分解をもつ任意のリー環 $\mathfrak{g}$ に対して，単連結対称空間 $M = G/K$ が唯一つ定まる．**ここで G はリー環 $\mathfrak{g}$ をもつ単連結リー群であり，K はリー環 $\mathfrak{k}$ をもつ連結部分群である．

上の対応において，同じ対称空間を与えるカルタン分解をもつリー環は一つとは限らない．例えば，$O(n)$ の任意の閉部分群 K と平行移動の群 $\mathbb{R}^n$ の半直積群 G を考える．これはユークリッド群 $E(n)$ の部分群であり，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{R}^n$ というカルタン分解をもつ．そして，$\mathbb{R}^n = G/K$ となる．このように対応は一対一とは限らない．ただし，M を単連結として平坦部分をもたない場合には，対応するカルタン分解の一意性がわかる（後述）．

これまで G は等長変換群（またはその単位元連結成分）としていた．よって G は M に効果的に作用する（効果的とは恒等写像として作用するのは単位元のみ）．しかし，対称空間論ではリーマン多様体の等長変換群からでなく，上のように，G, K, τ から対応する対称空間をつくることもある．つまり，K は $(G^\tau)_0 \subset K \subset G^\tau$ かつ $\mathrm{Ad}(K)|_\mathfrak{p}$ がコンパクトとなる閉部分群とすれば，$M = G/K$ に G 不変計量をもつものが存在して，対称空間となる．このような (G, K, τ) を**リーマン対称対**という．

この場合には効果的に作用するとはかぎらない．例えば，射影空間 $\mathbb{C}P^n$ を考える．$SU(n+1)$ は $\mathbb{C}P^n$ に等長に作用することはすぐにわかる．そして，isotropy 群を求めると $S(U(1)U(n))$ であることがわかるので $\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(1)U(n))$ となる．$C = \mathbb{Z}_{n+1}$ を $SU(n+1)$ の中心とする．中心は $e^{i\theta}\mathrm{id}$ で $\det(e^{i\theta}\mathrm{id}) = e^{i(n+1)\theta} = 1$ となるものなので $\mathbb{Z}_{n+1} = \{e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}\mathrm{id} \mid k = 0, 1, \cdots, n\}$ となる．この C は $\mathbb{C}P^n$ に自明に作用することがわかる．また $C \subset S(U(1)U(n))$ である．このように，$SU(n+1)$ は $\mathbb{C}P^n$ への効果的作用でない．$G' = SU(n+1)/\mathbb{Z}_{n+1}$ とすれば効果的作用になる．

上の定理と同様にして，次が証明できる．

Corollary 2.5.19. 対称空間と効果的なリーマン対称対は 1 対 1 対応している．

Remark 2.5.9. G を等長変換群と限らないで，$M = G/K$（等質空間でよい）を考えるとき．G が効果的に作用することと，K に含まれる G の正規部分群は単位元であることと同値である．

Proof. M への作用が id となるもの全体 N は G の正規閉部分群である．またイソトロピー群 K の部分群である．

逆に，K に含まれる G の正規部分群 $\tilde{N}$ を考える．$n \in \tilde{N}$ に対して，$g\tilde{N}g^{-1} \subset \tilde{N}$ である．そこで任意の点 $gp = gK$ に対して，$ngK = gn'K = gK$ となるので，$M = G/K$ への作用は恒等写像である，

このように M への作用が id となるもの全体は K に含まれる G の正規部分群と一致する． □

また，作用が効果的なら K と $\mathrm{Ad}(K)|_{\mathfrak{p}}$ は同型である．特に $\mathrm{Ad}(K)|_{\mathfrak{p}}$ がコンパクトであることと K がコンパクトであることは同値．

Proof. 作用が効果的とする．$K \ni k \to \mathrm{Ad}(k) \subset GL(\mathfrak{p})$ が単射であることを示せばよい．$\mathrm{Ad}(K)|_{\mathfrak{p}}$ とイソトロピー表現は同値であった．作用が効果的なので $K \to O(T_p(M))$ は単射である．よって，$K \to \mathrm{Ad}(K)$ も単射． □

そこで概効果的とは K に含まれる G の正規部分群が離散群であるとして定める．これはリー環レベルでみれば $\mathfrak{k}$ に含まれる $\mathfrak{g}$ のイデアルが零のことである．例えば，$SU(n+1)$ は効果的作用でないが，概効果的作用ではあり，多くの場合が G の作用が概効果的である．また，このときは $\mathfrak{k} \to \mathrm{ad}(\mathfrak{k})|_{\mathfrak{p}}$ が単射となる．

2.6 曲率

リーマン対称空間の曲率，リッチ曲率などを考察する．

2.6.1 曲率

次の補題は一般のリーマン多様体で成立する．

Lemma 2.6.1. M をリーマン多様体とする．また $\nabla^2_{A,B}X = \nabla_A\nabla_B X - \nabla_{\nabla_A B}X$ とする．このとき，X をキリングベクトル場とすれば，

$$\nabla^2_{A,B}X = -R(X,A)B, \quad \forall A,B \in \mathfrak{X}(M)$$

となる．（これは一般のリーマン多様体上で成立）．

Proof. X はヤコビ場であったので，そこで測地線 $c(0)=q$, $c'(0)=A_q$ に対して，

$$\nabla^2_{A,A}X + R(X,A)A = 0$$

を得る．また，ビアンキ恒等式から

$$\nabla^2_{A,B}X + R(X,A)B - \nabla^2_{B,A}X - R(X,B)A = R(A,B)X + R(X,A)B - R(X,B)A = 0$$

となる．そこで，

$$\begin{aligned} 0 =& \nabla^2_{A+B,A+B}X + R(X,A+B)(A+B) \\ =& 0 + 0 + \nabla^2_{A,B}X + R(X,A)B + \nabla^2_{B,A}X + R(X,B)A \\ =& 2(\nabla^2_{A,B}X + R(X,A)B) \end{aligned}$$

となる． □

以下はリーマン対称空間の話．次の定理は標準接続のところでも述べた．

Theorem 2.6.2. $\mathfrak{p} = T_pM$ という同一視のもとで次が成立する．

$$(R(X,Y)Z)_p = -[[X,Y],Z]_p, \quad X,Y,Z \in \mathfrak{p}$$

Proof. $X,Y,Z \in \mathfrak{p} \cong T_pM$ とすれば $(\nabla X)_p = (\nabla Y)_p = (\nabla Z)_p = 0$ であった．また．$[X,Y] \in \mathfrak{k}$ より $[X,Y]_p = 0$ となるので，

$$[[X,Y],Z]_p = \nabla_{[X,Y]_p}Z - \nabla_{Z_p}[X,Y] = -\nabla_{Z_p}[X,Y]$$

である．そこで，点 p 上で，

$$\begin{aligned} &\nabla_Z[X,Y] = \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_Z\nabla_Y X \\ =& \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_{\nabla_Z X}Y - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{\nabla_Z Y}X \\ =& -R(Y,Z)X + R(X,Z)Y = R(X,Y)Z \end{aligned}$$

となる．よって，

$$(R(X,Y)Z)_p = -[[X,Y],Z]_p$$

が成立する． □

Corollary 2.6.3. 上と同様に $T_pM \cong \mathfrak{p}$ とみなす．リッチテンソルは点 p において

$$Ric(X,Y) = -\mathrm{tr}\,((\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y)|_{\mathfrak{p}})$$

となる．また T_pM 内の正規直交ベクトル $Y_p, Z_p \in \mathfrak{p} = T_pM$ による平面に対する断面曲率は

$$K(Y_p \wedge Z_p) = -g([[Y,Z],Z],Y)_p$$

となる．

Proof. 断面曲率の定義は

$$K(x \wedge y) = \frac{g(R(x,y)y,x)}{\|x\|^2\|y\|^2 - g(x,y)^2}$$

であるので，第二の主張は前定理からわかる．同様に，リッチテンソルは点 p において

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum R_{ibbj}Y^iX^j = \sum_b g(R(Y,e_b)e_b,X) = \sum g([[Y,e_b],X],e_b) \\ &= -\sum g([X,[Y,e_b]],e_b) \end{aligned}$$

となる． □

Corollary 2.6.4. ホロノミー環 $\mathfrak{h}(M,\nabla)$ は $\mathrm{ad}([\mathfrak{p},\mathfrak{p}])|_{\mathfrak{p}}$ となる．

Proof. ホロノミー環は $\mathfrak{so}(T_pM)$ の部分リー環で

$\mathfrak{h}(M,\nabla) = \{P_c^{-1}R(X,Y)_yP_c | \forall X,Y \in T_qM,\ \forall q$ s.t. q は pice-wise 曲線で p と結べる $\}$

となるのであった．そこでまず点 p で考えれば，$\mathrm{ad}([\mathfrak{p},\mathfrak{p}]) \subset \mathfrak{h}(M,\nabla)$ となることがわかる．さらに点 p からの平行移動によって動かしたものも考える必要があるが，$\nabla R = 0$ であるので，

$$P_c(R(X_p,Y_p)Z_p) = R(P_cX_p,P_cY_p)P_cZ_p$$

となるので

$$P_c^{-1}(R(P_cX_p,P_cY_p)P_c = R(X_p,Y_p)$$

となる．よって $\mathrm{ad}([\mathfrak{p},\mathfrak{p}]) = \mathfrak{h}(M,\nabla)$ となる． □

Corollary 2.6.5. 対称空間 M のイソトロピー表現が既約表現（イソトロピー既約）なら M はアインシュタイン多様体である．特に，対称空間 M が単連結でリーマン多様体として既約ならアインシュタイン多様体になる．

Proof. $T_p(M) \cong \mathfrak{p}$ の同一視のもとで，T_pM 上のイソトロピー表現は $\mathfrak{p}$ 上の Ad 表現に一致する．また正直交基底 $\{e_b\}$ に対して $\{\mathrm{Ad}(k)e_n\}$ も正規直交基底である．よって，

$$\begin{aligned}
Ric(\mathrm{Ad}(k)X, \mathrm{Ad}(k)Y) &= -\sum g([\mathrm{Ad}(k)X, [\mathrm{Ad}(k)Y, e_b]], e_b) \\
&= -\sum g([\mathrm{Ad}(k)X, [\mathrm{Ad}(k)Y, \mathrm{Ad}(k)e_b]], dke_b) \\
&= -\sum g(\mathrm{Ad}(k)[X, [Y, e_b]], \mathrm{Ad}(k)e_b) \\
&= -\sum g([X, [Y, e_b]], e_b) \\
&= Ric(X, Y)
\end{aligned}$$

となり，リッチテンソルは K 不変である．つまり，リッチテンソルを $Ric : T_pM \to T_pM$ と見たとき K の作用と可換である．特に，各固有空間は K の（実）表現空間である．そこで，イソトロピー表現が既約なら Ric は定数となるので，アインシュタイン多様体になる．二番目の主張は系 2.2.10 から従う． □

2.6.2　Lie triple system

単連結対称空間とある条件をみたすリー環を一対一対応させよう．それは，Lie triple system と呼ばれる．対称空間に対して，カルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ というが成立した．また $\mathfrak{p}$ 上には曲率を使って，

$$(x, y, z) \mapsto R(x, y)z = -[[x, y], z] \in \mathfrak{p}$$

という写像が存在する．ここで x, y について交代であり，ビアンキ恒等式をみたす．また，K は等長変換なので，この写像を保存する．つまり

$$(R(x, y)z, w) = (R(\mathrm{Ad}(k)x, \mathrm{Ad}(k)y)\mathrm{Ad}(k)z, \mathrm{Ad}(k)w)$$

となる．よって，$A \in \mathfrak{k}$ に対して，

$$AR(x, y)z = R(Ax, y)z + R(x, Ay)z + R(x, y)Az$$

となる．特に，$A = R(v, w) \in \mathfrak{k}$ に対しても上の式が成立する．

Definition 2.6.1. ユークリッド空間に三重積

$$(x, y, z) \to R(x, y)z. \quad (R(x, y) = -R(x, y), \quad R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0)$$

が入っているとする．これが，**Lie triple system** とは，$A = R(u, v)$ として

$$AR(x,y)z = R(Ax,y)z + R(x,Ay)z + R(x,y)Az, \quad (Ax,y) + (x,Ay) = 0$$

を満たすときをいう．

Example 2.6.6. 対称空間上 M に対して，$(\mathfrak{p}, R)$ を考えれば，*Lie triple system* が唯一つ定まる．実際 $M = G/K = G'/K'$ としても，同じ *Lie triple system* を与える．

Lie triple system $(\mathfrak{p}, R)$ が与えられたとする．$(\mathfrak{p}, R)$ の内積および R を保存する群の単位元連結成分を K とする．このリー環 $\mathfrak{k}$ は $R(v, w)$（$\forall v, w$）を含む．$\mathfrak{g} := \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする．これにリー環構造を定める．$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ はすでに定義されている．$[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}]$ は K の $\mathfrak{p}$ への作用の微分として定義する．また $x, y \in \mathfrak{p}$ に対して，$[x, y] := -R(x, y) \in \mathfrak{k}$ とする．このとき $\mathfrak{g}$ はリー環になる．

Proof. 例えば，$x, y, z \in \mathfrak{p}$ に対して，

$$[[x,y],z] = -R(x,y)z = R(y,z)x + R(z,x)y = -[[y,z],x] - [[z,x],y]$$

となるのでヤコビ律が成立．

また $x, y \in \mathfrak{p}$, $z \in \mathfrak{k}$ に対しては，（作用を ρ と書いている）．

$$\begin{aligned}
&\rho([[x,y],z])w = -\rho([R(x,y),z])w = -\rho(R(x,y))\rho(z)w + \rho(z)\rho(R(x,y))w \\
&\rho([[y,z],x])w = -\rho([\rho(z)y,x])w = \rho(R(\rho(z)y,x))w = -\rho(R(x,\rho(z)y))w \\
&\rho([[z,x],y])w = -\rho(R(\rho(z)x,y))w
\end{aligned}$$

となる．そこで $z \in \mathfrak{k}$ なので，ヤコビ律が成立．

$x \in \mathfrak{p}$, $y, z \in \mathfrak{k}$ に対しては，

$$\begin{aligned}
&[[x,y],z] = -[\rho(y)x,z] = \rho(z)\rho(y)x \\
&[[y,z],x] = \rho([y,z])x \\
&[[z,x],y] = [\rho(z)x,y] = -\rho(y)\rho(z)x
\end{aligned}$$

となるのでヤコビ律が成立する．$x, y, z \in \mathfrak{k}$ の場合は定義から明らか．　□

よって，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ はリー環であり，カルタン分解になっている．また $\mathfrak{p}$ 上には $\mathrm{Ad}(K)$ 不変な内積が入っていた．よって，単連結対称空間が唯一つ定まる．以上から

Theorem 2.6.7. 単連結対称空間と ***Lie triple system*** は一対一対応する．

2.6.3　例

Example 2.6.8 (ユークリッド空間)．ユークリッド群

$$E(n) = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \alpha \in O(n), \beta \in \mathbb{R}^n\} \subset GL(n+1, \mathbb{R})$$

を考える．このカルタン対合は

$$s_q\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，$SO(n) = (E(n))^{s_q} \subsetneq K = O(n)$ となる．実際，原点での点対称を σ_0 とすれば．

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので，

$$\sigma_0 g \sigma_0^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．

また

$$E'(n) = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \alpha \in SO(n), \beta \in \mathbb{R}^n\} \subset GL(n+1, \mathbb{R})$$

として．$\mathbb{R}^n = E'(n)/SO(n)$ ともみなせるが，この場合は $SO(n) = (E(n))^{s_q} = K$ である．

$$\mathfrak{p} = \{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}^n\}, \quad g(\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \langle x, y \rangle$$

として $\mathfrak{p}$ 上に $\mathrm{Ad}(K)$ 不変な内積がはいる．

測地線について考える．原点において $T_0(\mathbb{R}^n) \cong \mathfrak{p}$ であった．$X \in \mathfrak{p}$ とすれば，X が引き起こすベクトル場はキリングベクトル場であり，そのベクトル場が引き起こす 1 パラメータ変換群を e^{tX} とすれば，$e^{tX}(0)$ は 0 を通る測地線である．そこで，

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$$

が引き起こす 1 パラメータ変換群 e^{tX} は

$$e^{tX} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & t\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので．これを原点へ作用させると

$$I \cdot \mathbf{0} + t\beta = t\beta$$

となるので，測地線は $t\beta$ となる．

Example 2.6.9 (球面)．$S^n = SO(n+1)/SO(n)$ とする．北極における点対称は $\sigma_p = \mathrm{diag}(1, -1, \cdots, -1) \in O(n+1)$ であった．よって，

$$s_p : SO(n+1) \ni g \mapsto \sigma_p g \sigma_p^{-1} \in SO(n+1)$$

である．そこで，$SO(n+1)^{s_p}$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SO(n) = O(n)^+ \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & O(n)^- \end{pmatrix}$$

となるので $SO(n+1)^{s_p} = O(n)$，$(SO(n+1)^{s_p})_0 = SO(n)$ となる．よって，$(G^{s_p})_0 \subset K = SO(n) \subsetneqq G^{s_p}$ となる．

一方 $S^n = O(n+1)/O(n)$ となるので，この場合には $SO(n) \subsetneqq K = O(n+1)^{s_p} = O(n)$ となる．

また $\mathfrak{p} = T_p(S^n)$ は，

$$\mathfrak{p} = \{\begin{pmatrix} 0 & -\xi^t \\ \xi & 0 \end{pmatrix} | \xi \in \mathbb{R}^n\}, \quad g(X,Y) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\, XY = \xi^t \eta$$
$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\xi^t \\ \xi & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -\eta^t \\ \eta & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$$

となる．

測地線を考えてみよう．$\xi = e_1$ とすれば，

$$e^{t\xi} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & \cdots & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

となり，これを $(1, 0, \cdots 0)$ へ作用させれば，

$$(\cos t, \sin t, 0, \cdots, 0)$$

となる．これが北極を通る測地線になる．その他の北極を通る測地線はイソトロピー群 $SO(n)$ を作用させることによって得られる（これは対称空間のランクが 1 であることから）．

次に曲率を計算する．

$$[[\begin{pmatrix}0 & -\xi^t\\ \xi & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -\eta^t\\ \eta & 0\end{pmatrix}],\begin{pmatrix}0 & -\zeta^t\\ \zeta & 0\end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix}-\xi^t\eta+\eta^t\xi & 0\\ 0 & -\xi\eta^t+\eta\xi^t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -\zeta^t\\ \zeta & 0\end{pmatrix}]$$
$$=\begin{pmatrix}0 & *\\ -\xi\eta^t\zeta+\eta\xi^t\zeta-\zeta\xi^t\eta+\zeta\eta^t\xi & 0\end{pmatrix}$$

ここで，$-\xi^t\eta+\eta^t\xi = -(\xi,\eta)+(\eta,\xi)=0$ となるので，よって，

$$R(\xi,\eta)\zeta = -(-\xi\eta^t\zeta+\eta\xi^t\zeta) = (\eta,\zeta)\xi-(\xi,\zeta)\eta = (\xi\wedge\eta)(\zeta)$$

となる．また断面曲率は,ξ,η を正規直交ベクトルとすれば,

$$K(\xi,\eta) = g(R(\xi,\eta)\eta,\xi) = ((\eta,\eta)\xi-(\xi,\eta)\eta,\xi) = 1$$

となるので，断面曲率が 1 となる定曲率空間となることがわかる．

点 p を通る全測地的部分多様体を得るには，$\mathfrak{p}'\subset\mathfrak{p}$ で，$[[\mathfrak{p}',\mathfrak{p}'],\mathfrak{p}']\subset\mathfrak{p}'$ となるものを探せばよい．球面の場合には，

$$\mathfrak{p}' = \{\xi\in\mathbb{R}^n|\xi^k=0,\ m+1\le k\le n\}$$

であることがわかる．このとき対応する部分多様体は，$SO(m+1)/SO(m)$ となる．また，球面の他の全測地的多様体は，$SO(n+1)$ の作用で回せば得られる．

Remark 2.6.1. 上の例 $S^n=SO(n+1)/SO(n)$ において，n が奇数なら $\sigma_p\notin SO(n+1)$ である．もちろん $S^n=O(n+1)/O(n)$ とすれば $\sigma_p\in O(n+1)$ となる．リーマン対称空間を考える場合に，これまで G は等長変換群全体としてきたが，そうでない場合も扱いたい（例えば $S^n=SO(n+1)/SO(n)$）．その場合にはカルタン対合 s_p は内部自己同型でない場合もある．

Example 2.6.10 (双曲空間). 双曲空間 $H^n = O^+(1,n)/O(n)$ を考える．点 $p=(1,0,\cdots,0)\in H^n\subset\mathbb{R}^{1,n}$ での点対称は $\sigma_p=\mathrm{diag}(1,-1,\cdots,-1)$ であった．よって，カルタン対合は

$$O^+(1,n)\ni g\mapsto\sigma_p g\sigma_p^{-1}\in O^+(1,n)$$

である．$\mathfrak{p}=T_p(H^n)$ は

$$\mathfrak{p}=\{\begin{pmatrix}0 & \xi^t\\ \xi & 0\end{pmatrix}|\xi\in\mathbb{R}^n\},\quad g(X,Y)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,XY\quad X,Y\in\mathfrak{p}$$

となる．

測地線について見てみよう，$\xi = e_1$ とすれば，

$$e^{t\xi} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & \cdots & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

となり，これを $(1, 0, \cdots 0)$ へ作用させれば，

$$(\cosh t, \sinh t, 0, \cdots, 0)$$

となる．これが $(1, 0, \cdots, 0)$ を通る測地線になる．その他の測地線はイソトロピー群 $O(n)$（$or\ SO(n)$）を作用させることによって得られる（これは対称空間のランクが 1 であることから）．

曲率は $R(\xi, \eta) = -\xi \wedge \eta$ で与えられ，断面曲率が -1 の定曲率空間である．

全測地的部分多様体は，球面と同様に

$$\mathfrak{p}' = \{\xi \in \mathbb{R}^n | \xi^k = 0,\ m + 1 \leq k \leq n\}$$

で与えられる．

Example 2.6.11 (グラスマン多様体)**.** グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n) = O(n)/O(k) \times O(n-k)$ を考える．$E = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ における点対称は，$E = \mathbb{R}^k$ に関する鏡映であるので，

$$\sigma_E = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{k}, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{n-k})$$

である．よって，カルタン対合は

$$O(n) \ni g \mapsto \sigma_E g \sigma_E^{-1} \in O(n)$$

となる．また $\mathfrak{p} = \{\begin{pmatrix} 0 & -\xi^t \\ \xi & 0 \end{pmatrix} | \xi \in M(k, n-k)\}$ となる．内積は $-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(xy)$ で定めればよい．

$k = 1$ のときは，実射影空間 $\mathbb{R}P^{n-1}$ である．

複素グラスマン $SU(n)/S(U(k) \times U(n-k))$ の場合も同様にすればよいが，内積は $-2\mathrm{tr}\,(xy)$ とする．また四元数グラスマン多様体 $Sp(n)/Sp(k) \times Sp(n-k)$ の場合には，内積は $-\mathrm{tr}\,(xy)$ とする．

Example 2.6.12 (コンパクトリー群)**.** $G = G \times G/G$ という対称空間を考える．原点での点対称は $\sigma_e(g) = g^{-1}$ であった．そこで，$(k, h) \in G \times G$ として，

$$\sigma_e(k, h)\sigma_e(g) = (kg^{-1}h^{-1})^{-1} = hgk^{-1} = (h, k)g$$

である．よってカルタン対合は

$$s_e : G \times G \ni (k,h) \to (h,k) \in G \times G$$

である．そして，その固定点集合は $diag(G)$ となる．

$\mathfrak{k} = \{(x,x) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} | x \in \mathfrak{g}\}$，$\mathfrak{p} = \{(x,-x) | x \in \mathfrak{g}\}$ とする．内積を $g((x,-x),(y,-y)) = 4\langle x,y\rangle$ とする．$\Phi : G \times G/G \ni [g,h] \to gh^{-1} \in G$ とすれば，G の対称空間としての表示となる．実際，$\Phi \circ s_e(g,h) = \Phi(h,g) = hg^{-1}$．$\sigma_e \circ \Phi(g,h) = \sigma_e(gh^{-1}) = hg^{-1}$ となるので，$\Phi \circ s_e \circ \Phi^{-1} = \sigma_e$ となる．そして，$d\Phi : \mathfrak{p} \ni (x,-x) \mapsto x - (-x) = 2x \in \mathfrak{g}$ となるので，

$$\mathfrak{p} \ni (x,-x) \mapsto 2x \in \mathfrak{g}$$

という対応となっている（そこで, 内積としては $g((x,-x),(y,-y)) = 4\langle x,y\rangle$）．$(x,-x) \in \mathfrak{p}$ に対する 1 パラメータ変換群 $(\exp tx, \exp -tx)$ を考えて，これを単位元 e に作用させると $(\exp tx)e(\exp -tx)^{-1} = \exp 2tx$ となる．よって，$x \in \mathfrak{g}$ に対する測地線は $\exp tx$ となる．

$(x,-x)$ からのキリングベクトル場は $\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(e^{tx})g|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{tx}ge^{tx}|_{t=0} = dR_g x + dL_g x$ となり，これがキリングベクトル場となる．また，$(x,x)\mathfrak{k}$ の作用を考えると $dR_g x - dL_g x$ となる．特に，$\frac{1}{2}((x,-x)-(x,x)) = (0,-x)$ が生成するベクトル場が G の左不変ベクトル場に対応する．そこで，共変微分を考えると．

$$\nabla_{(0,-x)}(0,-y) = \frac{1}{4}\nabla_{(x,-x)-(x,x)}((y,-y)-(y,y)) = \frac{1}{4}\nabla_{(x,-x)}(y,y) = [(x,-x),(y,y)]$$
$$= \frac{1}{4}([x,y],-[x,y])$$

となるので，$(\nabla_X Y)_e = \frac{1}{4}([x,y],-[x,y])$ となる．つまり，$\frac{1}{2}[x,y] \in \mathfrak{g}$ に対応する．以上から，G 上左不変ベクトル場 X, Y に対して，$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$ が成立する．

これは，次のように直接示すこともできる．レビチビタ接続の定義の仕方から

$$2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \langle[X,Y],Z\rangle - \langle[X,Z],Y\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle$$

となるが，左不変ベクトル場であるので，$\langle X,Z\rangle$ なども左不変，つまり定数であるので，

$$2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = \langle[X,Y],Z\rangle - \langle[X,Z],Y\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle$$

さらに，計量が両側不変であるので，$-\langle[X,Z],Y\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle = -\langle[X,Z],Y\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle = 0$ となるので，$2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = \langle[X,Y],Z\rangle$ が成立し，$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$.

そして，$\exp tX$ の接ベクトルは X であるので，これが $\nabla_X X = \frac{1}{2}[X,X] = 0$ となるので，測地線である．

Exercise 2.6.13. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle$ を計算することにより，$R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]$ を示せ（$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$）.

そこで $\langle R(X,Y)Y, X\rangle = \frac{1}{4}|[X,Y]|^2$ となり，断面曲率は 0 以上となる．

Proposition 2.6.14. *G をコンパクトリー群とすると，指数写像は全射*

Proof. G をコンパクトリー群とすれば，計量を平均化して，両側不変計量が存在し，対称空間となる．任意の点と原点を測地線で結べるが，原点からの測地線は $\exp tX$ の形をしている．よって，指数写像は全射となる．□

Example 2.6.15 (複素射影空間)**.** 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n = U(n+1)/(U(1)\times U(n))$ を考える．$\mathfrak{g}$ は $n\times n$ は歪エルミート行列の全体である．またカルタン対合は，

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

とすれば，

$$U(n+1) \ni g \mapsto \sigma_0 g \sigma_0^{-1} \in U(n+1)$$

となる．そこで，$\mathfrak{p}$ は行列

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -x^* \\ x & 0_n \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad (X,Y) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(XY) = \frac{1}{2}(x^*y + y^*x) = \Re(x^*y)$$

となる．K の Ad 作用は $a \in U(1)$, $A \in U(n)$ として，

$$\mathrm{Ad}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 & -x^* \\ x & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\bar{a}Ax)^* \\ \bar{a}Ax & 0_n \end{pmatrix}$$

となる．

測地線を考える．球面の場合と同様であり，斉次座標で書けば，$p = [1;0;\cdots;0] \in \mathbb{C}P^n$ を通る測地線で，接ベクトルが $(1,0,\cdots,0) \in \mathfrak{p}$ に対応するものは，

$$[\cos t; \sin t; 0; \cdots; 0] \in \mathbb{C}P^n$$

となる．これは複素射影直線 $P_1 = [z_0; z_1; 0, \cdots, 0]$ に含まれることに注意する．また，p を通るほかの測地線は $U(1)\times U(n)$ の作用で写したものとして得られる．

曲率を計算しよう．$x, y, z \in \mathbb{C}^n$ が $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$ に対応するとすれば，

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y)Z = -[[X,Y],Z] \\
&= -\left[\begin{pmatrix} 0 & -x^* \\ x & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -y^* \\ y & 0_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -y^* \\ y & 0_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -x^* \\ x & 0_n \end{pmatrix}, Z\right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} -x^*y + y^*x & 0 \\ 0 & -xy^* + yx^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -z^* \\ z & 0_n \end{pmatrix}\right] \\
&= -\begin{pmatrix} -x^*y + y^*x & 0 \\ 0 & -xy^* + yx^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -z^* \\ z & 0_n \end{pmatrix} \\
&\qquad + \begin{pmatrix} 0 & -z^* \\ z & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x^*y + y^*x & 0 \\ 0 & -xy^* - yx^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -(xy^*z - yx^*z - zx^*y + zy^*x)^* \\ xy^*z - yx^*z - zx^*y + zy^*x & 0_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので，

$$R(x,y)z = z(y^*x - x^*y) + x(y^*z) - y(x^*z) \in \mathbb{C}^n$$

となる．ここで

$$i\langle x, iy\rangle = i\Re x^*iy = \frac{1}{2}(-x^*y - y^*x) = -y^*x$$

となるので，書き換えると，

$$R(x,y)z = \{x \wedge y + ix \wedge iy + 2\langle x, iy\rangle i\}z$$

となる．

特に，

$$r(x,y)y = y(y^*x - 2x^*y) + x(y^*y)$$

となる．$\|y\| = y^*y = 1$ となる $y \in \mathbb{C}^n$ と，y に直交する $x \in \mathbb{C}^n$ をとる．つまり，$\Re x^*y = \frac{1}{2}(x^*y + y^*x) = 0$ である．このとき，

$$r(x,y)y = x + 3\langle x, iy\rangle iy$$

となる．そこで $y^\perp$ 上で $r(\cdot, y)y$ の固有値は $\{y, iy\}^\perp$ 上で 1 であり，iy 上では 4 となる．つまり実平面上で断面曲率は 1 で，複素直線上で断面曲率は 4 となる（i が複素構造を与えているので）．このように $\mathbb{C}P^n$ 上で断面曲率は 1 から 4 までの間を動く．

Example 2.6.16 (有界対称領域)**.** 次の空間を考える．

$$M' = \{Z' = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_0 \end{pmatrix} | Z_0 \in M(p, p : \mathbb{C}),\ Z_1 \in M(p, q; \mathbb{C}),\ -Z_0^*Z_0 + Z_1^*Z_1 = -I_p\}$$

さらに，$B \in U(p)$ に対して，$Z' \mapsto Z'B$ という作用を考えて，

$$-B^*Z_0^*Z_0B + B^*Z_1^*Z_1B = B^*(-I_p)B = -I_p$$

であるので，商空間 $M'/U(p)$

$$M = \{ \left[\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix}\right] | Z_0 \in M(p,p:\mathbb{C}),\ Z_1 \in M(p,q;\mathbb{C}), \quad -Z_0^* Z_0 + Z_1^* Z_1 = -I_p \}$$

を考える．べつの見方をすると，$\mathbb{C}^{p+q}$ 上に

$$F(z,w) = z^t S\bar{w}, \quad S = \mathrm{diag}(\underbrace{-1,\cdots,-1}_{p},\underbrace{1,\cdots,1}_{q})$$

というエルミート形式を考えたとき，$[Z']$ は $\mathbb{C}^{p+q}$ の p 次元部分空間で $F(x,x) \leq 0$（$x \in V$）となるものである．

$$U(p,q) = \{A \in GL(p+q,\mathbb{C}) | A^*SA = S\} = \{A \in GL(p+q,\mathbb{C}) | F(Ax,Ay) = F(x,y)\}$$

を考える．これは連結なリー群になることがわかる．さらに，

$$U(p+q) \times M \ni (A,[Z']) \mapsto [AZ'] \in M$$

は推移的な作用となる．

Proof.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(p+q) \iff A^*A - C^*C = I_p,\ -B^*B + D^*D = I_q,; A^*B - C^*D = 0$$

であるので，

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AZ_0 + BZ_1 \\ CZ_0 + DZ_1 \end{pmatrix}$$

であるので，

$$\begin{aligned}
&-(AZ_0+BZ_1)^*(AZ_0+BZ_1) + (CZ_0+DZ_1)^*(CZ_0+DZ_1) \\
=&-(Z_0^*A^* + Z_1^*B^*)(AZ_0+BZ_1) + (Z_0^*C^* + Z_1^*D^*)(CZ_0+DZ_1) \\
=&-Z_0^*(-A^*A + C^*C)Z_0 + Z_1^*(-B^*B + D^*D)Z_1 + Z_0^*(-A^*B + C^*D)Z_1 \\
&\qquad + Z_1^*(-B^*A + D^*C)Z_1 \\
=&-Z_0^*Z_0 + Z_1^*Z_1 = -I_p
\end{aligned}$$

となるので well-defined である．□

また，$[\binom{I_p}{0}] \in M$ の *isotropy* 群は

$$U(p) \times U(q) = \{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} | B \in U(p),\ C \in U(q)\}$$

であり，$M=U(p+q)/U(p)\times U(q)$ となる．また，カルタンタ対合を

$$U(p,q)\ni A\mapsto SAS^{-1}\in U(p,q)$$

で与えることにより，対称空間となる．原点 $[\binom{I}{0}]$ での点対称は

$$\sigma_0([\begin{pmatrix} Z_0\\ Z_1\end{pmatrix}])\mapsto[\begin{pmatrix} Z_0\\ -Z_1\end{pmatrix}]$$

となる．

$$\mathfrak{u}(p,q)=\{A\in\mathfrak{gl}(p+q,\mathbb{C}|X^*S+SX=0\}$$

である．M の接空間は

$$\mathfrak{p}=\{\begin{pmatrix} 0 & Z^*\\ Z & 0\end{pmatrix}|Z\in M(q,p,\mathbb{C})\},\quad g(X,Y)=2\mathrm{tr}\,(XY)$$

次に M の有界領域表示を考える（これが局所座標を与えている）．

$$D_{q,p}=\{Z\in M(q,p):\mathbb{C})|I_q-Z^*Z>0\}\cong D_{p,q}$$

とする．ここで，$(I_q-Z^*Z)^*=I_q-Z^*Z$ であるので，エルミート行列である．「>0」の定義は正定値であること．

$$\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in U(p+q)$$

に対して．1 次分数変換

$$U(p+q)\times D_{q,p}\ni(\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix},Z)\mapsto W=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}\in D_{q,p}$$

として作用を考える．$Z\in D_{q,p}$ のとき，

$$\begin{aligned}(CZ+D)^*(CZ+D)&=Z^*C^*CZ+D^*D+D^*CZ+Z^*C^*D\\&=Z^*(A^*A-I_p)Z+(B^*B+I_q)+B^*AZ+Z^*A^*B\\&=I_q-Z^*Z+(AZ+B)^*(AZ+B)>0\end{aligned}$$

であるので，$(CZ+D)^{-1}$ は存在する．

Proof. P が正則であることと $P^*P>0$ は同値であることを示せばよい．P が正則なら $x\neq 0$，$Px\neq 0$ であり，$(Px,Px)>0$ である．逆に，$P^*P>0$ とすれば，P^*P は正則である．$Px=0$ とすれば，$P^*Px=0$ となるので，$x=0$ である．よって，P は正則．　□

そして，

$$\begin{aligned}I_q-W^*W&=I_q-((CZ+D)^*)^{-1}(AZ+B)^*(AZ+B)(CZ+D)^{-1}\\&=I_q-((CZ+D)^*)^{-1}\{(CZ+D)^*(CZ+D)-(I_q-Z^*Z)\}(CZ+D)^{-1}\\&=((CZ+D)^*)^{-1}(I_q-Z^*Z)(CZ+D)^{-1}>0\end{aligned}$$

となる．

Proof. $B > 0$，A が正則のとき $A^*BA > 0$ を示せばよい．$(Bx, x) > 0$ より，$(A^*BAx, x) = (BAx, Ax)$ となるが，A が正則行列なので，$(A^*BAx, x) > 0$. □

以上から，$U(p,q)$ が $D_{q,p}$ に作用することがわかった．さらに，推移的作用であることもわかる．*isotropy* 群をもとめよう．$Z = 0 \in D_{q,p}$ に対して，

$$(A0 + B)(C0 + D)^{-1} = BD^{-1} = 0$$

より，$B = 0$ を得る．さらに $C = 0$ となるので，

$$U(p) \times U(q) = \{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} | B \in U(p),\ C \in U(q) \}$$

となり，$D_{q,p} \cong D_{p,q} = U(p,q)/U(p) \times U(q)$ となる．また，ケーラー形式を

$$\omega = 4i\partial\bar{\partial} \log \det(I_q - Z^*Z)$$

とすれば，明らかに $U(p,q)$ の作用で不変である．原点 0 での点対称は

$$\sigma_0(Z) = -Z \quad Z \in D_{q,p}$$

となる．

さて，さきほどの M との対応を見ていこう．$[Z] \in M$ に対して，

$$Z_0^* Z_0 = I_p + Z_1^* Z_1 > 0$$

となる．よって，Z_0^{-1} が存在する．そこで，

$$M \ni [Z] = [\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix}] \mapsto Z = Z_1 Z_0^{-1} \in D_{p,q}$$

を考えると，

$$\begin{aligned} I_p - Z^*Z &= I_p - (Z_0^*)^{-1} Z_1^* Z_1 Z_0^{-1} \\ &= (Z_0^*)^{-1}(Z_0^* Z_0 - Z_1^* Z_1) Z_0^{-1} \\ &= (Z_0^*)^{-1} Z_0^{-1} > 0 \end{aligned}$$

となる．これは全単射写像となる．

Proof. $Z \in D_{p,q}$ に対して，$I - Z^*Z > 0$ であるので，正定値エルミート行列 P で．$I - Z^*Z = P^2$ となるものが存在する．$Z_0 = P^{-1}$，$Z_1 = ZP^{-1}$ として，$Z' = \binom{Z_0}{Z_1}$ とすれば，$Z = Z_1 Z_0^{-1}$ となる． □

Remark 2.6.2. $D_{1,n} = D_n(\mathbb{C})$ とする．これを $\mathbb{C}^n$ での単位開球とよぶ．つまり，$D_n(\mathbb{C}) = \{Z \in \mathbb{C}^n | \|Z\| < 1\}$ である．これを**複素双曲空間**とよぶ．このときの計量は

$$ds^2 = 4\frac{(1-\sum z^i \bar{z}^i)(\sum dz_i d\bar{z}_i) - (\sum \bar{z}_i dz_i)(\sum z_i d\bar{z}_i)}{(1-\sum z_i \bar{z}_i)^2}$$

Remark 2.6.3. 以上の話は，$O(p,q)/O(p) \times O(q)$，$Sp(p,q)/Sp(p) \times Sp(q)$ に対しても同様のことが成立する．

Remark 2.6.4. $\mathbb{C}P^n$ 内の 2 次形式が定める複素多様体（ケーラー）

$$Q_{n-1}(\mathbb{C}) = \{[z] \in \mathbb{C}P^n | (z^0)^2 + \cdots + (z_n)^2 = 0\}$$

は対称空間として $SO(n+1)/SO(2) \times SO(n-1)$ となる．

2.7　キリング形式

2.7.1　キリング形式

少しの間，リー群の基本的な事実を述べる．

G をリー群として $\mathfrak{g}$ をリー環とする．$h \in G$ に対して，リー環の内部自己同型を

$$Int(h) : G \ni g \mapsto hgh^{-1} \in G$$

とする．

Definition 2.7.1. G の随伴表現とは $\mathfrak{g}$ への表現であり，

$$\mathrm{Ad} : G \ni h \mapsto d(Int(h))_e \in Gl(\mathfrak{g})$$

のこと．

Lemma 2.7.1. Ad はリー環の準同形を与える．つまり $h \in G$, $\mathrm{Ad}(h) \in Gl(\mathfrak{g})$ とすれば，

$$\mathrm{Ad}(h)[X,Y] = [\mathrm{Ad}(h)X, \mathrm{Ad}(h)Y]$$

となる．

Proof. $he^{tX}Ye^{-tX}h^{-1} = (he^{tX}h^{-1})(hYh^{-1})(he^{-tX}h^{-1})$ を微分すればよい． □

Definition 2.7.2. $\mathfrak{g}$ の随伴表現は

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \ni X \mapsto (d\mathrm{Ad})_e(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

のこと．このとき

1. $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$.
2. $\mathrm{ad}(X)[Y, Z] = [\mathrm{ad}(X)Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}(X)Z]$.
3. $e^{\mathrm{ad}X} = \mathrm{Ad}(e^X)$.

であることは明らか．また，ad の kernel は，$\mathfrak{g}$ の中心であることに注意する．つまり $\ker \mathrm{ad} = \mathfrak{z}$.

Definition 2.7.3. $\mathfrak{g}$ のキリング形式とは，次で与えられる二次形式のこと．

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \mapsto \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y) \in \mathbb{R}$$

さらに，この B が非退化のとき $\mathfrak{g}$（または G）を半単純とよぶ．

Lemma 2.7.2. B は対称であり G および $\mathfrak{g}$ の随伴表現と可換．つまり

$$B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) = B(X, Y), \quad B(\mathrm{ad}(X)Y, Z) + B(Y, \mathrm{ad}(Y)Z) = 0$$

となる．

Proof. 直接計算すればよい． □

Example 2.7.3.

- $\mathfrak{o}(n)$ のキリング形式を計算すると，

$$B(X, Y) = (n-2)\mathrm{tr}\,XY = -(n-2)\mathrm{tr}\,X^tY$$

- $\mathfrak{su}(n)$ なら，

$$B(X, Y) = 2n\mathrm{tr}\,XY = -2n\mathrm{tr}\,X^*Y$$

- $\mathfrak{sp}(n) = \{X \in M(2n, \mathbb{C}) | X^tJ + JX = 0,\ X^* + X = 0\}$ なら

$$B(X, Y) = (2n+2)\mathrm{tr}\,XY = -(2n+2)\mathrm{tr}\,X^*X$$

Lemma 2.7.4. $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルとする．$\mathfrak{a}$ 自身のキリング形式を $B_{\mathfrak{a}}$ とすれば，$x, y \in \mathfrak{a}$ に対して，

$$B(x, y) = B_{\mathfrak{a}}(x, y)$$

Proof. $\mathfrak{a}$ がイデアルのであるので，ad 表現の不変部分空間である．そこで，$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 上で ad を考えて，

$$\rho(x) = \mathrm{ad}(x)|_{\mathfrak{a}}, \quad \rho'(x) = \mathrm{ad}(x)|_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} \quad (x \in \mathfrak{g})$$

とする．適当に $\mathfrak{g}$ の基底を取れば，$\mathrm{ad}(x)$ の表現行列は

$$\mathrm{ad}(x) = \begin{pmatrix} \rho(x) & * \\ 0 & \rho'(x) \end{pmatrix}$$

とできる．さて，$x, y \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$B(x,y) = \mathrm{tr}\,(\rho(x)\rho(y)) + \mathrm{tr}\,(\rho'(x)\rho'(y))$$

となる．$x \in \mathfrak{a}$ に対して，$\rho(x) = \mathrm{ad}|_{\mathfrak{a}}(x)$，$\rho'(x) = 0$ であるので，

$$B(x,y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}|_{\mathfrak{a}}(x)\mathrm{ad}|_{\mathfrak{a}}(y)) = B_{\mathfrak{a}}(x,y)$$

□

さて対称空間 $M = G/K$ の場合に話を戻す．$\mathfrak{p} \cong T_pM$ であった．この $\mathfrak{p}$ 上には二つの内積が入っている．$Y, Z \in \mathfrak{p}$ に対して，

1. リーマン計量を用いた $g(Y_p, Z_p)$（これは正定値内積）
2. キリング形式を用いた $B_{\mathfrak{p}}(Y.Z)$（こちらは非退化もいえない可能性がある）．

である．この二つの関係をしらべてみよう．

次のことはすでに証明してあった．

Lemma 2.7.5. $\mathrm{Ad}(K)$ は $\mathfrak{p}$ を不変にする．また，B を保存し，$T_p(M) \cong \mathfrak{p}$ 上の内積 $g(Y_p, Z_p)$ も保存する．

Lemma 2.7.6. $X \in \mathfrak{k}, Y \in \mathfrak{p}$ に対して $B(X,Y) = 0$ である．つまり $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ はキリング形式に関して直交する．

Proof. カルタン対合 θ は環同型写像で $\theta^2 = \mathrm{id}$ であったので，

$$\theta(\mathrm{ad}(X)Z) = \mathrm{ad}(\theta X)\theta Z$$

となり，$\mathrm{ad}(\theta(X)) = \theta\mathrm{ad}(X)\theta$ となる．そこで，

$$\mathrm{ad}(\theta(X))\mathrm{ad}(\theta(Y)) = \theta\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Z)\theta$$

となる．トレースを取れば，$B(\theta(X), \theta(Y)) = B(X,Y)$ となる．よって $X \in \mathfrak{k}, Y \in \mathfrak{p}$ なら $B(X,Y) = B(\theta(X), \theta(Y)) = -B(X,Y)$ となる． □

Remark 2.7.1. 上の証明をみればわかるように，一般に $\mathfrak{g}$ 上の自己同型写像 α があれば，$B(\alpha(X), \alpha(Y)) = B(X,Y)$ が成立する．

Lemma 2.7.7. キリング形式 B は $\mathfrak{k}$ 上で負定値である．（ただし，$\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{g}$ の中心としたとき，$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$ と仮定する．この仮定は $M = G/K$ としたとき G の作用が概効果的なら問題ない）．

Proof. $\mathrm{Ad}(K)$ はコンパクト群であったので $\mathrm{Ad}(K)$ 不変な内積が $\mathfrak{g}$ 上に存在する．そこで，$X \in \mathfrak{k}$ として，

$$(\mathrm{ad}(X)Y, Z) + (Y, \mathrm{ad}(X)Z) = 0$$

となる．この内積に関して正規直交基底をとり，$\mathrm{ad}(X)$ をその基底に対して $X = (a_{ij})_{i,j}$ とする．このとき

$$B(X,X) = \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}X\mathrm{ad}X = \sum a_{ij}a_{ji} = \sum a_{ij}(-a_{ji}) = -\sum a_{ij}^2 \leq 0$$

となる．また $B(X,X) = 0$ とすれば $\mathrm{ad}(X) = 0$ となる．これは X が $\mathfrak{g}$ の中心に入ることになるが，$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$ なので $X = 0$ となる．□

2.7.2　既約対称空間

そこで，$\mathfrak{g}$ に次のようにして内積を定めることが出来る．

$$\langle X, Y \rangle := \begin{cases} g(X_p, Y_p) & X, Y \in \mathfrak{p} \\ -B(X,Y) & X, Y \in \mathfrak{k} \\ 0 & X \in \mathfrak{k}, Y \in \mathfrak{p} \end{cases}$$

Lemma 2.7.8. 上で定めた内積は $\mathfrak{g}$ 上**正定値**であり，$\mathrm{Ad}(K)$ 不変内積である．

Remark 2.7.2. $\mathfrak{p}$ 上で B を使わないことに注意する．なぜなら $B|_{\mathfrak{p}}$ は非退化もいえない可能性があるから．

対称二次形式 $B|_{\mathfrak{p}}$ を考える．$X \in \mathfrak{p}$ に対して，$B(X) \in \mathfrak{p}$ を

$$g(B(X), Y) = B(X, Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{p}$$

により定める．このとき B は対称なので g に関して自己共役作用素である．よって正規直交固有ベクトルをとれる．固有値を μ_i とし固有空間を $\mathfrak{p}_j$ とする．（$B(Y_j) = \mu_j Y_j$）．つまり

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_m$$

とする．ここで $\mathfrak{p}_0$ は 0 固有空間としておく（もちろんゼロ次元となることもありえる）．

0 固有空間 $\mathfrak{p}_0$ が存在したとする．$X \in \mathfrak{p}_0$ とすれば，$0 = g(B(X), Y) = B(X, Y)$（$\forall Y \in \mathfrak{p}$）であり，$B(X,Y) = 0$（$\forall Y \in \mathfrak{k}$）となる．よって，0 固有空間が存在すると B は退化する．また $X, Y \in \mathfrak{p}_0$ として，

$$B([X,Y],[X,Y]) = -B(Y,[X,[X,Y]]) = 0$$

となる．$[X,Y]\in\mathfrak{k}$ であり B は $\mathfrak{k}$ 上非退化なので $[X,Y]=0$ を得る．つまり 0 固有空間 $\mathfrak{p}_0$ に対して，

$$[\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_0]=0$$

となり $\mathfrak{p}_0$ は可換である．さらに $[\mathfrak{g},\mathfrak{p}_0]\subset\mathfrak{p}_0$ となる（下を見よ）．$\mathfrak{p}_0\subset\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の可換イデアルである．

また，$X_i\in\mathfrak{p}_i$, $X_j\in\mathfrak{p}_j$（$i\neq j$）のとき，

$$\begin{aligned}\mu_j g(X_i,X_j)=g(B(X_i),X_j)=B(X_i,X_j)=B(X_j,X_i)\\ =g(B(X_j),X_i)=\mu_j g(X_j,X_i)=\mu_j g(X_i,X_j)\end{aligned}$$

となり $\mu_i\neq\mu_j$ なので $g(X_i,X_j)=0=B(X_i,X_j)$ となり，$\mathfrak{p}_i$ と $\mathfrak{p}_j$ は g 及び B に関して直交．

さて，B と $\mathrm{Ad}(K)$ の作用は可換なので，$\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{p}_i\subset\mathfrak{p}_i$ であり $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}_i]\subset\mathfrak{p}_i$ となる．そして $[p_i,p_j]=0$（$i\neq j$）

Proof. $X\in\mathfrak{k}$ に対して，$B([p_i,p_j],X)=-B(p_j,[p_i,X])=-B(p_j,p_i)=0$ となり，B は $\mathfrak{k}$ 上非退化なので，$[p_i,p_j]=0$ となる． □

そこで $i\neq 0$ に対して $\mathfrak{p}_i$ を $\mathrm{Ad}(K)$ に対して既約分解する

Proof. $\mathfrak{p}_i$ が既約ならそれでよい．既約でないなら，ある不変部分空間 V が存在する．このとき K 不変内積 g に関して，$V^\perp$ は不変部分空間となる．以下これを繰り返せばよい． □

そこで，既約分解を $\mathfrak{p}_{i1}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{p}_{is}$ とすると，各既約成分は g に関して直交している．いま $i\neq 0$ としているので，$B=\mu_i g$ であり，B に関しても直交している．さらに，$X\in\mathfrak{p}_{ik}$, $Y\in\mathfrak{p}_{il}$ とすれば，$[X,Y]\in\mathfrak{k}$ であり，$[[X,Y],X]\in\mathfrak{p}_{ik}$ となるので，直交性から，

$$B([X,Y],[X,Y])=-B(Y,[X,[X,Y]])=B(Y,[[X,Y],X])=0$$

を得る．B は $\mathfrak{k}$ 上非退化であったので，$[X,Y]=0$ を得る．つまり $[\mathfrak{p}_{ik},\mathfrak{p}_{il}]=0$ を得る．

以上から添え字を付け替えて，つぎのような分解を得る．

Lemma 2.7.9. $\mathfrak{p}$ の分解 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_0\oplus\mathfrak{p}_1\oplus\cdots\mathfrak{p}_m$ で次をみたすものが存在.

1. $B|_{\mathfrak{p}_i}=\lambda_i g$
2. $B(\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_j)=0=g(\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_j)$（$i\neq j$）
3. $\mathfrak{p}_i$ は $\mathrm{Ad}(K)$ 不変
4. $i\neq 0$ なら $\mathfrak{p}_i$ は K の作用に対して既約.
5. $\lambda_0=0$（ただし $\mathfrak{p}_0=\{0\}$ もありえる）.

6. $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j] = 0$（$i \neq j$）．$[\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0] = 0$.

（ただし $\lambda_i = \lambda_j$ となることもありえる）

Corollary 2.7.10. $\mathfrak{p}_0 = \{0\}$ なら B は非退化となり $\mathfrak{g}$ は半単純である．

$i \neq 0$ に対して，$\mathfrak{k}_i := [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i] \subset \mathfrak{k}$ しよう．このとき上で見たように $B(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{k}_j) = 0$ となる．また $\mathfrak{k}_i$ は $\mathfrak{k}$ のイデアルである．言い換えれば，$\mathrm{ad}(\mathfrak{k})$ 不変部分空間.

Proof. $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}_i] \subset \mathfrak{k}_i$ を証明すればよい．$X \in \mathfrak{k}, Y, Z \in \mathfrak{p}_i$ とすると

$$[X, [Y, Z]] = -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] \in \mathfrak{k}_i$$

となる． □

さらに，$\mathfrak{k} = \oplus_{i=0}^{m} \mathfrak{k}_i$ となるようにイデアル $\mathfrak{k}_0$ を選ぶ．（$\mathfrak{k}$ を $\mathfrak{k}$ 加群として既約分解）．また $[\mathfrak{k}_i, \mathfrak{k}_j] = 0$ となることもすぐにわかる．そこで $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{p}_i$（$i = 0, \cdots, m$）とすれば，$\mathfrak{g}_i$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$（$i \neq j$）となる．つまり $\mathfrak{g} = \oplus \mathfrak{g}_i$ というイデアルの直和分解を得る．また，$\oplus_{i \neq 0} \mathfrak{g}_i$ は半単純リー環である．（$[\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0] = 0$ であるが，$\mathfrak{k}_0$ は可換とは限らないので $\mathfrak{g}_0$ は可換とは限らない）.

Proof. イデアルであることは，

$$[\mathfrak{k}_i + \mathfrak{p}_i, \mathfrak{k}_j + \mathfrak{p}_j] = [\mathfrak{k}_i, \mathfrak{k}_j] + [\mathfrak{k}_i, \mathfrak{p}_j] - [\mathfrak{k}_j, \mathfrak{p}_i] + [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j] = [\mathfrak{k}_i, \mathfrak{p}_j] - [\mathfrak{k}_j, \mathfrak{p}_i]$$

となるが，$[\mathfrak{k}_i, \mathfrak{p}_j] = [[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i], \mathfrak{p}_j] = 0$ となるので，$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ となる．また $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_i$ となることも明らかなのでイデアルになることがわかる． □

このようにリー環の分解を得ることができたが，これが対称空間上でのドラーム分解に対応している．

Proposition 2.7.11. 単連結リーマン対称空間は「ユークリッド空間といくつかの既約単連結リーマン対称空間の直積に分解」できる．．また，ユークリッド型以外の部分は半単純である．

Proof. ドラーム分解定理を用いて，$M = M_0 \times \cdots \times M_m$ と分解される．M_0 はユークリッド空間．M_i は既約単連結リーマン多様体．$p = (p_0, \cdots, p_m)$ を通る測地線は p_i を通る M_i の測地線に分解されるので，点対称も $\sigma_p = \sigma_p^0 \times \cdots \times \sigma_p^m$ と M_i の点対称の積に分解される．よって M_i は既約対称空間である．

□

これをリー環の分解に対応させることにより具体的に分解してみる．$M = G/K$ に対して，$\pi : \tilde{G} \to G$ を普遍被覆として $\tilde{K} = \pi^{-1}(K)$ とすれば，$\tilde{G}/\tilde{K} \to G/K$ は被覆写

像であるが M は単連結なので，$M = \tilde{G}/\tilde{K}$ となる．つまり $M = G/K$ に対して，G が単連結と仮定しよい．リー環の分解 $\mathfrak{g} = \oplus \mathfrak{g}_i$ に対して，$G = G_0 \times \cdots \times G_m$ と分解し，$K = K_0 \times \cdots \times K_m$ と分解しておく．このとき，$M = G_0/K_0 \times \cdots \times G_m/K_m$ となる（計量は $g|_{\mathfrak{p}_i}$ とする）．（ただし，イソトロピー既約としてもリーマン多様体としては既約でないことがあるので，正確には上の証明の既約リーマン多様体の個数である m と一致しないことがある）．

上の命題から，対称空間を調べるには既約対称空間を調べればよいことになる．また系 2.2.10 から単連結既約対称空間のイソトロピー表現は既約表現となる．

イソトロピー既約な対称空間を考える．イソトロピー群 K と $\mathfrak{p} = T_pM$ でのイソトロピー表現を考える．$\mathfrak{p} = T_pM$ 上の計量は K 不変計量であり，一方，上でみたようにキリング形式を制限すれば K 不変計量になる．よって，作用が既約なので，シューアの補題から，ある定数 λ が存在して，$B = \lambda g$ となる．この λ が正ならコンパクト型，零ならユークリッド型，負なら非コンパクト型とよぶ．また，λ が正または負なら，B が $\mathfrak{g}$ 上で非退化になるので半単純となることがわかる．

Corollary 2.7.12. 単連結対称空間 M は，ユークリッド型と半単純型に分解できる．さらに半単純型は，コンパクト型，非コンパクト型の積に分解される．さらに，（非）コンパクト型対称空間は既約な（非）コンパクト型対称空間に分解される．

そこで，コンパクト型，非コンパクト型をそれぞれ調べることが目的となる．

ホロノミー環

Definition 2.7.4. $\mathfrak{g}$ が半単純となる対称空間 M を半単純対称空間とよぶ．

半単純対称空間のホロノミー環について述べる．

Proposition 2.7.13. 半単純対称空間に対して，

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}$$

となる．特にホロノミー環は $\mathfrak{k}$ と同型である．

Proof. $\mathfrak{k}_0 := \{X \in \mathfrak{k} | B(X, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) = 0\}$ とする．B が $\mathfrak{k}$ 上負定値であるので，

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$$

となる．B が非退化で $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$ より，$B|_{\mathfrak{p}}$ も非退化である．

$$0 = B(\mathfrak{k}_0, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) = B([\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}], \mathfrak{p})$$

から $[\mathfrak{k}_0,\mathfrak{p}]=0$ を得る．ヤコビ律をつかって $[\mathfrak{k}_0,[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]]=0$ となる．そこで

$$B([\mathfrak{k},\mathfrak{k}_0],[\mathfrak{p},\mathfrak{p}])=B(\mathfrak{k},[\mathfrak{k}_0,[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]])=0$$

となるので $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}_0]\subset\mathfrak{k}_0$ を得る．$[\mathfrak{k}_0,\mathfrak{p}]=0$ とあわせれば $\mathfrak{k}_0$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルで $\mathfrak{k}$ に含まれる．作用が概効果的であることから $\mathfrak{k}_0=0$ となるので，

$$\mathfrak{k}=[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$$

を得る．

またホロノミー環は $\mathfrak{h}(M)=\mathrm{ad}[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]|_{\mathfrak{p}}$ であった．

$$\mathfrak{a}:=\{X\in\mathfrak{k}\mid[X,\mathfrak{p}]=0\}$$

とすれば，これは $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{k}$ に含まれるイデアルであることがすぐにわかる．よって概効果的であるなら $\mathfrak{a}=0$ となり，$\mathrm{ad}:\mathfrak{k}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$ は faithful（忠実）であるので，$\mathfrak{h}(M)=\mathfrak{k}$ を得る． □

Corollary 2.7.14. 半単純対称空間において，平行ベクトルは零.

Proof. X が平行ベクトルとすると，$R(x,y)X_p=0$（$x,y\in T_p(M)\cong\mathfrak{p}$）となるので，$[\mathfrak{k},X_p]=0$ となるが，$\mathrm{ad}:\mathfrak{k}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$ は faithful より，$X_p=0$ となる．平行ベクトルは一点での値で定まるので $X=0$. □

2.7.3　コンパクト型．非コンパクト型対称空間

前 subsection で，イソトロピー既約な既約対称空間に対して，ユークリッド型，コンパクト型，非コンパクト型を定義した．より一般の場合の対称空間のユークリッド型，コンパクト型，非コンパクト型の定義は次のようになる．

Definition 2.7.5. M を対称空間として $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ をカルタン分解とする．このとき

1. $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]=0$ のとき M をユークリッド型という．
2. $\mathfrak{g}$ が半単純のとき M を半単純という．
3. M が半単純で断面曲率が非負のとき M をコンパクト型という．
4. M が半単純で断面曲率が非正のとき M を非コンパクト型という．

Lemma 2.7.15. M がユークリッド型のとき $B|_{\mathfrak{p}}=0$ である．さらに曲率はゼロであり平坦多様体となる．単連結ならユークリッド空間．一般にはユークリッド空間と平坦トーラスの積になる．

Proof. $X,Y\in\mathfrak{p}$，$Z\in\mathfrak{g}$ とする．$[\mathfrak{p},\mathfrak{k}+\mathfrak{p}]\subset[\mathfrak{p},\mathfrak{k}]\subset\mathfrak{p}$ となので，

$$\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)Z=[X,[Y,Z]]=-[Y,[Z,X]]-[Z,[X,Y]]=-[Y,[Z,X]]=0$$

となる．よって，$B|_{\mathfrak{p}}=0$ を得る．また $R(X,Y)Z=-[[X,Y],Z]=0$ であるので曲率はゼロとなる． □

コンパクト型，非コンパクト型の条件はキリング形式で書くこともできる．

Lemma 2.7.16. 対称空間がコンパクト型（*resp.* 非コンパクト型）であるための必要十分条件は B が $\mathfrak{p}$ 上負定値（*resp.* 正定値）．

Proof. B が $\mathfrak{p}=\oplus\mathfrak{p}_i$ 上負定値とする．このとき $\mathfrak{g}$ 上で B が非退化なので半単純である．また $B=\oplus\lambda_i g|_{\mathfrak{p}_i}$ と書いたときに $\lambda_i<0$ となる．そこで，断面曲率を考える．$Y_1,Y_2\in\mathfrak{p}_i$ とすれば，

$$K(Y_1\wedge Y_2)=-g([[Y_1,Y_2],Y_2],Y_1)=-\frac{1}{\lambda_i}B([[Y_1,Y_2],Y_2],Y_1)=\frac{1}{\lambda_i}B([Y_1,Y_2],[Y_1,Y_2])$$

となる．B は $\mathfrak{k}$ 上負定値であったので $K\geq 0$ となる．また $Y_1\in\mathfrak{p}_i$, $Y_2\in\mathfrak{p}_j$ とすると，$K(Y_1\wedge Y_2)=0$ となる．よって，断面曲率は非負である．

逆に半単純で断面曲率が非負とする．$\mathfrak{p}=\oplus\mathfrak{p}_i$ と B について分解したとき，0 固有空間は存在せず，$B|_{\mathfrak{p}_i}=\lambda_i g$ となる．上のようにして断面曲率を計算すれば，$K(Y_1\wedge Y_2)=\frac{1}{\lambda_i}B([Y_1,Y_2],[Y_1,Y_2])\geq 0$ となるので，B が $\mathfrak{k}$ 上負定値であることから $\lambda_i<0$ となる，よって B は $\mathfrak{p}$ 上負定値． □

そこで，**対称空間 M がコンパクト型または非コンパクト型のときに，G 不変計量 g を $g=\mp B$ として再定義することもある．**つまりコンパクト型なら $g=-B$，非コンパクト型なら $g=B$ とするのである．(特に単連結は仮定しない)．このときリッチ曲率をキリング形式を使って表示しよう．

次は一般の対称空間に対する補題である．

Lemma 2.7.17. 対称空間 $M=G/K$ を考える．また $B_1(X,Y):=\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{k}}$，$B_2(X,Y)=\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{p}}$ とする．このとき $B=B_1+B_2$ であり，B_1 と B_2 は対称である．さらに，$\mathfrak{k}\times\mathfrak{p}$ 上では $B_1=B_2=0$, $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ 上で $B_1=B_2$ となる．特に，$\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ 上で $B_2=\frac{1}{2}B$ となる．

Proof. まず，$\mathfrak{g}$ 上の正定値内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に対して正規直交基底をとる．$\{e_i\}$ が $\mathfrak{p}$ の基底．$\{f_p\}$ が $\mathfrak{k}$ の基底とする．

$$B(X,Y)=\sum\langle\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)f_p,f_p\rangle+\sum\langle\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)e_i,e_i\rangle=B_1(X,Y)+B_2(X,Y)$$

となる．また $\mathrm{ad}(X)$ は $\mathfrak{k}$ を $\mathfrak{k}$ へ，$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}$ へ移すとは限らないので $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$ は使えないので，対称であることもまじめに確かめなくてはならない．

まず B_1 に対して，$\mathfrak{k}$ 上の内積として $-B|_{\mathfrak{k}}$ をとれば，B は $\mathrm{Ad}(G)$ 不変であったので，

$$\begin{aligned} B_1(X,Y) &= -\sum B(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)f_p, f_p) = -\sum B(f_p, \mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)f_p) \\ &= -\sum B(\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)f_p, f_p) = B_1(Y,X) \end{aligned}$$

となる．

次に B_2 を考える．$\mathfrak{p}$ には g を内積としていれる．これは $\mathrm{Ad}(K)$ 不変であった．

まず，$X, Y \in \mathfrak{k}$ なら，

$$B_2(X,Y) = \sum g(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)e_i, e_i) = \sum g(e_i, \mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)e_i) = B_2(Y,X)$$

である．

$X, Y \in \mathfrak{p}$ なら，$[X,Y] \in \mathfrak{k}$ であり，

$$g(\mathrm{ad}([X,Y])e_i, e_i) = -g(e_i, \mathrm{ad}([X,Y])e_i) = -g(\mathrm{ad}([X,Y]e_i, e_i) = 0$$

となる．また，

$$[X,[Y,e_i]] = -[Y,[e_i,X]] - [e_i,[X,Y]] = [Y,[X,e_i]] + [[X,Y],e_i]$$

となるので，

$$\begin{aligned} B_2(X,Y) &= \sum g(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)e_i, e_i) \\ &= \sum g(\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)e_i, e_i) + \sum g(\mathrm{ad}([X,Y])e_i, e_i) \\ &= \sum g(\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)e_i, e_i) = B_2(Y,X) \end{aligned}$$

となる．（これはリッチテンソルが対称であることからもわかる）．

$\mathfrak{k} \times \mathfrak{p}$ 上で考える．$X \in \mathfrak{k}$, $Y \in \mathfrak{p}$ とする．$[\mathfrak{k}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]] \subset \mathfrak{k}$ であるので，$B_2|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{p}} = 0$ である．以上から B_2 も対称である．また $B_2|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{p}} = 0 = B|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{p}}$ より，$B = B_1 + B_2$ を使えば，$B_1|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{p}} = 0$ がわかる．

さて，$\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ 上 $B_1 = B_2$ となることを証明する．$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}$ である．そこで $\mathrm{ad}(X)e_i = \sum a_{ip}f_p$, $\mathrm{ad}(Y)e_i = \sum b_{ip}f_p$, $\mathrm{ad}(X)f_p = \sum a'_{pi}e_i$, $\mathrm{ad}(Y)f_p = \sum b'_{pi}e_i$ としておく．このとき，

$$B_2(X,Y) = \sum g(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)e_i, e_i) = \sum b_{ip}a'_{pi}$$

であり，

$$B_1(X,Y) = \sum B(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)f_p, f_p) = \sum b'_{pi}a_{ip} = B_1(Y,X) = \sum a'_{pi}b_{ip}$$

となるので，$\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ 上で $B_1 = B_2$ となる． □

Corollary 2.7.18. リーマン対称空間上のリッチテンソルは $T_pM \cong \mathfrak{p}$ のもとで，

$$Ric(X,Y) = -\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{p}} = -B_2(X,Y) = -\frac{1}{2}B(X,Y)$$

となる．

Corollary 2.7.19. M をコンパクト型または非コンパクト型として，リーマン計量を $g = \mp B$ としたとき，M はアインシュタインであり，

$$\kappa = \pm\frac{\dim\mathfrak{p}}{2} = \pm\frac{\dim M}{2}$$

となる．また断面曲率は

$$K(X\wedge Y) = \mp B([X,Y],[X,Y])$$

であり，リーマン曲率は，

$$g(R(X,Y)Z,W) = \mp B(-[[X,Y],Z],W) = \mp B([X,Y],[W,Z])$$

Proof. M をコンパクト型とし $g = -B$ とする．このとき

$$Ric(X,Y) = -\frac{1}{2}B(X,Y) = \frac{1}{2}g(X,Y)$$

となり，M はアインシュタインである．よって，

$$\kappa = \sum_{i=1}^{\dim M} Ric(e_i,e_i) = \sum_{i=1}^{\dim M}\frac{1}{2} = \frac{\dim M}{2}$$

となる．非コンパクトの場合も同様である． □

トポロジー

コンパクト型，非コンパクト型のトポロジーについて基本的なことを述べる．

Lemma 2.7.20. 完備リーマン多様体 M の基本群 $\pi_1(M,p)$ を考える．このとき $\alpha \in \pi_1(M,p)$ の代表元として測地線がとれる．

Proof. M の普遍被覆空間 $\pi : \tilde{M} \to M$ を考えて，計量を引き戻すと完備リーマン多様体となる．つまり $(\tilde{M},\tilde{g})$ は (M,g) の普遍リーマン被覆である．α に対する $\tilde{M}$ の被覆変換を δ_α とする．$p \in M$ に対して，$\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ を固定して，$\delta_\alpha(\tilde{p})$ と $\tilde{p}$ を結ぶ最短線（測地線）を γ_α とする．これを π で落とせば，測地線であり，普遍被覆空間であるので $[\alpha] = \gamma_\alpha$ となる． □

Proposition 2.7.21. 対称空間の基本群はアーベル群である．

Proof. $p \in M$ を基点として，γ を測地線のループとする．$\gamma(0) = \gamma(l) = p$ であるが，$\gamma'(0) \neq \gamma'(l)$ とは限らないので，閉測地線とは限らない．しかし，対称空間の場合には，γ に沿った移換 τ_t を考えると，$\gamma(t) = \tau_t\gamma(0) = \tau_t\gamma(l) = \gamma(t+l)$ となるので，γ は周期的となり，閉測地線となる（つまり対称空間では測地線のループは必ず閉測地線）．よって，$\pi_1(M,p)$ の元 α の代表元として閉測地線 γ をとることができる．$\alpha = [\gamma]$．同様に $\beta = [\delta]$ とする．また $\alpha\beta = [\epsilon]$ とする．γ, δ, ϵ は閉測地線なので，点対称 σ_p で移せば，$\gamma^{-1}, \delta^{-1}, \epsilon^{-1}$ となる．そこで，$\sigma_p(\alpha\beta) = [\sigma_p(\epsilon)] = [\epsilon^{-1}] = (\alpha\beta)^{-1}$ となる．一方，$\sigma_p(\alpha\beta) = \sigma_p(\alpha)\sigma_p(\beta) = \alpha^{-1}\beta^{-1} = (\beta\alpha)^{-1}$ となるので，$\alpha\beta = \beta\alpha$ となる．よって基本群はアーベル群である． □

Remark 2.7.3. リー群 G の基本群 $\pi_1(G)$ は可換群であった．等質空間 G/K を考えたとき，G, K が連結と仮定すれば，ホモトピー完全系列から，$\pi_1(G/K) \cong \pi_1(G)/\Gamma$ となるので可換群であることがわかる．

Proposition 2.7.22. M がコンパクト型なら M はコンパクトで基本群は有限群でアーベル群．また G もコンパクトとなる．

Proof. 一般にリーマン多様体のリッチ曲率が下から正の定数で抑えられていれば M はコンパクトであり基本群は有限になる（マイヤースの定理）．さて，対称空間上でリッチ曲率の公式を思い出すと，

$$Ric(X,Y) = -B_2(X,Y) = -\frac{1}{2}B(X,Y)$$

であるので，M コンパクト型なら $B|_{\mathfrak{p}}$ は負定値なので，リッチ曲率は正で，M 上で下から正の定数で抑えられる．よってマイヤースの定理が使えば，M はコンパクトである．また K もコンパクトであったので，G もコンパクトになる． □

Remark 2.7.4. 具体的に π_1 や π_i（$i \geq 2$）を調べるには，ホモトピー完全系列を使う．または，ルート系などの代数的な手法を使う．また G がコンパクトであることは，半単純リー環に対して，「対応するリー群がコンパクトであることと，キリング形式が負定値であることは同値」という事実からもわかる．

Proposition 2.7.23. M が非コンパクト型ならユークリッド空間と微分同相である．また，単連結なので既約非コンパクト型対称空間の積となる．さらに，G は非コンパクトであり，K は極大コンパクト部分群となる．

また，$G = K\exp\mathfrak{p}$ と分解され，$K \times \mathfrak{p} \ni (k, X) \to k\exp X \in G$ は微分同相である．これを G の極分解という

Proof. まず，リーマン幾何において次のことが知られている（アダマール・カルタンの定理）．完備リーマン多様体 M の断面曲率が非正とする（$K \leq 0$）．このとき，M の任意の点 p において，$\exp_p : T_pM \to M$ は被覆写像である．特に，M が単連結なら任意の点 p において，$\exp_p : T_pM \to M$ は微分同相となる．

そこで，非コンパクト対称空間にたいして M が単連結であることを示せば，ユークリッド空間と微分同相になる．$\alpha \in \pi_1(M,p)$ の代表元として閉測地線 γ がとれるのであった．この γ に沿ったヤコビ場を Section 2.4 を参考にして構成する．$R_w : T_pM \ni v \mapsto R(v,w)w \in T_pM$ とする．$w = \gamma'(0)$ とすれば，リッチ曲率が負なので，$R_{\gamma'(0)}$ に対して負の固有値 ρ をもつ固有ベクトル v ($\|v\| = 1$) が存在する．$v(t)$ を $\gamma(t)$ に沿った平行移動とすれば，$Y(t) = \cosh(\sqrt{-\rho}t)v(t)$ は γ に沿ったヤコビ場であり，$\|Y(t)\| = \cosh(\sqrt{-\rho}t)$ となる．また $\nabla_{\gamma'(0)}Y = 0$ となる．

測地線 $\exp tv(0)$ に沿った移換 τ_s を考える．これは等長変換であり，キリングベクトル場 W を

$$W_q := \frac{d}{ds}\tau_s(q)|_{s=0}, \quad \forall q \in M$$

と定める．このとき $(\nabla W)_p = 0$ となるのであった．

さて，キリングベクトル場は任意の測地線に対するヤコビ場なので，W の γ への制限である $W(t) = \frac{\partial}{\partial s}\tau_s(\gamma(t))|_{s=0}$ は γ に沿ったヤコビ場である．また，τ_s は p を $\exp sv(0)$ に移すので，$W(0) = v(0) = Y(0)$ であり，γ が測地線なので，

$$\nabla_{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\tau_s(\gamma(t))|_{t=s=0} = \nabla_{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\tau_s(\gamma(t))|_{t=s=0} = \nabla_{\partial s}d\tau_s(\gamma'(0)) = 0$$

となる．つまり $\nabla_{\gamma'(0)}W = 0 = \nabla_{\gamma'(0)}Y$ となる，よって，$W(t) = Y(t)$ となる．つまり $Y(t)$ は W の γ への制限である．そして，閉測地線上では有界である．これは $\|Y(t)\| = \cosh(\sqrt{-\rho}t)$ であることに矛盾．以上から M が単連結がわかった．

M が非コンパクトなので G も非コンパクトである．

$K \subset K'$ となるコンパクト部分群 K' が存在したとする．$l \in K' - K$ となる元をとれば，$G = K\exp\mathfrak{p}$ の分解（命題 2.5.6）を使えば，$l = k\exp X$ とかける．$\exp X = k^{-1}l \in K'$ となるが，$\exp mX = (k^{-1}l)^m$（$m = 1, \cdots,$）という点列を考えると，$\exp_p : T_pM \to M$ が同相なので，これは発散し，K' がコンパクトに矛盾する．よって $K = K'$ であり，K は極大コンパクト群である．

$G = K\exp\mathfrak{p}$ とかけることは以前のべた（命題 2.5.6）．$K \cap \exp\mathfrak{p} = \{e\}$ であることを証明する．$k = \exp X$ とすれば，上と同様にして $k^m = \exp mX$ を考えれば，K がコンパクトであることから $X = 0$ であり，$k = e = \exp X$ となる．また，$g = k\exp X = k'\exp X'$ と分解されたとすれば，$k^{-1}k' = \exp -X\exp X'$ となる．$p \in M$ へ作用させれば，$e^{-X}e^{X'}(p) = p$ となる．$e^{X'}(p)$ は $\exp_p X$ となり，$\exp_p : T_pM \to M$ の同一視から X

そのものである．よって，$e^{-X}e^{X'}(p) = p$ となるには，$X' = -(-X) = X$ とならなければならない．そこで，$k = k'$, $\exp X = \exp X'$ となる．以上から $K \times \mathfrak{p} \ni (k, X) \to k \exp X \in G$ は全単射．また微分を計算すれば，微分写像が単射であることがわかる．次元が一致するので，微分写像は全単射．よって，微分同相である． □

$\exp_p : T_pM \to M$ が微分同相であるので，

Corollary 2.7.24. *M が非コンパクト型なら σ_p の固定点は p のみである．*

Corollary 2.7.25. *M が非コンパクト型なら G の中心は単位元のみ．（作用が効果的と仮定）．*

Proof. $\mathrm{Ad} : G \to Aut(\mathfrak{g}) \subset GL(\mathfrak{g})$ を考える．$z \in Z(G)$ なら $\mathrm{Ad}(z) = \mathrm{id}$ となる．$\hat{G} = \mathrm{Ad}(G)$，$\hat{K} = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(K)$ とすれば，$\mathrm{Ad} : G/K \to \hat{G}/\hat{K}$ を得る．どちらもユークリッド空間に微分同相．$\hat{\mathfrak{p}} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ となるので，自明な被覆写像である．そこで，$K = \mathrm{Ad}^{-1}(\hat{K})$ となる．$Z(G) = \mathrm{Ad}^{-1}(\mathrm{id}) \subset \mathrm{Ad}^{-1}(\hat{K}) = K$ となる．$\mathrm{Ad}^{-1}(\hat{K})$ は $\hat{G}/\hat{K}$ への作用が自明であるので，K に含まれる G の正規部分群である．そこで，作用が効果的なら，中心は単位元となる． □

曲率が非正の場合に，次のことが知られている（このあたりのことは酒井「リーマン幾何学」を参照）．

Theorem 2.7.26. *M を完備，単連結，連結なリーマン多様体で，曲率が非正とする．このとき等長変換群のコンパクト部分群は必ず固定点をもつ．*

Corollary 2.7.27. *非コンパクト対称空間 G/K に対して，G の極大コンパクト群は互いに共役である．*

Proof. K' を極大コンパクト群とすると，前定理から M には固定点がある．よって，isotoropy 群に含まる．isotropy 群はコンパクト群であるので，K' が極大なので一致する．さらに，G が推移的に作用しているので，K と K' は共役である． □

半単純型

リー環のキリング形式が非退化のとき半単純と定義した．半単純リー環は単純リー環の直和になることを示す．

Definition 2.7.6. リー環が**単純**とは，可換でないリー環で，真のイデアルを持たないこと．

Proposition 2.7.28. 半単純リー環は単純イデアルの直和に分解できる．（これは $\mathfrak{g}$ の ad 表現による $\mathfrak{g}$ の既約分解になっている）．

Proof. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ をイデアルとする．キリング形式に対する直交補空間

$$\mathfrak{a}^{\perp} = \{x \in \mathfrak{g} | B(x, \mathfrak{a}) = 0\}$$

はイデアルになる．実際，キリング形式は随伴不変であるので，$b \in \mathfrak{a}^{\perp}$，$x \in \mathfrak{g}$，$a \in \mathfrak{a}$ に対して，$[x, a] \in \mathfrak{a}$ であるので，$B([b, x], a) = B(b, [x, a]) = 0$ となるので，$[b, x] \in \mathfrak{a}^{\perp}$.

次に，$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = 0$ を証明しよう．$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ はイデアルである．また $a, b \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ に対して，$B([a, b], x) = B(a, [b, x]) = 0$（$\forall x \in \mathfrak{g}$）となるので，$B$ が非退化から $[a, b] = 0$ となる．よって，$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ は可換イデアルである．

さて，B が非退化なら可換イデアルは零のみとなることを証明しよう．可換イデアルを $\mathfrak{c}$ とする．$x \in \mathfrak{g}, c \in \mathfrak{c}$ とする．このとき，$\mathfrak{c}$ がイデアルなので，$\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(c) = [x, [c, \cdot]]$ の像は $\mathfrak{c}$ である．そこで，$B(x, c)$ は $\mathfrak{c}$ 上でトレースを取ればよいが，可換であることから零となる．よって $B(x, c) = 0$（$\forall x \in \mathfrak{g}$）となるので，$B$ の非退化性から $c = 0$ となる．つまり $\mathfrak{c} = 0$.

以上から $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ をイデアルとすれば，$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ となることがわかった．さらに，分解を繰り返せば，単純イデアルの直和となる．イデアルの直和に分解したということは，$\mathfrak{g}$ を ad 表現により既約分解したことに相当する．特に，分解は一意的である． □

Remark 2.7.5. 上の証明をみればわかるように，$\mathfrak{g}$ が半単純であることと可換イデアルが零であることは必要十分条件である．実は次が同値（証明は難しくない）．

1. $\mathfrak{g}$ が半単純（キリング形式が非退化）
2. $\mathfrak{g}$ 内の可換イデアルは $\{0\}$ のみ.
3. $\mathfrak{g}$ 内の可解イデアルは $\{0\}$ のみ.
4. $\mathfrak{g}$ は単純イデアルの直和.
5. $\mathfrak{g}$ の有限次元表現は完全可約.

Proposition 2.7.29. $\mathfrak{g}$ が半単純リー環のとき，次のことが成立する．

1. $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

2. $\mathfrak{g}$ の中心は $\{0\}$.

3. $\mathfrak{g}$ への微分作用素は内部微分作用素となる．つまり線形作用素 $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ で，$D([X, Y]) = [DX, Y] + [X, DY]$ とすると，$\exists Z \in \mathfrak{g}$，$D = \mathrm{ad}Z$.

Proof. 1. $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ を証明する．$\mathfrak{g}$ を単純とすると，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ はイデアルので，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ または $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ であるが，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ とすると可換となってしまうので，$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

が成立する．$\mathfrak{g}$ が半単純のときは，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ と単純の直和に分解しておく．$k \neq l$ なら $[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l]$ は $\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l$ がイデアルであるので，$[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subset \mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{g}_l = \{0\}$ である．よって，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n] = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ となる．

2. $\mathfrak{g}$ の中心は可換イデアルなので，零．（または，$\mathfrak{g}$ の中心は $\ker \mathrm{ad}$ であったので，B が非退化なら $\ker \mathrm{ad} = \{0\}$）．

3. D を微分作用素とする．

$$\mathfrak{g} : X \to \mathrm{tr}\,(D\mathrm{ad}(X)) \in \mathbb{R}$$

は線形写像であるので，キリング形式 B が非退化より，

$$B(X, Z) = \mathrm{tr}\,(D\mathrm{ad}(X))$$

となる $Z \in \mathfrak{g}$ が存在する．

$$[D, \mathrm{ad}(X)](Y) = D[X, Y] - [X, DY] = [DX, Y] = \mathrm{ad}(D(X))Y$$

となるので，

$$\begin{aligned} B(D(X), Y) =& \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(D(X))\mathrm{ad}(Y)) = \mathrm{tr}\,([D, \mathrm{ad}(X)]\mathrm{ad}(Y)) \\ =& \mathrm{tr}\,(D[\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)]) = \mathrm{tr}\,(D\mathrm{ad}([X, Y])) \\ =& B(Z, [X, Y]) = B([Z, X], Y) = B(\mathrm{ad}(Z)X, Y) \end{aligned}$$

となる．B が非退化より $D(X) = \mathrm{ad}(Z)X$ が成立．よって，$D = \mathrm{ad}(Z)$ となる．

□

さて，半単純対称空間 M を考える．対応するリー環を $\mathfrak{g}$ は半単純である．これを単純リー環の直和へ分解する．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_p$$

カルタン対合 θ は環同型写像であったので，イデアルをイデアルへ移す．そこで $\theta(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{a}_{s(i)}$ とする．$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_i \oplus \mathfrak{a}_{s(i)}$ とすれば，θ で不変な分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{b}_q$$

を得る．そこで既約性を仮定すると，$\mathfrak{h}(M) = \mathfrak{k}$ の作用が既約であるので，上の分解において $q = 1$ となる．よって，$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_{s(1)}$（$\theta(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_{s(1)}$）であるか $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}$（単純）となる．

以上から，半単純既約対称空間は次のように分類される．

Proposition 2.7.30. 半単純既約対称空間を考える．このとき $\mathfrak{g}$ は次のいずれか

1. $\mathfrak{g}$ は実単純リー環．さらに $B_{\mathfrak{p}} < 0$，$g = -cB_{\mathfrak{p}}$（$c > 0$）であり，**コンパクト型**．これを ***I* 型対称空間**とよぶ．

2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1$（$\mathfrak{g}_1$ はコンパクト型実単純リー環）．$\theta(X,Y) = (Y,X)$．よって，このとき対称空間はリー環 $\mathfrak{g}_1$ をもつコンパクト群 $G = G \times G/G$ である．これを ***II* 型対称空間**とよぶ．
3. $\mathfrak{g}$ は実単純リー環．さらに $B_{\mathfrak{p}} > 0$，$g = cB_{\mathfrak{p}}$（$c > 0$）であり，**非コンパクト型**．

Remark 2.7.6. 下でみる双対性を使うと $G \times G/G$ の双対は，非コンパクト対称空間 G^c/G である．これを **IV 型対称空間**とよぶ．また I 型対称空間の双対である非コンパクト対称空間 G/K を **III 型対称空間**とよぶ．

Definition 2.7.7. $\mathfrak{g}$ を実半単純リー環とする．$\mathfrak{g}$ がコンパクト型とは $B < 0$ となること．このとき．対応するリー群はコンパクト群である．また $\mathfrak{g}$ がコンパクト型イデアルをもたないとき，非コンパクト型とよぶ．

2.7.4 双対性

コンパクト型の対称空間 M を考えて，リー環のカルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする．これは複素化 $\mathfrak{g}^c$ の実形の一つである（コンパクト実形）．$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{p}^*$，$\mathfrak{k}^* = \mathfrak{k}, \mathfrak{p}^* = \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ とすると，これも $\mathfrak{g}^c$ の一つの実形である．さらに $\theta^*(X+Y) = X - Y$（$X \in \mathfrak{k}^*, Y \in \mathfrak{p}^*$）とすれば，ある非コンパクトリーマン対称空間 M^* に対するカルタン分解になる．これらを**互いに双対**とよぶ（イソトロピー群はどちらも K である）．

虚数 $\sqrt{-1}$ を使うのが嫌なら，次のように考えても良い．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ から，次の操作で新しいリー環 $\mathfrak{g}'$ を作る．$x, y \in \mathfrak{p}$, $a, b \in \mathfrak{k}$ に対して，新しいリー括弧を

$$[a,b]' := [a,b], \quad [a,x]' := [a,x], \quad [x,y]' := -[x,y]$$

とする．$(\mathfrak{g}', [\cdot,\cdot]')$ がリー環になることは明らかである．さらに，カルタン分解は $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする．対応する対称空間は曲率の符号が変わることになるので，コンパクト型なら非コンパクト型を，非コンパクト型ならコンパクト型を得ることとなる．

Example 2.7.31. $SL(n)/SO(n)$ に対しては $\Theta(g) = (g^t)^{-1}$ の微分がカルタン対合 θ である．この双対は $SU(n)/SO(n)$ であり，$\Theta^*(g) = \bar{g}$ として，この微分がカルタン対合 θ^* である．同様に，$GL(n)/O(n)$ の双対は $U(n)/O(n)$ である．

Proof. まず，対称空間 $SL(n)/SO(n)$ に対して，対応するリー環を

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n) = \{x \in M(n,\mathbb{R}) | \mathrm{tr}\, X = 0\}, \\
&\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) | X^t = -X, \mathrm{tr}\, X = 0\}, \\
&\mathfrak{p} = \{X \in M(n,\mathbb{R}) | X^t = X,\ \mathrm{tr}\, X = 0\} \\
&\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}
\end{aligned}$$

とする．このとき双対は

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{p}$$

となる．よって，$X \in \mathfrak{g}^*$ は

$$X = X_1 + \sqrt{-1}X_2, \quad X_1 \in \mathfrak{k}, \quad X_2 \in \mathfrak{p}$$

は，

$$\bar{X}^t = X_1^t - \sqrt{-1}X_2^t = -(X_1 + \sqrt{-1}X_2) = -X, \quad \mathrm{tr}\, X = 0$$

を満たす．これはトレース零歪エルミート行列であり，次元を考えると，$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{su}(n)$ となる．（言い換えると $\mathfrak{su}(n)^c = \mathfrak{sl}(n)^c = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ である）．よって，$SL(n)/SO(n)$ と $SU(n)/SO(n)$ は互いに双対である． □

Example 2.7.32. グラスマン多様体 $O(n)/O(k) \times O(n-k)$ を考える．対応するリー環は

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} =& \{X \in M(n, \mathbb{R}) | X^t = -X\} \\
\mathfrak{k} =& \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R}) | A^t = -A,\ B^t = -B\} \\
\mathfrak{p} =& \{\begin{pmatrix} 0 & Z \\ -Z^t & 0 \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R}) | Z \in M(k, n-k)\}\}
\end{aligned}$$

となる．そこで，ベクトル空間としては $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ であり，リー環の構造を $x, y \in \mathfrak{p}$，$a, b \in \mathfrak{k}$ に対して，新しいリー括弧を

$$[a, b]' := [a, b], \quad [a, x]' := [a, x], \quad [x, y]' := -[x, y]$$

としていれる．これは

$$\begin{aligned}
\mathfrak{k} =& \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R}) | A^t = -A,\ B^t = -B\} \\
\mathfrak{p} =& \{\begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^t & 0 \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R}) | Z \in M(k, n-k)\}
\end{aligned}$$

とすれば同型となることが，簡単な計算でわかる．そこで，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & Z \\ Z^t & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -Z \\ Z^t & -B \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A & Z \\ Z^t & -B \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & Z \\ Z^t & B \end{pmatrix}^t
\end{aligned}$$

となるので，新しいリー環は $\mathfrak{so}(k, n-k)$ となることがわかる．よって，$O(n)/O(k) \times O(n-k)$ の双対は $O(k, n-k)/O(k) \times O(n-k)$ となる．例えば，実射影空間の双対は実双曲空間

Example 2.7.33. コンパクトリー群 $G = G \times G/G$ を考える．これはコンパクト型対称空間である．対応するリー環は，

$$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{(X, X)|X \in \mathfrak{g}\}, \quad \mathfrak{p} = \{(X, -X)|X \in \mathfrak{g}\}$$

となる．そして

$$[(X, Y), (X, Y)] = ([X, Y], [X, Y]), \quad [(X, -X), (Y, -Y)] = ([X, Y], [X, Y])$$

となる．

そこで，双対は

$$\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{(X, X)|X \in \mathfrak{g}\}, \quad \mathfrak{p} = \{(X, -X)|X \in \mathfrak{g}\}$$

であり，

$$[(X, Y), (X, Y)]' = ([X, Y], [X, Y]), \quad [(X, -X), (Y, -Y)]' = (-[X, Y], -[X, Y])$$

となるものである．よって，

$$\mathfrak{g} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{g}, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{p} = \sqrt{-1}\mathfrak{g}$$

と考えてよい．つまり $G = G \times G/G$ の非コンパクト双対は G^c/G である．ここで G^c は G の複素化である．例えば，$U(n)$ の双対は $GL(n, \mathbb{C})/U(n)$ となる．

2.8 rank と Weyl 群

2.8.1 ランク

Section 2.6.2 において，単連結対称空間と Lie triple sysetem $(\mathfrak{p}, R)$ が $R(x, y)z = [z, [x, y]]$ とすることにより一対一対応することを述べた．

Definition 2.8.1. $(\mathfrak{p}, R)$ を Lie triple system とする．このとき **Lie subtriple** とは部分ベクトル空間 $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ で R により不変なものである．つまり，$R(\mathfrak{p}', \mathfrak{p}')\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}'$.

Section 2.6.2 で述べたように，Lie triple には対称空間が対応したので，Lie sub triple にも対応する対称空間が存在する．一方，対称空間 S の完備全測地的部分多様体 S' を考える．ここで，全測地的とは S' の任意の点 p から出発する S 内の測地線で点 p で S' に接しているなら，その測地線が S' に入るときをいう．$p \in S'$ に対する点対称 σ_p は，明らかに S' を不変にするので，完備全測地的部分多様体 S' も対称空間である．．G' として，S' を保存する G の連結リー部分群とし，$K' = G' \cap K$ とすれば，$S' = G'/K'$ とかける．またカルタン対合は G' への制限とすればよい．

実は，全測地的部分多様体と Lie subtriple は次のような関係がある．

Theorem 2.8.1. 対称空間 S 内で，ある点 p を通る完備**全測地的部分多様体** S' に対して，ある ***Lie subtriple*** $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ が存在して，$S' = \exp_p(\mathfrak{p}')$ と書ける．逆も成立．

Proof. 対称空間においては点 p を通る任意の全測地的部分多様体は対称空間であり，命題 2.5.6 で述べたように，必ず $\exp_p(\mathfrak{p}')$（$\exists \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p} = T_pS$）の形をしている．さらに，全測地的より曲率テンソルを作用させても不変であるので，$R(x,y)z = -[[x,y],z] \in \mathfrak{p}'$（$x,y,z \in \mathfrak{p}'$）となる．よって，$\mathfrak{p}'$ は Lie subtriple である．

逆に，Lie subtriple $\mathfrak{p}'$ が存在したときに，$S' = \exp_p(\mathfrak{p}')$ が全測地的部分多様体であることを見よう．イソトロピー群 K が $\mathfrak{p}$ へ作用していた．K' を $\mathfrak{p}'$ を不変にする（最大の）部分群として，そのリー環を $\mathfrak{k}'$ とする．$\mathfrak{p}'$ は Lie subtriple であったので $R(x,y) \in \mathfrak{k}$（$x,y \in \mathfrak{p}'$）は $\mathfrak{p}'$ を不変にする．よって $R(x,y) \in \mathfrak{k}'$，つまり，$[\mathfrak{p}',\mathfrak{p}'] \subset \mathfrak{k}'$ となる．そして，$\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{g}$ はカルタン分解をもつリー部分環となる．$G' \subset G$ をリー環が $\mathfrak{g}'$ となり，K' を含む最小のリー群とする（K' の連結成分と G' の連結成分が同じということ）．このとき $K' = G' \cap K$ は p の G' の作用でのイソトロピー群である．よって，軌道 $G'p$ は次元 $\dim \mathfrak{p}'$ の連結部分多様体である．そして測地線 $\gamma_v(t) = (\exp tv)p$（$\forall v \in \mathfrak{p}'$）を含むので，$G'p = S' = \exp_p(\mathfrak{p}')$ となる．さらに S' は点 p で全測地的である．また S の等長変換の群の軌道であるので，すべての点において全測地的である．　□

Corollary 2.8.2. 対称空間の点 p を通る全測地的多様体（部分対称空間）は，$\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ で，$[[\mathfrak{p}',\mathfrak{p}'],\mathfrak{p}'] \subset \mathfrak{p}'$ となるものに対応する．

Corollary 2.8.3. 平坦な全測地的部分多様体 S' に対して，ある可換部分環 $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ が存在して $S' = \exp_p \mathfrak{p}'$ となる．

Proof. 上の構成において $[\mathfrak{p}',\mathfrak{p}'] \subset \mathfrak{g}'$ となる．そこで $S' = G'/K'$ がユークリッド型対称空間であるための必要十分条件は $[\mathfrak{p}',\mathfrak{p}'] = 0$ となる．　□

さて，対称空間の全測地的部分多様体で平坦で極大なものを考える．これを単に**極大平坦（maximal flat）**とよぼう．上で述べたことから，ある点 p を通る極大平坦なものは，可換部分環 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ を使って，$F = \exp_p \mathfrak{a}$ と書ける．つまり，$A = \exp \mathfrak{a} \subset G$ というリー部分群の軌道 $A \cdot p$ である．さて，**極大平坦が閉部分多様体**であることを証明しよう．それには A が閉部分群であることを証明すればよい

Proof. 明らかに $\bar{A}$ も可換であり連結である．$\bar{A}$ のリー環が $\mathfrak{p}$ に含まれることを見てみよう．$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{p}$ の部分空間であるための必要十分条件は，点対称 σ_p に対して，$\theta = \mathrm{Ad}(\sigma_p)$ が $\mathfrak{a}$ 上で $-\mathrm{id}$ となることである．つまり $\sigma_p g \sigma_p^{-1} = g^{-1}$（$\forall g$）．これは $\forall g \in A$ について成立するので，$\forall g \in \bar{A}$ に対しても成立する．よって，$\bar{A}$ のリー環も $\mathfrak{p}$ に含まれる．以上から $\bar{A}$ はリー環が $\mathfrak{p}$ に含まれる G の連結可換部分群である．よって，A がリー環が $\mathfrak{p}$ に含

まれる G の連結可換部分群で極大なものであることから，$\bar{A} = A$ となる． □

以上で，極大平坦 F が S の閉部分多様体であることがわかった．特に，対称空間 S がコンパクトなら F もコンパクトであり，平坦トーラスになる．

上で述べたことから，極大平坦を調べるには，$\mathfrak{p}$ に含まれる極大可換部分環を調べればよい（極大可換環は**カルタン部分環**ともいわれる）．まず，任意のそのような極大可換部分環がイソトロピー群で共役となっていることがわかる．

Theorem 2.8.4. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ を極大可換環とする．このとき**極大可換環 $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ 内の任意の K 軌道と交わり，しかも直交する．さらに，$\mathfrak{p}$ に含まれる極大可換部分環らはイソトロピー群の作用で共役**となる．つまり，

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$$

Proof. $x \in \mathfrak{a}$ として $O = \mathrm{Ad}(K)x \subset \mathfrak{p}$ とする．軌道 O の点 x での接空間は $T_xO = T_x(\mathrm{Ad}(K)x) = \mathrm{ad}(\mathfrak{k})x$ となる．法空間を N_xO とすれば，$y \in N_xO \subset \mathfrak{p}$ に対して，

$$0 = \langle [\mathfrak{k}, x], y \rangle = \langle \mathfrak{k}, [x, y] \rangle$$

となるので，$[x, y] = 0$ を得る．つまり，点 x での法ベクトル y は $[x, y] = 0$ を満たす．特に，$\mathfrak{a}$ は可換なので，$\mathfrak{a} \subset N_xO$ となる．このように，$\mathfrak{a}$ と軌道が交わるなら直交する．

次に，極大部分環 $\mathfrak{a}$ と別の極大部分環 $\mathfrak{a}'$ が共役となることを証明する．まず，下の補題 2.8.6 から，ほとんどすべての $x \in \mathfrak{a}$ に対して，$\mathfrak{a} = N_xO \subset \mathfrak{p}$ となる．（このような $x \in \mathfrak{a}$ を **regular** とよぶ）．そこで，regular vector $x \in \mathfrak{a}$ を一つとって固定する．このとき，$\mathfrak{a} = N_xO$ となる．任意の $k \in K$ に対して，点 $\mathrm{Ad}(k)x \in O = \mathrm{Ad}(K)x$ 上で考えると，$\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a} = N_{\mathrm{Ad}(k)x}O$ を得る．実際，$y \in N_xO = \mathfrak{a}$ に対して，$[\mathrm{Ad}(k)y, \mathrm{Ad}(k)x] = \mathrm{Ad}(k)[x, y] = 0$ であるので，$\mathrm{Ad}(k)y \in N_{\mathrm{Ad}(k)x}O$ である．同様にして，$N_{\mathrm{Ad}(k)x}O \subset \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$ を得る．さて，$\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}$ をべつの極大可換部分環として，$y \in \mathfrak{a}'$ が regular とする．軌道 $O = \mathrm{Ad}(K)x$（$x \in \mathfrak{a}$ は上で選んだ regular vector）はコンパクト部分多様体であるので，ある点 $\mathrm{Ad}(k)x$ で y に距離がもっとも近いものが存在する．y から $\mathrm{Ad}(k)x$ への線分は O に直交するので，$y - \mathrm{Ad}(k)x \in N_{\mathrm{Ad}(k)x} = \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$ となる．よって，$y \in \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$ となる．そこで下の補題 2.8.5 から regular な y は必ず唯一つの極大部分環の入るので，$\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ を得る．つまり，任意の極大可換部分環は共役である．

極大可換環 $\mathfrak{a}$ を固定して，これが任意の K 軌道と交わることを証明しよう．任意の点 z の軌道 $O = \mathrm{Ad}(K)z$ を考える．$[z, z] = 0$ であるので，z を含む $\mathfrak{p}$ 内の極大可換環 $\mathfrak{a}'$ が存在する．上で述べたことから，ある $k \in K$ が存在して $\mathfrak{a} = \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}'$ となる．特に，$\mathrm{Ad}(k)z \in \mathfrak{a}$ であり，$\mathrm{Ad}(k)z \in \mathfrak{a} \cap O$ となるので，任意の軌道 O は $\mathfrak{a}$ と交わる． □

Remark 2.8.1. これは isotoropy 表現により $X \in \mathfrak{p}$ が対角化できるという意味である．$\mathrm{Ad}(k)X \in \mathfrak{a}$ $(\exists k \in K)$．実際，$SL(n,\mathbb{R})/O(n)$ の場合は $\mathfrak{p}$ が対称行列全体であり $\mathfrak{a}$ として対角行列を取れば，対称行列が直交行列で対角化できることを意味する．

$\mathfrak{p} = \cup_{k\in K}\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$ であるので，K の $\mathfrak{p}$ への isotorpy 表現を考えるときには，$\mathfrak{a}$ を不変にする K の元の作用を調べることが重要となる．それが後で述べる，$\mathfrak{a}$ に作用する，Weyl 群である．

Definition 2.8.2. $x \in \mathfrak{p}$ として，x を含む極大可換部分環を $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ とする．このとき x が **regular** とは．$y \in \mathfrak{p}$ に対して，$[x, y] = 0$ と $y \in \mathfrak{a}$ が同値なこと．

$x, y \in \mathfrak{a}$ なら $[x, y] = 0$ は明らか．よって $x \in \mathfrak{a}$ が regular とは「任意の $y \in \mathfrak{p}$ に対して $[x, y] = 0$ なら $y \in \mathfrak{a}$」を意味する（$x \in \mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{a} \subset N_xO$ であった．$y \in N_xO$ とすると $[y, x] = 0$ であり，x が regular なので，$y \in \mathfrak{a}$ である．つまり regular とは $x \in \mathfrak{a}$ が regular とは $\mathfrak{a} = N_xO$ と同値である）．

そこで $x \in \mathfrak{a}$ が **singular** とは，「ある $y \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ で $[x, y] = 0$ となるものが存在」と定義する．

$x \in \mathfrak{a}$ が **regular** なら $\mathrm{Ad}(k)x \in \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$ も **regular** である．実際，$y \in \mathfrak{p}$ で $[\mathrm{Ad}(k)x, y] = 0$ とすれば，$[x, \mathrm{Ad}(k^{-1})y] = 0$ となるので，$x \in \mathfrak{a}$ は regular なので，$\mathrm{Ad}(k^{-1})y \in \mathfrak{a}$．よって $y \in \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$．逆に，$y \in \mathfrak{a}$ に対して，$[x, y] = 0$ より，$[\mathrm{Ad}(k)x, \mathrm{Ad}(k)y] = 0$ となる．よって $\mathrm{Ad}(k)x$ も regular である．

Lemma 2.8.5. $\mathfrak{p}$ 内の ***regular vector*** **は唯一つの極大可換部分環**に入る．

Proof. $x \in \mathfrak{a}$ が regular として，$x \in \mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ とする．このとき $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a}$ なので，$y \in \mathfrak{a}'$ であるが $y \notin \mathfrak{a}$ となるものが存在する（極大可換部分環としているので，どちらかがどちらかに含まれるということはありえない）．そして $x \in \mathfrak{a}'$ であるので，$[x, y] = 0$ である．一方，$x \in \mathfrak{a}$ は regular であるので，$y \in \mathfrak{a}$ となり矛盾する． □

Remark 2.8.2. 補題 2.8.7 から，逆も成立する．つまり唯一つの極大可換環に入るなら，regular である．

Lemma 2.8.6. $\mathfrak{a}$ の有限個の超平面が存在して，それら超平面以外の点は *regular* となる．

Proof. 対称空間 S をコンパクト型か非コンパクト型であると仮定してよい．$x \in \mathfrak{a}$ に対して，$\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ を考える．$\mathfrak{g}$ 上のキリング形式 B を使って，$\mathfrak{g}$ 上に正定値内積を入れる．つまり $\mathfrak{k}$ 上では $-B$ で，$\mathfrak{p}$ 上で $\pm B$ とする（符号はコンパクト型，非コンパクト型に依存）．このとき，．$\mathfrak{k} \perp \mathfrak{p}$ となることに注意．

$x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{p}$, $k \in \mathfrak{k}$ に対して,

$$\langle \mathrm{ad}(x)y, k\rangle = -B(\mathrm{ad}(x)y, k) = B(y, \mathrm{ad}(x)k) = \pm\langle y, \mathrm{ad}(x)k\rangle$$

となる（それ以外でも $\langle \mathrm{ad}(x)k, k'\rangle = 0 = \langle k, \mathrm{ad}(x)k'\rangle$ などとなる）．よって，$\mathrm{ad}(x)$ は非コンパクト型なら自己共役であり実固有値をもち，コンパクト型なら歪自己共役となり，純虚数固有値をもつ．

ここでは非コンパクト型の場合を調べよう（コンパクト型でも同様である．または双対性を使ってもよい）．$\mathfrak{a}$ が可換なので，ヤコビ律を使えば $\{\mathrm{ad}(x)\}_{x\in\mathfrak{a}}$ も可換である．そこで，$\mathfrak{g}$ を $\{\mathrm{ad}(x)\}_{x\in\mathfrak{a}}$ によって同時固有分解する

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

ここで，$\Delta \subset \mathfrak{a}^*$ は $\mathfrak{a}$ 上の零でない実一次形式の有限集合である（非コンパクト型としたので実）．また

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{z \in \mathfrak{g} | \forall x \in \mathfrak{a}, \mathrm{ad}(x)z = \alpha(x)z\}$$

としている．$\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ のとき $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ を（制限）**root** とよぶ．ルートの集合が Δ である．さて，$x \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ であるので，$\mathrm{ad}(x)$ はカルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を入れ替える．そこで，$z_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ を $z_\alpha = x_\alpha + y_\alpha \in \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とすれば，

$$[x, x_\alpha] + [x, y_\alpha] = [x, z_\alpha] = \alpha(x)z_\alpha = \alpha(x)y_\alpha + \alpha(x)x_\alpha$$

となる．つまり

$$[x, x_\alpha] = \alpha(x)y_\alpha, \quad [x, y_\alpha] = \alpha(x)x_\alpha$$

を得る．

また $\theta(z_\alpha) = -x_\alpha + y_\alpha$ に対して，

$$[x, \theta(x_\alpha)] = -\alpha(x)y_\alpha + \alpha(x)x_\alpha = -\alpha(x)\theta(z_\alpha)$$

となるので，$-\alpha$ も root であり，$\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ は次の分解をもつ：

$$\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathfrak{k}_\alpha \oplus \mathfrak{p}_\alpha. \quad (\mathfrak{k}_\alpha = \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}),\ \mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{p} \cap (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}))$$

つまり，$\mathfrak{k}_\alpha = \{X + \theta X | X \in \mathfrak{g}_\alpha\}$，$\mathfrak{p}_\alpha = \{X - \theta X | X \in \mathfrak{g}_\alpha\}$ となる．また $\mathfrak{k}_\alpha = \mathfrak{k}_{-\alpha}$，$\mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{p}_{-\alpha}$ が成立する．よって，

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{p}_\alpha$$

という分解を得る．（ここで Δ は二重に数えているので，実は半分の Δ_+ で和をとればよい）．

さて，$H_\alpha = \ker\alpha$ を α 内の超平面とする．$x \in \mathfrak{a} \setminus \cup_\alpha H_\alpha$ とすれば，$x' \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ に対して，$x' = x_0 + \sum x_\alpha$ とすれば，$[x, x'] = \sum \alpha(x) y_\alpha \neq 0$ となる．つまり $x' \in \mathfrak{p}$ が x と可換なのは $x' \in \mathfrak{a}$ のときのみである．つまり x は regular vector となる． □

Definition 2.8.3. $H_\alpha \subset \mathfrak{a}$ を**ルート超平面**とよぶ．．また $\mathfrak{a} \setminus \cup_\alpha H_\alpha$ の連結領域を**ワイル領域**とよぶ．また $x \in \mathfrak{a}$ が **regular とは** x **があるワイル領域上にあること**を意味する．つまり，regular vector の全体はワイル領域の和集合である．また，x が signular vector の集まりが $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ である．

$\mathfrak{a}$ の singular な元は

$$\mathfrak{a}_{sing} = \{X \in \mathfrak{a} \mid \exists\alpha \in \Delta, \alpha(X) = 0\}$$

となる．つまり超平面

$$H_\alpha = \{X \in \mathfrak{a} | \alpha(X) = 0\}, \quad \alpha \in \Delta$$

の和である．一方 regular の元は

$$\mathfrak{a}_{reg} := \{X \in \mathfrak{a} | \forall\alpha \in \Delta, \alpha(X) \neq 0\}$$

となる．

Proposition 2.8.7. $X \in \mathfrak{a}$ が *singular* なら二つ以上の極大可換環に含まれる．特に，X が *regular* であることと，X が唯一つの極大可換環に含まれることは同値である．

Proof. $\alpha \in \Delta$ で $\alpha(X) = 0$ となるものが存在するとする．$Y \neq 0 \in \mathfrak{g}_\alpha$ をとると $[X, Y] = \alpha(X)Y = 0$ となる．

$$Y = Y_\mathfrak{k} + Y_\mathfrak{p} \in \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

と分解しておく．α に対して $\alpha(A) \neq 0$ となる $A \in \mathfrak{a}$ を固定しておく，

$$[A, Y] = \alpha(A)Y$$

であるが $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ であるので，

$$[A, Y_\mathfrak{k}] = \alpha(A)Y_\mathfrak{p}, \quad [A, Y_\mathfrak{p}] = \alpha(A)Y_\mathfrak{k}$$

となる．もし $Y_\mathfrak{p} = 0$ とすれば，$Y_\mathfrak{k} = 0$ となる．同様に $Y_\mathfrak{k} = 0$ なら $Y_\mathfrak{p} = 0$ である．よって $Y_\mathfrak{k} \neq 0$, $Y_\mathfrak{p} \neq 0$ を得る．よって $Y_\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}$ は $Y_\mathfrak{p} \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ となる．また $\alpha(X) = 0$ より $[X, Y_\mathfrak{p}] = 0$ である．よって $X, Y_\mathfrak{p}$ はどちらも $\mathfrak{p}$ に含まれる，ある可換環に入る．しかし $Y_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{a}$ であるので，X は $\mathfrak{a}$ とは異なる可換環に入る． □

あるワイル領域 C を固定すれば，C 上では，すべてのルート α は符号を変えないで正または負のどちらかの値をとる．そこで，あるワイル領域を固定すれば，C 上で正となるようなルートの集合 $\Delta_+ \subset \Delta$ が定まり，$\Delta = \Delta_+ \cup (-\Delta_+)$ となる，Δ_+ を正ルートの集合とよぶ.

上で述べたことから，対称空間 S に対して，$\mathfrak{p}$ に含まれる任意の極大可換部分環は同じ次元をもつことがわかった．そこで，

Definition 2.8.4. 対称空間 S のランクを $\mathfrak{p}$ に含まれる極大可換部分環の次元（よって極大平坦の次元）として定義.

上でみたように，ランクは $\mathfrak{p}$ 内の主 K 軌道（主軌道は regular vector の軌道となる）の余次元に一致する.

Proposition 2.8.8. $X \in \mathfrak{a}$ に対して次は同値

1. $X \in \mathfrak{a}$ は *regular*.
2. $\forall\alpha \in \Delta$，$\alpha(X) \neq 0$.
3. K の $\mathfrak{p}$ への *isotropy* 表現に対して，$\mathrm{Ad}(K)X$ が主 K 軌道.
4. $\dim \mathrm{Ad}(K)X = \dim p - \dim \mathfrak{a}$.

対称空間の isotropy 表現により，いろいろと面白い等質部分多様体を作れる（実旗多様体または R-space としてしられる）ことがわかる．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に対する isotropy 表現と双対 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ に対する isotropy 表現は同値であるので，非コンパクト型だけ調べればよい．そして，極大可換環らは共役であることから，isotoropy 表現の軌道を調べるには，ある極大可換環 $\mathfrak{a}$ の元を通る軌道のみを考えればよい.

Proposition 2.8.9. $x \in \mathfrak{a}$ の軌道の固定部分群 K_x のリー環は

$$\mathfrak{k}_x = \mathfrak{k}_0 \oplus \sum_{\alpha(x)=0} \mathfrak{k}_\alpha$$

となる．特に *regular* な元の軌道に対する固定部分群のリー環は $\mathfrak{k}_x = \mathfrak{k}_0$ となる.

Proof. $[k, x] = 0$ となるものが K_x のリー環であるので，$k = k_0 + \sum k_\alpha$ とすれば，

$$[k, x] = 0 + \sum \alpha(x) y_\alpha = 0$$

となるためには，$\alpha(x) \neq 0$ なら $y_\alpha = 0$ となる．よって，

$$k \in \mathfrak{k}_x = \mathfrak{k}_0 \oplus \sum_{\alpha(x)=0} \mathfrak{k}_\alpha$$

□

Remark 2.8.3. $\mathfrak{k}_0 = 0$ となることもありえる．例えば，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{g}_1$ の場合には，regular 軌道は K に一致する．また，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{p}$ の場合には，regular 軌道の固定群は離散群 $S(O(1) \times \cdots \times O(1))$ であり，$SO(n)/S(O(1) \times \cdots O(1))$ という実 flag 多様体となる．

ランクが 1 のとき，K 軌道は球面である．よって，$\mathfrak{p}$ において長さが同じベクトルはイソトロピー群の作用で移りあう．G の等長作用も考えれば，S 内の長さが同じ二つのベクトルが等長変換で移りあうことを意味する．これを二点等質空間とよぶ．ランクが 1 の対称空間は球面，射影空間，双曲空間である．

またランクが高い場合には，W をワイル群とすると，$\mathfrak{a}/W$ が $\mathfrak{p}$ 内で $\mathrm{Ad}(K)$ 同値な集合の代表元の集合となっている（次の section 2.11 の例を参照）．

Corollary 2.8.10. 非コンパクト型（*resp.* コンパクト型）対称空間 M に対して，ランク 1 であるための必要十分条件は断面曲率が負（*resp.* 正）．

Proof. 非コンパクトなら断面曲率は非正であることに注意する．ランク 1 であるとする．一次独立な $X, Y \in T_pM$ に対して，$[X, Y] \neq 0$ である．B は $\mathfrak{k}$ 上で負定値であり，$[X, Y] \in \mathfrak{k}$ である．そして

$$K(X, Y) = B([X, Y], [X, Y])$$

は負になる．逆に断面曲率が負なら，任意の一次独立な $X, Y \in T_pM$ に対して $K(X, Y) = B([X, Y], [X, Y]) < 0$ である．B が $\mathfrak{k}$ 上負定値であるので $[X, Y] \neq 0$ を得る．よってランクは 1 である． □

2.8.2　ルート分解

ルート分解について，もう少し詳しく述べる．非コンパクト対称空間 G/K に対応したリー環を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする．$\mathfrak{g}$ に次のようにして（正定値）内積を定めておく：

$$\langle X, Y \rangle := -B(X, \theta(Y))$$

（こうすれば以前の定義と一致）．

Lemma 2.8.11. $X \in \mathfrak{p}$ とする．$\mathrm{ad}X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に対して対称である．

Proof. これは場合わけして直接確かめればよい．例えば $X \in \mathfrak{p}$, $Y \in \mathfrak{k}$, $Z \in \mathfrak{p}$ とすする．このとき $[X, Y] \in \mathfrak{p}$, $[X, Z] \in \mathfrak{k}$ である．そこで

$$\langle [X, Y], Z \rangle = B([X, Y], Z) = -B(Y, [X, Z]) = \langle Y, [X, Z] \rangle$$

となる． □

Lemma 2.8.12. $X, Y \in \mathfrak{g}$ が可換であるとする．このとき $\mathrm{ad}X$, $\mathrm{ad}Y$ は可換である．

Proof.

$$\mathrm{ad}X\mathrm{ad}YZ = [X,[Y,Z]] = -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]] = [Y,[X,Z]] = \mathrm{ad}Y\mathrm{ad}XZ$$

□

$\mathfrak{p}$ に含まれる極大可換環 $\mathfrak{a}$ を固定しておく．$X \in \mathfrak{a}$ に対して $\mathrm{ad}X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は対称であり，さらに $\mathfrak{a}$ 可換なので $\mathrm{ad}\mathfrak{a}$ も可換である．よって $\mathfrak{g}$ を直交同時固有分解する．つまり

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

である．ここで $\mathfrak{g}_\alpha$ は同時固有空間であり，Δ は $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ となる同時固有値の集合で，0 を除いたもの．

Definition 2.8.5 (制限ルート)**.** Δ をルートの集合とよび，$\alpha \in \Delta$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関する（制限）ルートと呼ぶ．

$X \in \mathfrak{a}$, $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して

$$[X, Y] = (\mathrm{ad}X)Y = \alpha(X)Y$$

となる．また $Y \in \mathfrak{g}_0$ に対しては $[X, Y] = 0$ である．α は可換環なので

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_0$$

であることに注意．

さらに $\alpha : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ は線形である．（$\mathrm{ad}\mathfrak{a}$ は対称だったので，同時固有値 α は実値となる）

Proof.

$$\mathrm{ad}(X+Y) = \mathrm{ad}X + \mathrm{ad}Y, \quad \mathrm{ad}(\mu X) = \mu\mathrm{ad}X$$

であるので． □

ルートの性質を述べよう．

Lemma 2.8.13. *1.* Δ は $\mathfrak{a}^*$ を *span* する．

2. $\alpha + \beta \in \Delta$ なら $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, $\alpha + \beta \notin \Delta$ なら $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$,

3. $\alpha \in \Delta$ なら $-\alpha \in \Delta$ である．また $\alpha \in \Delta$ なら $\theta : \mathfrak{g}_\alpha \to \mathfrak{g}_{-\alpha}$ は同型写像．

4. θ は $\mathfrak{g}_0$ を保存する．さらに $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}$ である．ここで，$\mathfrak{g}_0$ の定義から $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$ は $\mathfrak{a}$ の中心化環（*cetnrlizer*）である．

5. $X \in \mathfrak{a}$，$Y \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して $\mathrm{Ad}(e^{tX})Y = e^{t\alpha(X)}Y$ となる．

6. $\alpha \neq -\beta$ なら $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ となる．

Proof.　1. $\alpha(x) = 0$（$\forall\alpha \in \Delta$）となる $x \in \mathfrak{a}$ が存在したとする．これは，$[x, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$（$\forall\alpha \in \Delta$）となる．よって，$[x, \mathfrak{g}] = 0$ となり，$\mathfrak{g}$ が半単純であるので $x = 0$ である．

2. $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Z \in \mathfrak{g}_\beta$, $X \in \mathfrak{a}$ とする．このとき

$$(\mathrm{ad}X)[Y,Z] = [X,[Y,Z]] = -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]] = \beta(X)[Y,Z] + \alpha(X)[Y,Z]$$

3. $X \in \mathfrak{a}$, $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$ とする．$X = -\theta(X)$ であることに注意して，

$$[X, \theta Y] = \theta[\theta X, Y] = -\theta[X,Y] = -\theta(\alpha(X)Y) = -\alpha(X)\theta Y$$

となる．$\theta^2 = \mathrm{id}$ であるので，$\theta : \mathfrak{g}_\alpha \to \mathfrak{g}_{-\alpha}$ は同型を与える．よって $\alpha \in \Delta \iff -\alpha \in \Delta$ となる．

4. 上と同様にして $X \in \mathfrak{a}$, $Y \in \mathfrak{g}_0$ とすれば，

$$[X, \theta Y] = 0$$

となるので $\theta : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ を与える．そこで ± 1 固有分解すれば $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p}$ となる．$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p}$ であることは明らかである．$\dim \mathfrak{a} \neq \dim \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p}$ とすると，$X \neq 0 \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p}$ であるが $\mathfrak{a}$ に入らないものをとることができる．しかし $[\mathfrak{a}, X] = 0$ であるので，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{p}$ に含まれる極大可換環であることに反する．よって $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p}$ となる．

5. $X \in \mathfrak{a}$ とする．

$$\mathrm{Ad}(e^{tX}) = e^{t\mathrm{ad}X} = \mathrm{id} + \sum \frac{t^n}{n!}(\mathrm{ad}X)^n$$

となる．これを使えばわかる．

6. $\alpha \neq \beta$ とすれば

$$0 = \langle \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta \rangle = -B(\mathfrak{g}_\alpha, \theta\mathfrak{g}_\beta) = -B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\beta})$$

となる．

□

（参考）岩沢分解

上の $\mathfrak{g}$ のルート分解において，$\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{k}_\alpha$ の関係を考えれば，次の直和分解を得ることができる．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n} = \oplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$$

このとき $\mathfrak{n}$ はベキ零リー環となる．この分解を $\mathfrak{g}$ の岩沢分解という．$\mathfrak{s} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ は可解リー環であり，$[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{n}$ となる．$\mathfrak{a}, \mathfrak{n}$ に対する部分リー群を A, N とすれば，

$$K \times A \times N \ni (k, a, n) \mapsto kan \in G$$

は微分同相であり，これを G の岩沢分解という．

2.8.3 ワイル群

コンパクト型または非コンパクト型の対称空間 $S = G/K$ を考える．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を対応するカルタン分解として，$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ を極大可換環とする．$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ 内ですべての K 軌道と交わりをもつのであった．ここで各軌道は $\mathfrak{a}$ といくつかの交点をもつことに注意しよう．コンパクト部分群

$$M = \{k \in K | \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\} \subset K$$

を考える（K コンパクトより M もコンパクト）．任意の $x \in \mathfrak{a}$ に対して，$\mathrm{Ad}(M)x$ を考える．$\mathrm{Ad}(M)x \subset \mathfrak{a}$ であるので，$\mathrm{Ad}(M)x \subset \mathrm{Ad}(K)x \cap \mathfrak{a}$ となる．さらに，$x \in \mathfrak{a}$ が regular なら $\mathrm{Ad}(M)x = \mathrm{Ad}(K)x \cap \mathfrak{a}$ となる．

Proof. $\mathrm{Ad}(K)x \cap \mathfrak{a}$ 内の点を一つとってくる．つまり，$k \in K$ で $\mathrm{Ad}(k)x \in \mathfrak{a}$ を満たすとする．x が regular なので $\mathrm{Ad}(k)x$ も regular である．よって，$\mathrm{Ad}(K)x$ の法空間は点 x および $\mathrm{Ad}(k)x$ で $\mathfrak{a}$ となる．つまり，$\mathfrak{a} = N_x O = N_{\mathrm{Ad}(k)x} O = \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$ となる．これは $\mathrm{Ad}(k)$ が $\mathfrak{a}$ を保存することを意味するので，$k \in M$ となる． □

M は $\mathfrak{a}$ に作用するので，この作用（$M \to GL(\mathfrak{a})$）の核は

$$M_0 = \{k \in K | \mathrm{Ad}(k)x = x \quad \forall x \in \mathfrak{a}\}$$

となる．このとき，M と M_0 のリー環はどちらも

$$\mathfrak{m} = \{y \in \mathfrak{k} | [y, \mathfrak{a}] = 0\}$$

となる．

Proof. $Lie(M_0)$ が $\mathfrak{m}$ となることは明らか．そこで, $y \in Lie(M)$ とすれば, $[y, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ となるが，$B([y, \mathfrak{a}], x) = B(y, [\mathfrak{a}, x]) = B(y, 0) = 0$ ($\forall x \in \mathfrak{a}$) となる．固有分解 $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \sum \mathfrak{p}_\alpha$ において，各固有空間は直交していた（特に $\pm B$ は $\mathfrak{a}$ 上で正定値内積を与える）．よって，$B([y, \mathfrak{a}], x) = 0$ から $[y, \mathfrak{a}] = 0$ を得る．つまり $Lie(M) = \mathfrak{m}$ となる． □

そこで商群 $W = M/M_0$ は離散群であり，M がコンパクトであったので有限群である．そして W は $\mathfrak{a}$ に作用する．

Definition 2.8.6. 有限群 $W = M/M_0$ を対称空間 S の $\mathfrak{a}$ に関する**ワイル群**とよぶ.

M または W の $\mathfrak{a}$ への作用はルート超平面を置換するので，あるワイル領域を別のワイル領域へ移す.

Proof. M の $\mathfrak{a}$ の作用を考える．$k \in M$ とは $k \in K$ であり，$\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ となるものである．またルートは

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{z \in \mathfrak{g} | \mathrm{ad}(x)z = \alpha(x)z, \forall x \in \mathfrak{a}\}$$

として定義した．$k \in M$ として，任意の $z \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(x)(\mathrm{Ad}(k)z) &= [x, \mathrm{Ad}(k)z] = \mathrm{Ad}(k)[\mathrm{Ad}(k^{-1})x, z] = \mathrm{Ad}(k)\alpha(\mathrm{Ad}(k)^{-1}x)z \\ &= \alpha(\mathrm{Ad}(k)^{-1}x)\mathrm{Ad}(k)z\end{aligned}$$

となる．ここで $\alpha\mathrm{Ad}(k)^{-1} \in \mathfrak{a}^*$ とみなせるので，これはルートである．よって，M はルートの集合へ作用する．また M_0 は id で作用することに注意すれば，ワイル群がルートの集合へ作用する．これはワイル群の $\mathfrak{a}$ の作用でみれば，ルート超平面の置換を与える．またルートは $\mathfrak{a}^*$ の基底となるので，ルートの置換によって $\mathfrak{a}^*$ の作用がわかる．つまり，$\mathfrak{a}$ でみれば，ルート超平面の置換がわかれば，線形作用がわかってしまうことになり，ワイル領域はワイル領域へ移る. □

実は，ワイル群はつぎのようにルート超平面での鏡映により生成される.

Theorem 2.8.14. $\mathfrak{a}$ へ作用するワイル群 W は，ルート超平面 $H_\alpha = \ker\alpha$（$\forall\alpha \in \Delta$）に関する鏡映により生成される．またワイル領域へ単純推移的に作用する.（単純とはあるワイル領域を固定するなら，恒等写像）

Proof. 任意のルート $\alpha \in \Delta$ に対して，ルート超平面 H_α の鏡映がワイル群の元であることを証明しよう．$\alpha \in \Delta$ に対して，$\alpha \in \mathfrak{a}^*$ であり，B が非退化なので，$A_\alpha \in \mathfrak{a}$ を $B(x, A_\alpha) = \alpha(x)$（$\forall x \in \mathfrak{a}$）となるベクトルをとれる．このとき，鏡映は

$$s_\alpha(x) := x - 2\frac{\alpha(x)}{\alpha(A_\alpha)}A_\alpha$$

で与えられる．実際，$\frac{x+s_\alpha(x)}{2}$ は H_α 上にある：

$$\alpha(\frac{x + s_\alpha(x)}{2}) = \alpha(x - \frac{\alpha(x)}{\alpha(A_\alpha)}A_\alpha) = 0$$

さて，任意の $x \in \mathfrak{a}$ に対して，$y_\alpha \in \mathfrak{p}_\alpha$, $z_\alpha \in \mathfrak{k}_\alpha$ で

$$[x, y_\alpha] = \alpha(x)z_\alpha, \quad [x, z_\alpha] = \alpha(x)y_\alpha$$

をみたすベクトルを選んでおく．さらに定数倍して，$B(z_\alpha, z_\alpha) = -1$ となるようにしておく．このとき，

$$B(x, [z_\alpha, y_\alpha]) = -B([x, y_\alpha], z_\alpha) = \alpha(x)$$
$$[x, [z_\alpha, y_\alpha]] = -[z_\alpha, [y_\alpha, x]] - [y_\alpha, [x, z_\alpha]] = 0$$

となる．第一式は $A_\alpha = [z_\alpha, y_\alpha]$ を意味し，第二式は $[z_\alpha, y_\alpha] \in \mathfrak{a}$ を意味する．そこで

$$\mathrm{ad} z_\alpha(A_\alpha) = -\alpha(A_\alpha) y_\alpha, \quad (\mathrm{ad} z_\alpha)^2(A_\alpha) = -\alpha(A_\alpha) A_\alpha$$

を使って，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(\exp t z_\alpha) A_\alpha &= \sum \frac{1}{(2n)!} (t \mathrm{ad} z_\alpha)^{2n}(A_\alpha) + \sum \frac{1}{(2n+1)!} (t \mathrm{ad} z_\alpha)^{2n+1}(A_\alpha) \\
&= \sum \frac{1}{(2n)!} t^{2n} (-\alpha(A_\alpha))^n A_\alpha + \sum \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} (-\alpha(A_\alpha))^n y_\alpha \\
&= \cos(\sqrt{\alpha(A_\alpha)} t) A_\alpha + \sin(\sqrt{\alpha(A_\alpha)} t) y_\alpha
\end{aligned}$$

となる．$\alpha(A_\alpha) = B(A_\alpha, A_\alpha) > 0$ であるので，ある $t_0 \in \mathbb{R}$ で $t_0 \sqrt{\alpha(A_\alpha)} = \pi$ となるものが存在する．そこで $k_0 = \exp t_0 z_\alpha$ とすれば，

$$\mathrm{Ad}(k_0) A_\alpha = -A_\alpha$$

となる．また $x \in H_\alpha$ なら，$[z_\alpha, x] = 0$ となる．よって，H_α の各点は $\mathrm{Ad}(k_0)$ で保存される．以上から $\mathrm{Ad}(k_0)$ は $\mathfrak{a}$ を保存し，s_α に一致するので，$s_\alpha \in M$ となる．

すべてのルート超平面に対する鏡映が生成する群はワイル領域に推移的に作用する．一方，ワイル群もワイル領域にワイル領域に移すことにより決定される．よって，ワイル群は鏡映で生成される．

最後に単純に作用することを証明しよう．つまり $w \in W$ があるワイル領域を不変にするなら，恒等写像であることをみる．$w \in W$ が order r として（$w^r = 1$），$wC = C$ とする．このとき $x' \in C$ に対して，w-平均

$$x := x' + wx' + \cdots + w^{r-1} x'$$

とする．ワイル領域は凸なので $x \in C$ となる．また，

$$wx = w(x' + \cdots + w^{r-1} x') = x' + \cdots + w^{r-1} x' = x$$

となる．また x が reglar であるので，下の補題から $w = 1$ を得る． □

Lemma 2.8.15. $x \in \mathfrak{a}$ が *regular* であり，ある $k \in K$ に対して $\mathrm{Ad}(k)x = x$ なら，$\mathrm{Ad}(k)$ はすべての $\mathfrak{a}$ を固定する．

Proof. 双対性から S をコンパクト型対称空間 $S=G/K$ としてよい．ここで G は半単純かつコンパクトである．$\alpha\in\Delta$ に対して，$x\in\mathfrak{a}$ が regular なので，$\alpha(x)\neq 0$ となる．そこで，ルート分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}_0+\sum_{\alpha}\mathfrak{k}_\alpha+\mathfrak{p}_0+\sum_{\alpha}\mathfrak{p}_\alpha$$

を考えると，x の中心化リー環は $\mathfrak{g}_0:=\mathfrak{k}_0\oplus\mathfrak{p}_0$ である（$[x,\mathfrak{g}_\alpha]=\alpha(x)\mathfrak{g}_\alpha$ であるので）．この $\mathfrak{g}_0$ は，$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_0$ の勝手な元の中心化リー環に含まれる（$y\in\mathfrak{a}$ が regular なら $\mathfrak{g}_0$ であり，singular なら $\mathfrak{g}_0$ を含む）．そこで $\mathrm{Ad}(k)x=x$ なら，$k\in\exp\mathfrak{g}_0$ を証明すれば，$k=\exp\exists z$（$z\in\mathfrak{g}_0$）となり，$\mathrm{Ad}(k)y=\exp t\mathrm{ad}(z)y=y$（$\forall y\in\mathfrak{a}$）.

より一般の命題である「$x\in\mathfrak{g}$ に対して，$C(x)=\{g\in G|\mathrm{Ad}(g)x=x\}$ が連結」を証明しよう．これがわかれば，x の中心化リー群 $C(x)$ は連結となり，$\exp\mathfrak{g}_0=C(x)$ となるので，$\mathrm{Ad}(k)x=x$ なら，$k\in\exp\mathfrak{g}_0$ がわかる．

T_x を $\exp\mathbb{R}x$ の閉包とする，これはコンパクト群 G の閉連結可換部分群である．$c\in C(x)$ を任意にとる．$C(x)$ の定義から，c は T_x と可換なので，c と T_x はある閉可換部分群 A を生成する．そして A の任意の元は x と可換であるので，$A\subset C(x)$ となる．A の単位元連結閉部分群を A^0 とする（これは T_x を含む）．連結閉可換群はトーラスなので，ある $a\in A^0$ が存在して，$\langle a\rangle=\{a^n|n\in\mathbb{Z}\}$ の閉包が A^0 となる．また，A はコンパクトであるので，A は高々有限個の連結成分をもつ．A/A^0 は有限群なので，$c^p\in A^0$ となる $p\in\mathbb{Z}$ が存在する．そして，A は $\langle ac\rangle$ の閉包である．さて，G がコンパクトなので，ある $y\in\mathfrak{g}$ で $ac=\exp y$ となるものが存在する．そこで，$\exp\mathbb{R}y$ の閉包は c と T_x を含むトーラス T_y（連結）となる．以上から，$c\in T_y\subset A\subset C(x)$ であり，c は $C(x)$ の連結成分に入る．つまり $C(x)$ は連結． □

任意の極大可換部分環 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ は K 軌道と直交で交わるのであった．さらに $\mathfrak{a}$ はワイル領域たちの閉包の和である．これらの領域の内部を通る軌道は regular 軌道である（つまり，極大次元をもつ）．そして，その軌道は各ワイル領域と一回づつ交わる．ランク 1 対称空間の場合には，任意の点の任意の二つの単位ベクトルはある等長変換で移りあう．ランクが高い場合には，任意の点の任意の極大部分環に対するワイル領域が単位ベクトルの代わりをする．つまり，これらのワイル領域たちは等長変換で移りあうことができる．

固定したワイル領域 C に接する超平面 H_α に対応したルート α を**基本ルート**とよぶ．ワイル群がワイル領域を入れ替えるので，すべてのルートはワイル群作用のもとで，基本ルートに共役である．そこで，基本ルート系となりえるもの及び対応する対称空間を分類することが可能である．

2.9　分類

今まで述べたことから対称空間の分類は，非コンパクト型既約対称空間の分類となる．すべての非コンパクト既約対称空間 M は $M = G/K$ とかけるが，このとき，G は非コンパクト実単純リー群で中心が自明．そして，K が G の極大コンパクト群となる．$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \theta)$ を対応するリー環の対称対とする．(G_1, K_1, Θ) を別の既約非コンパクト型リーマン対称対とする．$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1$ なら，G, G_1 は中心が自明なので $G = G_1$ となる．そして，極大コンパクト群は共役であった．よって，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \theta) \cong (\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k}_1, \theta_1)$ となる（θ を定義するには，$\mathfrak{k}$ のキリング形式での直交補空間を $\mathfrak{p}$ として，$\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ 上で 1, -1 とすればよい）．そこで，G が非コンパクトなる実単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対して，高々一つのリーマン対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \theta)$ を得る（$\mathfrak{k}$ は極大コンパクト群のリー環とし定義）．

さらに，すべての複素半単純リー環にはコンパクト実型が存在する（Weyl の定理）．Weyl の定理は複素半単純リー環のルート系などを議論することで作れる（難しくはない）．そこで，実単純リー環の $\mathfrak{g}$ の複素化を考えたとき，キリング形式は非退化のままなので，半単純複素リー環を得る．そして，対応するコンパクト実型 $\mathfrak{g}_u$ が存在する．この $\mathfrak{g}_u$ は複素共役写像 σ の不変部分空間として得られる．これを $\mathfrak{g}$ へ制限してもよいので，$\sigma^2 = \mathrm{id}$ となる自己同型を得る．これがカルタン対合となる．このことから，非コンパクト型の実単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対して，ある非コンパクト型既約リーマン対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \theta)$ を得る．

以上から，実半単純リー環の分類を行えばよい．複素化したとき複素リー環として単純（III 型）であるか，そうでないか（IV 型）である．そして，実単純リー環の分類を行うには，これまで述べた基本ルート系を使って，ディンキン図形を一般化した佐竹図形を用いる（佐竹図形が同じなら，同じリー環を与えるのである）．実単純リー環は次のいずれかである．

- 複素半単純リー環（複素単純リー環の直和）を実リー環とみたもの．（IV 型）
- 古典型実単純リー環 $\mathfrak{so}(m,n)$，$\mathfrak{su}(m,n)$，$\mathfrak{sp}(m,n)$，$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$，$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})$，$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$，$\mathfrak{so}^*(2n)$（III 型）
- 例外型実単純リー環
- 複素単純リー環のコンパクト実型．

ここで $\mathfrak{so}^*(2n)$ のリー群は

$$SO^*(2n) = \{A \in SU(n,n) | A^t J K_n A = K_n\}, \quad K_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

であり連結である．

この分類から，対称空間の分類をすることができる．例外型は定義するのも面倒なの

で，古典型だけ書いておく．

I 型	III 型	次元	rank
$\dfrac{SU(n)}{SO(n)}$	$\dfrac{SL(n,\mathbb{R})}{SO(n)}$	$(n-1)(n+2)/2$	$n-1$
$\dfrac{SU(2n)}{Sp(n)}$	$\dfrac{SL(n,\mathbb{H})}{Sp(n)}$	$(n-1)(2n+1)$	$n-1$
$\dfrac{SU(p+q)}{S(U(p)\times U(q))}$	$\dfrac{SU(p,q)}{S(U(p)\times U(q))}$	$2pq$	$\min\{p,q\}$
$\dfrac{SO(p+q)}{SO(p)\times SO(q)}$	$\dfrac{SO^{\circ}(p,q)}{SO(p)\times SO(q)}$	pq	$\min\{p,q\}$
$\dfrac{SO(2n)}{U(n)}$	$\dfrac{SO^{*}(2n)}{U(n)}$	$n(n-1)$	$[n/2]$
$\dfrac{Sp(n)}{U(n)}$	$\dfrac{Sp(n,\mathbb{R})}{U(n)}$	$n(n+1)$	n
$\dfrac{Sp(p+q)}{Sp(p)\times Sp(q)}$	$\dfrac{Sp(p,q)}{Sp(p)\times Sp(q)}$	$4pq$	$\min\{p,q\}$

低い次元の対称空間は次の同型がある．ここではコンパクト型を書いている，対応する非コンパクト型の同型もある．

$$S^2 = \mathbb{C}P^1 = SU(2)/SO(2) = SO(4)/U(2) = Sp(1)/U(1), \quad S^4 = \mathbb{H}P^1$$

$$S^5 = SU(4)/Sp(2), \quad \mathbb{C}P^3 = SO(6)/U(3), \quad G_2^+(\mathbb{R}^5) = Sp(2)/U(2)$$

$$G_2^+(\mathbb{R}^6) = G_2(\mathbb{C}^4), \quad G_2^+(\mathbb{R}^8) = SO(8)/U(4), \quad G_3^+(\mathbb{R}^6) = SU(4)/SO(4)$$

II 型	IV 型	次元	rank
$SU(n+1)$	$SL(n+1,\mathbb{C})/SU(n+1)$	$n(n+2)$	n
$Spin(2n+1)$	$SO(2n+1,\mathbb{C})/SO(2n+1)$	$n(2n+1)$	n
$Sp(n)$	$Sp(n,\mathbb{C})/Sp(n)$	$n(2n+1)$	n
$Spin(2n)$	$SO(2n,\mathbb{C})/SO(2n)$	$n(2n-1)$	n

$Spin(2) = U(1)$，$Spin(4) = SU(2)\times SU(2)$ なので，上では $n \geq 3$ としているが，次の同型がわかる（非コンパクト型に対応する同型がある）．

$$Spin(3) = SU(2) = Sp(1), \quad Spin(5) = Sp(2), \quad Spin(6) = SU(4)$$

2.10　エルミート対称空間

Definition 2.10.1. エルミート対称空間とは，エルミート多様体 (M,g) で，各点に正則等長な点対称 σ_p が存在すること．局所的に存在する場合には，局所エルミート対称空間という．

M が概複素多様体でエルミート計量をもつとする．その計量からの接続を ∇ として，さらに点対称が存在して，∇ と概複素構造 J を保つとする．このとき $\nabla J = 0$ となるので，M はケーラー多様体である．

Proof. $(1,2)$ テンソル場 ∇J を考える．

$$(\nabla J)_p(X_p, Y_p) = (\nabla_{Y_p} J)_p(X_p)$$

点対称 σ_p を作用させると，

$$-(\nabla_{Y_p} J)_p(X_p) = \sigma_p((\nabla_{Y_p} J)_p(X_p)) = (\nabla_{-Y_p} J)(-X_p) = (\nabla_{Y_p} J)_p(X_p)$$

となるので，$\nabla J = 0$ となる．よって，J は可積分かつ g はケーラー計量となる．また，点対称が J を保存するので，正則となる． □

また，M をケーラー多様体で，リーマン対称空間とする．このとき，点対称は J を保存するので，点対称は正則写像である．

Proof. $x \in M$ として点対称 σ_x を考える．J は $(1,1)$ テンソルなので，J_x は J_x に写る．x の近傍の点 y を測地線 γ で結ぶ．このとき γ に対する平行移動を τ とする．このとき，$\sigma_x(\gamma)$ に対する平行移動は $\sigma_x \tau \sigma_x^{-1}$ であった．これは x から $\sigma_x(y)$ への平行移動である．そして，J はケーラーより平行であるので，$J_{\sigma_x(y)} = \sigma_x \tau \sigma_x^{-1}(J_x) = \sigma_x(J_y)$ となる．よって，σ_x は J を保存するので，正則写像である． □

以上から

Proposition 2.10.1. M を概複素構造 J とエルミート計量 g をもつとする．

- M が対称空間で，点対称が J を保存するなら，J は可積分であり，g はケーラー計量となる．よって，エルミート対称空間となる．
- (J, g) がケーラーで，M が対称空間なら，点対称は正則となる．よってエルミート対称空間となる．

(M, g) をエルミート対称空間としたとき，正則等長自己同型群の単位元連結成分 G は M に推移的に作用するリー群であり，$M = G/K$ と表すことができる（これは対称空間のときと同様の議論）．

$M = G/K$ を対称空間とする．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ として，$\mathfrak{p}$ が複素構造 I で，$\mathrm{Ad}(k)I = I\mathrm{Ad}(k)$（$\forall k \in K$），$g(JX, JY) = g(X, Y)$（$\forall X, Y \in \mathfrak{p}$）を満たすものがあるとする．このとき G/K にエルミート対称空間の構造が入る．

Proof. $x = [gK]$ として，$X_x \in T_{[gK]}(M)$ とする．$J_x(X_x) = dg(I((dg)^{-1}X))$ として定義する．これは well-defined である（$dgdkIdk^{-1}dg^{-1} = dg\mathrm{Ad}(k)I\mathrm{Ad}(k^{-1})dg^{-1} =$

$dgIdg^{-1}$)．このとき，$J_x^2(X_x) = dgI(dg)^{-1}dgI(dg)^{-1}(X) = -X_x$ となる．G 不変であることも定義からわかる．また, 点対称 σ_p に対して, $d\sigma_p = -I$ であるので, $d\sigma_p I = Id\sigma_p$ を満たすので，これを G で動かせば，J はすべての点対称と可換である．また，J は G 不変なテンソルであるので，系 2.5.4 より，$\nabla J = 0$ となる．よって，ケーラー多様体となり，エルミート対称空間となる．また G の作用が正則等長である． □

以上から

Proposition 2.10.2. G/K は対称空間とする．$\mathfrak{p}$ 上に $\mathrm{Ad}(K)$ と可換な概複素構造があり，それが内積についてエルミート内積となるとする．このとき G/K には G 不変なケーラー計量が入り，エルミート対称空間となる．さらに，この双対を考えたとき，同様の構造が入るので双対もエルミート対称空間である．

Proof. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ の双対 $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ に対して，計量を $g^*(ix, iy) = g(x, y)$ $(x, y \in \mathfrak{p})$．概複素構造を $J^*(ix) = iJx$（$x \in \mathfrak{p}$）として定義すればよい． □

逆に，対称空間 G/K がエルミート対称空間なら，複素構造 J に対して，J_p を考えると，$\mathfrak{p}$ 上には，$\mathrm{Ad}(k)J_p = J_p\mathrm{Ad}(k)$（$\forall k \in K$），$g(J_pX, J_pY) = g(X, Y)$（$\forall X, Y \in \mathfrak{p}$）となる．

リーマン対称空間として，半単純，既約，コンパクト型，非コンパクト型が成立するとき，エルミート対称空間についても，半単純，既約，コンパクト型，非コンパクト型とよぶ．そして，ドラーム分解や双対などが成立する．すなわち，単連結エルミート対称空間はユークリッド型と半単純型の直和に分解され．半単純型は，次の既約コンパクト型と既約非コンパクト型に分解できる．

1. $\mathfrak{g}$ はコンパクト型実単純リー環
2. $\mathfrak{g}$ は非コンパクト型実単純リー環

つまり，II 型（$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1$．及びその双対である IV 型）は現れない．

Proof. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1$（$\mathfrak{g}_1$ はコンパクト実単純リー環）とする．このとき分解は

$$\mathfrak{k} = \{(X, X) | X \in \mathfrak{g}_1\}, \quad \mathfrak{p} = \{(X, -X) | X \in \mathfrak{g}_1\}$$

である．エルミート対称空間とすると，$\mathfrak{p}$ はベクトル空間としては $\mathfrak{g}_1$ と同型であり，$\mathfrak{p}$ 上の複素構造 J で，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k}$ と可換なものが存在する．よって，$\mathfrak{g}_1$ 上の複素構造 J_1 かつ $\mathrm{ad}(X)J_1 = J_1\mathrm{ad}(X)$（$X \in \mathfrak{g}_1$）なるものを用いて，

$$J(X, -X) = (J_1X, -J_1X)$$

として表される．

そこで，$\mathfrak{g}_2 = (\mathfrak{g}_1, J_1)$ という複素単純リー環が存在して，$(\mathfrak{g}_2)^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_1$ となる．これは $\mathfrak{g}_1$ が非コンパクト型となってしまうので，矛盾． □

Theorem 2.10.3.
- G/K をエルミート対称空間とする．G が半単純なら，$Z_0 \in Z(\mathfrak{k})$（$Z(\mathfrak{k})$ は $\mathfrak{k}$ の中心）で，$J = \mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}(Z_0)$ かつ $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} | [Z_0, X] = 0\}$（$\mathfrak{k}$ は Z_0 の中心化環）となるものが存在する．
- G/K を既約半単純対称空間とする．K が非離散な中心をもつなら，K の中心は 1 次元トーラスとなり，G/K は G 不変エルミート構造をもつ

Proof. 複素構造 $I : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{k}$ 上で $I = 0$ とすることにより，$\mathfrak{g}$ 上へ拡張する．このとき I は $\mathfrak{g}$ の微分であることを証明しよう．つまり，$I[X, Y] = [IX, Y] + [X, IY]$ を示す．

- $X, Y \in \mathfrak{k}$ なら明らか．
- $X \in \mathfrak{p}$，$Y \in \mathfrak{k}$ とする．$[X, IY] = 0$ である．I は $\mathrm{ad}(\mathfrak{k})$ 不変であったので，$[IX, Y] = -\mathrm{ad}(Y)IX = -I\mathrm{ad}(Y)X = I[X, Y]$ となるので，$I[X, Y] = [IX, Y] + [X, IY]$
- $X, Y \in \mathfrak{p}$ とする．G/K がケーラー多様体なので，曲率 R について $R(IX, IY) = R(X, Y) = -\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}([X, Y])$ となる．そこで，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}([IX, IY]) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}([X, Y])$ となる．$\mathfrak{k} \to \mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{k})$ は忠実であったので，$[IX, IY] = [X, Y]$ を得る．Y を IY とすれば，$[IX, Y] + [X, IY] = 0$ となる．また，$[X, Y] \in \mathfrak{k}$ であったので，$I[X, Y] = 0$．よって $I[X, Y] = [IX, Y] + [X, IY]$ が成立する．

このように I は微分である．G が半単純なので，命題 2.7.29 より，$Z_0 \in \mathfrak{g}$ があって，$\mathrm{ad}(Z_0) = I$ となる．$Z_0 = X_0 + Y_0 \in \mathfrak{p} + \mathfrak{k}$ とすれば，$0 = \mathrm{ad}(Z_0)Z_0 = IZ_0 = IX_0$．よって，$I^2 X_0 = -X_0 = 0$ となり，$Z_0 = Y_0 \in \mathfrak{k}$ となる．$\mathrm{ad}(Z_0)Y = IY = 0$ $(\forall Y \in \mathfrak{k})$ であるので，$Z_0 \in Z(\mathfrak{k})$．また，$[Z_0, X] = 0$ とすれば $IX = 0$ であるので，$X \in \mathfrak{k}$ となる．よって，$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} | [Z_0, X] = 0\}$．

次に，$\mathrm{Ad} : K \to O(\mathfrak{p})$ は既約である．次の補題から，$\mathrm{Ad}(K)$ の中心は高々 1 次元である．さらに，$\mathrm{Ad} : K \to O(\mathfrak{p})$ は忠実であり，仮定より K が離散的な中心をもつなら，K の中心の単位元連結成分も 1 次元であり，S^1 と同型となる．そして，$k \in K^0$ で，$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^2 = -1$ となるものが存在する．特に，$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)$ は $\mathrm{Ad}(K)$ 不変な複素構造となる． □

Lemma 2.10.4. G が $SO(n)$ の部分群であり，$\mathbb{R}^n$ に既約に等長で作用しているとする．このとき $\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{z}$ は 1 次元である．

Proof. $A \in M(n, \mathbb{R})$ で G の作用と可換とする．

1. A が冪零なら $A=0$．証明：$A^k=0$ となる最小の自然数を k とする．$W=\{x\in\mathbb{R}^n|Ax=0\}$ とすれば G 不変部分空間となるので，既約より $W=0,\mathbb{R}^n$ である．$W=0$ なら，$A=0$．$W=\mathbb{R}^n$ なら，A は可逆となり，$A^{k-1}=A^{-1}A^k=0$ で矛盾．
2. A の最小多項式は既約多項式．証明：A の最小多項式が f_1f_2（f_1,f_2 は互いに素）とすると，$W_i=\{x\in\mathbb{R}^n|f_i(A)x=0\}$ とすれば，$\mathbb{R}^n=W_1+W_2$ と不変部分空間の和になり，G が既約に矛盾する．よって，$f=g^k$（g は既約）．$g(A)$ は冪零であるので，$g(A)=0$ となり g が最小多項式であり，$f=g$ である．
3. A は $A=aI$ または $A=aI+bJ$ となる．ここで，$a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0, J^2=-1$．特に，2 番目の場合には n は偶数．証明：A の最小多項式は $x-a$ または $(x-z)\overline{(x-z)}$（$z\notin\mathbb{R}$）となるので，$x-a$ または $(x-a)^2+b^2$（$b\neq 0$）となる．最初の場合は $A=aI$ である．2 番目の場合には，$J=(A-aI)/b$ とすれば $J^2=-I$ であり，$A=aI+bJ$ となる．J は複素構造であり J は偶数．

さて，A を G の作用と可換な交代行列とすれば，純虚数の固有値をもつので，$A=0,-bJ$ となる．さらに，そのような行列 $A\neq 0$, B があり，$AB=BA$ とすると，$B=cA$ となる $c\in\mathbb{R}$ が存在する．

証明：$A=bJ$, $B=b'K$（$b\neq 0$，$I^2=K^2=-1$）とすると，$IK=KI$ となる．

$$W_1=\{x\in\mathbb{R}^n|Jx=Kx\},\quad W_2=\{x\in\mathbb{R}^n|Jx=-Kx\}$$

とする．このとき，$\mathbb{R}^n=W_1\oplus W_2$ となる．実際，$W_1\cap W_2=\{0\}$ は明らか．$x\in\mathbb{R}^n$ に対して，$y=\frac{x-JKx}{2}\in W_1$，$z=\frac{x+JKx}{2}\in W_2$ とすればよい．さらに，W_1,W_2 は G 不変であるので，$W_1=\mathbb{R}^n$ または $W_2=\mathbb{R}^n$ が成立する．よって，$J=K$ または $J=-K$ のいずれかが成立する．

さて，$\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{z}$ は 1 次元であることを証明しよう．$z,z'\in\mathfrak{z}\subset\mathfrak{g}\subset\mathfrak{o}(n)$ とする．これらは G の作用と可換であり，交代行列である．よって，$z=cz'$ となる c が存在する．よって，$\dim\mathfrak{z}\leq 1$ となる．$\dim\mathfrak{z}=1$ の場合には，$\mathfrak{z}=\{cJ|c\in\mathbb{R}\}$ となる J が存在する．基底の変換で J は $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ が dialgonal になランでいる行列としてよい．これが生成する 1 パラメータ群が G の中心であり，S^1 と同型である．□

K の中心が 1 次元の場合にもう少し具体的に複素構造を与えよう．K の中心である 1 次元トーラスのリー環を $\mathfrak{t}$ とする．また $\mathfrak{p}$ の内積 g を $\mathfrak{p}^c$ へ拡張して，エルミート内積を $(x,y)=g(x,\bar{y})$（$x,y\in\mathfrak{p}^c$）と定義する．このとき，$\mathfrak{t}$ は内積を不変にし，可換なので同時対角化可能（歪エルミート行列）であり，

$$\mathfrak{p}^c=\mathfrak{p}_0+\sum\mathfrak{p}_\lambda+\overline{\mathfrak{p}_\lambda}$$

（直交直和）．ここで，$\lambda \in \mathfrak{t}^*$ であり，

$$\mathfrak{p}_\lambda = \{x \in \mathfrak{p}^c | \forall z \in \mathfrak{t}, \mathrm{ad}(z)(x) = \sqrt{-1}\lambda(z)x\}, \quad \mathfrak{p}_0 = \{x \in \mathfrak{p}^c | \forall z \in \mathfrak{t}, \mathrm{ad}(z)(x) = 0\}$$

このとき，$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}_0$，$\mathfrak{p} \cap (\mathfrak{p}_\lambda + \overline{\mathfrak{p}_\lambda})$ は $\mathfrak{k}$ 不変となる．そこで，$\mathfrak{k}$ の表現が既約なので，

$$\mathfrak{p}^c = \mathfrak{p}_\lambda + \overline{\mathfrak{p}_\lambda}, \quad g(p_\lambda, p_\lambda) = 0, \quad \lambda \neq 0$$

となってしまう．そこで，$\lambda(z) = 1$ を満たす $z \in \mathfrak{t}$ をとり，$I = \mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}(z)$ とすれば，これがエルミート構造を与える．

このように，既約半単純対称空間を考えたとき，K の中心は離散または 1 次元である．そして，既約半単純エルミート対称空間は中心が 1 次元の場合が対応する．離散の場合には，可換な複素構造が入らない対称空間となる．

曲率

ケーラー多様体のリーマン曲率 R は $\nabla J = 0$ を用いると，

$$R(x,y)J = JR(x,y) \quad R(Jx,Jy) = R(x,y)$$

を満たす．またリッチ曲率は

$$Ric(Jx,Jy) = Ric(x,y), \quad Ric(x,y) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(JR(x,Jy))$$

となることがわかる．

リーマン多様体の平面 H に対する断面曲率は正規直交基底 x, y をつかって $K(H) = g(R(x,y)y,x)$ と定義された．ケーラー多様体の場合を考える．平面 H が複素構造 J に関して不変であるとする．このとき, $K(H)$ を**正則断面曲率**という．x を H の単位ベクトルとすれば, x, Jx が正規直交基底となるので，$K(H) = g(R(x,Jx)Jx,x)$ となる．さらに, ケーラー多様体上ではすべての J 不変な平面 H に対する正則断面曲率からリーマン曲率を復元できることがわかる．

さて，ケーラー多様体 M に対して，任意の点における，任意の J 不変な平面に対する正則断面曲率 $K(H)$ が一定のとき, M を**定正則断面曲率の空間**という．（以下の結果は，リーマン多様体の場合も次元が 3 以上で同様の結果が成立する, ただし証明は異なる）．

Theorem 2.10.5. M を連結ケーラー多様体で複素次元が 2 以上とする. 正則断面曲率 $K(H)$ が点 x にのみ依存しているなら（$T_x(M)$ 内の J 不変な平面 H にはよらない）, M は定正則断面曲率の空間となる．また定正則断面曲率 kc の空間 M において, リッチテンソルは

$$S = \frac{1}{2}(n+1)kg$$

定曲率空間が局所対称空間であったように，正則断面曲率が一定なら局所エルミート空間である．

Proposition 2.10.6. ケーラー多様体の正則断面曲率が一定なら，局所エルミート対称空間である．

Proof. ケーラー多様体の正則断面曲率が一定 k なら，

$$\begin{aligned}(R(z,w)y,x) =& \frac{k}{4}\{(x,z)(y,w)-(x,w)(y,z)+(x,Jz)(y,Jw) \\ & -(x,Jw)(y,Jz)+2(x,Jy)(z,Jw)\}\end{aligned}$$

となる．$\nabla g=0$，$\nabla J=0$ を使って微分すれば $\nabla R=0$ を得る．さらに，局所点対称は正則となるので，局所エルミート対称空間である． □

次の三つのケーラー多様体の正則断面曲率は一定である．逆に，単連結完備正則断面曲率が一定のケーラー多様体は次のいずれかに正則等長同型である．

- $\mathbb{C}^n$（$c=0$）.
- $\mathbb{C}P^n$（$c>0$）
- $M=D_n(\mathbb{C})$（複素双曲空間）（$c<0$）.

部分多様体

G/K をエルミート対称空間として，$\mathfrak{p}'\subset\mathfrak{p}$ が $[[\mathfrak{p}',\mathfrak{p}'],\mathfrak{p}']\subset\mathfrak{p}'$ を満たす部分空間として，対応する全測地的部分多様体を $M'=G'/K'$ とする．このとき，M' が複素多様体であるための必要十分条件は $\mathfrak{p}'$ が $\mathfrak{p}$ の複素構造 J で不変．このとき M' もエルミート対称空間.

Proof. M' は全測地的部分多様体であり，J は平行であることから従う． □

例

Example 2.10.7. $\mathbb{C}^n$ に通常のケーラー構造を入れておく．このとき $z\in\mathbb{C}^n$ の正則な点対称は $\sigma_z(w)=2z-w$ である．

$$G=\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}|\alpha\in U(n),\beta\in\mathbb{C}^n\}$$

に対して，$\alpha z+\beta$ とすれば正則等長な作用である．このとき $0\in\mathbb{C}^n$ の *isotropy* 群は，

$$K=\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}|\alpha\in U(n)\}\cong U(n).$$

また，カルダン対合は

$$\sigma\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

である．さて，$\mathfrak{p} \cong \mathbb{C}^n$ であるが，エルミート内積と複素構造は

$$g(\begin{pmatrix}0 & z \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & w \\ 0 & 0\end{pmatrix}) = \Re z^* w, \quad J\begin{pmatrix}0 & z \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}z \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Example 2.10.8 (双曲平面)．$H^2 = SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ を考える．

$$\mathfrak{p} = \{\begin{pmatrix}\xi & \eta \\ \eta & -\xi\end{pmatrix} | \xi, \eta \in \mathbb{R}\}$$

となるが，

$$J\begin{pmatrix}\xi & \eta \\ \eta & -\xi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta & -\xi \\ -\xi & -\eta\end{pmatrix}$$

とすればよい．これは $\eta + i\xi \mapsto i(\eta + i\xi) = -\xi + i\eta$ に対応する．

Example 2.10.9 (複素グラスマン多様体)．複素グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{C}^n)$ を考える．いろいろと書き方はあるが，

$$\mathfrak{p} = \{\begin{pmatrix}0 & -\xi^* \\ \xi & 0\end{pmatrix} | \xi \in M(k, n-k : \mathbb{C})\}$$

に対して，

$$g(\begin{pmatrix}0 & -\xi^* \\ \xi & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -\eta^* \\ \eta & 0\end{pmatrix} = -\mathrm{tr}(xy) = \Re\xi^*\eta, \quad J\begin{pmatrix}0 & -\xi^* \\ \xi & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -(i\xi)^* \\ i\xi & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & i\xi^* \\ i\xi & 0\end{pmatrix}$$

$k = 1$ の複素射影空間を考える．この曲率は

$$R(x,y)z = \{x \wedge y + ix \wedge iy + 2\langle x, iy\rangle i\}z$$

となることを以前見た．そこで，正則断面曲率は

$$R(x,ix)ix = (x \wedge ix)(ix) - (ix \wedge x)(ix) + 2\langle x,x\rangle x = 2(x \wedge ix)(ix) + 2x = 4x$$

であるので，

$$g(R(x,Jx)Jx, x) = \Re(R(x,ix)ix)^* x = \Re x^* R(x,ix)ix = 4\langle x,x\rangle \Re x^* x = 4\langle x,x\rangle^2 = 4$$

となるので，正則断面曲率は一定である．また，$\mathfrak{p}$ の複素の基底を $e_1, \cdots, e_n$ とすると，$e_1, \cdots, e_m, Je_1, \cdots, Je_m$ が張る部分空間 $\mathfrak{p}'$ に対して，

$$[[e_i, e_j], e_k] = -\{e_i \wedge e_j + Je_i \wedge Je_j + 2\langle e_i, Je_j)J\}e_k$$

となるので，$[[\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'], \mathfrak{p}'] \subset \mathfrak{p}'$ を満たす．よって，対応する多様体 $\mathbb{C}P^m$ が全測地的複素部分多様体となる．

Example 2.10.10. 複素 2 次超曲面（*complex quadric*）$Q_{n-1}(\mathbb{C})$ を考える．

$$Q_{n-1}(\mathbb{C}) = \{[z_0; \cdots ; z_n] \in \mathbb{C}P^n | z_0^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}$$

複素射影空間からの計量を制限することにより，ケーラー多様体となる．これをエルミート対称空間としてみたい．

$\mathbb{C}^{n+1}$ の標準基底を $e_0, \cdots, e_n$ として，複素双線形形式 H を

$$H(z, w) = \sum_{k=0}^{n} z_k w_k$$

とする．このとき，複素 2 次超曲面は次のように書ける．

$$Q_{n-1}(\mathbb{C}) = \{\pi(z) \in \mathbb{C}P^n | z \in \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}, H(z,z) = 0\} \subset \mathbb{C}P^n, \quad \pi : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{C}P^n$$

これを対称空間として見たい．単位ベクトル $\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 + ie_1) \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ に対して，$H(\beta_0, \beta_0) = 1^2 + i^2 = 0$ である．そこで，$q_0 = \pi(\beta_0) \in Q_{n-1}(\mathbb{C})$ とする．

任意の $q \in Q_{n-1}(\mathbb{C})$ に対して，$H(z,z) = 0$，$\pi(z) = q$ となる $z \in S^{2n+1}$ をとる．$z = x + iy$ とすれば，

$$H(z,z) = \sum (x_k + iy_k)^2 = \sum (x_k^2 - y_k^2 + 2ix_k y_k) = 0, \quad |z| = \sum x_k^2 + y_k^2 = 1$$

なので，$\sum x_k^2 = \sum y_k^2$，$\sum x_k y_k = 0$ となるので，$|x| = |y| = 1/\sqrt{2}$，$(x, y) = 0$ となる $x + iy \in \mathbb{R}^{n+1} \oplus i\mathbb{R}^{n+1}$ が存在する．

さて，$U(n+1)$ の実部のみを考えることにより，$SO(n+1) \subset U(n+1)$ と見なせる．これは $\mathbb{C}P^n$ に（正則等長で）作用する．そして Q_{n-1} を不変にするので Q_{n-1} に作用する．さらに推移的である．

Proof. $A \in SO(n+1)$ とすると，$H(Az, Aw) = H(z, w)$ となるので，Q_{n-1} に作用．次に推移的であることを示す．$z \in S^{2n+1}$ に対して，$z = x + iy$，$|x| = |y| = 1/\sqrt{2}$，$(x, y) = 0$ とかける．そこで，$x = \alpha_0, y = \alpha_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ として，$(\alpha_0, \alpha_1) = 0$ であり，$\pi(z) = \pi(\alpha_0 + i\alpha_1)$ となる．この α_0, α_1 を拡張して，正規直交基底 $\alpha_0, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ を得る．このとき $A = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in SO(n+1) \subset U(n+1)$ とれば，$A(e_0) = \alpha_0$，$A(e_1) = \alpha_1$ であるので，$\pi(A\beta_0) = \pi(z)$ となる．よって推移的である．　□

点 q_0 での *isotropy* 群は

$$SO(2) \times SO(n-1)$$

となる．

Proof. $\pi(X\beta_0) = \pi(\beta_0)$ となる $X \in SO(n+1)$ の元を求める．

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right], \quad [A\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}], \quad C = 0$$

となるので，$A \in SO(2)$，$B = C = 0$，$D \in SO(n-1)$ となる． □

そこで，$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n+2)$，

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{o}(2) + \mathfrak{o}(n-1) = \{\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} | B \in \mathfrak{o}(n-1)\}, \quad \mathfrak{p} = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\xi^t \\ 0 & 0 & -\eta^t \\ \xi & \eta & 0 \end{pmatrix} | \xi, \eta \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

となる．そして，

$$R(\theta) \times B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0B & \end{pmatrix} \in SO(2) \times SO(n-1)$$

の作用は

$$\mathrm{Ad}(R(\theta) \times B)(\xi, \eta) = (B\xi, B\eta)R(-\theta)$$

となる．

内積は

$$g((\xi, \eta), (\xi', \eta')) = (\xi, \xi') + (\eta, \eta')$$

であり，複素構造は

$$J(\xi, \eta) = (-\eta, \xi)$$

となる．

さらに，曲率テンソルを計算すると，

$$R((\xi, \eta), (\xi, \eta)) = \mathrm{ad} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad \lambda = (\xi', \eta) - (\xi, \eta'), \quad B = \xi \wedge \xi' + \eta \wedge \eta'$$

であり，リッチテンソルは

$$S = \frac{(n-1)}{2} g$$

となるので，アインシュタイン多様体となる．

また，$n>3$ の場合には，$\mathrm{Ad}(K)$ は $\mathfrak{p}$ に既約に作用するので，$Q_{n-1}(\mathbb{C})$ は既約エルミート多様体であるが，$n=3$ の場合には，

$$\mathfrak{p}_1=\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & b \\ 0 & 0 & -b & -a \\ a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \end{pmatrix}\},\quad \mathfrak{p}_2=\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & -d \\ 0 & 0 & -d & c \\ c & d & 0 & 0 \\ d & -c & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

は $\mathrm{Ad}(K)$ 不変であるので，既約でない，実際，$Q_2(\mathbb{C})=P_1(\mathbb{C})\times P_1(\mathbb{C})$ となる．

分類

既約半単純対称空間 M に対するリーマン対称対 (G,K) を考えたとき，K の中心は，離散または 1 次元である．エルミート対称空間は K の中心が 1 次元となるものである．K の中心が 1 次元となるものは分類できるので，次がエルミート対称空間となる．

copmact 型	noncompact 型
$SU(p+q)/S(U(p)\times U(q))$	$SU(p,q)/S(U(p)\times U(q))$
$SO(2+q)/SO(2)\times SO(q)$	$SO^\circ(2,q)/SO(2)\times SO(q)$
$SO(2n)/U(n)$	$SO^*(2n)/U(n)$
$Sp(n)/U(n)$	$Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$
$E_6/T\cdot Spin(10)$	$E_6^{-14}/T\cdot Spin(10)$
$E_7/T\cdot E_6$	$E_7^{-25}/T\cdot E_6$

ここで $SO(4)/SO(2)\times SO(2)=S^2\times S^2$ なので，上の図の 2 行目で $q\neq 2$ とする．

Remark 2.10.1. noncompact 型のエルミート対称空間は，有界対称領域とよばれるものであり，その上での解析は表現論で重要な役割を果たす．

2.11　再訪 $SL(n,\mathbb{R})/SO(n,\mathbb{R})$

この章では，これまで学んだことを具体的に行ってみる．

$\mathfrak{sl}(n)=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$，$\mathfrak{so}(n)=\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ とする．まずこれらに対するキリング形式を求める．$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ を考える．基底 E_{ij} に対して計算すれば，

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y=2n\mathrm{tr}\,XY-2\mathrm{tr}\,X\mathrm{tr}\,Y$$

となる．特に $X=\lambda\mathrm{id}$ とすれば $\mathrm{ad}X=0$ であるので，キリング形式は非退化でなく，半単純でない．同様にして $\mathfrak{sl}(n)$ 上でキリング形式を計算すれば

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y=2n\mathrm{tr}\,XY$$

となる（$\mathfrak{sl}$ の基底は $\mathfrak{gl}$ の基底から id を抜かすことに注意すべきだが，$\mathrm{ad}(X)\mathrm{id}=0$ なので，無視してもよい）．

そこで $X \neq 0 \in \mathfrak{sl}(n)$ に対して $X^t \in \mathfrak{sl}(n)$ であるので，

$$B(X,X^t) = 2n\mathrm{tr}\, XX^t = 2n\|X\|^2 > 0$$

となり，非退化である．よって $\mathfrak{sl}(n)$ **は実半単純リー環**である．$X \in \mathfrak{so}(n) \subset \mathfrak{sl}(n)$ に対して $X^t = -X$ であるので

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}X\mathrm{ad}X = 2n\mathrm{tr}\, XX = -2n\mathrm{tr}\, XX^t$$

となり $B(X,X) < 0$ であることがわかる．つまり $\mathfrak{sl}(n)$ **のキリング形式を** $\mathfrak{so}(n)$ **へ制限すれば負定値**である．

Remark 2.11.1. $\mathfrak{so}$ そのもののキリング形式を計算すれば，$X, Y \in \mathfrak{so}(n)$ に対して $B(X,Y) = (n-2)\mathrm{tr}\, XY$ となる．特に $n > 2$ ならこれは負定値であり，半単純であることがわかる．

さて，$G = SL(n)$, $K = SO(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{sl}(n) | X^t = X\}$ とする．このとき

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

となることは明らか．さらに

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$$

Proof. $X, Y \in \mathfrak{p}$ とすると $(XY - YX)^t = Y^tX^t - X^tY^t = YX - XY = -(XY - YX)$ となる．また $X \in \mathfrak{k}$, $Y \in \mathfrak{p}$ とすれば $(XY - YX)^t = Y^tX^t - X^tY^t = -YX + XY$ となる． □

さて $M = G/K$ として対称空間の構造を入れてみよう．まず G は推移的に作用するので $\pi : G \to M$ を考えると M は多様体であり，主 K 束になることがわかるが，さらに具体的に M に座標を入れることができる．

Lemma 2.11.1 (**極分解**)**.** $A \in GL(n,\mathbb{R})$ に対して，$R \in O(n)$ と対称正定値行列 V があって

$$A = VR$$

と分解できる．また，この分解の仕方は *unique* である．

Proof. A は可逆なので $H = AA^t$ は対称で正定値行列である．そこで $V = \sqrt{AA^t}$ とする．具体的にはつぎのようにする．H を直交行列 S によって対角化することができるの

で，$H = S^t \Lambda S$ となる．ここで $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_j)$（$\lambda_j > 0$）．そこで

$$V := S^t \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_j})S$$

とする．このとき V は対称正定値であり $V^2 = H$ を満たす．さらに $V^2 = H$ を満たす対称正定値行列は唯一つであることを証明しよう．V^2 の固有値 λ の固有空間を考える．$V^2 x = \lambda x$ であるので

$$(V + \sqrt{\lambda})(V - \sqrt{\lambda})x = 0$$

となる．そこで $(V - \sqrt{\lambda})x = 0$ なら，x が固有値 $-\sqrt{\lambda}$ の固有ベクトルであるが，V が正定値であることに反する．よって $(V - \sqrt{\lambda})x = 0$ である．つまり x は V に対する固有値 $\sqrt{\lambda}$ の固有ベクトルである．そこで V のすべての固有値固有ベクトルは H の固有値固有ベクトルから決定できる．これは V の決め方が一つしかないことを意味する．

さて $R = V^{-1}A$ とすれば，

$$RR^t = V^{-1}AA^tV^{-1} = V^{-1}V^2V^{-1} = \mathrm{id}$$

となる．この R の決め方も唯一つである．実際 $A = V'R'$ と分解されたときに，$AA^t = (V')^2$ となるが V' は，先ほど述べた性質を満たすので $V' = V$ である．よって $R' = V^{-1}A = R$ となる． □

さて

$$P = \{A \in SL(n) | A^t = A, A > 0\}$$

とする．もちろんこれは群ではない．$X \in \mathfrak{p}$ に対して，$\exp X \in P$ であることがわかる．また A が対称なので $kAk^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$（$\lambda_i > 0$）となる．そこで $kAk^{-1} = \exp \mathrm{diag}(\log \lambda_1, \cdots, \log \lambda_n)$ と書ける．よって $A = \exp X$（$\exists X \in \mathfrak{p}$）．つまり

$$P = \exp \mathfrak{p}$$

となる．

$A \in SL(n)$ に対して極分解を $A = VR$ とすれば $R \in SO(n)$ であり $V \in P$ となる．そこで $\mathrm{id} \in SL(n)$ の十分小さい近傍をとれば $\mathfrak{p}$，$\mathfrak{k}$ の 0 の近傍 Ω_1, Ω_2 が存在して

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \ni (X, Y) \mapsto e^Y e^X = RV \in SL(n)$$

がその像への微分同相となる．このとき

Lemma 2.11.2. *G/K は P と同相である．また G/K に P の微分構造をいれたとき，指数写像*

$$\exp : \mathfrak{p} \ni V \mapsto e^V \ni G/K \cong P$$

は 0 の近傍で微分同相である（実は，global に微分同相であり $\mathfrak{p} \cong P \cong G/K$ である）．

Proof. $gK \in G/K$ とする．$g = VR$（$V \in P$, $R \in SO(n)$）と分解できる．そこで $\Phi : G/K \to P$ を $\Phi(gK) = V$ と定義する．これは well-defined である．実際，$gK = g'K$ とすると $g' = gS$（$S \in SO(n)$）となる．そこで $g' = V'R' = V(RS)$ となるが $RS \in O(n)$ であり分解の仕方が唯一つであったので $V = V'$ となる．

次に単射を証明する．$\Phi(g) = \Phi(g') = V$ とする．このとき $g = VR$, $g' = VS$ となるが $g' = g(R^{-1}S)$ であるので $gK = g'K$ となる．よって単射である．

全射を証明する．$V \in P$ とすれば $g = V \in SL(n)$ とすればよい．

そこで Φ が両方向に連続であることを証明しよう．$\pi : G \to G/K$ および $\Pi : G \to P$（分解の一意性から）は連続である．さらに $\pi : G \to G/K$ は開写像として G/K に位相を入れるのであった．また Π が開写像であることも簡単にわかる．これらを使えば Φ が同相であることがわかる．

また $\exp \mathfrak{p} \subset P$ であり，$\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ は局所微分同相である．そこで $\mathfrak{p}$ と P が同じ次元をもつので，$\exp : \mathfrak{p} \to P$ は局所微分同相になる． □

さて，次に G/K にリーマン計量を入れよう．$\mathfrak{g}$ のキリング形式を B とする．このとき $\mathfrak{g}$ 上につぎのようにして正定値内積がはいる．

$$\langle X, Y \rangle = \begin{cases} B(X,Y) & X, Y \in \mathfrak{p} \\ -B(X,Y) & X, Y \in \mathfrak{k} \\ 0 & X \in \mathfrak{k},\ Y \in \mathfrak{p} \end{cases}$$

ここで $\mathfrak{p}$ 上で B が正定値であることも簡単な計算でわかる．

$\mathfrak{g}$ と T_eG を同一視すれば，この内積を左移動でうつせば G にリーマン計量をいれることができる（作り方から $dL_g : T_eG \to T_gG$ が等長である）．

同様にして $T_K(G/K) \cong \mathfrak{p}$ に $B(X,Y)$ で内積を入れる．つまり $T_{gK}(G/K)$ の内積を

$$dL_g : T_k(G/K) \to T_{gK}(G/K)$$

が等長となるようにして入れる．特に，G は G/K に等長に作用する．

Proof. well-defined をみる必要がある．$gK = g'K$ とする．このとき $g' = gk$ としてよい．よって $L_{g'} = L_g L_k$ となる．

$dL_k : T_{eK}G/K \to T_{eK}G/K$ について見てみる．$X \in \mathfrak{p}$ とすると $(\exp tX)K$ は G/K 内の曲線であり，これを微分することにより $X \in T_K(G/K)$ を得る．そこで $k(\exp tX)K = (\exp kXk^{-1})K$ であり，$(\exp kXk^{-1})K$ は K を通る曲線であるので，これを微分すると，$dL_k(X) = \mathrm{Ad}(k)X$ となる．さらに B は $\mathrm{Ad}(K)$ 不変であるので，$\mathfrak{p}$ 上の内積は well-defined．そこで $dL_{g'} = dL_g dL_k$ であるので，$g(dL_g(X), dL_g(Y)) = B(X,Y) = g(dL_{g'}(X), dL'_{g'}(Y))$ がわかる． □

あとは点対称 σ を $K \in G/K$ で定めれば，対称空間になることがわかる．他の点では $L_g \sigma L_g^{-1}$ とすれば gK での点対称になる．

$$\sigma : G \ni h \to (h^{-1})^t \in G$$

とする．これを微分すると

$$d\sigma : \mathfrak{g} \ni X \to -X^t \in \mathfrak{g}$$

を得る．よって $d\sigma|_{\mathfrak{k}} = \mathrm{id}$ であり $d\sigma|_{\mathfrak{p}} = -\mathrm{id}$ となる．さらに $\sigma|_K = \mathrm{id}$ である．これを使って

$$\sigma : G/K \ni gK \to (g^{-1})^t K \in G/K$$

として点対称を定義する．まず $\sigma(K) = K$ は明らか．さらに微分すると $d\sigma = -\mathrm{id}$ となる（特に等長）．また $\sigma^2 = \mathrm{id}$ である．よって点対称が定まる．以上から

Theorem 2.11.3. G/K は対称空間である．次元は $\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$, $\dim \mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ であるので，$\frac{n^2+n-2}{2}$ となる．

Remark 2.11.2. G の作用は G/K へ概効果的である．その部分を無視して G を等長変換群の部分群とみなしたとき実は G/K の等長変換群に一致する．等長変換 ϕ があるとすれば，ある点 p での値 $\phi(p)$ と $(d\phi)_p$ がわかれば全体での作用がわかる（他の点を q とすると q と p は測地線 $c(t)$ で結べる．$\phi(c)$ は $\phi(p)$ と $\phi(q)$ を結ぶものである．よって $\phi(p)$ から $d\phi_p(c'(0))$ の測地線を書いて同じ長さだけとったものは $\phi(q)$ になる）．さて G は M に推移的に作用し K も T_pM へ推移的に作用するので，等長変換 ϕ は G に入る．

Remark 2.11.3. G/K の測地線を考えよう．定理 2.5.2 より，$X \in \mathfrak{p}$ が生成する 1 パラメータ変換群は測地線 $\exp_p tX_p$ に沿っての移換 τ_t である．そこで，$\tau_t(p) = c(t) = (\exp tX)(p)$ が成立する．つまり $(\exp tX)p$ が測地線である．

Corollary 2.11.4. $G/K = SL(n)/SO(n)$ は**非コンパクト型対称空間**である．また断面曲率は $X.Y \in \mathfrak{p}$ に対して，

$$K(X,Y) = B([X,Y],[X,Y]) = -\|[X,Y]\|^2 \leq 0$$

となる．

Proof. 非コンパクトを証明するには定義から半単純で断面曲率が非正であることを証明すればよい．キリング形式は非退化なので半単純である．また

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= -\langle [[X,Y],Y],X \rangle = B([[X,Y],Y],X) = B([X,Y],[X,Y]) \\ &= -\|[X,Y]\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

（もちろん $[X,Y] = 0$ となる場合があるので，断面曲率は負ではない．非正である）． □

$\mathfrak{p}$ に含まれる極大可換部分環を $\mathfrak{a}$ とする．$\mathfrak{a}$ が可換であることから，直交行列により同時対角化可能である．そこで $\mathfrak{a}$ の正規直交同時固有ベクトルを $v_1,\cdots,v_n\in\mathbb{R}^n$ とする．行列表示を $e_1,\cdots,e_n$ に関して行ってるとすれば，$S(v_i)=e_i$ となる直交行列 $S\in SO(n)$ をとれる（適当に向きを合わせる）．このとき $S\mathfrak{a}S^{-1}$ は $\mathfrak{p}$ の固有ベクトル $e_1,\cdots,e_n$ とする行列からなるので，トレース零の対角行列である．特に，勝手な極大可換部分環で $\mathfrak{p}$ に含まれるものは，直交行列を使って互いに共役の関係になっていることもわかる．

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ に含まれる極大可換環として，$A=\exp\mathfrak{a}$ とする．この A は G の可換部分群である．また $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ であるので $A\subset M=G/K$ となる．$(A=(\exp\mathfrak{a})K$ とみている$)$．

Lemma 2.11.5. *A は M で全測地的部分多様体である．また A は平坦である．これが極大平坦である．*

Proof. 全測地的とは A の任意の点 p から出発する M 内の測地線で点 p で A に接しているなら，その測地線（p の近傍で）が A に入るときをいう．$Y\in\mathfrak{a}$ として $\exp tY$ が M での測地線であるがこれは A に含まれる．他の点では A が自分自身に推移的かつ等長で作用（左作用）していることからわかる．また平坦であることは $\mathfrak{a}$ が可換であることから． □

Remark 2.11.4. この補題は，任意の対称空間で成立．

N を M 内の p を通る平坦な部分多様体とする．$Y_1,Y_2\in T_pN$ に対して曲率は $K=-\|[Y_1,Y_2]\|^2=0$ となる．よって $[Y_1,Y_2]=0$ となる．つまり T_pN は $\mathfrak{p}$ 内の可換部分空間である．

Corollary 2.11.6. *p を通る M 内の極大平坦部分多様体は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分環と一対一対応する．*

Remark 2.11.5. この系も任意の対称空間で成立する．

そこで

Definition 2.11.1. 対称空間 M の**ランク**を極大平坦部分多様体の次元として定義する．または $\mathfrak{p}$ 内の極大可換環の次元として定義する．

Remark 2.11.6. 二つの極大可換環は互いに共役であるので，ランクは well-defined.

Example 2.11.7. *$Rank(SL(n)/SO(n))=n-1$ である．*

Proof. $\mathfrak{p}$ に含まれる極大可換環の一つとしてトレース零の対角行列全体を選ぶことができた．そこで次元は $n-1$ である． □

さてカルタン対合は

$$\Theta : G \ni h \mapsto (h^{-1})^t \in G, \quad \theta = d\sigma : \mathfrak{g} \ni X \mapsto -X^t \in \mathfrak{g}$$

であり，この θ による ± 1 固有分解である，カルタン分解は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

となる．また，カルタン involution を使えば $\mathfrak{g}$ の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は

$$\langle X, Y \rangle = -B(X, \theta Y)$$

と書ける．

さて $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ のルート分解をしてみよう．まず

$$H_i := E_{ii} - E_{i+1,i+1} \quad i = 1, \cdots, n-1$$

とする．このとき E_{ij}（$i \neq j$）および $\{H_i\}_i$ により $\mathfrak{g}$ の基底になる．また $\mathfrak{a}$ はトレース零の対角行列であるので，H_i が基底としてとれる．

$$\mathfrak{a} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{H_1, \cdots, H_{n-1}\}.$$

また，$X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$（$\mathrm{tr}\, X = 0$）として

$$\begin{aligned} (\mathrm{ad}X)E_{ij} &= (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \quad i \neq j \\ (\mathrm{ad}X)H_i &= 0 \end{aligned}$$

となる．そこでルートは $n(n-1)$ 個あり，

$$\alpha_{ij} \quad i \neq j$$

と書く．また $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ の基底は E_{ij} である．さらに $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}$ が成立する．

Definition 2.11.2. G/K の極大平坦部分多様体をひとつの maximal flat とよぶ．G/K の測地線が **regular** とはそれが唯一つの flat に含まれること．それ以外の測地線を **singular** とよぶ．また regular 測地線の接ベクトルを regular と呼ぶ．

以前の定義と一致することを見るためには，次を証明すればよい．

Lemma 2.11.8. *$X \in \mathfrak{a}$ が singular であるための必要十分条件は $Y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_0$ で $[X, Y] = 0$ となるものが存在．つまり $\alpha \in \Delta$ で $\alpha(X) = 0$ となるものが存在．*

Proof. X を singular とする．定義から X は $\mathfrak{a}$ 以外の $\mathfrak{p}$ に含まれるある極大可換環 $\mathfrak{a}'$ に入る．このとき $Y \in \mathfrak{a}'$ かつ $Y \notin \mathfrak{a}$ となる Y が存在することは明らかである．$X, Y \in \mathfrak{a}'$

なので，$[X,Y]=0$ となる．また $\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$ なので, $Y\notin\mathfrak{g}_0$ となる．よって必要なら $\mathfrak{g}_0$ の部分を引いて，$Y\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{g}_0$ で $[X,Y]=0$ となるものが存在する．$Y\in\mathfrak{g}_\alpha$ とすれば $0=[X,Y]=\alpha(X)Y$ となる．よって $\alpha\in\Delta$ が少なくとも一つ存在して $\alpha(X)=0$ である．

逆を証明しよう．$\alpha\in\Delta$ で $\alpha(X)=0$ となるものが存在するとする．$Y\neq 0\in\mathfrak{g}_\alpha$ をとると $[X,Y]=\alpha(X)Y=0$ となる．

$$Y=Y_{\mathfrak{k}}+Y_{\mathfrak{p}}\in\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$$

と分解しておく．α に対して $\alpha(A)\neq 0$ となる $A\in\mathfrak{a}$ を固定しておく，

$$[A,Y]=\alpha(A)Y$$

であるが $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{k}$ であるので，

$$[A,Y_{\mathfrak{k}}]=\alpha(A)Y_{\mathfrak{p}},\quad [A,Y_{\mathfrak{p}}]=\alpha(A)Y_{\mathfrak{k}}$$

となる．もし $Y_{\mathfrak{p}}=0$ とすれば，$Y_{\mathfrak{k}}=0$ となる．同様に $Y_{\mathfrak{k}}=0$ なら $Y_{\mathfrak{p}}=0$ である．よって $Y_{\mathfrak{k}}\neq 0$, $Y_{\mathfrak{p}}\neq 0$ を得る．よって $Y_{\mathfrak{p}}\in\mathfrak{p}$ は $Y_{\mathfrak{p}}\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{a}$ となる．また $\alpha(X)=0$ より $[X,Y_{\mathfrak{p}}]=0$ である．よって $X,Y_{\mathfrak{p}}$ はどちらも $\mathfrak{p}$ に含まれる，ある可換環に入る．しかし $Y_{\mathfrak{p}}\notin\mathfrak{a}$ であるので，X は $\mathfrak{a}$ とは異なる可換環に入る．　□

この補題から $\mathfrak{a}$ の singular な元は

$$\mathfrak{a}_{sing}=\{X\in\mathfrak{a}\mid\exists\alpha\in\Delta,\alpha(X)=0\}$$

となる．つまり超平面

$$\{X\in\mathfrak{a}|\alpha(X)=0\},\quad \alpha\in\Delta$$

の和である．一方 regular の元は

$$\mathfrak{a}_{reg}:=\{X\in\mathfrak{a}|\forall\alpha\in\Delta,\alpha(X)\neq 0\}$$

となる．このように超平面は $\mathfrak{a}_{reg}$ を有限個の領域にわける．その領域を**ワイル領域**（$\mathfrak{a}_{reg}$ のある連結成分）と呼ぶ．

$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ に対して，ワイル領域などを求めてみよう．まず，

$$\mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})|X^t=X\}$$

であった．つまりトレース零の対称行列である．そして，そこの含まれる極大可換環の一つは

$$\mathfrak{a}=\{\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)|\sum\lambda_i=0\}$$

である．$X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対して

$$\alpha_{ij}(X) = \lambda_i - \lambda_j$$

であったので

$$\mathfrak{a}_{sing} = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) | \exists i \neq j,\ \lambda_i = \lambda_j\ \sum \lambda_j = 0\}$$

となる．そして regular vector x は対角行列ですべての成分が異なっている．実際，$Y \in \mathfrak{p}$ に対して，$[x, Y] = 0$ とすれば，Y も対角行列でなければならないので $Y \in \mathfrak{a}$ となる．

また x が regular なら，$K = SO(n)$ 軌道 $Kx \subset \mathfrak{p}$ のイソトロピー群を求めると

$$K_x = \{\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n) | a_i = \pm 1, a_1 \cdots a_n = 1\}$$

という離散群であり，$Kx \subset \mathfrak{p}$ は実 flag 多様体である．次元は $\dim Kx = \dim SO(n) = \frac{n^2-n}{2} = \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{a}$ となる．また，singlar な点での軌道は，実グラスマン多様体などが現れる（次元は下がる）．そして，任意の軌道は必ず $\mathfrak{a}$ と交わりをもつ（一般論で述べたが，今の場合には，対称行列は直交行列で対角化できるということを意味する）．

K 軌道と $\mathfrak{a}$ の交点 $Kx \cap \mathfrak{a}$ を考える．$x = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ とすれば，$Kx \cap \mathfrak{a}$ の各点は成分を入れ替えたものである．特に，軌道 Kx は各ワイル領域と一回ずつ交わる．また，ワイル群は各成分の置換として作用する．このことから，ワイル群がルートの置換として作用することがわかる．またワイル領域を入れ替えることもわかる（別の言い方をすれば，ワイル領域は等長変換（ワイル群）で移りあう）．また，ランク 1 でないので，$\mathfrak{p}$ 内の同じ長さのベクトルが K の作用で移りあわないが，$\mathfrak{a}/W$ が $\mathfrak{p}$ 内で $\mathrm{Ad}(K)$ 同値な集合の代表元集合になっていることがわかる．

さて，ワイル領域の一つとして

$$\mathfrak{a}^+ := \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) | \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n, \sum \lambda_j = 0\}$$

となるものをとる．これを固定しておく．

$$\Delta^+ := \{\alpha \in \Delta | \forall A \in \mathfrak{a}^+,\ \alpha(A) > 0\}$$

を**正ルートの集合**とよぶ．今の場合には

$$\Delta^+ = \{\alpha_{ij} | i < j\}$$

となる．また

$$\Delta_b^+ := \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \cdots, \alpha_{n-1,n}\} \subset \Delta^+$$

が基本ルートの集合である．つまり任意の $\alpha \in \Delta^+$ は

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \alpha_{i,i+1}, \quad s_i \in \mathbb{N}$$

と書ける．また $\alpha_i := \alpha_{i,i+1}$ として

$$\{A \in \mathfrak{a} | \alpha_{i_\nu}(A) > 0,\ \text{for } \nu = 1, \cdots, r,\ \alpha_{i_\nu}(A) = 0,\ \text{for } \nu = r+1, \cdots, n-1\}$$

ここで $\{i_1, \cdots, i_{n-1}\} = \{1, \cdots, n-1\}$ としている．この集合を**ワイル領域** $\mathfrak{a}^+$ **の** r **次元の wall** とよぶ．

最後に岩沢分解について述べる．$G = SL(n)$, $K = SO(n)$ とする．さらに

$$A := \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) | \lambda_i > 0. \prod \lambda_i = 1\}$$
$$N = \{\text{ 上三角行列で対角成分がすべて 1 の行列 }\}$$

とする．A は閉可換部分群（極大平坦）である．また N は閉**べき零**リー群である．AN は G の閉**可解**部分群である．リー環で見れば，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ となる．$\mathfrak{n}$ は $\{E_{ij}\}_{i<j}$ で張られるリー環である（つまり，正ルートの集合 Δ^+ に対するルート空間である）．

このとき

Theorem 2.11.9 (岩沢分解).

$$G = KAN$$

と分解できる．つまり $g \in G$ に対して，*unique* に $k \in K$, $a \in A$, $n \in N$ が存在して $g = kan$ と書ける．

この定理を証明するために次の補題を使う．

Lemma 2.11.10. $g \in GL(n)$ に対して，$h \in O(n)$ で

$$(hg)_{ij} = 0 \quad i < j, \quad (hg)_{ii} > 0$$

となるものが唯一つ存在する

Proof. g の列ベクトルを $v_1, \cdots, v_n$ とする．また補題を証明するには h の行ベクトル $r_1, \cdots, r_n$ は

1. $r_1, \cdots, r_n$ は正規直交基底
2. $r_j v_i = 0$（$i < j$）
3. $r_i v_i > 0$（$i = 1, \cdots, n$）

を満たす必要がある．

帰納法で証明する．まず r_n を $r_n r_n = 1$, $r_n v_n > 0$, $r_n v_i = 0$（$i = 1, \cdots, n-1$）となるものを見つける．v_i は一次独立であるので，この条件を満たす r_n は唯一つ存在する．$r_j, \cdots, r_n$ が見つかったとして．W_j を $v_1, \cdots, v_{j-2}, r_j, \cdots, r_n$ で張られる部分空間とする．これは $n-1$ 次元部分空間である．r_{j-1} を W_j に直交するベクトルで $r_{j-1} v_{j-1} > 0$

（向き）かつ $r_{j-1}r_{j-1}=1$（長さ）となるものは唯一つ存在する．$r_{j-1}, r_j, \cdots, r_n$ は条件を満たす．よって帰納法から h が存在する．

また作り方から条件を満たす h は唯一つである． □

さて定理を証明しよう．

proof of theorem. $g \in SL(n)$ に対して，上の補題の条件をみたす $h \in O(n)$ をとることができる．さらに $g \in SL(n)$ から $h \in SO(n)$ がわかる．そこで $k = h^{-1}$ とする．このとき補題から上三角行列 $m = (m_{ij})$ で対角成分がすべて正であるもので，

$$g = km$$

となるものが存在する．$\lambda_i = m_{ii}$ として $n_{ii} = 1$, $n_{ij} = m_{ij}$（$i \neq j$）とする．そして $n = (n_{ij})$, $a = \mathrm{diag}(\lambda_i, \cdots, \lambda_n)$ とすれば

$$g = km = kan$$

となる．

一意性を証明する．$g = kan$ と分解できたとする．$k^{-1}g$ とすれば補題の条件をみたすので k^{-1} はただ一つである．そして $m = an$ の分解も一意的であることは明らか． □

2.12　参考

2.12.1　冪零と可解

べき零と可解の定義をしておく．G に対して帰納的に

$$G^k = [G^{k-1}, G^{k-1}], \quad G_k = [G, G_{k-1}], \quad G^0 = G_0 = G$$

とする．ここで $\{a, b\} = aba^{-1}b^{-1}$ としたとき $[G', G''] = \{\{g', g''\} | g' \in G', g'' \in G''\}$ のことである．この G^k, G_k は連結リー正規部分群である．$G^m = \{e\}$ となるときに G を**可解群**とよび，$G_l = \{e\}$ となるときに G を**べき零**とよぶ．**べき零**なら**可解**である．

リー環レベルでいえば，部分環の減少列

$$\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}^{k-1}], \quad \mathfrak{g}_k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{k-1}]$$

（ヤコビ律から，$\mathfrak{g}$ のイデアルの減少列になる，また $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{g}_k$）に対して，$\mathfrak{g}^k = 0$（$\exists k \in \mathbb{N}$）のとき，可解とよび，$\mathfrak{g}_k = 0$ のとき，ベキ零という．G が可解，べき零とは $\mathfrak{g}$ が可解，べき零であることに対応する．

Proposition 2.12.1. $\mathfrak{g}$ がべき零であるための必要十分条件は任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}X$ がベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に対するべき零行列であること．

Remark 2.12.1. $\mathfrak{g}$ が可解なら $\mathfrak{g}$ は可換なイデアル（$\mathfrak{g}^{m-1}$）をもつ．$\mathfrak{g}$ がべき零なら $\mathfrak{g}$ の中心は零でない．（$\mathfrak{g}_{l-1} \subset \mathfrak{Z}$）.

Proposition 2.12.2. リー環 $\mathfrak{g}$ が可解であるための必要十分条件は $B(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$.

Definition 2.12.1. リー環の最大の可解イデアルを radical とよぶ.

リー環には最大の可解イデアルが存在する.

Proposition 2.12.3. リー環の極大な可解イデアルを $\mathfrak{r}$ とすると，それは最大となる．特に，任意の可解イデアルは $\mathfrak{r}$ に含まる.

Proof. リー環は有限次元なので，可解イデアルのうち最大次元のものをとれば，極大な可解イデアルは存在することに注意する．任意の可解イデアル $\mathfrak{a}$ を考える．$\mathfrak{a}+\mathfrak{r}$ はイデアルとなる．そして，

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{r}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{r}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{r})$$

を得る（証明は演習問題）．$\mathfrak{r}$ は可解なので，その商 $\mathfrak{r}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{r})$ も可解となり，$\mathfrak{a}+\mathfrak{r}/\mathfrak{a}$ も可解．$\mathfrak{a}$ も可解より，$\mathfrak{a}+\mathfrak{r}$ も可解で，$\mathfrak{r} \subset \mathfrak{a}+\mathfrak{r}$ となる．ここで，$\mathfrak{r}$ は極大であるので，$\mathfrak{a}+\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$ となるので，$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$ となる． □

Proposition 2.12.4. *radical* が零であることと $\mathfrak{g}$ が半単純であることは同値.

2.12.2 簡約リー環

リー環 $\mathfrak{g}$ が簡約（reductive）とは，$\mathfrak{g}$ の各イデアル $\mathfrak{a}$ に対して，$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ となるイデアル $\mathfrak{b}$ が存在すること．実は，$\mathfrak{g}$ が簡約であることと，$\mathfrak{g}$ が半単純リー環と可換リー環の直和になることは同値である．また，リー群が簡約リー群とは，そのリー環が簡約となること.

コンパクトリー群 G は簡約リー群であり，$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と可換リー環と半単純リー環 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とに分解される.

参考文献

[1] J.-H. Eschenburg *Lecture Notes on Symmetric spaces,* どこかから download 可

[2] Jurgen Berndt, *Lie group actions on manifolds,* Berndt 氏の上智での集中講義の lecture note どこかから download 可

[3] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[4] Jurgen Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis, Third edition*, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2002

[5] Kobayashi and Nomizu, *Foundations of differential geometery,*

[6] Tobias Strubel, *Basics on Hermitian Symmetric Spaces*, どこかから download 可能.

索引