シンプレクティック幾何入門

本間 泰史（@早稲田大学）

はじめに

このノートは [Cannas] を読んだ時の，お勉強ノートです．自分の興味にそって，大幅に付け加えてます．シンプレクティック幾何の基本的なことは，このノートで十分だと思います（学部４年から修士程度かなあ）．特に，群作用がある場合は，かなりページ数を割いてます．このノートの後半は群作用がある場合の話しでして，細かいこともかなり書いてある（強いて言えば，そこがこのノートの売りでしょうか．[Guillemin-Sternberg(equiv)] の重要な部分は網羅してると思う）．このノートの bad point は，まとまりがないことでしょうか．後半の群作用のところは，まとまっているけど，前半は話題が結構バラバラで，繋がりがなかったりする．それと，シンプレクティックトポロジーには，ほとんど触れてません．シンプレクティック幾何って広すぎるんだよねえ．

例によって，索引をつけてハイパージャンプ機能を入れているので，パソコンで読むとかなり楽チンです．また，間違い，勘違い，書き間違えも，結構あると思います．それは，自分で直して下さい．

追記：たまに，間違いを訂正してバージョンアップしてます．いろいろと間違っているところありますね．２０１３年１０月に blow-up やポアソン多様体などを詳しく追加．また，ゲージの右作用と左作用の混同で間違っていた部分を訂正．その他にもいろいろと修正と追加．

目 次

第1章　シンプレクティック多様体

この章では，まずシンプレクティックベクトル空間について学ぶ．次にシンプレクティックベクトル空間を拡張したシンプレクティック多様体を定義する．また，もっとも基本的なシンプレクティック多様体である余接束上の標準1形式と標準シンプレクティック形式について学ぶ．

1.1　symplectic Forms

1.1.1　skew-symmetric bilinear maps

V を m 次元実ベクトル空間とする．$\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ を交代双線形写像とする（非退化は仮定しない）．

Theorem 1.1.1. Ω *as above*. このとき次のような基底 $u_1, \cdots, u_k, e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n$ をとれる．

$$\begin{aligned} \Omega(u_i, v) &= 0 \quad \textit{for } i \textit{ and all } v \in V \\ \Omega(e_i, e_j) &= 0 = \Omega(f_i, f_j) \quad \textit{for } i, j \\ \Omega(e_i, f_j) &= \delta_{ij} \quad \textit{for } i, j \end{aligned}$$

Remark 1.1.1. このような基底は唯一つというわけではないが，標準的基底とよぶ．また Ω を行列表示すれば，

$$\Omega(u, v) = u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id} \\ 0 & -\mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} v$$

Proof. 証明はグラムシュミットの交代形式版である．$U := \{u \in V | \Omega(u, v) = 0, \forall v \in V\}$ とする．この U の基底として $u_1, \cdots, u_k$ をとる．さらに，V 内で U の補集合を W として，つまり $V = U \oplus W$ となるものを適当にとる．ここで W は零次元でないと仮定してよい．零でない $e_1 \in W$ を勝手にとる．このとき $f_1 \in W$ を

$\Omega(e_1, f_1) \neq 0$ となるようなものが存在する．実際，もしこのような f_1 がないとすると，$e_1 \in U$ となってしまう．そこで $\Omega(e_1, f_1) = 1$ となるようにとる．このとき

$$W_1 = \text{span}\ \{e_1, f_1\}, \quad W_1^{\Omega} = \{w \in W | \Omega(w, v) = 0, \forall v \in W_1\}$$

とする．このときまず次がわかる

$$W_1 \cap W_1^{\Omega} = \{0\}.$$

$v = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^{\Omega}$ とすると，

$$\begin{cases} 0 = \Omega(v, e_1) = -b \\ 0 = \Omega(v, f_1) = a \end{cases} \quad \Rightarrow v = 0.$$

次に

$$W = W_1 \oplus W_1^{\Omega}.$$

$v \in W$ として，$\Omega(v, e_1) = c, \Omega(v, f_1) = d$ とする．このとき

$$v = (-cf_1 + de_1) + (v + cf_1 - de_1)$$

と書き換えれば，第一項は W_1 に入り，第二項は $\Omega(v + cf_1 - de_1, e_1) = c - c = 0$ などが成立するので W_1^{Ω} に入る．先ほどの主張とあわせれば $W = W_1 \oplus W_1^{\Omega}$ が成立．

次に $e_2 \in W_1^{\Omega}$ を零でないとしてよい．$f_2 \in W_1^{\Omega}$ で $\Omega(e_2, f_2) = 1$ となるものをとることができる．そこで W_2 を e_1, f_1 で張られるものとする．あとは同様のことを繰り返す．今 V は有限次元なので，この操作は有限回で終わり，

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots W_n$$

となり，各成分は Ω-直交し，W_i の基底 e_i, f_i は $\Omega(e_i, f_i) = 1$ を満たす． □

上の証明での U の次元は基底の取り方によらないことに注意．つまり $k = \dim U$ は (V, Ω) に対する不変量である．また $k + 2n = m = \dim V$ としたとき，n のことを Ω の**ランク**とよぶ．

1.1.2 symplectic vector spaces

V を m 次元実ベクトル空間で Ω を交代形式とする．

Definition 1.1.1. 写像 $\tilde{\Omega} : V \to V^*$ を $\tilde{\Omega}(v)(u) = \Omega(u, v)$ として定義．

このとき $\tilde{\Omega}$ の kernel は部分空間 U である．

Definition 1.1.2. 交代形式 Ω が**シンプレクティック（または非退化）**とは，$\tilde{\Omega}$ が全単射のこと．言い換えると $U=\{0\}$．このとき Ω を V 上線形シンプレクティック構造とよぶ．また (Ω, V) を**シンプレクティックベクトル空間**とよぶ．

シンプレクティック構造 Ω についてつぎのことは明らか

1. $\tilde{\Omega}: V \to V^*$ は全単射．

2. $k = \dim U = 0$, $\dim V = 2n$ と V の**次元は偶数**である．

3. (V, Ω) に対して

$$\Omega(e_i, f_i) = \delta_{ij} \quad \Omega(e_i, e_j) = 0 = \Omega(f_i, f_j)$$

   となる基底 $e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n$．このよな基底を**シンプレクティック基底**とよぶ．

- (V, Ω) の**部分空間** W **がシンプレクティックとは** $\Omega|_W$ **が非退化**．例えば e_1, f_1 が張る部分空間はシンプレクティック．

- W **が isotropic とは** $\Omega|_W \equiv 0$ **となること**．例えば e_1, e_2 が張る部分空間．

もう少し詳しくみていこう（Homework 1）．(V, Ω) をシンプレクティックベクトル空間とする．Y をその部分空間．また Y^Ω をそのシンプレクティック直交空間とする．つまり

$$Y^\Omega := \{v \in V | \Omega(v, u) = 0 \forall u \in Y\}$$

このとき，次が成立する．

1. $\dim Y + \dim Y^\Omega = \dim V$

2. $(Y^\Omega)^\Omega = Y$

3. Y, W を部分空間とする．$Y \subset W \iff W^\Omega \subset Y^\Omega$ である．

4. Y がシンプレクティック $\iff Y \cap Y^\Omega = \{0\} \iff V = Y \oplus Y^\Omega$.

5. Y が isotropic とは $Y \subset Y^\Omega$ であることである．そしてそのとき $\dim Y \leq 1/2 \dim V$ となる．

6. Y が **coisotropic** とは $Y^\Omega \subset Y$ となること．すべての余次元1の部分空間は **coisotropic** である．また Y が coisotropic のとき $\dim Y^\Omega \leq 1/2 \dim V$ である．

7. Y が **Lagrangian** とは Y が **isotropic** で $\dim Y = 1/2 \dim V$ となること．そして，次の三つは同値

   (a) Y が Lagrangian.

   (b) Y は isotropic かつ coisotropic.

   (c) $Y = Y^\Omega$.

8. Y を Lagrangian 部分空間とすると，Y の勝手な基底 $e_1, \cdots, e_n$ は $e_1, \cdots, e_n$, $f_1, \cdots, f_n$ がシンプレクティック基底となるものへ拡張できる．逆に言えば，勝手なシンプレクティック基底をとったとき $e_1, \cdots, e_n$ が張る空間はラグランジアン部分空間である．

9. Y を Lagrangian として，$(Y \oplus Y^*, \Omega_0)$ を

$$\Omega(u \oplus \alpha, v \oplus \beta) = \beta(u) - \alpha(v)$$

   により定義すれば (V, Ω) にシンプレクティック同型である．実は，勝手なベクトル空間 E に対して $(E \oplus E^*, \Omega_0)$ を考えると，それはシンプレクティックベクトル空間になる．そして E の基底を $e_1, \cdots, e_n$ として $f_1, \cdots, f_n$ を dual basis とすると，$e_1 \oplus 0, \cdots, e_n \oplus 0$, $0 \oplus f_1, \cdots, 0 \oplus f_n$ はシンプレクティック基底になる．

10. L, L' を部分空間とする．このとき $(L \cap L')^\Omega = L^\Omega + L'^\Omega$, $(L + L')^\Omega = L^\Omega \cap L'^\Omega$.

Proof. 1. 次の線形写像を考える

$$V \ni v \mapsto \Omega(v, \cdot)|_Y \in Y^* = \mathrm{Hom}(Y, \mathbb{R}).$$

この kernel は $\Omega(v, u) = 0$ $(\forall u \in Y)$ であるので Y^Ω である．さらにこれが全射であることを証明する．$V \xrightarrow{\Omega} V^*$ は同型写像である．$i : Y \to V$ という埋め込みの双対をとれば $i^* : V^* \to Y^*$ という全射を得る．これらを合成したものが上の $V \to Y^*$ である．以上から，$\dim Y^* + \dim Y^\Omega = \dim Y + \dim Y^\Omega = \dim V$ を得る．

$i : Y \to V$ という単射の双対をとれば $i^* : V^* \to Y^*$ は全射であることを証明する（線形代数では well-known）．Y の基底を $e_1, \cdots, e_k$ としてこれを拡張し

て $e_1, \cdots, e_{2m}$ とする．その双対基底を $f_1, \cdots, f_{2m}$ とすれば，$f_1, \cdots, f_k$ は Y の双対基底であり，$f_{k+1}, \cdots, f_{2m}$ は $Y^\perp$ をはる．つまり $Y^\perp$ の元は $V^* \to Y^*$ の kernel に入る．そして $V^* \to Y^*$ は全射である（この証明は基底の取り方によらない）．

2. $v \in Y$ とすると $\Omega(v, u) = 0$（$\forall u \in Y^\Omega$）である．よって $Y \subset (Y^\Omega)^\Omega$ である．上で証明したことから $\dim(Y^\Omega)^\Omega + \dim Y^\Omega = \dim Y + \dim Y^\Omega$ であるので $\dim Y = \dim(Y^\Omega)^\Omega$ である．よって $Y = (Y^\Omega)^\Omega$.

3. $Y \subset W$ とする．$w \in W^\Omega$ の元は $\Omega(w, u) = 0$（$\forall u \in W$）を満たす．よって $w \in Y^\Omega$ である．つまり $W^\Omega \subset Y^\Omega$．次に，$W^\Omega \subset Y^\Omega$ を仮定すると，今証明したことから $(Y^\Omega)^\Omega \subset (W^\Omega)^\Omega$ が成立．よって，$Y \subset W$ がわかる．

4. $Y \cap Y^\Omega = \{0\}$ とする．$\dim(Y + Y^\Omega) = \dim Y + \dim Y^\Omega - \dim Y \cap Y^\Omega = \dim Y + \dim Y^\Omega = V$ となるので $V = Y \oplus Y^\Omega$ である．逆に $V = Y \oplus Y^\Omega$ なら $Y \cap Y^\Omega = \{0\}$ は明らか.

   次に，Y がシンプレクティックとする．つまり $\Omega|_{Y\times Y}$ が非退化とする．$v \in Y \cap Y^\Omega$ を考えると，$v \in Y^\Omega$ より $\Omega(v, u) = 0$（$\forall u \in Y$）となる．そして $\Omega|_{Y\times Y}$ が非退化から $v = 0$ を得る．逆に，$Y \cap Y^\Omega = \{0\}$ と仮定する．Y 上の交代形式 $\Omega|_{Y\times Y}$ を考える．$v \in Y$ として $\Omega(u, v) = 0$（$\forall u \in Y$）と仮定すると，$v \in Y^\Omega \subset V$ であるので，$v = 0$ を得る．つまり $\Omega|_{Y\times Y}$ は非退化.

5. $Y \subset Y^\Omega$ とする．このとき $\Omega|_{Y\times Y} \equiv 0$，つまり Y が isotropic は明らか．またこの逆も明らか．次に，$Y \subset Y^\Omega$ のとき $\dim Y \leq 1/2 \dim V$ を証明する．$\dim Y \leq \dim Y^\Omega$ である．そこで $2\dim Y \leq \dim Y + \dim Y^\Omega = \dim V$.

6. $\dim Y = 2m - 1$ とする．$\dim Y^\Omega + (2m - 1) = 2m$ であるので $\dim Y^\Omega = 1$ である．その基底を $v \in Y^\Omega$ とする．$(Y^\Omega)^\Omega = Y$ であったが $\Omega(v, v) = 0$ であるので $v \in Y$ つまり $Y^\Omega \subset Y$ を得る.

7. Y がラグランジアンとする．つまり $Y \subset Y^\Omega$ かつ $\dim Y = 1/2 \dim V$ とする．$\dim Y + \dim Y^\Omega = \dim V$ なので $\dim Y = \dim Y^\Omega = 1/2 \dim V$ となる．よって $Y = Y^\Omega$ を得る．ほかも同様.

8. W を $\{e_2, \cdots, e_n\}$ が張る空間とする（$W \subset Y \subset V, Y^\Omega = Y \subset W^\Omega$）．さらに $f_1 \in W^\Omega$ で $\Omega(e_1, f_1) = 1$ となるものをとれる．実際 $\Omega(e_1, f) = 0$（$\forall f \in W^\Omega$）とすると．$e_1 \in W = (W^\Omega)^\Omega$ となって矛盾する．あとはシンプレクティック基底のときと同様にして e_1, f_1 が張る空間を除いて同様のことを考える．これを繰り返す.

9. E を実ベクトル空間として $(E \oplus E^*, \Omega_0)$ を考える．ここで

$$\Omega(u \oplus \alpha, v \oplus \beta) = \beta(u) - \alpha(v)$$

としている．これが交代形式であることは明らか．非退化を証明するには，シンプレクティック基底を構成すればよい．E の基底を $e_1, \cdots, e_n$ としてその双対基底を $f_1, \cdots, f_n$ とする．このとき $E_1 := e_1 \oplus 0, \cdots, E_n := e_n \oplus 0, F_1 := 0 \oplus f_1, \cdots, F_n := 0 \oplus f_n$ とする．そのとき

$$\Omega_0(E_i, E_j) = 0(e_i) - 0(e_j) = 0, \Omega(F_i, F_j) = f_j(0) - f_i(0) = 0$$
$$\Omega(E_i, F_j) = f_j(e_i) - 0(0) = \delta_{ij}$$

となる．この基底に関して Ω_0 を表示すれば非退化であることがわかる．

10. $v + v' \in L^\Omega + L'^\Omega$ とすると $\Omega(v + v', w) = \Omega(v, w) + \Omega(v', w) = 0 \forall w \in L \cap L'$ である．よって $L^\Omega + L'^\Omega \subset (L \cap L')^\Omega$ となる．Ω をとって $L \cap L' \subset (L^\Omega + L'^\Omega)^\Omega$ となる．特に，$L^\Omega \cap L'^\Omega \subset (L + L')^\Omega$ も成立する．$v \in (L + L')^\Omega$ とする．$\Omega(v, w + w') = \Omega(v, w) + \Omega(v, w') = 0 \forall w \in L, w' \in L'$ である．$w' = 0$ とすれば $v \in L^\Omega$ で $w' = 0$ とすれば $v \in L'^\Omega$ である．よって $(L + L')^\Omega \subset L^\Omega \cap L'^\Omega$ を得る．さらに Ω をとって $(L^\Omega \cap L'^\Omega)^\Omega \subset L + L'$ であるので，特に $(L \cap L')^\Omega \subset L^\Omega + L'^\Omega$ を得る．

□

Remark 1.1.2. 線形代数に関する注意：$(L + L') \cap L'' = L \cap L'' + L' \cap L''$ は成立するとは限らない（これはよく間違えてしまう）．また $(L + L')^\Omega = L^\Omega + L'^\Omega$ や．$(L \cap L')^\Omega = L^\Omega \cap L'^\Omega$ なども成立するとは限らない．

シンプレクティックベクトル空間の基本的なものは $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ で，標準的シンプレクティック基底は

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$$
$$f_1 = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, f_n = (0, \cdots, 0, 1)$$

である．

Definition 1.1.3. 二つのシンプレクティックベクトル空間 (V, Ω), (V', Ω') の間のシンプレクティック同型写像 ϕ とは線形同型 $\phi : V \to V'$ で $\phi^*\Omega' = \Omega$ となるもの．ここで $\phi^*\Omega(u, v) := \Omega(\phi(u), \phi(v))$．また，シンプレクティック同型写像が存在するとき**シンプレクティック同型**とよぶ．

シンプレクティック基底の存在から，**すべての $2n$ 次元シンプレクティックベクトル空間は標準的な $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ へシンプレクティック同型である**ことがわかる．

1.1.3 シンプレクティック多様体

Definition 1.1.4. ω を多様体 M 上の 2-form とする．これがシンプレクティックとは ω が閉形式で ω_p が各点でシンプレクティック形式．またこのとき M は偶数次元になる．

Definition 1.1.5. (M, ω) がシンプレクティック多様体とは，多様体 M とシンプレクティック 2-formω の組のこと．

EXAMPLE 1.1.1. $M = \mathbb{R}^{2n}$ として，標準座標を $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ とする．

$$\omega_0 = \sum dx_i \wedge dy_i$$

とすれば．これはシンプレクティックである．そして T_pM のシンプレクティック基底として

$$(\partial/\partial x_1)_p, \cdots, (\partial/\partial x_n)_p, (\partial/\partial y_1)_p, \cdots, (\partial/\partial y_n)_p$$

を得る．

EXAMPLE 1.1.2. $M = \mathbb{C}^n$ として，複素座標を $z_1, \cdots, z_n$ とする．このとき

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k$$

をシンプレクティックである．実際 $z_k = x_k + iy_k$ として $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ とみれば，先ほどのシンプレクティック形式と一致する．

Remark 1.1.3. $\sum dx_i \wedge dy_i$ と $\frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k$ の違いをあえて言うならば，後者は全射を複素線形に拡張していること．

EXAMPLE 1.1.3. $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ とする．点 p での接ベクトルは p に直交するベクトルと見なせる．そこで，

$$\omega_p(u, v) := \langle p, u \times v \rangle \quad u, v \in T_pS^2 = p^\perp$$

とすると，これは top degree（2 次元多様体上の 2-form）なので閉形式である．交代性は $u \times v = -v \times u$ からわかる．さらに非退化性は，$u \neq 0$ とすると $\langle p, u \times v \rangle \neq 0$ となる v が存在する．実際 $v = u \times p$ とすると，

$$\langle p, u \times (u \times p) \rangle = \langle p \times u, p \times u \rangle$$

であるので．

1.1.4　シンプレクティック同型

Definition 1.1.6. (M_1, ω_1), (M_2, ω_2) を $2n$ 次元のシンプレクティック多様体とする．$g : M_1 \to M_2$ を微分同相写像で $g^*\omega_2 = \omega_1$ をみたすときシンプレクティック同相とよぶ.

実は局所的にはすべてのシンプレクティック多様体は，標準的なシンプレクティック多様体 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ にシンプレクティック同相である．それは次の定理による（証明はあとで）.

Theorem 1.1.2 (Darboux)**.** (M, ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とする．各点 $p \in M$ に対して，次のような点 p の近傍の座標系 $(U, x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ が存在する：U 上で

$$\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$$

これをダルブー座標という.

1.2　余接束上のシンプレクティック形式

1.2.1　余接束

X を n 次元多様体として $M = T^*X$ を考える．X の局所座標を $(U, x_1, \cdots, x_n)$ とする．ここで $x_i : U \to \mathbb{R}$ が座標関数．この関数の微分 $(dx_i)_x$ は T_x^*X の基底になる．つまり $\xi \in T_x^*X$ は $\xi = \sum \xi_i (dx_i)_x$ と書ける．そこで

$$T^*U = \cup_{x \in U} T_x^*X \ni (x, \xi) \mapsto (x_1, \cdots, x_n, \xi, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

を得る．これが T^*X に対する局所座標になる．これを余接座標とよぶ．この局所座標に対する変換関数を考えてみる．$(U, x_1, \cdots, x_n)$，$(U', x'_1, \cdots, x'_n)$ を二つの局所座標とする．$x \in U \cap U'$，$\xi \in T_x^*X$ とすると，

$$\xi = \sum \xi_i dx_i = \sum \xi \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} dx'_j = \sum \xi'_j dx'_j$$

をえる．つまり $\xi'_j = \sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$ となる．そこで変換関数は，

$$(x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n) \mapsto (x'_1(x), \cdots, x'_n(x), \sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial x'_1}, \cdots, \sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial x'_n})$$

となる．ただし，$\sum \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial x_k} = \delta_{ik}$ により $\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$ を x の関数として考える．

1.2.2 標準形式

$(U, x_1, \cdots, x_n)$ を X の座標，$(T^*U, x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ を T^*X の座標とする．このとき T^*X 上の 1-form α を

$$\alpha := \sum \xi_i dx_i$$

として定義する．これが well-defined であることをみよう．

Proof. 二つに座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$，$(U', x'_1, \cdots, x'_n)$ を考えると，

$$\alpha = \sum \xi'_j dx'_j = \sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial x_k} dx_k = \sum \xi_i \delta_{ik} dx_k = \sum \xi_k dx_k$$

となるので局所座標の取り方によらない． □

また次の subsection で局所座標によらない定義を行う．さて上の 1-form を使うと，T^*X 上の 2-from が定義できる．

$$\omega = -d\alpha = \sum dx_i \wedge d\xi_i$$

（ここで d は T^*X 上の外微分である）．これは明らかに閉 2 次形式であり，シンプレクティック形式になる．

1.2.3 座標によらない定義

$\pi : M = T^*X \to X$ を考える．標準 1 形式 α は次のように定義される：まずこの微分を考える．

$$d\pi_p : T_pM \to T_xX, \quad (d\pi_p)^* : T_x^*X \to T_p^*M$$

ここで $\pi(p) = x$ である．そこで，$p = (x, \xi)$ に対して，1 形式を

$$\alpha_p = (d\pi_p)^*\xi \in T_p^*M$$

として定義する．

つまり $v \in T_pM$ に対して

$$\alpha_p(v) = ((d\pi_p)^*\xi)(v) = \xi(d\pi_p(v))$$

である．これが先ほどの定義と一致していることを見てみよう．

Proof. $(T^*U, x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ を T^*X の座標とする．射影は

$$(x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n) \to (x_1, \cdots, x_n)$$

と書ける．$v \in T_pM$ とすれば，$v = \sum \alpha_i \partial x_i + \beta_i \partial \xi_i$ と書ける．

$$\alpha_p(v) = \xi(d\pi_p(v)) = \sum \alpha_i \xi(\partial x_i) = \sum \alpha_i \xi_i$$

である．一方で，$\sum \xi_i dx_i$ に代入すると，

$$(\sum \xi_i dx_i)(v) = \sum \alpha_i \xi_i$$

となるので一致する（ここで dx_i は $\pi^*(dx_i)$ と見ている）． □

そこで，T^*X 上の**標準的シンプレクティック形式**を

$$\omega = -d\alpha$$

として定義する．局所的には $\sum dx_i \wedge d\xi_i$ である．

Remark 1.2.1. **標準 1 形式 α は，次の性質をもってただ一つの一次微分形式である**：すべての 1-form $\mu : X \to T^*X$ は $\mu^*\alpha = \mu$ と書ける．

Proof. $p = (x, \xi)$ として，$\alpha_p = (d\pi_p)^*\xi$ と定義した．そこで $\mu(x) = (x, \mu_x)$ という写像であるので，$p = (x, \mu_x)$ に対して，$\alpha_p = (d\pi_p)^*\mu_x$ が成立．そこで

$$(\mu^*\alpha)_x = (d\mu_x)^*\alpha_p = (d\mu_x)^*(d\pi_p)^*\mu_x = (d(\pi\mu)_x)^*\mu_x = \mu_x$$

となる．次に，もし α, β が上の性質を満たすとして $\gamma = \alpha - \beta$ とすると，$\mu^*(\gamma) = 0$ がすべての μ について成立する．局所座標で $\mu = \sum \mu_i(x) dx_i$ と書ける．このとき $\mu : X \to T^*X$ は

$$(x_1, \cdots, x_n) \to (x_1, \cdots, x_n, \mu_1(x), \cdots, \mu_n(x))$$

となる．$\gamma = \sum a_i dx_i + b_i d\xi_i$ とする．μ による引き戻しを考えて，

$$\mu^*(\gamma) = \sum a_i dx_i + b_i d\mu_i(x) = \sum a_i dx_i + b_i \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} dx_j = 0$$

となる．

$$a_i + \sum_j b_j \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} = 0$$

を得る．$\mu = 0$ という写像をとれば $a_i = 0$ であることがわかる．また $\mu = \sum x_i dx_i$ というものをとれば（局所的にとって拡張する），$b_i = 0$ を証明できる．よって，唯一つしかない． □

1.2.4　標準形式の naturality

X_1, X_2 を多様体として $M_1 = T^*X_1$, $M_2 = T^*X_2$ とする．標準 1 形式を α_1, α_2 とする．$f : X_1 \to X_2$ を微分同相としたとき，

$$f_\# : M_1 \to M_2$$

を f の **lift** とする．つまり，$p_1 = (x_1, \xi_1) \in M_1$ に対して，

$$f_\#(p_1) = p_2 = (x_2, \xi_2) = (f(x_1), ((df_{x_1})^*)^{-1}\xi_1)$$

と定義する．このとき $f_\#$ は微分同相である．

Proof. $f_\# : M_1 \to M_2$ は全単射である．あとは $df_\#$ を各点で計算すると

$$\begin{pmatrix} df & 0 \\ * & ((df)^*)^{-1} \end{pmatrix}$$

であるので，非退化であることがわかる．よって微分同相．　□

さてこの微分同相に対して次が成立する．

Theorem 1.2.1. $f_\# : M_1 \to M_2$ に対して

$$(f_\#)^*\alpha_2 = \alpha_1$$

が成立．

Proof. $p_1 = (x_1, \xi_1)$ に対して

$$(df_\#)^*_{p_1}(\alpha_2)_{p_2} = (\alpha_1)_{p_1} \tag{1.2.1}$$

を証明すればよい．まず次がわかる

- $p_2 = f_\#(p_1)$ とは $p_2 = (x_2, \xi_2) = (f(x_1), ((df)^*_{x_1})^{-1}\xi_1)$
- $(\alpha_1)_{p_1} = (d\pi_1)^*_{p_1}\xi_1$ および $(\alpha_2)_{p_2} = (d\pi_2)^*_{p_2}\xi_2$
- $$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_\#} & M_2 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \end{array}$$

  は可換である．

そこで，

$$\begin{aligned}(df_\#)^*_{p_1}(\alpha_2)_{p_2} &= (df_\#)^*_{p_1}(d\pi_2)^*_{p_2}\xi_2 = (d(\pi_2\circ f_\#))^*_{p_1}\xi_2\\ &= (d\pi_1)^*_{p_1}(df)^*_{x_1}\xi_2 = (d\pi_1)^*_{p_1}\xi_1 = (\alpha_1)_{p_1}\end{aligned}$$

□

Corollary 1.2.2. $f_\# : M_1 \to M_2$ はシンプレクティック同相である．実際

$$(f_\#)^*\omega_2 = \omega_1$$

以上をまとめると多様体の微分同相は余接束上の自然なシンプレクティック同相をみちびく．

EXAMPLE 1.2.1. $X_1 = X_2 = S^1$ とする．T^*S^1 は $S^1\times\mathbb{R}$ である．T^*S^1 上の標準的シンプレクティック形式は $\omega = d\theta\wedge d\xi$ となるので，T^*S^1 上の面積要素である．よって S^1 上の微分同相はシリンダーの面積を保存する微分同相を導く．

$f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ という微分同相があれば，それらの lift は $(g\circ f)_\# = g_\#\circ f_\#$ を導く．そこで $M = T^*X$ として標準的なシンプレクティック形式を考えたとき，

$$Diff(X) \ni f \to f_\# \in Symp(M,\omega)$$

という群の準同型を導く．この写像は単射である．しかし全射とはならない．実際，余接束上の fiber にそった平行移動は $Diff(X)$ から導くことはできない．

1.2.5　Homework 2

EXERCISE 1.2.1. V を $2n$ 次元ベクトル空間として Ω をシンプレクティック形式とする．このとき $\Omega^n = \Omega\wedge\cdots\wedge\Omega$ は零でない．また逆に 2 次形式 $\Omega\in\Lambda^2(V^*)$ が $\Omega^n\neq 0$ を満たすなら，Ω はシンプレクティック形式である．

Proof. Ω をシンプレクティック形式とする．シンプレクティック基底をとって

$$\Omega = e_1^*\wedge f_1^* + \cdots + e_n^*\wedge f_n^*$$

とかける．よって Ω^n は零でない．

次に Ω を交代形式とする．この場合にも基底 $u_1^*,\cdots,u_k^*,e_1^*,\cdots,e_l^*,f_1^*,\cdots,f_l^*$ をとって，

$$\Omega = e_1^*\wedge f_1^* + \cdots + e_l^*\wedge f_l^*$$

と書ける．このとき Ω^n を考えると零にならないのは $u_1^*,\cdots,u_k^*$ が零の場合である．よって Ω はシンプレクティック形式である．□

EXERCISE 1.2.2. (M,ω) をシンプレクティック多様体とする．このとき ω^n は各点で零にはならないで ω は M の体積要素になる．特に (M,ω) には標準的な向きがはいる．特に $\omega^n/n!$ をリュウビル形式またはシンプレクティック体積要素とよぶ．

(M,ω) をコンパクトシンプレクティック多様体とする．このとき $[\omega^n]\in H^{2n}(M,\mathbb{R})$ は零でない．

Proof. ω^n が exact でないことを証明すればよい．$\omega^n=d\eta$ とすると，積分してストークスの定理から，コンパクトを使えば $\int_M\omega^n=0$ となるので，これは体積要素を与えない．　□

(M,ω) をコンパクトシンプレクティック多様体とする．このとき $[\omega]\in H^2(M,\mathbb{R})$ は零でない．

Proof. まず $d\omega=0$ であるので $[\omega]\in H^2(M,\mathbb{R})$ である．$\omega=d\eta$ とする．このとき

$$\omega^n=d\eta\wedge\cdots\wedge d\eta=d(\eta\wedge d\eta\wedge\cdots\wedge d\eta)$$

となるので ω^n が exact になってしまう．　□

このことから，特に，S^{2n}（$n>1$）にはシンプレクティック構造は入らないことがわかる．S^2 には入る．また，この話はコンパクトな場合での話しであることに注意．非コンパクトなら $M=T^*X$ の場合には $\omega=-d\alpha$ であるので，ω は exact-form である．

第2章　シンプレクティック同相

ラグランジアン部分多様体は，シンプレクティック幾何において重要な話題の一つであり，様々な場面で使われる．そこでまずラグランジアン部分多様体の定義といくつかの例を紹介する．一つの応用としてシンプレクティック同相について考察する．さらに，シンプレクティック同相のもとになる母関数についてふれる．応用として測地流，周期点についてふれる．

2.1　Lagrangian Submanifold

2.1.1　submanifold

ここでは M, X を多様体として $\dim X < \dim M$ とする．

Definition 2.1.1. 微分写像 $i : X \to M$ がはめ込みとは $di_p : T_pX \to T_{i(p)}M$ が単射であること．埋め込みとは，はめ込みかつその像への同相になること（ここで像は M の位相から導かれることに注意する）．閉埋め込みとは proper かつ単射かつはめ込みになること（連続写像が proper とはコンパクト集合の逆像がコンパクトであること）．

（$\mathbb{R} \to T^2$ を無理数で写像させる場合には単射ではめ込みではあるが，埋め込みにはならない．それは像に誘導位相を入れてるからである）

EXERCISE 2.1.1. *$i : X \to M$ が閉埋め込みであるための必要十分条件は i が埋め込みで $i(X)$ が M 内で閉集合であること．*

（証明は多様体の本をみよ）．

Definition 2.1.2. M の部分多様体とは，多様体 X と閉埋め込み $i : X \to M$ のことである．このとき，通常の意味での閉部分多様体になる．(X が M の開集合のときは開部分多様体とよぶ)．

Remark 2.1.1 (演習)*.* 多様体は locally compact Hausdorff 空間であることに注意する．

1. 連続写像 $f : X \to M$ が proper なら，$f(X)$ は閉集合になる．
2. X がコンパクトなら，連続写像 $f : M \to N$ は proper である
3. $f : X \to M$ が単射，はめ込み，proper なら，$f(X)$ は通常に意味で部分多様体（埋め込み）であり，閉集合である

よって，X,M を多様体で，X をコンパクトのとき，$f : X \to M$ が単射かつはめ込みを確かめれば，$f(M)$ は閉部分多様体となる．

2.1.2 ラグランジアン部分多様体

Definition 2.1.3. (M, ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とする．部分多様体 Y がラグランジアン部分多様体とは各点 $p \in Y$ に対して T_pY が T_pM のラグランジアン部分空間であること．つまり $\omega_p|_{T_pY} \equiv 0$ かつ $\dim T_pY = 1/2 \dim T_pM$．部分多様体としての包含写像を $i : Y \to M$ とすれば $i^*\omega = 0$ かつ $\dim Y = 1/2 \dim M$ と書いてもよい．

X を n 次元多様体として $M = T^*X$ とする．T^*X の零切断

$$X_0 := \{(x, 0) \in T^*M\}$$

は n 次元部分多様体である．このとき標準 1 形式 $\alpha = \sum \xi_i dx_i$ は X_0 上であきらかに零である．よって ω も X_0 上で零であるのでゼロ切断 X_0 はラグランジアン部分多様体である．

他の切断はラグランジアン多様体であろうか？μ を 1-form とする．

$$X_\mu := \{(x, \mu_x) \in T^*X\}$$

とする．

Proposition 2.1.1. μ に対する写像を $s_\mu : X \to T^*X$ とする（像が X_μ である）．このとき $s_\mu^*\alpha = \mu$ となる．

（これはすでに証明した）．そこで我々は次のような図式を得る．

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s_\mu} & T^*X \\ {\scriptstyle\tau}\big\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \big\uparrow{\scriptstyle i} \\ X_\mu & \xrightarrow{=} & X_\mu \end{array}$$

ここで $\tau : X \to X_\mu$ は $\tau(x) = (x, \mu_x)$ で与えられる微分同相．そこで X_μ がラグランジアンになるための条件をかいてみると

$$
\begin{aligned}
i^*\omega = 0 &\iff i^*d\alpha = 0 \iff \tau^*i^*d\alpha = 0 \\
&\iff (i \circ \tau)^*d\alpha = 0 \iff s_\mu^*d\alpha = 0 \iff ds_\mu^*\alpha = 0 \\
&\iff d\mu = 0
\end{aligned}
$$

となるので **X_μ がラグランジアンになるための必要十分条件は μ が closed であること**である．以上から section として実現されるラグランジアン多様体と X の閉 1-form に間に一対一対応がある．T^*X 上のラグランジアン多様体でそれ以外のものもたくさんあることに注意．例えば **fiber はラグランジアン**である．この意味でラグランジアンとは一次閉微分形式の一般化と思える．

特に，X が単連結なら一次コホモロジー群が零であり，すべての閉1形式 μ は df の形である．このような f を X_μ に関連した母関数とよぶ．

EXERCISE 2.1.2. X がコンパクトで $f \in C^\infty(X)$ とする．このとき $\#\{X_{df} \cap X_0\} \geq 2$ である．

Proof. $X_{df} \cap X_0$ は df の零点である．つまり f の臨界点である．多様体がコンパクトなので f は最大最小をもつがそれは臨界点であるので，少なくとも交点は2以上である． □

2.1.3 Conormal bundle

S を n 次元多様体 X の k 次元部分多様体とする．

Definition 2.1.4. $x \in S$ における，conormal space（余法空間）とは

$$N_x^*S := \{\xi \in T_x^*X | \xi(v) = 0 \quad \forall v \in T_xS\}$$

また **conormal bundle** とは

$$N^*S := \{(x, \xi) \in T^*X | x \in S, \xi \in N_x^*S\}$$

この conormal bundle は T^*X の n 次元部分多様体である．また S 上のランクが $n-k$ のベクトル束である．

Proposition 2.1.2. $i : N^*S \to T^*X$ を包含写像とする．このとき $i^*\alpha = 0$ となる．特に ***conormal bundle*** **N^*S は T^*X のラグランジアン部分多様体**である．

Proof. $(U, x_1, \cdots, x_n)$ を $x \in S$ を中心とする局所座標で $U \cap S$ が $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ とする．$(T^*U, x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ を T^*X の座標とする．さてこのとき $N^*S \cap T^*U$ は

$$x_{k+1} = \cdots = x_n = 0 \quad \xi_1 = \cdots = \xi_k = 0$$

と書ける．そこで $\alpha = \sum \xi_i dx_i$ に対して

$$(i^*\alpha)_p = \alpha_p|_{T_p(N^*S)} = \sum_{i \leq k} \xi_i dx_i = 0$$

よって $i^*\omega = 0$ で n 次元なのでラグランジアンである． □

例えば $S = \{x\}$ なら $N^*S = T^*_x X$ という T^*X の fiber である．また $S = X$ とすれば $N^*S = X_0$ である．

Remark 2.1.2. この conormal 束は局所的にはすべてのラグランジアン部分多様体を与える．それは section 3.3.3 における Weinstein のラグランジアン近傍定理による．

Remark 2.1.3. $M = T^*X \to X$ のファイバーはラグランジアン部分多様体であった，これはラグランジアンファイブレーションの一つである（$M \to X$ のファイバーがラグランジアンであるもの）．また M 上の葉層構造がラグランジアン葉層構造とは，各葉がラグランジアンであるもの．

2.1.4 シンプレクティック同相写像への応用

(M_1, ω_1), (M_2, ω_2) を $2n$ 次元のシンプレクティック多様体とする．微分同相 $\phi : M_1 \to M_2$ がいつシンプレクティック同相になるであろうか？$pr_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ を射影とする．このとき

$$\omega = pr_1^*\omega_1 + pr_2^*\omega_2$$

は $M_1 \times M_2$ 上の閉 2 形式であり，

$$\omega^n = \binom{2n}{n} (pr_1^*\omega_1)^n \wedge (pr_2^*\omega_2)^n \neq 0$$

となるのでシンプレクティック形式になる．より一般に $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とすれば $\lambda_1 pr_1^*\omega_1 + \lambda_2 pr_2^*\omega_2$ は $M_1 \times M_2$ 上のシンプレクティック形式になる．特に

$$\tilde{\omega} = pr_1^*\omega_1 - pr_2^*\omega_2$$

を **twisted product form** という．

$\phi : M_1 \to M_2$ のグラフは $4n$ 次元多様体 $M_1 \times M_2$ の $2n$ 次元部分多様体

$$\Gamma_\phi := \{(p, \phi(p)) | p \in M_1\}$$

である．また Γ_ϕ は M_1 の $M_1 \times M_2$ の埋め込みの像ともみれる．

$$\gamma : M_1 \ni p \to (p, \phi(p)) \in M_1 \times M_2.$$

Theorem 2.1.3. **微分同相 $\phi : M_1 \to M_2$ がシンプレクティック同相であるための必要十分条件は Γ_ϕ が $(M_1 \times M_2, \tilde{\omega})$ のラグランジアン多様体であること．**

Proof. Γ_ϕ がラグランジアン $\iff$ $\gamma^* \tilde{\omega} = 0$ である．そこで

$$\gamma^* \tilde{\omega} = (pr_1 \circ \gamma)^* \omega_1 - (pr_2 \circ \gamma)^* \omega_2.$$

であるが，$pr_1 \circ \gamma$ は M_1 上で恒等写像であり，$pr_2 \circ \gamma = \phi$ となる．よって

$$\gamma^* \tilde{\omega} = 0 \iff \phi^* \omega_2 = \omega_1.$$

□

Remark 2.1.4. 複素多様体には正則写像とい概念がある．シンプレクティック幾何では，そのような概念はなくシンプレクティック同相という概念がある．そこで，うえのことを一般化して $M \times N$（M と N は次元は一致している必要はない）内のラグランジアン部分多様体を「M から N へのシンプレクティック写像」とみなす（もちろん写像になるとは限らないが）．これを**ラグランジュ対応**という．

Remark 2.1.5. ラグランジアン部分多様体の大域的な問題は最近になって議論され始めた（シンプレクティックトポロジーと同様で，フレアーホモロジーを使用する）．シンプレクティック多様体の中に閉じたラグランジアン部分多様体がどれだけあるかという問題である．例えば $\mathbb{C}^n$ 内のラグランジアン部分多様体がどれだけあるかはわかっていない．

2.1.5 homework :Tautological form and symplectomorphisms

EXERCISE 2.1.3. (M, ω) をシンプレクティック多様体とする．また $\omega = -d\alpha$ となる α が存在したとする（よって，多様体はコンパクトではない）．

このとき 1-formα に対して $\iota_v \omega = -\alpha$ となるベクトル場 v が唯一つ存在する．さらに g を α を保存するシンプレクティック同相（α を保存すればシンプレクティック同相）とすると g は v が生成する 1 パラメーター変換群と可換である（$(\exp tv) \circ g = g \circ (\exp tv)$）．

Proof. $\omega : TM \ni v \mapsto \iota_v\omega = \omega(v,\cdot) \in T^*M$ は ω が非退化なので同型写像である．そこで $-\alpha$ に対して，そのようなベクトル場が唯一つ存在する．g から定まるベクトル場を X とする．$[X,v] = L_X v = 0$ がわかればよい．一般に次のことが成立

$$\iota_{[X,Y]} = L_X\iota_Y - \iota_Y L_X$$

そこで

$$\iota_{[X,v]}\omega = L_X\iota_v\omega - \iota_v L_X\omega = -L_X\alpha - 0 = 0$$

で ω が非退化なので $[X,v] = 0$ となる． □

EXERCISE 2.1.4. X を多様体として $M = T^*M$ を考える．標準 1 形式 α に対する上の exercise での v は局所座標で

$$v = \sum \xi_i \partial/\partial\xi_i$$

となる．またこのベクトル場が生成する 1 パラメータ変換群を $\exp tv$ とすると，M の任意の点 $p = (x,\xi)$ に対して，

$$(\exp tv)(p) = (x, e^t\xi)$$

となる．

Proof. $\omega = \sum dx_i \wedge d\xi_i$，$\alpha = \sum \xi_i dx_i$ であるので，

$$\iota_v\omega = \iota(\sum_j \xi_j\partial/\partial\xi_j)(\sum dx_i \wedge d\xi_i) = -\sum \xi_i dx_i = -\alpha$$

となる．また v は fiber にそったベクトル場である．$p_t = (x, e^t\xi)$ を t について微分すると

$$\frac{d}{dt}p_t = \frac{d}{dt}(x(t),\xi(t)) = \sum \frac{dx_i(t)}{dt}\partial/\partial x_i + \frac{d\xi_i(t)}{dt}\partial/\partial\xi_i = \sum \xi_i\partial/\partial\xi_i.$$

□

EXERCISE 2.1.5. $M = T^*X$ とする．g が α を保存するシンプレクティック同相とする．このとき

$$g(x,\xi) = (y,\eta) \Rightarrow g(x,\lambda\xi) = (y,\lambda\eta) \quad \forall(x,\xi) \in M, \lambda \in \mathbb{R}.$$

となる．特に，g は余接束の fiber を保存する．さらに $f : X \to X$ で $\pi \circ g = f \circ \pi$ となる微分同相が存在し，$g = f_\#$ となる．つまり g は f の **lift** である．(g が α を保存すれば，じつは M の微分同相から導かれることがわかった)．

Proof. 最初の主張は，今までの exercise からわかる．つまり g は $\exp tv$ と可換であり，$\exp tv$ は fiber 方向の拡大であるので．

次の主張も g は fiber を保存するので $f(x) = \pi \circ g(x, \xi)$ とすれば ξ によらなず，M の微分同相となる．

最後の主張は $\pi \circ g = f \circ \pi$ であるので，$g(p) = g(x, \xi) = q = (y, \eta)$ とすれば，$d\pi_q dg_p = df_x d\pi_p$ が成立する．さらに $(dg_p)^* \alpha_q = \alpha_p$ であった．また $\alpha_p = (d\pi_p)^* \xi, \alpha_q = (d\pi_q)^* \eta$ であった．これらを組みあせれば

$$d\pi_p^* df_x^* \eta = dg_p^* d\pi_q^* \eta = dg_p^* \alpha_q = \alpha_p = (d\pi_p)^* \xi$$

であり $d\pi_p$ は全射なので $d\pi_p^*$ は単射．よって $\xi = (df_x)^* \eta$ をえる．

□

EXERCISE 2.1.6. $M = T^* X$ とする．h を X 上の滑らかな関数．このとき $\tau = \tau_h : M \to M$ を

$$\tau_h(x, \xi) = (x, \xi + dh_x)$$

として定義する（つまり fiber 方向へのずらし）．このとき

$$\tau_h^* \alpha = \alpha + \pi^* dh$$

が成立する．よってこれから $\tau_h^* \omega = \omega$ つまり τ_h がシンプレクティック同相であることがわかる．

Proof. $\alpha_p = (d\pi_p)^* \xi$ であった．$d\tau_p : T_p M \to T_{\tau(p)} M$ から $(d\tau_p)^* : T^*_{\tau(p)} M \to T^*_p M$ をえる．そこで

$$\begin{aligned} (\tau^* \alpha)_p &= (d\tau_p)^* \alpha_{\tau(p)} = (d\tau_p)^* (d\pi_{\tau(p)})^* (\xi + dh_x) \\ &= (d(\pi \circ \tau)_p)^* (\xi + dh_x) = (d\pi_p)^* \xi + (d\pi_p)^* dh_x = \alpha_p + (\pi^* dh_x)_p \end{aligned}$$

となる．　□

2.2 generating function

2.2.1 シンプレクティック同相の構成

X_1, X_2 を n 次元多様体として $M_1 = T^* X_1, M_2 = T^* X_2$ とする．このとき

$$M_1 \times M_2 = T^* X_1 \times T^* X_2 \cong T^*(X_1 \times X_2)$$

という自然な同型がある．この標準 1 形式は

$$\alpha = pr_1^*\alpha_1 + pr_2^*\alpha_2$$

である．また標準 2 形式は

$$\omega = -d\alpha = pr_1^*\omega_1 + pr_2^*\omega_2$$

さて，M_2 上で次の involution を考える．

$$\sigma_2 : M_2 \ni (x_2, \xi_2) \to (x_2, -\xi_2) \in M_2$$

このとき $\sigma_2^*\alpha_2 = -\alpha_2$ である．そこで

$$\sigma = \mathrm{id} \times \sigma_2 : M_1 \times M_2 \to M_1 \times M_2$$

を考えると，$\sigma^*\tilde{\omega} = \omega$ を得る．ここで $\tilde{\omega}$ は twisted form $pr_1^*\omega_1 - pr_2^*\omega_2$ である．

Y を $(M_1 \times M_2, \omega)$ のラグランジアン部分多様体とすると，その twist $Y^\sigma = \sigma(Y)$ は $(M_1 \times M_2, \tilde{\omega})$ のラグランジアン部分多様体である．

シンプレクティック同相 $M_1 \to M_2$ を得るための方法を書く（シンプレクティック同相を正準変換と呼ぶこともある）．

1. まず $(M_1 \times M_2, \omega)$ 内のラグランジアン部分多様体 Y があるとする．
2. このとき $(M_1 \times M_2, \tilde{\omega})$ 内のラグランジアン部分多様体 Y^σ を得る．
3. Y^σ がある微分同相 $\phi : M_1 \to M_2$ のグラフになるかを調べる．
4. Y^σ が ϕ のグラフでラグランジアンなので，ϕ はシンプレクティック同相である．(定理 2.1.3)

Step 3 においては次を調べればよい．$i : Y^\sigma \to M_1 \times M_2$ を埋め込み写像として，$pr_1 \circ i$ と $pr_2 \circ i$ が微分同相であることをみる．このとき $\phi := (pr_2 \circ i)^{-1}(pr_1 \circ i) : M_1 \to M_2$ が微分同相となる．

そこで，$M_1 \times M_2$ のラグランジアン部分多様体（よって正準変換を得る方法）を得るために generating function（母関数）の方法を用いる．

2.2.2 母関数の方法

$f \in C^\infty(X_1 \times X_2)$ に対して df を考える．f により生成されるラグランジアン多様体とは

$$Y_f := \{((x, y), (df)_{(x,y)}) \mid (x, y) \in X_2 \times X_2\}$$

であった．ここで記号として，

$$d_x f := T_x^* X_1 \times \{0\} \text{ に射影した } (df)_{(x,y)}$$
$$d_y f := \{0\} \times T_y^* X_2 \text{ に射影した } (df)_{(x,y)}$$

を使えば

$$Y_f = \{(x, y, df_x, df_y) | (x, y) \in X_1 \times X_2\}$$

となる（このようにしてよいのは $T^*_{(x,y)}(X_1 \times X_2) = T_x^* X_1 \times T_y^* X_2$ という同一視をつかっているため）．注意すべきは $d_x f$ と書いてもこれは (x, y) に依存した 1-form であること．

そこで

$$Y_f^\sigma = \{(x, y, df_x, -df_y) | (x, y) \in X_1 \times X_2\}$$

を考える．これは $(M_1 \times M_2, \tilde{\omega})$ のラグランジアン部分多様体である．この Y^σ がある微分同相 ϕ のグラフとなるとき，ϕ を f で生成されるシンプレクティック同相とよび，f を母関数とよぶ．

そこで，いつ Y_f^σ が ϕ のグラフとなるかを見ていこう．X_1, X_2 の座標として $(U_1, x_1, \cdots, x_n)$, $(U_2, y_1, \cdots, y_n)$ とする．また対応する M_1, M_2 の座標を $(T^*U_1, x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n)$, $(T^*U_1, x_1, \cdots, x_n, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ とする．微分同相 $\phi : M_1 \to M_2$ を一つ固定する．このとき Y_f^σ が $\phi : M_1 \to M_2$ のグラフになるための必要十分条件は，任意の $(x, \xi) \in M_1$, $(y, \eta) \in M_2$ に対して，

$$\phi(x, \xi) = (y, \eta) \iff \xi = d_x f, \eta = -d_y f$$

となることである．

Proof. Y_f^σ が ϕ のグラフである仮定する．このとき $\phi(x, \xi) = (y, \eta)$ なら $\xi = d_x f$, $\eta = -d_y f$ となる．また逆に $\xi = d_x f$, $\eta = -d_y f$ なら $\phi(x, \xi) = (y, \eta)$ となる．次に，微分同相 ϕ があり，任意の $(x, \xi) \in M_1$, $(y, \eta) \in M_2$ に対して，$\phi(x, \xi) = (y, \eta) \iff \xi = d_x f, \eta = -d_y f$ が成立するとする．このとき ϕ のグラフを書けば，

$$\{(x, \xi, \phi(x, \xi)) | (x, \xi) \in M_1\}$$

である．条件から Y_f^σ が ϕ のグラフであることがわかる． □

そこで Y_f^σ が ϕ のグラフになるとき，$(x, \xi) \in M_1$ に対する像 $(y, \eta) = \phi(x, \xi)$ を見つけるには，次のハミルトン方程式を解く必要がある．(x, ξ を変数として，y, η を求める)．

$$\begin{cases} \xi_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) & (*) \\ \eta_i = -\frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y) & (**) \end{cases}$$

$(*)$ の解 $y=\phi_1(x,\xi)$ があれば，これを $(**)$ に代入して $\eta=\phi_2(x,\xi)$ を得るので，$\phi(x,\xi)=(\phi_1(x,\xi),\phi_2(x,\xi))$ を得る．そこで $(*)$ を解くためには

$$\xi=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,\phi_1(x,\xi))$$

を解くことになるが，解けるための必要条件は陰関数定理から

$$\det(\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{\partial f}{\partial x_i})_{i,j=1}^n\neq 0$$

である．これが f がシンプレクティック同相 ϕ を生成するための必要条件である．局所的には，これが必要十分であるが，大域的には全単射性なども考える必要がある．

EXAMPLE 2.2.1. $X_1=\mathbb{R}$，$X_2=\mathbb{R}$ として，$X_1\times X_2$ 上で $f(x,y)=-|x-y|^2/2$ を考える．

この f が生成するラグランジアン部分多様体はの twist は

$$Y_f^\sigma=\{(x,y,y-x,y-x)|(x,y)\in X_1\times X_2\}$$

$\xi_i=y_i-x_i$，$\eta_i=y_i-x_i$ となるので，$\phi(x,\xi)=(x+\xi,\xi)$ となる．そこで $T^*\mathbb{R}=T\mathbb{R}$ と内積により同一視すれば，ϕ は $\mathbb{R}$ 上での自由粒子の運動に対応する．（つまり位置が x，速さが ξ の粒子は一秒後には位置は $x+\xi$ になり，速さは ξ のまま）

古典的な書き方との関係を述べておく．また，より一般的な母関数を述べる．(p,q) を $\mathbb{R}^{2n}$ の座標をダルブー座標とする（q が位置，p が運動量）．$g:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ が正準変換とは $g^*\omega=\omega$ となる微分同相である．つぎは同値（単連結ということを用いていることに注意）

1. 正準変換
2. $\int_\sigma\omega=\int_{g(\sigma)}\omega$（$\forall\sigma$）
3. $\int_\gamma pdq=\int_{g(\gamma)}pdq$（$\forall\gamma$ closed loop）（これは勝手な γ に対して単連結から $\partial\sigma=\gamma$ となるものが存在することから．または closed form なら exact form）

正準変換によって移った座標を $(P,Q)=(P(p,q),Q(p,q))=(g_1(p,q),g_2(p,q))$ とする．このとき 1-form $pdq-PdQ=pdq-g^*(pdq)$ を考えると，

$$\int_\gamma pdq-PdQ=\int_\gamma pdq-\int_\gamma g^*(pdq)=\int_\gamma pdq-\int_{g(\gamma)}pdq=0$$

となり，$\int_{p_0,q_0}^{p,q} pdq - PdQ = S(p,q)$ は関数として well-defined であり，

$$pdq - PdQ = dS$$

となる（単に $pdq - PdQ$ が closed なので局所的には S が存在することを述べている）．さらに，(p,q) の代わりに座標として (Q,q) がとれるとする．つまり，

$$\det \frac{\partial(Q,q)}{\partial(p,q)} = \det \frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0$$

と仮定する．p は (Q,q) の関数としてあらわせる（このとき**正準変換が自由**という），つまり $S_1(Q,q) = S(p(Q,q),q)$ となる．これが母関数である．実際

$$dS_1(Q,q) = \frac{\partial S_1}{\partial Q}dQ + \frac{\partial S_1}{\partial q}dq = pdq - PdQ$$

であるので，

$$-\frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial Q} = P, \quad \frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial q} = p$$

となり，以前の定義と一致する．また，逆に $S_1(Q,q)$ に対して

$$\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q} \neq 0$$

が成立すれば S_1 はある（自由）正準変換の母関数である．

次に，自由正準変換でない場合を考える．例えば，座標として (P,q) がとれるとする．つまり，

$$\det \frac{\partial(P,q)}{\partial(p,q)} = \det \frac{\partial P}{\partial p} \neq 0$$

とする．このとき，$pdq - PdQ = dS$ から

$$pdq + QdP = d(PQ + S)$$

となる．そこで $S_2(P,q) = PQ + S(p(P,q),q)$ とすれば，

$$dS_2(P,q) = \frac{\partial S_2}{\partial P}dP + \frac{\partial S_2}{\partial q}dq$$

となるので，

$$p = \frac{\partial S_2(P,q)}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S_2(P,q)}{\partial P}$$

となる．そこで，$S_2(P,q)$ が任意関数で，

$$\det \frac{\partial^2 S_2}{\partial q \partial P} \neq 0$$

とすれば，陰関数定理から $p = \frac{\partial S_2(P,q)}{\partial q}$ が P について解け，$P = P(p,q)$ となる．さらに，$Q = \frac{\partial S_2(P,q)}{\partial P}$ へ代入すれば $Q = Q(p,q)$ となる．そして，$(p,q) \to (P,Q)$ が正準変換となる．この $S_2 = S_2(P,q)$ も母関数とよぶ．

Proof.

$$pdq + QdP = \frac{\partial S_2(P,q)}{\partial q}dq + \frac{\partial S_2(P,q)}{\partial P}dP = dS_2(P,q)$$

となので，$dp \wedge dq + dQ \wedge dP = 0$ となる．つまり $dp \wedge dq = dP \wedge dQ$ となるのでシンプレクティック構造が保存される． □

さて，

$$\frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{pmatrix}$$

において，上で述べた条件 $\det \frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0$ または $\det \frac{\partial P}{\partial p} \neq 0$ は適当な（シンプレクティック）線形変換を行えば，可能である．これは次の補題による．

Lemma 2.2.1. $X = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ を $2n \times 2n$ 行列とする．さらに $rank(A,B) = n$ で $A^tB = B^tA$ が成立するならシンプレクティック行列 E が存在して $XE = \left(\begin{smallmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{smallmatrix}\right)$ に対して $\det A' \neq 0$ となるようにできる．

（証明は「常微分方程式と解析力学」[伊藤] を参照．簡単な線形代数）この補題の仮定は X がシンプレクティック行列なら成立する．実際，シンプレクティックなら $\det X \neq 0$ なら $rank(A,B) = n$ であり，$X^tJX = J$ から $A^tB = B^tA$ が成立する．

そこで，条件 $\det \frac{\partial Q}{\partial p}(0,0) \neq 0$ または $\det \frac{\partial P}{\partial p} \neq 0$ を適当なシンプレクティック線形変換により仮定できるので，ある正準変換で $\det \frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0$ となるものがあれば，母関数を得ることができる．つまり**局所的には母関数をつくれる．**

Remark 2.2.1. 正準変換はシンプレクティック同相のことであり，$2n$ 個の関数を $2n$ 個の関数へ移すものである．それが自由な正準変換なら母関数により与えられる．正準変換が，母関数という一つの $2n$ 変数関数で記述できるのだから，力学系を解くのに非常に計算が楽になることになる．

母関数が有用性に対しては次のハミルトンヤコビの方法がある．ハミルトン関数 $H(p,q)$ がある正準変換により $K(Q)$ の形になったら，これはハミルトン方程式 $Q' = 0, P' = -\partial K/\partial Q$ であるのですぐにとける．そのため $H(p,q)$ を $K(Q)$ へ移すような正準変換が求まれば系が解けることになる．実際ハミルトン方程式は

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial K}{\partial Q}, \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial P} = 0,$$

となる．そこでそのような正準変換に対する母関数 S_1 が合ったとすると，

$$H(\frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial q}, q, t) = K(Q) \quad (*)$$

を満たすことになる（**Hamiltion-Jacobi の方程式の特別な場合**）．逆に n 個のパラメータ Q_i に依存し，$\det \partial^2 S_1/\partial Q \partial q \neq 0$ となり，上の $(*)$ をみたす S_1 が求まれば．系は積分で解けることになる（Jacobi の定理）．また Q の各成分 Q_i は系の第一積分であり，ポアソン括弧で可換である．ポアソン括弧は ω で定まるので正準変換（シンプレクティック同相）により不変であるので，Q_i を元に戻せば，$Q_i(p,q)$ はもとの座標におけるハミルトン系の第一積分となる．つまり，**系が解けるためにはポアソン括弧で可換な第一積分が n 個もとまればよい．**

2.2.3　geodsic flow への応用

X を連結リーマン多様体とする．$\gamma : [a,b] \to X$ をなめらかな曲線とする．この arc-length とは

$$\int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt})} dt$$

のこと．

Definition 2.2.1. x, y の距離とは x と y を結ぶすべての piceswise な滑らかな曲線にたいする arc-length の inf $d(x,y)$ のこと．

また x と y を結ぶ曲線が最短測地線とは, その曲線の arc-length が距離に一致すること．

(X,g) が測地線的に凸とは，すべての点 x が他の点 y と唯一つの最短測地線でむすべることである（パラメータのとり方をのぞいて）．

EXAMPLE 2.2.2. 球面は測地線的に凸ではない．$X = \mathbb{R}$ は測地線的に凸であり，そのリーマン距離は，ユークリッド距離 $|x-y|$ に等しい．

(X,g) を測地線的に凸な完備リーマン多様体とする．このとき関数

$$f : X \times X \ni (x,y) \mapsto -\frac{d(x,y)^2}{2} \in \mathbb{R}$$

を考える．この時 f が生成するシンプレクティック同相 $T^*X \to T^*X$ を見ていく．我々が解くべき方程式は

$$\begin{cases} \xi = d_x f(x, y(x,\xi)) \\ \eta(x,\xi) = -d_y(x, y(x,\xi)) \end{cases}$$

で,$(y,\eta)\in T^*X$ をこの式をといて $(x,\xi)\in T^*X$ について表す必要がある．リーマン計量による同一視 $TX\cong T^*X$ のもとで ξ に対応するベクトルを v とし，η に対応するベクトルを w とすれば，

$$\begin{cases} g_x(v,\cdot)=d_xf(\cdot) \\ g_y(w,\cdot)=-d_yf(\cdot) \end{cases}$$

と書き直せる．そこで γ を x から出る速度 v の測地線とする．つまり $\gamma(0)=x$, $d\gamma/dt(0)=v$ である．このとき $\phi: T^*X\cong TX\to TX\cong T^*X$ を

$$\phi: TX\ni(x,v)\mapsto(y,w)=(\phi_1(x,v),\phi_2(x,v))=(\gamma(1),d\gamma/dt(1))\in TX$$

とすると，これは f が生成する（f を母関数とする）シンプレクティック同相となり，これを X 上の **geidesic flow** とよぶ．

Proof. $y=\phi_1(x,v):=\exp(x,v)(1)$ としたとき，これが解になることを見る．まず

$$f(x,y)=-d(x,y)^2/2=-d(x,\exp(x,v)(1))^2/2$$

である．この関数を点 x でまず $v\in T_xM$ 方向に微分して $(d_xf)(v)$ を計算しよう（y は固定）．そこで x を通る曲線 $x(t)=\exp(x,v)(t)$ を考える（$x'(0)=v$）．

$$f(\exp(x,v)(t),y)=-1/2(\int_t^1\|v\|ds)^2=-(1-t)^2\|v\|^2/2$$

となる．これは $\exp(x,v)(t)$ と $y=\exp(x,v)(1)$ を結ぶ最短測地線は $x(s)$ であり，その速さは $\|v\|$ で一定であることからわかる（測地線の速さは一定）．そこで，これを t で微分して $t=0$ とすれば，$\|v\|^2$ となるので $g_x(v,v)=df_x(v)$ が成立する．

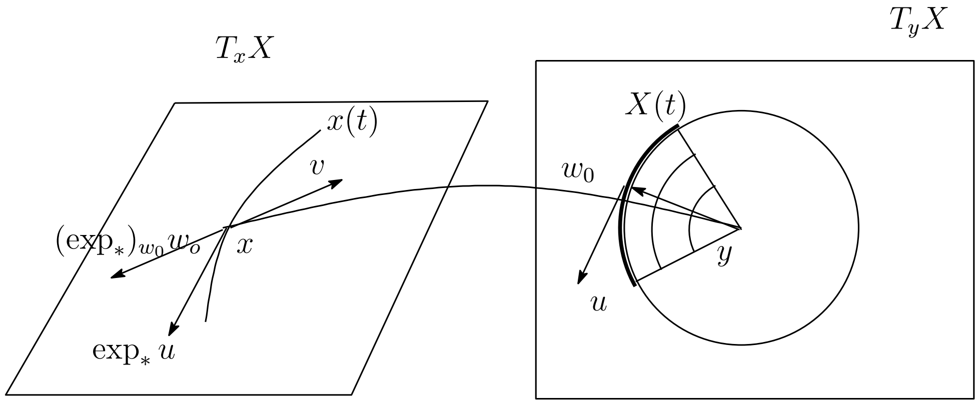
その他の方向 $u\in T_xM$ にも微分して，$g_x(v,u)=(df_x)(u)$ であることを確かめよう．y を中心とする測地座標を $\exp: T_yX\ni w\to\exp(y,w)(1)\in X$ とかく．このとき，ある $w_0\in T_yX$ が存在して $x=\exp(y,w_0)(1)$ となる（ここで v は $v=-(\exp_*)_{w_0}w_0$ である）．この測地線座標で T_yX 内の曲線 $X(t)$ で $g_y(X(t),X(t))=g_y(w_0,w_0)$ かつ $X(0)=w_0$, $X'(0)=u$ となるものを考える．つまり T_yX の半径 $\|w_0\|$ の球面内の曲線で w_0 での接ベクトルが u となるものである．

$$\phi(s,t):=\exp(y,X(t))(s)=\exp(y,sX(t))(1)\in X$$

を考える（ここで，一般に $\gamma(s)$ が $\gamma'(0)=v$ かつ $\gamma(0)=x$ の測地線とすれば，$\tilde\gamma(s)=\gamma(cs)$ は $\tilde\gamma'(0)=cv$ かつ $\tilde\gamma(0)=x$ の測地線である．そして，$\tilde\gamma(1)=\gamma(c)$ が成立する．よって，上の式で $\exp(y,X(t))(s)=\exp(y,sX(t))(1)$ が成立するのである）．この $\phi(s,t)$ に対しては，

1. $x(t) := \phi(1,t) = \exp(y, X(t))(1)$ は x を通る曲線で $x(0) = x$, $x'(0) = (\exp_*)_{w_0} u$ である．

2. $\gamma(s) := \phi(s,0) = \exp(y, sw_0)(1) = \exp(y, w_0)(s)$ は $\gamma(1) = x$ かつ $\gamma'(0) = w_0$ をみたす測地線である．また $\gamma'(1) = (\exp_*)_{w_0} w_0 = -v$ となる．また $\gamma_t(s) = \phi(s,t)$ も s について測地線である．



このとき

$$g_{\phi(s,t)}(\frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial s}) = g_y(X(t), X(t)) = \|w_0\|^2$$

である（測地線の速さが一定なので）．これを s について 0 から 1 まで積分して 2 乗して $-1/2$ 倍すれば $f(x(t), y)$ を得るが，t によらないので，微分すれば 0 である．さて一方，直交するベクトルを指数写像で移したとき，再び直交する．つまり $g_x((\exp_*)_{w_0} w_0, (\exp_*)_{w_0} u) = -g_x(v, (\exp_*)_{w_0} u) = 0$ である．以上から，点 x で v に直交した接ベクトルに対して，$g_x(v, (\exp_*)_{w_0} u) = df_x((\exp_*)_{w_0} u) = 0$ がわかった．

よって $g_x(v, \cdot) = df_x(\cdot)$ を解くと $\phi_1(x,v) = \exp(x,v)(1)$ である．

次に $\phi_2(x,v) = \frac{d\exp(x,v)}{dt}(1)$ であることを証明する．つまり

$$g_y(\frac{d\exp(x,v)}{dt}(1), \cdot) = -df_y(\cdot)$$

を証明する．y をとおり接ベクトルが $\frac{d\exp(x,v)}{dt}(1)$ の曲線として測地線 $\exp(x,v)(t)$ をとる．これは $\exp(x,v)(1) = y$ で $t = 1$ での接ベクトルは $\frac{d\exp(x,v)}{dt}(1)$ である．

$$f(x, \exp(x,v)(t)) = -1/2(\int_0^t \|v\| ds)^2 = -1/2t^2\|v\|^2$$

である．これを微分して $t = 1$ とすれば，$-\|v\|^2$ である．一方 $g_y(\frac{d\exp(x,v)}{dt}(1), \frac{d\exp(x,v)}{dt}(1)) = \|v\|^2$ であるの．

次に y における接ベクトルで $\frac{d\exp(x,v)}{dt}(1) = (\exp_*)_v v$ に直交する w' を考えれば，先ほどと同じ議論により $g_y(\frac{d\exp(x,v)}{dt}(1), w') = 0 = -df_y(w')$ となる．

また $\phi(x,v)=(\exp(x,v)(1),\frac{d\exp(x,v)}{dt}(1))$ が微分同相を与えることはすぐにわかる． □

リーマン多様体 M を考えてシンプレクティック多様体 $T^*M\cong TM$ を考える．このときハミルトニアンとして $h(x,\xi)=\frac{1}{2}g_x(\xi,\xi)$ を考える．このとき定まるハミルトンベクトル場を考えよう．$\xi=\sum\xi_i dx_i$ と書けば，これはベクトル場としては $v^j=\sum\xi_i g^{ij}$ に対応する．

$$h(x,\xi)=\frac{1}{2}\sum g^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

である．このときのハミルトン方程式は，

$$\frac{dx_i}{dt}(t)=g^{ij}\xi_j=v^i,\quad \frac{d\xi_i}{dt}(t)=-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_i}\xi_k\xi_l$$

となる．これをもう少しわかりやすい形に書き直す．

$$\begin{aligned}
\frac{dv^i}{dt}(t)&=\sum\frac{d(g^{ij}(x(t))\xi_j(t))}{dt}(t)=\sum_{jk}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{dt}\xi_j(t)+\sum_j g^{ij}\frac{\partial\xi_j}{dt}\\
&=\sum_{jk}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{dt}\xi_j(t)-\sum_{klj}g^{ij}\frac{1}{2}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_j}\xi_k\xi_l=\sum_{jk}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_k}v^k g_{jl}v^l-\sum_{klj}g^{ij}\frac{1}{2}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_j}g_{sk}v^s g_{tl}v^t\\
&=-\sum_{jk}g^{pi}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x_s}g^{qj}v^s g_{jt}v^t+\sum_{klj}g^{ij}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x_j}g^{pk}g^{ql}g_{sk}g_{tl}v^s v^t\\
&=-\sum_{jk}g^{pi}\frac{\partial g_{pk}}{\partial x_j}v^j v^k+\sum_{klj}g^{ip}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_p}v^j v^k
\end{aligned}$$

一方で測地線の方程式を書けば

$$\begin{aligned}
\frac{dv^i}{dt}(t)=-\frac{1}{2}\sum_{jkp}g^{ip}(\frac{\partial g_{jp}}{\partial x_k}+\frac{\partial g_{kp}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_p})v^j v^k\\
=-\frac{1}{2}\sum_{jkp}g^{ip}(2\frac{\partial g_{jp}}{\partial x_k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_p})v^j v^k
\end{aligned}$$

このように，ハミルトン方程式の解は測地線の方程式である．そこで $TM\cong T^*M$ 上のハミルトンベクトル場 X_h から定まる TM 上の **flow を測地流** ϕ_t（**geodesic flow**）**とよぶ**．特に，ϕ_1 は先ほど与えたものと一致する．ハミルトンベクトル場はシンプレクティックベクトル場であるので，ϕ_t はシンプレクティック同相の1パラメータ変換群である．以上から h **が定める flow に対する母関数が前に与えた** f **となるのである．**

$h=1$ とすれば球面束 $S(TM)$ を与えるが，ハミルトン関数のレベル集合であるので，これは X_h によって不変である．また，後で述べるように $S(TM)$ は接触多様体であるが，**自然な接触構造に関して** X_h **は Reeb（レーブ）ベクトル場になる．**

Remark 2.2.2. もう少し一般の場合を考える．リーマン多様体 (X,g) を考え，$T^*M\cong TM$ としておく．ハミルトニアンとしてポテンシャル付のものを考える $H(q,p)=T(q,p)+U(q)$ さらに X_H をハミルトンベクトル場とする．エネルギー曲面 $H^{-1}(h)$ 上の $q'(t)\neq 0$ を満たす積分曲線は $U(q(t))<h$ をみたし，その軌道は $\Omega=\{q\in M|h>U(q)\}$ にリーマン計量 $\tilde{g}(q):=(h-U(q))g(q)$ としたときの測地線となる．

2.3 安定性

2.3.1 微分方程式の flow

常微分方程式の基本的事実を復習しよう．常微分方程式とは，$f(x)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のベクトル場として，$x'(t)=f(x)$ という方程式のことである．さらに，ベクトル場が時間依存型の場合も考える．つまり

$$x'=f(t,x)$$

である．この場合には，$t=x_0$ として，

$$x_0'=1,\quad x_k'=f_k(x_0,x_1,\cdots,x_n)\quad k=1,\cdots,n$$

とすることにより，ベクトル場が時間依存型でないものに帰着する．ただし，相空間は $\mathbb{R}^n$ ではなく，一次元広がった $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ となる（拡大相空間といったいりする）．そこで，(τ,ξ) を通る解を $x(t)=x(t,\tau,\xi)\in\mathbb{R}^n$ と書くことにする（t は τ を含むある区間の点．$x(\tau)=x(\tau,\tau,\xi)=\xi$)）．ベクトル場が時間に依存しない場合には，$x(t)=x(t,\tau,\xi)=x(t-\tau,0,\xi)$ となることに注意する．この場合は，通る点がわかれば解（積分曲線は）は定まる．

存在と一意性：$f(x,t)$ が連続で，x についてリプシッツ連続なら局所解が一意的に存在する．また，任意の点に対して，ある近傍 U が存在して，x についてリプシッツ連続のとき，局所リプシッツ連続とよぶ．f が局所リプシッツ連続なら，局所解を繋げていくことにより，極大延長解が唯一つ存在することがわかる．

Flow：$x'=f(t,x)$ の初期値 (τ,ξ) に対する解を $x(t,\tau,\xi)$ とする．このとき，$\phi^{t,\tau}(\xi):=x(t,\tau,\xi)$ として，

$$\phi^{t,\tau}:U\ni\xi\to x(t,\tau,\xi)\in\mathbb{R}^n$$

という写像を考える．解の一意性から，一対一写像であり，連続である．さらに，$\phi^{\tau,t}(x(t,\tau,\xi)) = \xi$ である（実際，初期値を $(t, x(t,\tau,\xi))$ として τ での値を考えるので，解の一意性から ξ である）．よって，$(\phi^{t,\tau})^{-1} = \phi^{\tau,t}$ となる．このように，$\phi^{t,\tau} : U \to \phi^{t,\tau}(U) \subset \mathbb{R}^n$ は同相写像である．この $\phi^{t,\tau}$ を微分方程式 $x' = f(t,x)$ に対する **flow** とよぶ．また．時間依存しないベクトル場の場合には，$\phi^{t,\tau} = \phi^{t-\tau,0}$ であり，$\phi^t = \phi^{t,0}$ と書くと，いわゆる 1 パラメータ変換群になる．一方，時間依存ベクトル場の場合には $\phi^{t,0}$ が群になるとは限らない．また，$\phi^{s,t}\phi^{t,\tau}(\xi) = x(s,\tau,\xi)$ が成立する．実際，$\phi^{t,\tau}(\xi) = x(t,\tau,\xi)$ であり，$\phi^{s,t}(x(t,\tau,\xi))$ は $(t, x(t,\tau,\xi))$ の s での値となるため．

EXAMPLE 2.3.1. $f(t,x) = f(t+T,x)$ とベクトル場が周期的な場合を考える．$t = x_0$ として，方程式は

$$x_0' = 1, \quad x' = f(x_0, x) = f(x_0 + T, x)$$

となる．(τ,ξ) を通る解は，$(x_0(t), x(t)) = (t, x(t,\tau,\xi)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ とかける．そこで，

$$(y_0(t), y(t)) := (t, x(t,\tau,\xi)) + (T, 0)$$

とすれば，

$$y_0' = 1, \quad y'(t) = x'(t) = f(x_0(t), x(t)) = f(x_0(t)+T, y(t)) = f(y_0(t), y(t))$$

となるので，$(y_0(t), y(t))$ も解であり，$t = \tau$ とすれば，$(\tau+T, x(\tau,\tau,\xi)) = (\tau+T,\xi)$ を通ることがわかるので，解の一意性から $y(t) = x(t+T, \tau+T, \xi)$ となる．一方，$y(t) = x(t,\tau,\xi)$ であったので，

$$x(t+T, \tau+T, \xi) = x(t,\tau,\xi)$$

が成立する．特に，$x(t,0,\xi) = x(t+T,T,\xi)$ であるので，帰納的に

$$x(t+nT, nT, \xi) = x(t,0,\xi), \quad x(nT,nT,\xi) = x(0,0,\xi)$$

を得る．さて，flow を考えてみよう．まず，一般に

$$\phi^{nT,0} = \phi^{nT,(n-1)T}\phi^{(n-1)T,(n-2)T}\cdots\phi^{T,0}$$

が成立する．さらに，今回の場合いには，

$$\phi^{(n+1)T,nT}(\xi) = x((n+1)T, nT, \xi) = x(T,0,\xi) = \phi^{T,0}(\xi)$$

となるので，$\phi^{(n+1)T,T} = \phi^{T,0}$ が成立するので，

$$\phi := \phi^{T,0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

とすれば，

$$\phi^{nT,0} = \phi^{(n)} = \underbrace{\phi\cdots\phi}_{n}$$

となる．

例えば，$\phi^{nT,0}(\xi) = \xi$ となるなら，$x(nT, 0, \xi) = \xi$ となるので，$x(t) = x(t, 0, \xi)$ は周期 nT の周期解であることに注意.

また，

$$\begin{aligned}\phi^{t,0}(\xi) = x(t, 0, \xi) &= x(t - nT, -nT, \xi) = \phi^{t-nT,0}(x(0, -nT, \xi)) \\ &= \phi^{t-nT,0}x(nT, 0, \xi) = \phi^{t-nT,0}\phi^{(n)}(\xi)\end{aligned}$$

となるので，

$$\phi^{t,0} = \phi^{t-nT,0} \circ \phi^{(n)}$$

が成立する．これらの事実を次の安定性で使う.

2.3.2　安定性

微分方程式（特にハミルトン系）を考えたとき，解の安定性を考えることは重要である．安定性の前に，初期値依存性について述べておく．常微分方程式 $x' = f(t, x)$ を考える．また，時間 t は有限区間 I で考えるとする．解 $x_0(t)$ に対して，$(t, x_0(t))$ の十分近傍 U が存在して，$(\tau, \xi) \in U$ をとおり，I 上で定義される解 $x(t, \tau, \xi)$ が存在し，

$$\|x(t, \tau, \xi) - x_0(t)\| \leq \|\xi - x_0(\tau)\|e^{L|t-\tau|}$$

となる（L は f のリプシッツ連続性に使う正定数）．これが初期値依存性である．特に，有界区間で考えているなら，初期値を近づければ，$x(t, \tau, \xi)$ は $x_0(t)$ に近づくことがわかる．

しかし，I が無限区間の場合には，右辺は発散してしまうので，初期値が近いからといって，$x(t, \tau, \xi)$ が $x_0(t)$ に近づくかはわからない．

Proof. $x'(t) = x^2$ を考える．$\frac{1}{x^2}dx = dt$ であるので，$-x^{-1} = t - C$ となるので，$x(t) = -\frac{1}{t-C}$ となる．そこで平衡解 $x(t) \equiv 0$（初期値は $(t, x) = (0, 0)$）を考えたとき，C を十分大きくとれば，平衡解に初期値が近い解 $x(t) = -\frac{1}{t-C}$ をとれるが，$t \to C$ のときこれは，発散している． □

そこで，無限区間の場合の初期値依存性の概念として，安定性や漸近安定性を定義しよう．

まず微分方程式 $x' = f(x)$ を考える（右辺は t に依存しないとする）．例えば，時間に依存しないハミルトニアンを考え，そのハミルトンベクトル場を X_H としたときの微分方程式 $x'(t) = X_H$ である．このとき解 $x(t) = x(t,p)$ が**安定**（p は初期条件）であるとは，任意 ϵ に対して，次をみたす $\delta > 0$ が存在すること．

$$\|p - p'\| < \delta \Rightarrow \|x(t,p) - x(t,p')\| < \epsilon \quad \forall t \in [0,\infty)$$

つまり初期値が近ければ，どんなに遠くまでいっても解が近いことである．また，**漸近安定**とは，ある δ が存在して

$$\|p - p'\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t,p) - x(t,p')\| = 0$$

となることである．

Remark 2.3.1. 漸近安定とする．上のような δ を選んでおく．さらに任意の $\epsilon > 0$ に対して，$t \geq \exists t_1$ なら $|x(t,p) - x(t,p')| < \epsilon$ とできる．一方，初期値依存性から $\|p - p'\| < \delta_1$ なら $t \leq t_1$ に対しても $|x(t,p) - x(t,p')| < \epsilon$ となるような δ_1 が存在する．そこで $\min\{\delta, \delta_1\}$ をとれば，安定性がいえる．つまり漸近安定なら安定である.（というより，安定な解の特別な場合が漸近安定）

時間依存型ベクトル場に対する微分方程式も同様に定義すればよいが，解は始点 $(\tau, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ に依存していることに注意する．つまり $x_0(t)$ が**安定**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ および τ に対して，ある $\delta = \delta(\epsilon, \tau) > 0$ が存在して，$|x_0(\tau) - \xi| < \delta$ なら，$|x_0(t) - x(t,\tau,\xi)| < \epsilon$ となること．

安定性を議論する際に解としては，平衡解（動かない解）や周期解などの特別な解に対する，安定性を考える．

EXAMPLE 2.3.2. 簡単な例として $x' = Ax$ という線形微分方程式を考える．この解は，初期値 x_0 に対して，$x(t) = (\exp tA)x_0$ として与えられる．例えば，$x_0 = 0$ とすれば解は $x(t) = 0$ であり，平衡解である．また平衡解は $x(t) = 0$ という解しかない．この平衡解の安定性を考えてみよう．A の固有値の実部の符号が負なら，$\exp tA \to 0$ であるので漸近安定である（これは，初期値を少しずらした解を考えたとき解が平衡解に $t \to \infty$ で近づくことを意味する）．また，$A \in \mathfrak{so}(n)$ なら，$\exp tA$ は回転を与えるので，初期値を少しずらした解は平衡解（原点）のまわりをぐるぐる回る解である（A の固有値は純虚数）．これは安定であるが漸近安定ではない例である．また，A の固有値の実部の符号が正なら，初期値を少しずらした時，t を大きくすれば平衡解から離れていってしまう．これは不安定な例である．（固有値の実部の符号が正，負，両方現れる場合も同様である）．また A が対角化可能でない場合にはジョルダン標準形を使えばよい．

次に時間依存型のハミルトニアンに現れるような微分方程式を考える．つまり，

$$x' = f(t, x)$$

という方程式である．さらに，**周期的と仮定する**（$f(x, t+T) = f(x, t)$）．前に述べたように，flow を $\phi^{t,\tau}(p) = x(t, \tau, p)$ として，$\phi := \phi^{T,0}$ とすれば，

$$\phi^{t,0} = \phi^{t-nT,0} \circ \phi^{(n)}$$

が成立した（ここで $nT \leq t \leq (n+1)T$ となる n を選んでいる．また，面倒なので $t > 0$ と仮定している）．そこで，$x(t, 0, \xi)$ の漸近安定性や安定性をみるには，$\{\phi^{(n)}\}_n$ を調べればよいことになる．また，$\phi^{mT}(p) = p$ を満たす点があれば，$x(t) = x(t, 0, p)$ は周期 mT の周期解であることに注意する．つまり周期解を調べるには，不動点のまわりを調べればよいことになる．

そこで，写像 ϕ の繰り返し合成（iteration）を考えよう．いわゆる離散力学系である．写像 ϕ に対して，$\phi^{(n)} = \phi \circ \cdots \circ \phi$ を考える．点 p に対して $\{\phi^{(n)}(p)\}_n$ を p の軌道とよぶ．また $\phi^{(m)}(p) = p$ のとき周期 m の**周期点（periodic point）**といい，$\phi(p) = p$ のとき p を**不動点**とよぶ．

このとき安定性をつぎのように定義する．任意の ϵ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して $\|x - p\| < \delta$ なら任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|\phi^{(n)}(x) - \phi^{(n)}(p)\| < \epsilon$ のとき，**軌道 $\{\phi^{(n)}(p)\}_n$ は安定である**という.（安定でないときは不安定とよぶ）．またある $\delta > 0$ が存在して

$$\|x - p\| < \delta \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|\phi^{(n)}(x) - \phi^{(n)}(p)\| = 0$$

のとき軌道は**漸近安定である**という．

Remark 2.3.2. この定義と初期値依存性をあわせれば，次のことは明らか.「周期的ベクトル場に対する，微分方程式 $x' = f(t, x) = f(t+T, x)$ に対する，解 $x(t, 0, \xi)$ の安定性，漸近安定性は，ϕ の安定性，漸近安定性と同値である」．

EXAMPLE 2.3.3. $\phi = \exp A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ という写像を考える $x = 0$ は不動点である．A の固有値の実部の符号が負なら漸近安定である．$A \in \mathfrak{so}(n)$ なら，安定であるが漸近安定ではない例である．

離散力学系では，不動点（軌道がその点のみ）に対する安定性を考えることが多い．次の命題は，ϕ を線形近似して $\phi(x) = Ax + o(\|x\|)$ として考えればよい．

Proposition 2.3.1. 不動点 p を考え，ϕ はその近傍で C^1 級とする．$d\phi_p : T_pM \to T_pM$ の固有値の絶対値がすべて 1 より小さいなら p は漸近安定な不動点である．また絶対値が 1 より大きい固有値をもつなら p は不安定である．

写像の不動点 p を考え，$d\phi_p$ が固有値 1 をもたないとき，**不動点 p は非退化**であるという．

Proposition 2.3.2. 非退化不動点は孤立している．

Proof. 写像 ϕ を $M \times M$ 内のグラフでかけば，恒等写像のグラフ（diagonal）との交点が不動点である．このとき

$$T_p diag(M) = \mathrm{span}\{\partial_i \oplus \partial_i\}, \quad T_p graph(\phi) = \mathrm{span}\{\partial_i \oplus d\phi_p \partial_i\}$$

となる．$d\phi_p$ が固有値 1 を持たないので，

$$T_p diag(M) + T_p graph(\phi) = T_p(M \times M)$$

となるので，横断的に交わっている．よって非退化不動点は孤立している．□

時間に依存しないハミルトン系を考えて，ある周期軌道で周期 T のものがあったとする．この軌道上の点はすべて $\psi := \phi^T$ に対して不動点である．その軌道上の点 p を固定する．$d\psi_p$ を考えたときハミルトンベクトル場は固有値 1 のベクトル場である．実際 $\phi^T \circ \phi^s(p) = \phi^s \circ \phi^T(p)$ であるので $d\psi_p X_H = X_H$ となる．(これは軌道上の点がすべて不動点であることからもわかる．もちろん退化した点である)．

これでは先ほどの意味での漸近安定ということは起こりえない（固有値 1 が存在するので）．そこで周期解の安定，漸近安定性を考えるときは，軌道と横断的な方向のみを考える．実際，軌道と横断的である p の近傍 U, U' がとれて，$\Phi : U \to U'$ という微分同相写像（周期軌道 γ に沿ったポアンカレ写像という）をとることができ，この写像に対して，p は不動点である．この Φ に対して安定，漸近安定性を定義する．そして，周期軌道の近くにある解の挙動がわかることになる．

この section の細かいことは [Macduff-Salamon] や [伊藤] を参照．

2.3.3　Periodic Points

X を n 次元多様体とし，$M = T^*X$ を標準的シンプレクティック形式をもつ余接束とする．また関数 $f : X \times X \to \mathbb{R}$ がシンプレクティック同相 $\phi : M \to M$ ($\phi(x, d_x f) = (y, -d_y f)$) を生成すると仮定する（つまり f が ϕ の母関数）．

この ϕ の固定点を探そう．

$$\psi : X \to \mathbb{R} \quad \psi(x) = f(x, x)$$

という関数を考える．このとき

Proposition 2.3.3. シンプレクティック同相 ϕ の固定点と ψ の臨界点は一対一対応する．

Proof. $x_0 \in X$ として，$d_{x_0}\psi = (d_x f + d_y f)|_{(x,y)=(x_0,x_0)}$ である．$\xi = d_x f|_{(x,y)=(x_0,x_0)}$ とすれば，

$$x_0 \text{ が } \psi \text{ の臨界点} \iff d_{x_0}\psi = 0 \iff d_y f|_{(x,y)=(x_0,x_0)} = -\xi$$

である．ϕ は f で生成されるものであるので，$\phi(x_0,\xi) = (x_0,\xi)$ であるのでこれは固定点に対応する（逆も同様）． □

ϕ を繰り返して，

$$\phi^{(N)} = \phi \circ \phi \cdots \circ \phi : M \to M$$

というシンプレクティック同相を考える．$\phi^{(N)}$ が，ある関数 $f^{(N)}$ により生成されるとすると $\phi^{(N)}$ の固定点は $\psi^{(N)}(x) = f^{(N)}(x,x)$ の臨界点に対応する．一般には $\phi^{(N)}$ に対する母関数はみつからないが，適当な仮定をすれば成立する．つまり，ϕ の周期 N の点を見つけるには，$f^{(N)}$ の臨界点を見つければよいことになる．

f が生成するシンプレクティック同相を ϕ とする．このとき $x, y \in X$ を固定して，

$$X \ni z \mapsto f(x,z) + f(z,y) \in \mathbb{R}$$

を考える，これが唯一つに臨界点 z_0 をもつして，さらにそれが非退化と仮定する．このとき

$$f^{(2)}(x,y) := f(x,z_0) + f(z_0,y)$$

を考える．

Theorem 2.3.4. この関数 $f^{(2)}$ は滑らかであり $\phi^{(2)}$ の母関数である．

Proof. z_0 が臨界点なので $d_y f(x,z_0) + d_x f(z_0,y) = 0$ が成立する．（いま x, y を固定して考えたが，臨界点 z_0 はパラメータ (x,y) に依存していることに注意する．その方程式が今挙げたもの）．またこれが非退化なので

$$\det[\frac{\partial}{\partial z_i}(\frac{\partial f}{\partial y_j}(x,z) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(z,y)]_{z=z_0} \neq 0$$

である．そこで陰関数定理から $z_0 = z_0(x,y)$ は滑らかである．つまり臨界点はパラメータ (x,y) に対して滑らかである．

次に，$f^{(2)}(x,y)$ が $\phi^{(2)}$ の母関数であることをみていく（どちらも別々に与えられている）．そのための必要十分条件は

$$\phi^{(2)}(x, d_x f^{(2)}) = (y, -d_y f^{(2)})$$

である．

　そこでまず

$$d_x f^{(2)}(x,y) = \frac{\partial f(x,z_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,z_0)}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f(z_0,y)}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,z_0)}{\partial x}$$

なので

$$\begin{aligned}
\phi^{(2)}(x, d_x f^{(2)}(x,y)) =& \phi(\phi(x, d_x f^{(2)}(x,y))) = \phi(\phi(x, d_x f(x,z_0))) \\
=& \phi(z_0, -d_y f(x,z_0)) \quad (\phi \text{ が } f \text{ により生成されるので}) \\
=& \phi(z_0, d_x f(z_0,y)) \quad (z_0 \text{ が臨界点から}) \\
=& (y, -d_y f(z_0,y)) \quad (\phi \text{ が } f \text{ により生成されるので}) \\
=& (y, -df_y^{(2)}(x,y))
\end{aligned}$$

となる．　□

　この議論は繰り返すことができる．つまり $\phi^{(3)}$ に対する母関数をもとめよう．関数として

$$f : X \times X \ni (z,u) \mapsto f(x,z) + f(z,u) + f(u,y) \in \mathbb{R}$$

が唯一つの臨界点 (z_0, u_0) をもち，それが非退化とする．このとき

$$f^{(3)}(x,y) = f(x,z_0) + f(z_0,u_0) + f(u_0,y)$$

が母関数になる．

Proof. まず臨界点であることから

$$d_y f(x,z_0) + d_x f(z_0,u_0) = 0, \quad d_y f(z_0,u_0) + d_x f(u_0,y) = 0$$

をえる．非退化性から

$$\begin{aligned}
\det[\frac{\partial}{\partial z_i}(\frac{\partial f}{\partial y_j}(x,z) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(z,u))]_{(z,u)=(z_0,u_0)} \neq 0 \\
\det[\frac{\partial}{\partial u_i}(\frac{\partial f}{\partial y_j}(x,z) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(z,u))]_{(z,u)=(z_0,u_0)} \neq 0 \\
\det[\frac{\partial}{\partial z_i}(\frac{\partial f}{\partial y_j}(z,u) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(u,y))]_{(z,u)=(z_0,u_0)} \neq 0 \\
\det[\frac{\partial}{\partial u_i}(\frac{\partial f}{\partial y_j}(z,u) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(u,y))]_{(z,u)=(z_0,u_0)} \neq 0
\end{aligned}$$

が成立する．よって陰関数定理から $(z_0,u_0)=(z_0(x,y),u_0(x,y))$ となる．そこで

$$\begin{aligned}\phi^3(x,d_xf^3)&=\phi^3(x.d_xf^3(x,y))=\phi^3(x,d_xf(x,z_0))=\phi^2(z_0,-d_y(x,z_0))\\&=\phi^2(z_0,d_xf(z_0,u_0))=\phi(u_0,-df_y(z_0,u_0))=\phi(u_0,d_xf(u_0,y))\\&=(y,-d_yf(u_0,y))=(y,-d_yf^3(x,y))\end{aligned}$$

となる． □

2.3.4　ビリヤード

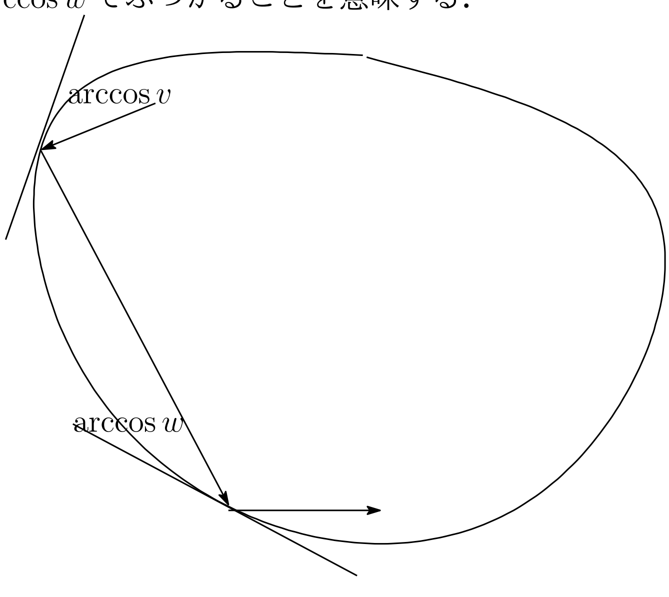
$\chi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を滑らかな平面曲線で以下をみたすとする

- 周期1とする．$\chi(s+1)=\chi(s)$.
- arc-length パラメータ．$|d\chi/ds|=1$.
- χ で囲まれる Y が凸 (convex) とする．接線 $\{\chi(s)+td\chi/ds|t\in\mathbb{R}\}$ と $X=\partial Y$ の交点が一点 $\chi(s)$.

この Y 内を速度一定で転がるボールを考えて，その境界で普通の反射をするとする．そこで

$$\phi:\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times(-1,1)\ni(x,v)\mapsto(y,w)\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times(-1,1)$$

が定まる．ここで点 x では角度 $\arccos v$ で入ったときに，次に y において角度 $\arccos w$ でぶつかることを意味する．



χ により $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と X を同一視して，$f:\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ を $f(x,y)=-|x-y|$ で定義する（ここで注意すべきは $|x-y|$ は χ の像での $\mathbb{R}^2$ 内の距離である．つまり $|x-y|$ は正確には $|\chi(x)-\chi(y)|$ のこと）．これは diagonal 部分以外では滑らかである．

$\phi(x,v)=(y,w)$ つまりボールの軌道は (x,v) の次に (y,w) にくるとする．このとき f が ϕ に対する母関数である．

Proof.

$$\begin{cases} d_x f = -\frac{x-y}{|x-y|} \text{ の } T_xX \text{ への射影} = v \\ d_x f = -\frac{y-x}{|x-y|} \text{ の } T_yX \text{ への射影} = -w \end{cases}$$

となるので． □

そこで，周期点をみつけるよう（例えば $N>1$ 回後にもとに戻るもの．始点から $N-1$ 回壁に反射してもとに戻る）. それは $\phi^{(N)}$ の固定点であるが，この母関数を $f^N(x,y)$ とすれば $f^N(x,x)$ の臨界点である．また f^N が母関数となるための条件と合わせれば

$$\begin{aligned} X\times\cdots\times X &\to \mathbb{R} \\ (x_1,\cdots,x_N) &\mapsto f(x_1,x_2)+f(x_2,x_3)+\cdots+f(x_N,x_1) \\ &= |x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_N-x_1| \end{aligned}$$

の臨界点をみつければよい．

また

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times(-1,1)\cong\{(x,v)|x\in X, v\in T_xX, |v|<1\}\cong A$$

は X 上の開円板接束であり，開穴あき円板になる．そして $\phi:A\to A$ は面積保存（シンプレクティック同相）であることに注意．

2.3.5 ポアンカレの再帰定理

Theorem 2.3.5 (ポアンカレの再帰定理). $\phi:A\to A$ を有限体積多様体 A の体積保存微分同相とする．$p\in A$, U を p の近傍とする．このとき $q\in U$ とある正整数 N で $\phi^{(N)}(q)\in U$ となるものが存在. ($\phi^{(N)}$ の固定点はこの特別な場合である）.

Proof. $U_0=U, U_1=\phi(U_0), ...$ とする．もしこれらの集合が互いに素なら $vol(U_i)=vol(U)>0$ であるので

$$volA\geq vol(U_0\cup\cdots)=\infty$$

となる．よって $\phi^k(U)\cap\phi^l(U)\neq\emptyset$ である．よって $\phi^{k-l}(U)\cap U\neq\emptyset$ となる． □

EXAMPLE 2.3.4. S^1 を考えて，α 回転を g とする．これは線素を保存する．$\alpha \neq 2\pi m/n$ なら $\{g^k x\}_k$ は S^1 上いたるところ稠密である．

EXAMPLE 2.3.5. 2 次元トーラスを考えて，

$$g^t(\phi_1, \phi_2) = (\phi_1 + \alpha_1 t, \phi_2 + \alpha_2 t)$$

を考えると，これは面積を保存する．α_1/α_2 が無理数なら $g^t(\phi_1, \phi_2)$ はいたるところ稠密である．

Remark 2.3.3. このような状況（体積保存）が起こるのは，例えばシンプレクティック同相である．特に，ハミルトニアンがあって，ハミルトニアンの flow は体積を保存する．（後述）．またリーマン多様体上のリーマン体積要素を考える．ベクトル場 X が $div(X) = 0$ を満たすなら，体積保存（$L_X vol = 0$）である．

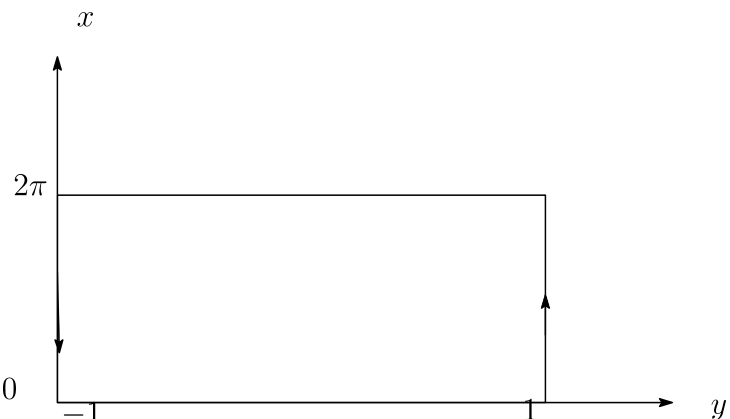
次の定理は力学系において重要な応用をもつ（証明は [Macduff-Salamon] をみよ）．

Theorem 2.3.6 (ポアンカレの最後の幾何学的定理．ポアンカレ-バーコフの定理)．$A = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1]$ とする．$\phi : A \to A$ を面積保存微分同相で境界をその境界にうつし，回転方向は反対方向になるとする．このとき ϕ は少なくとも二つの固定点をもつ．

ここで回転方向が反対とは，

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1] \ni (x, y) \to \phi(x, y) = (x + g(x, y), f(x, y)) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1]$$

と書いたとき $g(x, -1) < 0$ で $g(x, 1) > 0$ となるもの．



この定理の証明は省略．この定理の一般化としてコンパクトシンプレクティック多様体のシンプレクティック同相に対する固定点の数を下から bound する問題がアーノルド予想である（後述）．

第3章　局所形式

この章の一つの目的はダルブーの定理の証明である．この定理を証明するための重要な方法である Moser のトリックを紹介する．Moser の方法はダルブーの定理だけでなく，ワインシュタインによるラグランジアン部分多様体の管状近傍定理にも適用される．

3.1 Preparation for the local theory

このノートでよく用いる公式を書いておく．

$$
\begin{aligned}
\omega \wedge \theta &= (-1)^{\deg \omega \deg \theta} \theta \wedge \omega \\
\iota_X(\omega \wedge \theta) &= (\iota_X \omega) \wedge \theta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \iota_X \theta \\
L_X \omega \wedge \theta &= (L_X \omega) \wedge \theta + \omega \wedge L_X \theta \\
\iota_{[X,Y]} &= L_X \iota_Y - \iota_Y L_X \\
L_{[X,Y]} &= L_X L_Y - L_Y L_X \\
L_X &= \iota_X d + d \iota_X \\
L_X d &= d L_X \\
d(\omega \wedge \theta) &= d\omega \wedge \theta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\theta
\end{aligned}
$$

3.1.1 Isotopies and vector fields

Definition 3.1.1. M を多様体として $\rho : M \times \mathbb{R} \to M$ がイソトピーとは $\rho_t : M \to M$ が微分同相で，$\rho_0 = \mathrm{id}$ となるもの．

このようなイソトピーに対して時間依存のベクトル場 v_t をえる．つまり $t \in \mathbb{R}$ に依存したベクトル場 v_t で，点 $p \in M$ に対して，

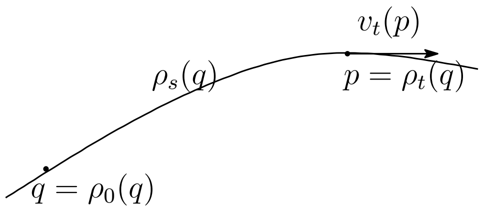
$$
v_t(p) = \frac{d}{ds} \rho_s(q)|_{s=t} \quad \text{where } q = \rho_t^{-1}(p)
$$

（ここで，一般に $\rho_t^{-1} \neq \rho_{-t}$ に注意）．言い換えると

$$\frac{d\rho_s(q)}{ds}|_{s=t} = v_t(\rho_t(q)), \quad or \quad \frac{d\rho_t^* f}{dt} = \rho_t^*(v_t(f)) \quad \forall f$$

である．

Proof. $\frac{df(\rho_s(q))}{ds}$ の $s=t$ での値は，$\rho_s(q)$ という曲線の $p=\rho_t(q)$ での接ベクトルに関する微分であるので，$(v_t f)(p)$ となる．□



EXAMPLE 3.1.1. $\phi_t = \exp(\{(t-1)^2-1\}A) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考える．これは $\phi_0 = \mathrm{id}$ となり，ϕ_t は非退化なので，イソトピーである．このときベクトル場は

$$\begin{aligned} v_t(x) &= \frac{d}{ds}\exp(\{(s-1)^2-1\}A)(\exp -\{(t-1)^2-1\}A)x|_{s=t} \\ &= 2(t-1)A\exp(\{(t-1)^2-1\}A)(\exp -\{(t-1)^2-1\}A)x = 2(t-1)Ax \end{aligned}$$

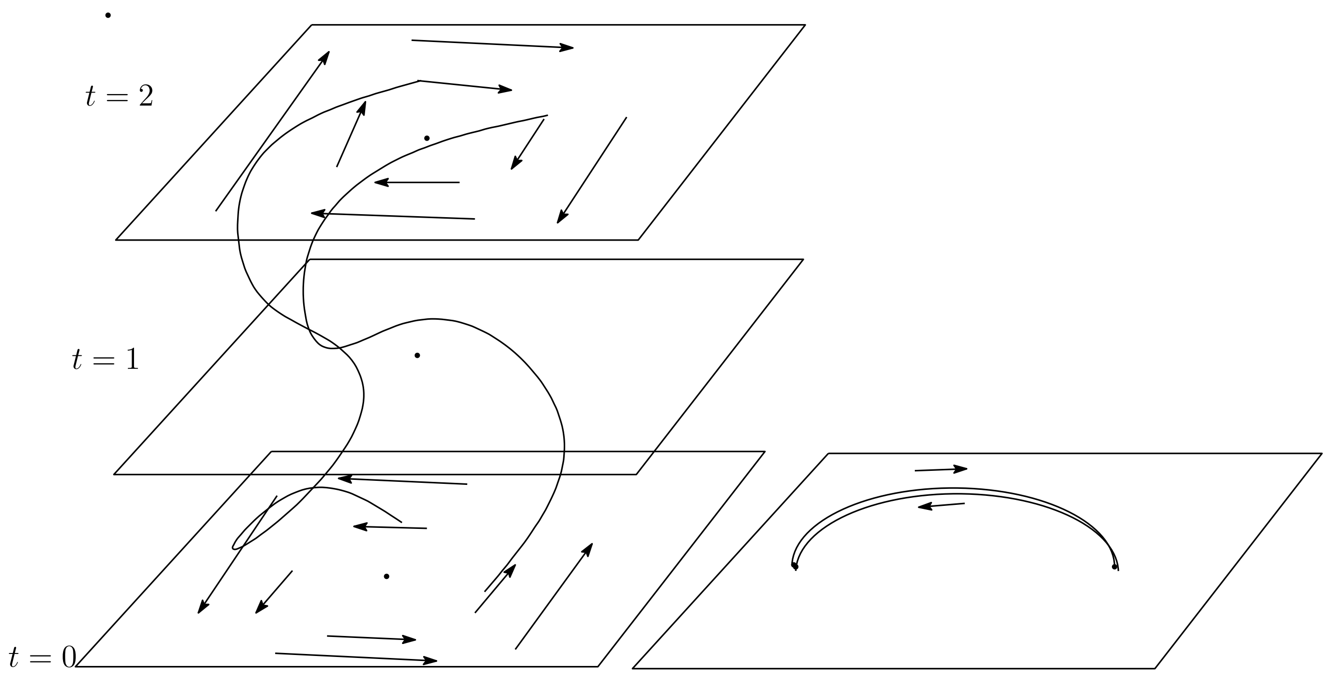
となり，時間依存ベクトル場である．$\phi_0 = \mathrm{id}$ だからといって $v_0 = 0$ とはならない，実際 $v_0 = 2A$ である．また $v_1 = 0$ となっている．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$$

という場合を考えてみると

$$\exp(\{(t-1)^2-1\}A) = \begin{pmatrix} \cos(2t-t^2)\pi & -\sin(2t-t^2)\pi \\ \sin(2t-t^2)\pi & \cos(2t-t^2)\pi \end{pmatrix}$$

となる．例えば，点 $(1,0)$ による像は $(\cos(2t-t^2)\pi, \sin(2t-t^2)\pi)$（右下図）である．$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ で内で書けば $(\cos(2t-t^2)\pi, \sin(2t-t^2)\pi, t)$（左下図）となる．



右上図をみればわかるように，例えば $(1,0)$ でのベクトル場を求める場合に，$(1,0)$ の軌道を求めただけでは，ちょっと時間が経てば違う点にいってしまうので，$(1,0)$ でのベクトル場がどうなるかはわからないことになる.（その軌道を時刻 t で微分した場合には $v_t(\phi_t(1,0))$ を求めることになる）．例えば $t=1$ での $(1,0)$ でのベクトル場を求めるには，$t=1$ のときに $(1,0)$ を通る曲線である $(-\cos(2t-t^2)\pi,-\sin(2t-t^2)\pi)$ を考えて，それを微分して $t=1$ とおけばベクトル $v_1((1,0))$ は $(0,0)$ となることがわかるのである.（これで $\frac{d\rho_s(q)}{ds}|_{s=t}=v_t(\rho_t(q))$ の意味がわかったであろう）．

Remark 3.1.1. 一般に局所的にも $\rho_{t+s}\neq\rho_t\circ\rho_s$ である．群にならない．よって一般に $\rho_t^{-1}\neq\rho_{-t}$ でもある．また $\rho_0=\mathrm{id}$ だからといって $v_0=0$ というわけではない.

さて，逆に，時間依存したベクトル場 v_t があって，M がコンパクトまたは v_t がコンパクトサポートをもつとすると，あるイソトピー ρ_t で，対応する時間依存ベクトル場が v_t となるものがある.

特に M がコンパクトなら M のイソトピーの集合と M 上の時間依存ベクトル場の集合は一対一に対応する.

Proof. v_t に対して，$M\times\mathbb{R}$ 上のベクトル場 V を

$$V(x,t)=V_{(x,t)}=(v_t)_x+\partial/\partial t=v_t(x)+\frac{\partial}{\partial t}$$

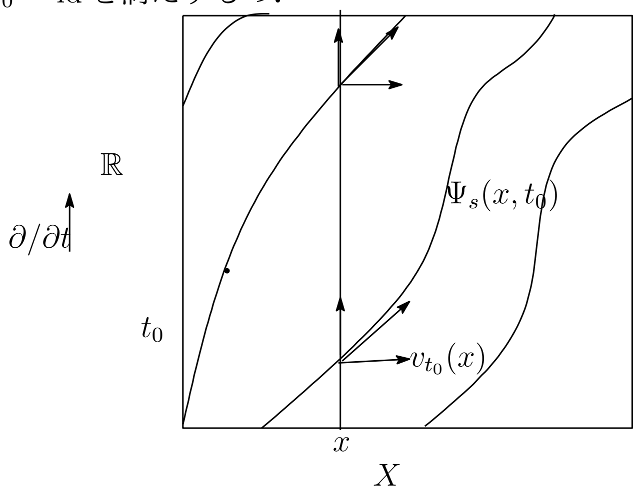
と定義する．記号が混乱するので，$t=x_{n+1}$ として，

$$V(x,x_{n+1})=v(x,x_{n+1})+\partial/\partial x_{n+1}$$

と考えることにする．このベクトル場から 1 パラメータ変換群である．

$$\Psi_s : M \times \mathbb{R} \ni (x, x_{n+1}) \mapsto (y(x, x_{n+1}, s), y_{n+1}(x, x_{n+1}, s)) \in M \times \mathbb{R}$$

が定義される．つまり $\frac{d\Psi_s}{ds}(x, x_{n+1}) = V(\Psi_s(x, x_{n+1}))$ をみたし，$\Psi_{s+s'} = \Psi_s \Psi_{s'}$，$\Psi_0 = \mathrm{id}$ を満たすもの．



さて，$\frac{d}{ds} y_{n+1}(x, x_{n+1}, s) = 1$ であるので，

$$y_{n+1}(x, x_{n+1}, s) = s + y_{n+1}(x, x_{n+1}, 0) = s + x_{n+1}$$

であり，

$$\frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_{n+1}} = 1$$

であることがわかる．そして，微分同相 $\Psi_s(x, x_{n+1})$ のヤコビ行列は非退化であるが，

$$\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = (\frac{\partial y_k}{\partial x_j})_{1 \le i,j \le n}$$

という形になることがわかり，A が非退化となる．よって，逆関数定理から x_{n+1} を固定して，

$$M \ni x \mapsto y(x, x_{n+1}, s) \in M$$

は M の微分同相を与えることになる．そこで，$\rho_s(x) := y(x, 0, s)$ という微分同相を考える（言い換えると，$\rho_s(x) = y(\Psi_s(x, 0))$）．まず，$\rho_0(x) = y(x, 0, 0) = x$ であるので，$\rho_0 = \mathrm{id}$ である．また，$y_{n+1} = x_{n+1} + s$ であることから，$\Psi_s(x, 0) = (y(x, 0, s), y_{n+1}(x, 0, s)) = (\rho_s(x), s)$ となることがわかる．

これがもとめるものであることを確かめよう．

$$\frac{d\rho_s}{ds}(x)|_{s=t} = \frac{dy}{ds}|_{s=t} = v(\Psi_t(x, 0)) = v(\rho_t(x), t) = v_t(\rho_t(x))$$

となるので，もとめる isotopy である．また，

$$(\rho_{s+t}(x), s+t) = \Psi_{s+t}(x,0) = \Psi_s\Psi_t(x,0) = \Psi_s(\rho_t(x), t)$$

となるので，

$$\rho_{s+t}(x) = y(\Psi_s(\rho_t(x), t)), \quad y(x, 0, s+t) = y(\rho_t(x), t, s)$$

この式からも

$$\frac{d}{ds}\rho_{s+t}(x)|_{s=0} = v(\Psi_0(\rho_t(x), t)) = v(\rho_t(x), t) = v_t(\rho_t(x))$$

が確かめられる． □

Remark 3.1.2. $\rho_s(x) = y(\Psi_s(x, t_0))$ としてはいけない．この場合に $\rho_0 = \mathrm{id}$ を満たすが，

$$\frac{d}{dt}\rho_t(x) = \frac{d}{ds}\rho_s(x)|_{s=t} = V(\Psi_t(x, t_0)) = v(\rho_t(x), t+t_0) = v_{t+t_0}(\rho_t(x))$$

となり，考えている時間がずれてしまう．

EXAMPLE 3.1.2. 時間依存ハミルトニアン $H : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ を考える．$H_t(x) = H(x,t)$ としておく．このとき時間依存ハミルトンベクトル場が $\omega(\cdot, X_t) = dH_t$ により定義できる．このベクトル場からイソトピー $\phi : M \times [0,1] \to M$ をつくる．$\phi_t(x) = \phi(x,t)$ とする．この ϕ_t は任意の t に対してシンプレクティック同相であり（任意の t に対して X_t はハミルトンベクトル場であるので），これを**ハミルトニアンイソトピー**とよぶ．

Definition 3.1.2. ベクトル場 v_t が t によらずに $v_t = v$ としたとき，対応するイソトピーは 1 パラメータ群となる．それを v の **flow** または **exponential map** とよび，$\rho_t = \exp tv$ とかく．つまり $\exp tv$ は微分同相の滑らかな族で，

$$\exp tv|_{t=0} = \mathrm{id}_M, \quad \frac{d}{ds}(\exp sv)(p)|_{s=t} = v(\exp tv(p))$$

ベクトル場 v に対して，リー微分を L_v とかく．例えば $\omega \in \Omega^k(M)$ に対して，

$$L_v\omega = \frac{d}{dt}(\exp tv)^*\omega|_{t=0}$$

と定義する．同様に，時間依存ベクトル場があったときに v_t は t を固定すればベクトル場であるのでリー微分が定義できる．つまり

$$L_{v_t}\omega = \frac{d}{ds}(\exp sv_t)^*\omega|_{s=0}$$

と定義する．

v_t が時間依存ベクトル場のとき，上の remark でのべたように局所的にはイソトピーが存在する．つまり任意の点 p と十分小さい t の対して．局所微分同相の族 ρ_t で

$$\frac{d\rho_t}{dt} = v_t \circ \rho_t, \quad \rho_0 = \mathrm{id}$$

となるものが存在する．**時間依存のベクトル場 v_t とそれに対応したイソトピーに対して，**

$$\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega = \rho_t^* L_{v_t}\omega.$$

が成立する．(注意すべきは $\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega$ はリー微分 $L_{v_t}\omega$ とは異なること．また $\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega|_{t=0} = L_{v_0}\omega$ であることに注意する）

Proof. ω が関数 f の場合には v_t の定義から，

$$(\frac{d}{dt}\rho_t^* f)(p) = (\rho_t^* v_t(f))(p) = (\rho_t^* L_{v_t} f)(p)$$

が成立する．ω として $f dx_1 \wedge \cdots dx_k$ を考える．このとき

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_t^*(f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k) &= \frac{d}{dt}((\rho_t^* f) d\rho_t^* x_1 \wedge \cdots \wedge d\rho_t^* x_k) \\ = (\rho_t^* L_{v_t} f) d\rho_t^* x_1 \wedge \cdots \wedge d\rho_t^* x_k &+ (\rho_t^* f)(d\rho_t^* L_{v_t} x_k) \wedge \cdots \wedge d\rho_t^* x_k + \cdots \\ = (\rho_t^* L_{v_t} f) \rho_t^* dx_1 \wedge \cdots \wedge \rho_t^* dx_k &+ (\rho_t^* f)(\rho_t^* L_{v_t} dx_k) \wedge \cdots \wedge \rho_t^* dx_k + \cdots \\ = \rho_t^*\{(L_{v_t} f) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k &+ f(L_{v_t} dx_1) \wedge \cdots \wedge dx_k + \cdots\} = \rho_t^* L_{v_t}\omega\end{aligned}$$

ここで $dL_X = L_X d$ や $L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X\beta)$ などを用いた． □

Theorem 3.1.1. ω_t **を** t **に滑らかに依存した** d***-form*** **とする，このとき**

$$\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega_t = \rho_t^*(L_{v_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt})$$

である．

Proof. まず，関数 f_t の場合を考える．$f_t(p) = f(p,t)$ とする．$(\rho_t^* f_t)(p) = f_t(\rho_t(p)) = f(\rho_t(p), t)$ である．そこで，

$$\frac{d}{dt} f(t, \rho_t(p)) = \frac{\partial}{\partial s} f(s, \rho_t(p))|_{s=t} + (v_t f)(t, \rho_t(p)) = (\rho_t^*(\frac{df_t}{dt} + L_{v_t} f_t))(p)$$

であるので，

$$\frac{d}{dt}\rho_t^* f_t = \rho_t^*(L_{v_t} f_t + \frac{df_t}{dt})$$

が成立する．あとは，先ほどと同様にすればよい．

$$\omega_t = f_t dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

としてよいので，

$$\rho_t^* = \rho_t^* f_t d\rho_t^* x_1 \wedge \cdots \wedge d\rho_t^* x_n$$

を微分すれば，

$$\rho_t^*(\frac{df_t}{dt} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n + L_{v_t}(f_t dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n))$$

となるので，

$$\frac{d}{dt}\rho_t^* \omega_t = \rho_t^*(L_{v_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt})$$

□

3.1.2 tubular neighborhood theorem

M を n 次元多様体とし，X を k 次元部分多様体とする．またその埋め込みを $i : X \to M$ とする．このとき $di_x : T_x X \to T_x M$ という線形埋め込みを得る．ここで $i(x)$ をそのまま x と書いている．この商空間 $N_x X := T_x M / T_x X$ は $n-k$ 次元ベクトル空間であり，X の点 x での normal space という．さらに **normal bundle を** $NX = \cup_{x \in X} N_x X$ **と定義する**．この NX は rank が $n-k$ のベクトル束であり NX は n 次元多様体とみなせる．さらに

$$i_0 : X \to NX$$

を zero section として NX **に埋め込む**．また zero section X の近傍 U_0 が convex とは各ファイバーとの共通部分 $U_0 \cap N_x X$ が convex であること．

Theorem 3.1.2 (tubular neighborhood theorem)**.** *X の NX の convex 近傍 U_0 と X の M 内の近傍 U が存在して，微分同相 $\phi : U_0 \to U$ で*

$$\begin{tikzcd} NX \supset U_0 \arrow[r, "\phi"] & U \subset M \\ X \arrow[u, "i_0"] \arrow[r, equal] & X \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

が可換．

これはよく知られた事実なので証明は省略．

3.1.3　ホモトピー公式

U を X の M 内での管状近傍とする．$i : X \to U \subset M$ に対して，

$$i^* : H^d(U) \to H^d(X)$$

という写像をえる．この写像は全射である．($i : X \to U$ を考えると $\pi \circ i : X \to X$ は id である．よって，導かれるものはコホモロジーレベルで $i^* \circ \pi^* = \mathrm{id}$ となる．よって i^* は全射である）．さらに管状近傍定理から i^* は単射でもある（U は X とホモトピー同値である）．そこで，

Corollary 3.1.3. $H^l(U) \cong H^l(X)$ となる．

微分形式のレベルでは，単射が意味することは．もし ω が U 上の閉形式で $i^*\omega$ が exact とすると ω は exact になることである．

Theorem 3.1.4. U 上の閉形式 ω で $i^*\omega = 0$ となるなら，ω は *exact* である．つまり μ という U 上の微分形式で $\omega = d\mu$ となるものが存在する．さらに任意の点 $x \in X \subset U$ に対して $\mu_x = 0$ となるようにとれる．

Remark 3.1.3. （2017/10/27 追記）以前のノートは，ここで間違っていた．「任意の点 $x \in X \subset U$ に対して $\mu_x = 0$」を「$\mu|_X = 0$ または $i^*\mu = 0$」のように書いていましたが，$\mu_x = 0$ は $\Lambda^* T_x M$（または $\Lambda^* T_x U$）のことであり，$i^*\mu_x = 0$ は $\mu_x = 0$ は $\Lambda^* T_x X$ であるので，意味が異なります．「任意の点 $x \in X \subset U$ に対して $\mu_x = 0$」ならば「$\mu|_X = 0$ または $i^*\mu = 0$」は正しいですが，逆は不成立ですね．($i_* : T_x X \to T_x M$ は単射ですが，$i^* : T_x M \to T_x X$ は全射だけしかいえません．教訓：M 上のベクトル場 v に対して，$v|_X = 0$ という書き方は問題ないけど，M 上の微分形式については $\mu|_X = 0$ という書き方はあまりよろしくない）

Proof. 管状近傍定理の微分同相 $\phi : U_0 \to U$ を考えれば，U_0 で考えればよいことになる．また $\pi_0 : NX \to X$ として，ゼロ切断を $i_0 : X \to NX$ と書いておく．$0 \leq t \leq 1$ に対して，

$$\rho_t : U_0 \ni (x, v) \mapsto (x, tv) \in U_0$$

を考える．これは U_0 が convex と仮定しているので well-defined である．また ρ_1 は恒等写像であり $\rho_0 = i_0 \circ \pi_0$ となる．また ρ_t は zero-section$X$ を保存している．つまり $\rho_t \circ i_0 = i_0$ である．よって ρ_t は $i_0 \circ \pi_0$ と恒等写像を結ぶ X を固定するホモトピーである．つまり $\pi_0 : U_0 \to X$ は retraction である．このように部分多様体 X は U の変形レトラクトである．

さて $\rho_1 = \mathrm{id}$ と $\rho_0 = i_0 \circ \pi_0$ の間のホモトピー作用素 $Q : \Omega^d(U_0) \to \Omega^{d-1}(U_0)$ を構成する．ρ_t に対して，時間依存のベクトル場を v_t とすれば，

$$Q\omega = \int_0^1 \rho_t^*(\iota_{v_t}\omega)dt$$

と定義する．

ここで $\rho_1 = \mathrm{id}$ と $\rho_0 = i_0 \circ \pi_0$ の間のホモトピー作用素とは $\mathrm{id} - (i_0 \circ \pi_0)^* = dQ + Qd$ を満たすものである．このような作用素があれば，コホモロジーレベルで $\mathrm{id} = (i_0 \circ \pi_0)^* = \pi_0^* \circ i_0^*$ が成立する．よって i_0^* が単射となる．つまり $d\omega = 0$ かつ $i_0^*\omega = 0$ となる ω に対して，$\omega = dQ\omega$ となるので $\mu = Q\omega$ とすればもとめるものとなる．

そこでホモトピー作用素になることを確かめよう．

$$\begin{aligned} Qd\omega + dQ\omega &= \int_0^1 \rho_t^*(\iota_{v_t}d\omega)dt + d\int_0^1 \rho_t^*(\iota_{v_t}\omega)dt = \int_0^1 \rho_t^*(\iota_{v_t}d\omega + d\iota_{v_t}\omega)dt \\ &= \int_0^1 \rho_t^* L_{v_t}\omega dt = \int_1^0 \frac{d}{dt}\rho_t^*\omega dt = \rho_1^*\omega - \rho_0^*\omega \end{aligned}$$

よって定理の最初の主張が言えた．2 番目の主張は，任意の $x \in X \subset U_0$ に対して $\rho_t((x,0)) = (x,0)$ であるので v_t は X 上では零である．よって $(Q\omega)_x = 0$ となる．　□

Remark 3.1.4. この証明は，一般にイソトピー ρ_t があれば，ホモトピー作用素が構成でき，ρ_1^* はコホモロジーでの同型を与えることを証明している．

3.2　Moser の定理

3.2.1　シンプレクティック構造に対する同値概念

M を $2n$ 次元多様体で二つのシンプレクティック構造 ω_0 と ω_1 があるとする．

Definition 3.2.1.

- (M, ω_0) と (M, ω_1) がシンプレクティック同値とは $\phi : M \to M$ という微分同相で $\phi^*\omega_1 = \omega_0$ となるものが存在．

- (M, ω_0) と (M, ω_1) が強イソトロピックとはイソトピー $\rho_t : M \to M$ で $\rho_1^*\omega_1 = \omega_0$ となるものが存在．

- (M, ω_0) と (M, ω_1) が変形同値とはシンプレクティック形式 ω_0 と ω_1 を結ぶシンプレクティック形式の族 ω_t が存在すること．

- (M, ω_0) と (M, ω_1) がイソトロピックとはそれらが変形同値でかつ $[\omega_t]$ が t によらないこと．

定義から次は明らか：

- 強イソトロピックならシンプレクティック同値
- イソトロピックなら変形同値
- 強イソトロピックならイソトロピック

最後の部分は次のように証明する．$\rho_t; M \to M$ をイソトロピーで $\rho_1^* \omega_1 = \omega_0$ とする．このとき $\omega_t = \rho_t^* \omega_1$ はシンプレクティック形式で ω_0 と ω_1 を結ぶものであることは明らか．さらにイソトピーから，先ほどと同様な議論により $\rho_t^* = \mathrm{id}$ がコホモロジーレベルでいえる．よって $[\rho_t^* \omega_1] = [\omega_0]$ であり t によらない．

Moser の定理とは,「コンパクトシンプレクティック多様体上では isotopic なら強 isotopic」という上の逆が成立することである．

3.2.2　Moser のトリック

次のような問題を考える：M を $2n$ 次元の多様体とする．X を k 次元の部分多様体．また U_0, U_1 を X の近傍として，シンプレクティック形式 ω_0 と ω_1 があるとする．このとき X を保存するシンプレクティック同相が存在するであろうか．つまり, 微分同相 $\phi : U_0 \to U_1$ で $\phi^* \omega_1 = \omega_0$ で $\phi(X) = X$ となるものが存在するか？

答えは適当な条件のもとイエスである．そして，

- X が一点のときは，これはダルブーの定理を与える．
- X が M のときは，これはモーザーの定理を与える．

$X = M$ のときをこの section では考える．M をコンパクト多様体でシンプレクティック形式 ω_0, ω_1 を持つとする．このとき $(M, \omega_0), (M, \omega_1)$ はシンプレクティック同相になるであろうか？さらにいえば，シンプレクティック同相 ϕ で id にホモトピックなものを作れるであろうか？

まず，ϕ が id にホモトピックなら必要条件として $[\omega_0] = [\omega_1] \in H^2(M, \mathbb{R})$ である．

逆に $[\omega_0] = [\omega_1]$ であると仮定したとき，ϕ という id にホモトピックな微分同相で $\phi^* \omega_1 = \omega_0$ となるものが存在するであろうか？

これは，更なる仮定をすれば，実は成立する（by Moser）．しかし，一般には反例がある（by McDuff）．

Theorem 3.2.1 (Moser の定理その 1)**.** $[\omega_0]=[\omega_1]$ で，さらに $\omega_t=(1-t)\omega_0+t\omega_1$ が各 t についてシンプレクティックであるとする．このとき *isotopy* $\rho: M\times\mathbb{R}\to M$ で $\rho_t^*\omega_t=\omega_0$ となるものが存在する．

特に $\phi:=\rho_1: M\to M$ は $\phi^*\omega_1=\omega_0$ となる．つまりシンプレクティック同相.

Proof. この証明は **Moser のトリック**とよばれる．

まず，もしイソトピー $\rho: M\times\mathbb{R}\to M$ で $\rho_t^*\omega_t=\omega_0$ となるものがあるとする．このとき，時間依存ベクトル場

$$v_t=\frac{d\rho_t}{dt}\circ\rho_t^{-1}$$

を考えると，

$$\begin{aligned} 0=\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega_t&=\rho_t^*(L_{v_t}\omega_t+\frac{d\omega_t}{dt})\\ \iff L_{v_t}\omega_t+\frac{d\omega_t}{dt}&=0\quad(*)\end{aligned}$$

を得る．

また，逆に（$*$）を満たすベクトル場 v_t があるとする．M がコンパクトなので，イソトピー ρ_t が存在し，$0=\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega_t$ から $\rho_t^*\omega_t=\rho_0^*\omega_0=\omega_0$ を得る．

そこで，われわれはそのようなベクトル場 v_t を探す．つまり $(*)$ を解く．

まず $\omega_t=(1-t)\omega_0+t\omega_1$ から，

$$\frac{d\omega_t}{dt}=\omega_1-\omega_0$$

となる．また $[\omega_0]=[\omega_1]$ なので，

$$\omega_1-\omega_0=d\mu$$

となる μ が存在．また勝手な時間依存ベクトル場 v_t に対して

$$L_{v_t}\omega_t=d\iota_{v_t}\omega_t+\iota_{v_t}d\omega_t$$

が成立する．仮定から $d\omega_t=0$ なので $L_{v_t}\omega_t=d\iota_{v_t}\omega_t$ を得る．これらをあわせると，$(*)$ は

$$d\iota_{v_t}\omega_t+d\mu=0$$

を得る．よって $\iota_{v_t}\omega_t+\mu=0$ を考える．ω_t は非退化なので，これは各点で解くことができ，v_t を得る． □

Theorem 3.2.2 (Moser の定理その 2). M をコンパクト多様体で ω_0, ω_1 をシンプレクティック形式とする．さらに ω_t は ω_0, ω_1 を結ぶ閉形式の族で

- $[\omega_t]$ は t に依存しない．
- ω_t は非退化（つまりシンプレクティック形式）．

とする．このときイソトピー $\rho : M \times \mathbb{R} \to M$ で $\rho_t^* \omega_t = \omega_0$ となるものが存在する．
特に，(M, ω_0)，(M, ω_1) がイソトピックなら強イソトピックでありそれはシンプレクティック同相である．

Proof. $[\omega_t]$ が t に依存しないという仮定から $[d\omega_t/dt] = 0$ であるので，1-from の族 μ_t で，$d\omega_t/dt = d\mu_t$ となるものが存在．さらにこの族を smooth となるようにとることができる.（局所的には，コンパクトサポートをもつ微分形式に対するポアンカレの補題から smooth になるようにとれることが証明できる．さらに Mayer-Vietoris 系列と M がコンパクトなので有限個の good cover に対して帰納法を行う．
別証明：リーマン計量を一つ固定する.．$d^* : \Omega^2 \to \Omega^1$ を考える．M がコンパクトなのでホッジ理論を使えば $d : \mathrm{Im} d^* \to d\Omega^1 \subset \Omega^2$ は同型写像である．そこで，$\frac{d}{dt}\omega_t \in d\Omega^1$ に対して，$\mu_t \in \mathrm{Im} d^*$ が定まり，$d\mu_t = \frac{d}{dt}\omega_t$ となる．これは t に滑らかに依存している）.
次に，ω_t が非退化という仮定から，上の μ_t に対して

$$\iota_{v_t}\omega_t + \mu_t = 0 \quad \textbf{Moser の方程式}$$

となるベクトル場 v_t を取れる．このベクトル場からイソトピーをつくる（M コンパクトなので存在）．それを ρ_t とすると，

$$\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega_t = \rho_t^*(L_{v_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}) = \rho_t^*(d\iota_{v_t}\omega_t + d\mu_t) = 0$$

となる．よって $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$ となる． □

$c \in H^2(M)$ として $S_c := \{$ シンプレクティック形式 ω で $[\omega] = c$ となるもの $\}$ と定義する．Moser の定理が述べているのは，コンパクト多様体上で S_c の同じ弧状連結成分のシンプレクティック形式はすべてシンプレクティック同相であることである．

3.2.3　Moser の定理の相対バージョン・局所バージョン

Theorem 3.2.3. M を多様体として X をコンパクト部分多様体とする．ω_0, ω_1 を M 上のシンプレクティック形式とする．X 上のすべての点 $p \in X$ に対して $\omega_0|_p = \omega_1|_p$

であるなら，X の近傍 U_0, U_1 およびシンプレクティック同相 $\phi : (U_0, \omega_0) \to (U_1, \omega_1)$ で X 上の点を動かさないものが存在.

Remark 3.2.1. 注意：すべての点 $p \in X$ に対して $\omega_0|_p = \omega_1|_p$ は，$\omega_0|_X = \omega_1|_X$（$i^*\omega_0 = i^*\omega_1$）とは違います．前者は，$T_pM$ において，$\omega_0|_p = \omega_1|_p$ という意味です.

Proof.

- まず X の管状近傍 U_0 をとる．2-from $\omega_0 - \omega_1$ は U_0 上閉形式かつ（仮定から）X 上ゼロである．よって，管状近傍でのホモトピー公式から U_0 上の 1-from μ で X の各点で zero（in $\Lambda_p T^*M$）となるものを取れる.

- 次に，U_0 上の閉 2-form の族 $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1 = \omega_0 + td\mu$ を考える．このとき必要であれば，U_0 を縮めて ω_t がシンプレクティック形式であるようにできる．実際，$\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$ であり，仮定より，すべての $p \in X$ で，$\omega_0|_p = \omega_1|_p$ であるので，$\omega_t|_p = (\omega_0)|_p$ となり，$\omega_t|_p$ は $\Lambda_p^2 T^*M$ 上で非退化となる．M 上で ω_t が非退化な点全体は開集合であり（非退化性は open condition），部分多様体は閉集合である．よって，X の十分ちいさな近傍上でも非退化である．そこで，ちょっと縮めて管状近傍 U_0' 上で ω_t が非退化とできる

  Remark 3.2.2. 以前のノートでは，ここは間違ってました．以前は，μ が X 上でゼロであるから，$\omega_t = \omega_0 + td\mu$ の式は非退化と述べてました．$x \in X$ の各点で $\mu_x = 0$ だとしても，各点で $d\mu_x = 0$ は成立しません．この外微分は M の外微分です.

- Moser の方程式 $\iota_{v_t}\omega_t = -\mu$ を v_t についてとく（U_0 上で）．ここで $\mu_p = 0$（in T_xM，$\forall p \in X$）であるので，v_t は X 上でゼロである.

- v_t を積分する．必要なら U_0 を縮めることにより，積分することができ，isotopy $U_0 \times [0,1] \to M$ で $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$ となるものを得る．また $v_t|_X = 0$ であるので，$\rho_t|_X = \mathrm{id}_X$ である．そこで $\phi = \rho_1$ として，$U_1 = \rho_1(U_0)$ とすればよい.

□

3.3 Darboux-Moser-Weinstein の理論

3.3.1 古典的ダルブーの定理

Theorem 3.3.1. (M, ω) をシンプレクティック多様体．$p \in M$ を任意の点．このとき p の近傍 U と局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ で，シンプレクティック形式 ω が $\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$ となるものが存在.

Proof. 前定理で X が一点の場合を考える．$X = p$ に対して，管状近傍として局所座標内にあるものをとる．ω_p を線形変換（局所座標において．T_pM 上ではあるシンプレクティック変換）により標準的な形にする．そこで $\omega' = \sum dx_i \wedge dy_i$ という局所座標でのシンプレクティック形式を考える．これは $\omega_p = \omega'_p$ をみたす．そこで先ほどと同様にして，ホモトピー ρ_t を作れる．そして $\rho_1^*\omega' = \omega$ となる．ρ_1 は微分同相なので，ある局所座標である．さらに $\phi(p) = p$ であるので p のまわりの局所座標である． □

この定理の重要なことは，もし $(\mathbb{R}^{2n}, \sum dx_i \wedge dy_i)$ に対してシンプレクティック同相で不変な**局所的な**性質は，それは任意のシンプレクティック多様体上で**局所的に**成立することである．**つまりシンプレクティック多様体は局所的には** $(\mathbb{R}^{2n}, \sum dx_i \wedge dy_i)$ **なのである．**

次に Moser の定理を X が ω_0, ω_1 に対するラグランジアン部分多様体の場合に対して考えよう．

3.3.2　ラグランジアン部分空間．復習

U, W を n 次元ベクトル空間として $\Omega : U \times W \to \mathbb{R}$ を 2 次形式とする．このとき $\tilde{\Omega} : U \to W^*$ という線形写像を $\tilde{\Omega}(u) = \Omega(u, \cdot)$ と定義できる．さらに Ω が第一成分について非退化であることと $\tilde{\Omega}$ が全単射であることは同値．

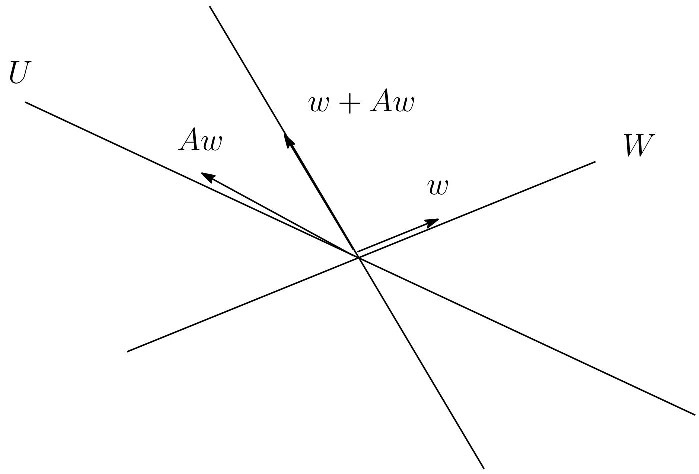
Proposition 3.3.2. V を $2n$ 次元ベクトル空間で Ω をシンプレクティック形式とする．U を (V, Ω) に対するラグランジアン部分空間（つまり $\Omega|_{U\times U} = 0$ かつ U は n 次元）．W を U の補空間（つまり $U \oplus W = V$ となるもの）．このとき，W からラグランジアン部分空間で $W' \oplus U = V$ となるものを標準的に作れる．

Proof. Ω から $\Omega : U \times W \to \mathbb{R}$ は第一成分について非退化である（$\Omega(u, w) = 0$ がすべての $w \in W$ について成立すれば，$\Omega(u, v) = 0$ が $v \in V$ について成立する．よって $u = 0$ である．実は，第二成分に関してもいえる．実際 $\Omega(u, w) = 0$ がすべての $u \in U$ に対して成立すれば $w \in U^\Omega = U$ である．$w \in U \cap W = \{0\}$ となる）．よって $\tilde{\Omega} : U \to W^*$ は全単射である．求めるラグランジアン部分空間として，

$$W' = \{w + Aw | w \in W\}, \quad A : W \to U \text{ linear}$$

となるものを作る．

W' は $A : W \to U$ のグラフである．



W' がラグランジアンになるためにには，

$$\begin{aligned}\Omega(w_1 + Aw_1, w_2 + Aw_2) = 0 \Rightarrow & \Omega(w_1, w_2) + \Omega(w_1, Aw_2) + \Omega(Aw_1, w_2) + \Omega(Aw_1, Aw_2) \\ = & \Omega(w_1, w_2) + \Omega(w_1, Aw_2) + \Omega(Aw_1, w_2) = 0 \\ \Rightarrow & \Omega(w_1, w_2) = \Omega(Aw_2, w_1) - \Omega(Aw_1, w_2) \\ & = \tilde{\Omega}(Aw_2)(w_1) - \tilde{\Omega}(Aw_1)(w_2)\end{aligned}$$

となる．そこで $A' = \tilde{\Omega} \circ A : W \to W^*$ として，

$$\Omega(w_1, w_2) = A'(w_2)(w_1) - A'(w_1)(w_2)$$

となる A' を探せばよい．しかし，これは $A'(w) = -\frac{1}{2}\Omega(w, \cdot)$ とすればよい．　□

Proposition 3.3.3. V を $2n$ 次元ベクトル空間として Ω_0, Ω_1 をシンプレクティック形式とする．また U を Ω_0, Ω_1 に対するラグランジアン部分空間とする．さらに W を U のある補空間とする．このとき W から標準的にある線形同型 $L : V \to V$ で $L|_U = \mathrm{id}$ かつ $L^*\Omega_1 = \Omega_0$ となるものを作れる．

Proof. 先ほどの命題から W から W_0, W_1 というラグランジアン部分空間で U の補空間となるものが作れる．そして，W_0, W_1 がラグランジアンなので，$\tilde{\Omega}_0 : W_0 \to U^*$, $\tilde{\Omega}_1 : W_1 \to U^*$ は同型である．そこで図式

$$\begin{array}{ccc} W_0 & \xrightarrow{\tilde{\Omega}_0} & U^* \\ {\scriptstyle B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ W_1 & \xrightarrow{\tilde{\Omega}_1} & U^* \end{array}$$

により $B: W_0 \to W_1$ という同型写像で，$\tilde{\Omega}_1 \circ B = \tilde{\Omega}_0$ つまり $\Omega_0(w_0, u) = \Omega_1(Bw_0, u)$（for any $w_0 \in W_0$, $u \in U$）となるものを得る．そこで

$$L := \mathrm{id}_U \oplus B : U \oplus W_0 \to U \oplus W_1$$

を考えると，これは同型写像で，$L|_U = \mathrm{id}$ である．さらに，

$$\begin{aligned}
(L^*\Omega_1)(u + w_0, u' + w_0') &= \Omega_1(u + Bw_0, u' + Bw_0') \\
&= \Omega_1(u, Bw_0') + \Omega_1(Bw_0, u') + \Omega_1(Bw_0, Bw_0') \\
&= \Omega_1(u, Bw_0') + \Omega_1(Bw_0, u') \\
&= \Omega_0(u, w_0') + \Omega_0(w_0, u') \\
&= \Omega_0(u + w_0, u' + w_0').
\end{aligned}$$

となる．つまり $L^*\Omega_1 = \Omega_0$ である．

□

3.3.3　ワインシュタインのラグランジアン近傍定理

Theorem 3.3.4 (ラグランジアン近傍定理). M を $2n$ 次元の多様体とし，X は n 次元のコンパクト部分多様体とする．ω_0, ω_1 をシンプレクティック形式として X 上に制限したとき *zero* とする．**つまり X は $(M, \omega_0), (M, \omega_1)$ に対するラグランジアン部分多様体．このとき X の近傍 U_0, U_1 と微分同相 $\phi: U_0 \to U_1$ で $\phi(x) = x$（*for* $x \in X$）かつ $\phi^*\omega_0 = \omega_1$ となるものが存在する．**

Remark 3.3.1. (2017/10/27 追記）X 上に制限したとき zero という言い方は，あいまいです．$i^*\omega_0 = 0 = i^*\omega_1$ ということです.（Moser の定理での各点 $x \in X$ が，$(\omega_0)_x = 0 = (\omega_1)_x$ とは異なります）．そのまま，Moser の定理相対版と同じよう証明しようとすると，$\omega_t = (1-t)\omega_0 + d\mu$ において，$(d\mu)_x = 0$（$\forall x \in X$）が成立するかわからないので，ω_t の非退化性が言えないかもしれないのです．そのため，いろいろと苦労をして，$i^*\omega_0 = 0 = i^*\omega_1$ から $L_p^*\omega_1|_p = \omega_0|_p$（$\forall p \in M$）を示し，Moser の定理相対版を利用できる状況にもっていっているのです.

これを証明するために次の定理を必要とする．

Theorem 3.3.5 (ホイットニー拡張定理). M を n 次元多様体で X を k 次元部分多様体で $k < n$ とする．各点 $p \in X$ に対して $L_p : T_pM \to T_pM$ という線形同型で $L_p|_{T_pX} = \mathrm{id}$ となり p に対して滑らかとする.（つまり $TM|_X = TX \oplus N_X$ の束同型写像で，N_X を動かすもの．N_X の束同型）．このとき X の近傍 N と埋め込み $h : N \to M$ で $h|_X = \mathrm{id}_X$ かつ $dh_p = L_p$（$\forall p \in X$）となるものが存在する．

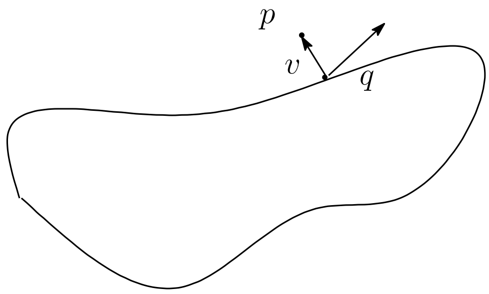
Proof. まず $M = \mathbb{R}^n$ で X が k 次元コンパクト部分多様体とする．このとき X の ϵ 近傍

$$U^\epsilon = \{p \in M | d(p, X) \le \epsilon\}$$

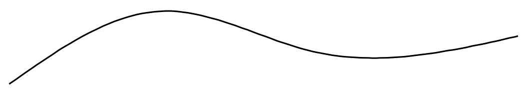
ϵ が十分小とすれば，$p \in U^\epsilon$ に対して X の点 q で最短となる点がただひとつ存在する．そこで $\pi : U^\epsilon \to X$ を $\pi(p) = q$ と定義．このとき $v \in N_q X$ で $p = q + v$ とかける．そこで

$$h : U^\epsilon \ni p \mapsto q + L_q v \in \mathbb{R}^n$$

とすれば $h|_X = \mathrm{id}$ で $dh_p = L_p$ となる．



X（この図では S^1 に微分同相）



X が非コンパクトのとき

次に X が $\mathbb{R}^n$ 内で非コンパクトの場合．上の ϵ を X 上の関数 $\epsilon : X \to \mathbb{R}^+$ で x が無限大にいくとき十分早くゼロになる関数として，置き換えればよい．(これは，今の場合には必要ないと思うが，次の M が一般の多様体には必要であろう）

次に一般の場合を考える．M にリーマン計量をいれて，上での距離をリーマン距離に置き換える．さらに $q + L_q v$ を $\exp(q, L_q v)(1)$ とすればよい．

□

Proof of Weinstein Lagrangian Neighborhood Theorem. M に計量 g を固定する．各点 $p \in X$ に対して $V = T_pM, U = T_pX, W = U^\perp$ とする（ここで $U^\perp$ は V の内積に関する直交補空間）．$i^*\omega_0 = i^*\omega_1 = 0$ であるので，U は $(V, \omega_0), (V, \omega_1)$ に対するラグランジアン部分空間であり，$U^\perp$ から標準的な方法で線形同型写像 $L_p : T_pM \to T_pM$ で $L_p|_{T_pX} = \mathrm{id}$, $L_p^*\omega_1|_p = \omega_0|_p$ となるものが存在．さらに標準的な方法で作っているので，これは p について滑らかとなる．

ホイットニー拡張定理から，X の近傍 N および埋め込み $h : N \to M$ で $h|_X = \mathrm{id}$ かつ $dh_p = L_p$（$\forall p \in X$）とできる．よって勝手な点 $p \in X$ に対して，

$$(h^*\omega_1)_p = (dh_p)^*\omega_1|_p = L_p^*\omega_1|_p = \omega_0|_p$$

となる．そこで Moser の定理 $(N, X, \omega_1, h^*\omega_1)$ に対して適用できる．よって X の近傍 U_0 で埋め込み $f : U_0 \to N \subset M$ で $f|_X = \mathrm{id}$ かつ $f^*h^*\omega_1 = \omega_0$（on U_0）となるものがつくれる．よって $\phi = h \circ f$ とすればよい． □

定理の一般化として，次の定理を後（Duistermaat-heckman の章）で用いる.（証明は省略．例えば [Guillemin-Sternberg(symp)] を見よ．isotropic embedding theorem というのもある）．

Theorem 3.3.6 (coisotropic embedding theorem). M を $2n$ 次元多様体で X を $k \geq n$ 次元の部分多様体とする．部分多様体としての埋め込みを $i : X \to M$ とする．また ω_0, ω_1 を M 上のシンプレクティック形式で $i^*\omega_1 = i^*\omega_0$（*on* X）で X はそれらに対して ***coisotropic*** とする．このとき X の近傍 U_0, U_1 および微分同相 $\phi : U_0 \to U_1$ で $\phi^*\omega_1 = \omega_0$ かつ $\phi|_X = \mathrm{id}$ となるものが存在する．*(coistoropic* とは $(T_pX)^\omega \subset T_pX$ となるものであった）．

3.3.4　Homework

向きつき 2 次元多様体で面積要素をもつものはシンプレクティック多様体である．

EXERCISE 3.3.1. 同じ向きをもつ面積要素 ω_0, ω_1 の convex combination はシンプレクティックである．

Proof. $(1-t)\omega_0 + t\omega_1$ を考える．閉 2 次形式であることはよい．これが非退化であることを証明すればよい．これは各点で調べればよい．ある点の Darboux の定理から ω_0 は標準形としてよい．よって

$$(1-t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1-t+tb \\ -1+t-tb & 0 \end{pmatrix}$$

となる．この行列式を考えると

$$(1+t(b-1))^2 = (b-1)^2(t+\frac{1}{b-1})^2$$

である．いま同じ向きとしているので $b > 0$ としてよい

よって，$0 \leq t \leq 1$ においてこの行列式はゼロでない．つまり非退化である．□

上の事実は 4 次元ではいえない．実際 $\mathbb{R}^4$ 上で，同じ向きを与える二つのシンプレクティック形式で，その convex combination が退化するものが存在する．$\omega_0 = dx \wedge dy + dz \wedge dw$ を考える．また $\omega_1 = -dx \wedge dy - dz \wedge dw$ を考える．これれは同じ向き（$dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw$）を与える．一方で，$(1-t)\omega_0 + t\omega_1$ を考えると $t = 1/2$ でゼロとなる．しかし，convex combination でなければ，これはつなぐことがで

きる．たとえば $\omega_2 = dx \wedge dz + dw \wedge dy$ を経由すればよい．実際 ω_0 と ω_2 はシンプレクティック形式のまま結べる．

$$\begin{aligned}
&\{(1-t)(dx \wedge dy + dz \wedge dw) + t(dx \wedge dz + dw \wedge dy)\} \\
&\wedge \{(1-t)(dx \wedge dy + dz \wedge dw) + t(dx \wedge dz + dw \wedge dy)\} \\
&= ((1-t)^2 + t^2) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw \\
&= 2(t^2 - t + 1/2) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw \\
&= 2((t-1/2)^2 + 1/4) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw
\end{aligned}$$

となる．同様に ω_2 と ω_1 もシンプレクティック形式で結べる．よって ω_0 と ω_1 はシンプレクティック形式で結べる．

EXERCISE 3.3.2. コンパクト 2 次元多様体上の二つの面積要素 ω_0, ω_1 を考える．さらに，これらが同じドラームコホモロジー類に属するとする．

このとき微分同相の族 $\phi_t : M \to M$ で $\phi_1^* \omega_0 = \omega_1$, $\phi_0 = \mathrm{id}$ であり，$\phi_t^* \omega_0$ がすべての t に対してシンプレクティック形式となるものが存在する．つまり $(M, \omega_0), (M, \omega_1)$ は強イソトピックとなる．

特に，**コンパクト 2 次元多様体上では強イソトピックを除けば，M の各 non-zero 2-cohomology 類に対してただひとつのシンプレクティック形式となる代表元が存在する．**

Proof. 前 exercises から，ω_0, ω_1 を結ぶシンプレクティック形式 $\omega_t' := (1-t)\omega_1 + t\omega_0$ でむすぶことができる．よって Moser の定理（その 1 ）をつかってイソトピー ρ_t で $\rho_t^* \omega_t' = \omega_1$ となるものが存在する．$\omega_1' = \omega_0$ であるので，ρ_1^* は条件をみたす．$\rho_t^* \omega_0$ がシンプレクティックであることは, ρ_t が微分同相なのでコホモロジーの同型を与える．2 次元の面積要素になるので非退化である． □

3.4 Weinstein 管状近傍定理

3.4.1 線形代数の復習

(V, Ω) をシンプレクティック線形空間として U をラグランジアン部分空間とする．このとき標準的な非退化な双線形形式 $\Omega' : V/U \times U \to \mathbb{R}$ が存在する．

Proof. $\Omega'([v], u) = \Omega(v, u)$ と定めれば，これは U がラグランジアンなので well-defined である．$\Omega'([v], u) = 0$（$\forall u \in U$）とする．このとき $\Omega(v, u) = 0$ である．$v \in U^\Omega = U$ つまり $[v] = 0$ よって非退化．また $\Omega'([v], u) = 0$（$\forall v \in V$）なら，$\Omega(v, u) = 0$ となるので $u = 0$ となるので非退化． □

そこで $\tilde{\Omega}' : V/U \ni [v] \mapsto \Omega'([v], \cdot) \in U^*$ は同型写像である．特に，$V/U \cong U^*$ と自然な同型をえる．

(M, ω) とラグランジアン部分多様体 X があるとき．$N_xX = T_xM/T_xX$ と T_xX^* は上のシンプレクティック形式によって自然に同型である．

Theorem 3.4.1. シンプレクティック多様体内のラグランジアン部分多様体 X 上のベクトル束 NX と T^*X は標準的に同一視できる．

3.4.2　管状近傍

次の定理はすでに述べた．

Theorem 3.4.2 (管状近傍定理)**.** M を n 次元多様体，X を k 次元部分多様体とする．また NX を *normal* 束として $i : X \to NX$ をゼロ切断，$i : X \to M$ を埋め込みとする．このとき NX での X の近傍 U_0 と M での X の近傍 U および微分同相 $\psi : U_0 \to U$ で $\psi \circ i_0 = i : X \to U$ となるものが存在する．

（注意，NX が自明束なら $X \times D^{n-k}$ と思える．しかし，一般には NX は自明束でないので．管状近傍といっても $X \times D^{n-k}$ として M に入ってるわけではない．このようになるなら，global な frame がとれるので自明束である．例えば，2 回ひねったメビウスの帯と $S^1 \times [0, 1]$ は，それ自身は同相であるが，埋め込みのされ方は異なる）

Theorem 3.4.3 (ラグランジアン近傍定理)**.** (M, ω) をシンプレクティック多様体．X をコンパクトラグランジアン部分多様体．ω_0 を T^*X 上の標準的なシンプレクティック形式．またゼロ切断 $i_0 : X \to T^*X$ は ω_0 に対するラグランジアン部分多様体になるのであった．

このとき，X の T^*X 内での近傍 U_0 と M 内での近傍 U および微分同相 $\phi : U_0 \to U$ で $\phi^*\omega = \omega_0$ かつ $\phi \circ i_0 = i : X \to U$ となるものが存在する．

Proof. まず $NX = T^*X$ と標準的に同一視できる．そこで T^*X での X の近傍 N_0 と M 内での X の近傍 N，さらに微分同相 $\psi : N_0 \to N$ で $\psi \circ i_0 = i$ となるものが存在．また $N_0 \subset T^*X$ 上のシンプレクティック形式として標準的な ω_0 と (N, ω) 上のを引き戻した $\omega_1 = \psi^*\omega$ を得る．

Weinstein のラグランジアン近傍定理から N_0 内での X の近傍 U_0, U_1 と微分同相 $\theta : U_0 \to U_1$ で $\theta \circ i_0 = i_0 : X \to U_1$ で $\theta^*\omega_1 = \omega_0$ となるものが存在する．そこで $\phi = \psi \circ \theta : U_0 \to U := \phi(U_0) = \psi(U_1)$ とすれば，$\phi^*\omega = \theta^*\psi^*\omega = \theta^*\omega_1 = \omega_0$ となり，条件をみたす．□

この定理はラグランジアン埋め込みを分類する．つまりシンプレクティック同相を除いてラグランジアン埋め込みの集合はそれの余接束のゼロ切断への埋め込みの集合と同一視される.（もちろんラグランジアン埋め込みの近傍の様子についてである．大域的なものではない）

isotropic 埋め込みとは多様体 X のシンプレクティック多様体 (M,ω) の埋め込みで $i^*\omega = 0$ となるものである（つまり X はラグランジアンとは限らない isotropic 部分多様体）．この isotropic 埋め込みの近傍の同値類は，シンプレクティックベクトル束の同型類と一対一対応する．(by Weinstein）

coisotropic 埋め込みの分類は Gotay による．シンプレクティック多様体 (M,ω) の中への定ランクをもつ閉 2-form α をもった X の coisotropic 埋め込みとは，埋め込み $i: X \to M$ で $i^*\omega = \alpha$ で $i(X)$ が coisotropic となるもの．E を X 上の α の特性分布とは $E_p = \ker \alpha_p$ のこと（定ランクなのでベクトル束となる）．Gotay が示したのは，E^* はゼロ切断の近傍にシンプレクティック構造をもち，X がゼロ切断として coisotropic 埋め込みできることである．さらに，すべての coisotropic 埋め込みの近傍の同値類はこのゼロ切断の近傍と同一視される．

3.4.3 応用 1：シンプレクティック同相群の接空間

(M,ω) をシンプレクティック多様体とする．このシンプレクティック同相群を

$$Symp(M,\omega) = \{f : M \overset{\cong}{\to} M | f^*\omega = \omega\}$$

として定義する．このとき id での接空間はどうなるかを考える．つまりシンプレクティック同相群のリー環である（シンプレクティックベクトル場のリー環である）．また id の近傍がどうなるか．

まず C^1 位相の概念を復習する．X, Y を多様体とする．

Definition 3.4.1. 連続写像の列 $f_i : X \to Y$ が C^0 位相で $f : X \to Y$ へ収束するとは，f_i が任意のコンパクト集合上で f に一様収束することである．

（ノルムは Y を $\mathbb{R}^N$ などにいれて考えることにする．または距離をいれて距離空間とみなす）．

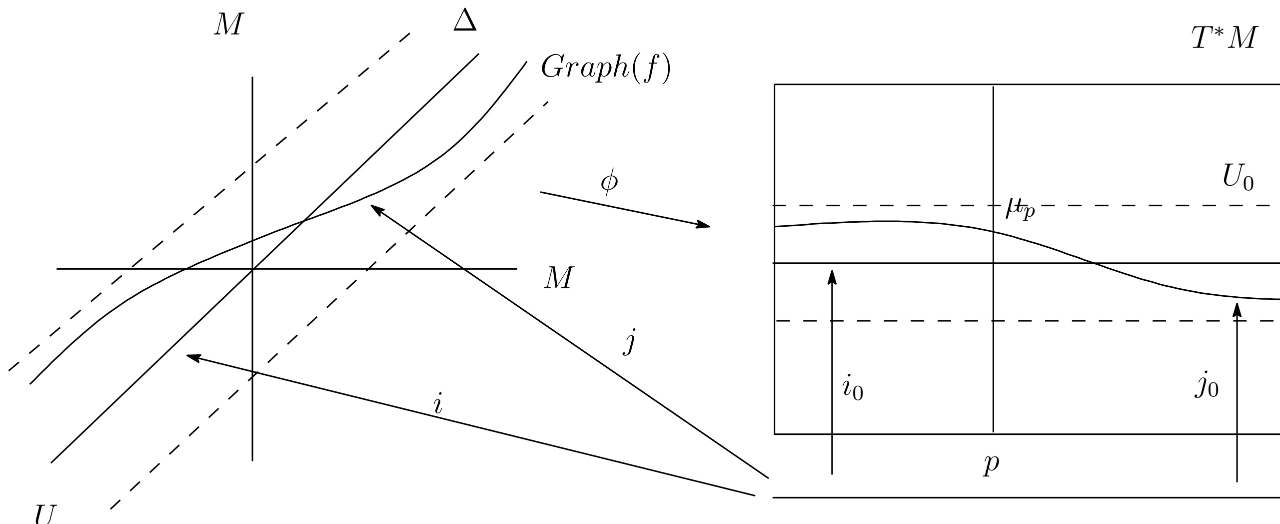
Definition 3.4.2. C^1 級写像の列 $f_i : X \to Y$ が f に C^1 収束するとは，f_i および $df_i ; TX \to TY$ がコンパクト集合上で一様収束することである．

(M,ω) がコンパクトシンプレクティック多様体とし $f \in Symp(M,\omega)$ とする．このとき f のグラフおよび id のグラフ（つまり **diagonal** 成分 Δ）は $(M \times M, pr_1^*\omega - pr_2^*\omega)$ のラグランジアン部分多様体である（Theorem 2.1.3）．

ワインシュタインの管状近傍定理から，Δ の $M \times M$ の近傍 U と M の (T^*M, ω_0) の近傍 U_0 があり，それれはシンプレクティック同相となる．そのシンプレクティック同相を $\phi : U \to U_0$ とする．

f を十分 id に C^1 位相で近いとする．つまり f は id の C^1 位相でのある十分小さな近傍内にあるとする．そこで次のように仮定してよい．

- f のグラフは U 内にある．また $j : M \to U$ を f のグラフ．$i : M \to U$ を id のグラフとする．
- 写像 j は写像 i に C^1 位相で十分近い．
- ワインシュタインの定理から $U \cong U_0 \subset T^*M$ で，上の j, i は $j_0 := \phi \circ j : M \to U_0$ という埋め込みと $i_0 : M \to U_0$（zero 切断) という写像を導く．
- j_0 は i_0 に C^1 位相で十分近い．よって，$j_0(M)$ は T_p^*M と一点 μ_p で交わり p に対して滑らか．
- j_0 の像は, $\mu : M \to T^*M$ という滑らかな切断となる．つまり 1-form である．よって $Graph(f) \cong \{(p, \mu_p) | p \in M, \mu_p \in T_p^*M\}$ である．



逆に，μ という 1-form で C^1 位相に関してゼロ切断に十分近いなら，それから $f : M \to M$ という微分同相を得ることができる．

さて，$Graph(f)$ がラグランジアンであることと μ が閉形式であることは同値であった．以上から

Proposition 3.4.4. コンパクトシンプレクティック多様体 (M, ω) を考える．このとき $Symp(M, \omega)$ **に id の十分小さい** C^1 **近傍は，**M **上の閉** 1-***form*** **からなる，ゼ**

ロ切断の C^1 **近傍に同相である．よって**

$$T_{\mathrm{id}}(Symp(M,\omega)) \cong \{\mu_1 \in \Omega^1(M) | d\mu = 0\}$$

特に，$T_{\mathrm{id}}(Symp(M,\omega))$ **は，次の完全** 1-***from*** **の空間を含む：**

$$\{\mu = dh | h \in C^\infty(M)\} \cong C^\infty(M)/locally\ constant\ functions$$

これはリー環としも同型になる．つまり $u = df, v = dg$ としたとき $X_{f,g} = [X_f, X_g]$ となる（完全 1-*form* の空間にはポアソン括弧からくるリー環の構造をいれている）．

また，この命題からシンプレクティック同相の群は局所弧状連結であることがわかる．特に，**単位元連結成分** $Symp_0(M,\omega)$ **は弧状連結**であり，任意の $\psi \in Symp_0(M,\omega)$ に対して，$\psi_t \in Symp_0(M,\omega)$ で $\psi_1 = \psi$, $\psi_0 = \mathrm{id}$ となる滑らか族が存在する（このようなイソトピーを**シンプレクティックイソトピー**とよぶ）．そこで，このシンプレクティックイソトピーに対する時間依存ベクトル場を X_t としよう．これはシンプレクティックベクトル場であり，$L_{X_t}\omega = 0$ を満たす．よって $d\iota_{X_t}\omega = 0$ である．これが exact であると仮定しよう．つまり，ある時間依存ハミルトニアン $H_t : M \to \mathbb{R}$ が存在して，

$$d\iota_{X_t}\omega = dH_t$$

とする．この場合には，X_t が生成する flow をハミルトニアンイソトピーというのであった．

Definition 3.4.3. シンプレクティック同相 ϕ が**ハミルトニアン-シンプレクティック同相**とは，ハミルトニアンイソトピー ϕ_t が存在して $\phi_1 = \phi$ となること．

ハミルトニアン-シンプレクティック同相の全体を $Ham(M,\omega)$ とすれば，

$$Ham(M,\omega) \subset Symp_0(M,\omega)$$

となるが，これは正規部分群であり弧状連結である．

Proof. ψ_t（resp ϕ_t）を H_t（resp G_t）から生成されるハミルトニアンイソトピーとする．定義から，

$$\frac{d}{dt}\psi_t(p) = X_t(\psi_t(p)), \quad \frac{d}{dt}\phi_t(q) = Y_t(\phi_t(q)),$$

であり，

$$\iota(X_t(\psi_t(q)))\omega = (dH_t)_{\psi_t(q)}, \quad \iota(Y_t(q))\omega = (dG_t)_q$$

となる．$p=\phi_t(q)$ とすれば，

$$\frac{d}{dt}\psi_t(\phi_t(q)) = X_t(\psi_t(\phi_t(q))) + (\psi_t)_*(Y_t(\phi_t(q)))$$

となる．また，ψ_t がシンプレクティック同相なので，

$$((\psi_t^{-1})^*\iota(Y_t)\omega)(v) = \omega(Y_t, (\psi_t^{-1})_*v) = \omega((\psi_t)_*Y_t, v) = (\iota((\psi_t)_*Y_t)\omega)(v)$$

となる．つまり，

$$\iota((\psi_t)_*Y_t)\omega = (\psi_t^{-1})^*(\iota(Y_t)\omega) = (\psi_t^{-1})^*dG_t = d(G_t \circ \psi_t^{-1})$$

以上から，$\psi_t \circ \phi_t$ に対する，時間依存ハミルトニアンとして，$H_t + G_t \circ \psi_t^{-1}$ を考えれば，ハミルトニアンイソトピーとなる．また ψ_t^{-1} に対する時間依存ハミルトニアンとしては $-H_t \circ \psi_t^{-1}$ を選べばよい．よって，$Ham(M)$ は部分群になる．また H_t と $\phi \in Symp(M,\omega)$ に対して，$H_t\phi$ は，$\phi \circ \psi_t \circ \phi^{-1}$ を生成する．よって，正規部分群である．弧状連結であることは定義から従う．□

実は，$H^1(M,\mathbb{R})$ の可算な部分群 Γ が存在して，

$$0 \to Ham(M,\omega) \to Symp_0(M,\omega) \to H^1(M,\mathbb{R})/\Gamma \to 0 \tag{3.4.1}$$

が完全系列になることがしられている（flux 準同形などを使う．詳細は [Macduff-Salamon] をみよ）．特に $H^1(M,\mathbb{R}) = 0$ なら $Ham(M,\omega) = Symp_0(M,\omega)$ が成立する．

また，$Ham(M,\omega)$ の任意の path がハミルトニアンイソトピーであることは定義からわからないので，$Ham(M,\omega)$ の接空間がハミルトニアンベクトル場全体と一致するかは，すぐにはわからない．しかし，$\psi_t \in Ham(M,\omega)$ を $Ham(M,\omega)$ 内の任意の path とすると，実はハミルトンベクトル場から生成されることが知られているので，$T_{\mathrm{id}}Ham(M,\omega)$ はハミルトニアンベクトル場全体の空間と一致することがわかる（詳細は [Macduff-Salamon]）．

さて，ハミルトニアンイソトピー ϕ_t を考える．それを生成するハミルトニアンを H_t とする．また $\beta : [0,1] \to [0,1]$ を滑らかな関数で $\beta' \geq 0$ とする．このとき $\phi_{\beta(t)}$ を考える（つまり時間のパラメータの取替え）．これは，ハミルトニアン $\beta'(t)H_t$ が生成するハミルトニアンイソトピーである．

Proof. $\beta' \geq 0$ なので，$\beta(0) = 0$ であり，$\phi_{\beta(0)} = \mathrm{id}$ である．H_t からのハミルトニアンベクトル場を X_t としておく．$d(\beta'(t)H_t) = \beta'(t)dH_t = \beta'(t)\iota(X_t)\omega = \iota(\beta'(t)X_t)\omega$ となる．そこで，

$$\frac{d}{dt}\phi_{\beta(t)} = \beta'(t)\frac{d}{ds}\phi_s = \beta'(t)X_t \circ \phi_{\beta(t)}$$

であるので．□

さて $G_t = \beta'(t)H_t$ として，0, 1 の近傍で $\beta'(t) = 0$ となるようにすれば,. $G_0 = G_1 = 0$ となるようにできる．そして，これを周期的になるように繋げれば，$G_t = G_{t+1}$ を満たす関数 $G : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を作れる．以上から，パラメータを取り替えれば，ϕ_t は周期的ハミルトニアンから生成されるものとみなせる．

3.4.4 応用２：シンプレクティック同相の固定点

Theorem 3.4.5. (M, ω) をコンパクトシンプレクティック多様体で $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$ とする．id に C^1 位相で近い M のシンプレクティック同相は二つ以上の固定点をもつ．

Proof. $\phi \in Symp(M, \omega)$ を C^1 位相で十分 id に近いとする．このとき $Graph(\phi)$ は M 上の closed 1-form μ と同一視できる．仮定から $\mu = dh$ となる関数 h が存在する．M はコンパクトなので h は 2 個以上の臨界点（最大，最小点）をもつ．

$$\begin{aligned}
&\phi \text{ の固定点}\\
=&Graph(\phi) \cap \Delta\\
=&\{p | \mu_p = dh_p = 0\}\\
=&h \text{ の臨界点} \geq 2
\end{aligned}$$

となる． □

ラグランジアン交差の問題 : Y を M の部分多様体で X に C^1 位相で近いとする．つまり微分同相 $X \to Y$ があり，M 内への写像として $X \to M$ に C^1 位相で十分近い．

Theorem 3.4.6. (M, ω) をシンプレクティック多様体とする．X をコンパクトラグランジアン部分多様体で $H^1(X, \mathbb{R}) = 0$ とする．このとき X に C^1 位相で近いラグランジアン部分多様体は交点を２個以上もつ．

Proof. ワインシュタイン管状近傍定理から X の M 内の近傍は T^*X のゼロ切断の近傍とシンプレクティック多様体として同一視できる．あとは，さきほどと同じ議論をすればよい． □

Arnold 予想 : (M, ω) をコンパクトシンプレクティック多様体とし, $\phi : M \to M$ をシンプレクティック同相写像で id に exactly homotopic とする（説明はあとで）．このとき

$$\#\{\phi \text{ の固定点}\} \geq M \text{ 上の滑らかな関数の臨界点の数の最小}$$

（右辺は，$\min_{f \in C^\infty(M)} \#\{f$ の臨界点$\}$ のこと）．さらに ϕ の固定点がすべて非退化の場合には，

$$\#\{\phi \text{ の非退化な固定点}\} \geq M \text{ のモース関数の臨界点の個数の最小} \geq \sum \dim H^i(M)$$

（最後の不等式は古典的モース理論から）．ここで ϕ の固定点 p が非退化とは $d\phi_p : T_pM \to T_pM$ が固有値 1 を持たないことである（非退化不動点は孤立点であった．特に M コンパクトなら有限個である）．

定義などについて説明する．$h_t : M \to \mathbb{R}$ を 1 周期（$h_t = h_{t+1}$）の滑らかな関数の族（つまり周期的時間依存ハミルトン関数）とする．$\omega(v_t, \cdot) = dh_t$ により h_t からベクトル場 $v_t = v_{t+1}$ をつくる（つまり時間依存のハミルトンベクトル場で，周期的なもの）．このベクトル場 v_t から生成されるハミルトニアンイソトピーを $\rho : M \times \mathbb{R} \to M$ をする．ϕ が id に exactly homotopic とはこのような時間依存の 1 周期ハミルトン関数 h_t が存在して $\rho_1 = \phi$ となることである．**このときシンプレクティック同相 ϕ の固定点と $\rho : M \times \mathbb{R} \to M$ の周期 1 の軌道は一対一対応する．**（example 2.3.1 を参照）ならぜなら $\phi(p) = p$ であるための必要十分条件は $\{\rho(t, p), t \in [0, 1]\}$ が閉軌道であることだから（$\phi(p) = \rho_1(p) = p$ であるので）．また，前 subsection でみたように，**ハミルトニアンシンプレクティック同相写像は，exactly homotopic** である．よって，ハミルトニアンシンプレクティック同相写像 ϕ に対して，ある周期的ハミルトニアン h_t が存在し，ϕ の固定点と h_t の周期解は一対一対応する．

Remark 3.4.1. ϕ が exactly homotopic で h_t が時間に依存しない場合は Arnold 予想は簡単に証明できる．

Proof.

$$\begin{aligned} & p \text{ が } h \text{ の臨界点} \\ \Longleftrightarrow\ & dh_p = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & v_p = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \rho(t, p) = p \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Longleftrightarrow\ & p \text{ は } \rho_1 \text{ の固定点} \end{aligned}$$

よって $\rho_1 = \phi$ の固定点は M 上の関数 h の臨界点の個数と一致するので，Arnold 予想が成立することになる．□

よって，時間に依存している場合が問題となる．

Arnold 予想の研究はシンプレクティックフレアーホモロジーを用いることにより，発達し，かなりの部分が解決している（詳しくは，深谷賢治の本 [深谷] をみ

よ．周期ハミルトン系の周期解を考えると，周期解がループ空間 $\Omega(M)$（無限次元）上のある汎関数の臨界点となる．そこで，無限次元のモース理論を展開するのである）.

L がラグランジアン部分多様体なら，ハミルトニアンイソトピー（周期的とは限らない，一般の時間依存ハミルトニアン）で動かした $\phi_t(L)$ はラグランジアンである．$\#L \cap \phi_1(L)$ が $\sum_i \mathrm{rank} H_i(L, \mathbb{Z})$ で下から抑えられるという予想が Arnold-Givental 予想であり，これにはラグランジアンフレアーホモロジーを用いる．それは L と $\phi_1(L)$ を境界にもつ道の空間（無限次元空間）上のある汎関数に対する無限次元モース理論である．

第4章　接触多様体

接触多様体は奇数次元のシンプレクティック多様体と思えるもので，実際シンプレクティック幾何と密接な関係であるだけだなく，それ自身非常に重要な話題である．この章では接触多様体に関する基礎事項について学ぶ.

4.1　接触形式

4.1.1　接触構造

Definition 4.1.1. M 上の**接触要素**とは M 上の点 p とそこでの余次元 1 の接超平面 $H_p \subset T_pM$ の組のことである．

$H_p \subset T_pM$ はある covector $\alpha_p \in T_p^* \setminus \{0\}$ をスカラー倍を除いて定める．つまり (p, H_p) を接触要素とすると $H_p = \ker \alpha_p$ とする．ここで $\ker \alpha_p = \ker \alpha'_p$ となるための必要十分条件は $\alpha_p = \lambda \alpha'_p$（$\lambda \in \mathbb{R}^*$）.

さらに H が p に対して滑らかであるとする．**局所的には** $H = \ker \alpha$ **となる 1-form** α **が存在する**．もちろん α はただひとつではなく $\ker \alpha = \ker f\alpha$ となる（$f : M \to \mathbb{R}^*$）.

Definition 4.1.2. M 上の**接触構造**とは滑らかな超平面場 $H \subset TM$ であり，局所的に定義される 1-form α に対して，$d\alpha|_H$ が H **上で非退化（つまりシンプレクティック形式．**$d\alpha : H \times H \to \mathbb{R}$ が非退化）となること．このとき (M, H) を**接触多様体**とよび α を**局所接触形式**とよぶ.

$p \in M$ に対して，

$$T_pM = \ker \alpha_p \oplus \ker d\alpha_p = H_p \oplus \ker d\alpha_p$$

となる．

Proof. $\ker \alpha_p = \{v \in T_pM | \langle v, \alpha \rangle = 0\} = H_p$ であり，$\dim H_p = \dim M - 1$ であった．$\ker \alpha_p$ の補空間は 1 次元である．$(d\alpha)_p$ を考える．つまり $d\alpha_p : T_pM \ni v \to$

$(d\alpha)_p(v,\cdot) \in T_pM^*$ を考える．$v \in \ker d\alpha_p$ とは，$(d\alpha)_p(v,w)=0$（$\forall w \in T_pM$）である．$d\alpha|_H : H \to H^*$ は非退化であった．そこで $v \in H$ として $(d\alpha)_p(v,w)=0$（$\forall w \in T_pM$）なら H 上非退化なので $v=0$ である．よって $\ker d\alpha_p \cap H_p = \{0\}$ である．よって $\ker d\alpha_p = \{0\}$ はゼロ次元か一次元である．ゼロ次元であると仮定すると，$d\alpha$ は T_pM 上のシンプレクティック形式になり，T_pM は偶数次元である．しかし H 上でもシンプレクティック形式であったので，H も偶数次元である．よって H が余次元が 1 ということに反する．よって $\ker d\alpha_p$ は一次元であり，H と横断的である． □

上の分解は α のとり方に依存している．つまり $\ker\alpha = H$ は定まっているが $\ker d\alpha$ は α に依存する．

また $d\alpha_p|_{H_p}$ が非退化であることから $\dim H_p = 2n$ で $(d\alpha_p)^n|_{H_p} \neq 0$ は H_p 上の体積要素である．また $\alpha_p|_{\ker d\alpha_p}$ も非退化（$\alpha_p : \ker d\alpha_p \to \mathbb{R}$ がゼロでないということ）である．よって

- 接触多様体 (M,H) は奇数次元 $2n+1$ である．
- α を接触形式とすると，$\alpha \wedge (d\alpha)^n$ は M 上の体積要素である．

逆に H に対する 1-form α（$\ker\alpha = H$）が接触形式になるためには $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ は M 上の体積要素となること．

Proof. $(d\alpha)^n$ は H 上の体積要素であった．そこで $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ を考える

$$\Lambda^{2n+1}T_pM = \ker d\alpha_p \wedge \Lambda^{2n}H$$

である．そこで $(d\alpha_p)^n|_{H_p} \neq 0$ は H_p 上の体積要素で，$\alpha_p|_{\ker d\alpha_p}$ が $\ker d\alpha_p$ 上の体積要素であることから，$\alpha \wedge (d\alpha)^n$ は体積要素．

逆に，$\ker\alpha = H$ となる 1-from を考えて，$\alpha \wedge (d\alpha)^n$ が体積要素となるとする．H が余次元 1 なので，適当な 1 次元補空間を V とする．$H = \ker\alpha$ なので，α は V 上の体積要素．また $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ が体積要素となので，$(d\alpha)^n$ が H 上の体積要素である．よって $d\alpha|_H$ は H 上非退化であるので α は接触形式になる． □

よって

Proposition 4.1.1. *H を M の超平面場とする．このとき H が接触構造となるための必要十分条件は H を定める勝手な局所 1-form に対して $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ である．*

また，大域的な接触形式が存在するための必要十分条件は，**line bundle** TM/H が向き付け可能であること．H 上には体積要素が存在して向き付け可能なので，このときは M が向き付け可能になる．

Proof. まず実 line bundle が向き付け可能とは，それが自明束であることである．つまりゼロ点のない切断が存在する．大域的な接触形式 α が存在するなら，$\alpha|_{\ker d\alpha}$ は非退化であったので $TM/H \cong \ker d\alpha$ となり，α がゼロ点のない大域的切断を与え，向き付け可能となる．逆に，TM/H が向き付け可能とする，わかりやすくするため，TM に計量をいれておく．このとき α に対して $g(X_\alpha, Y) = \alpha(Y)$ とすればベクトル場 X_α がさだまり．X_α は H に直交するベクトル場である．つまり $H^\perp \cong TX/H$ の局所切断である．向き付け可能からこのベクトル場で nonzero なものがあるので，α を大域的にとることができる． □

Remark 4.1.1. 超平面場が積分可能であるための条件は H 上で $d\alpha = 0$ である．実際 $X, Y \in H$ に対して $\alpha(X) = \alpha(Y) = 0$ であるので

$$\begin{aligned}
&L_X\alpha = \iota(X)d\alpha + d(\alpha(X)) = \iota(X)d\alpha \\
&\Rightarrow 0 = L_X(\alpha(Y)) = (L_X\alpha)(Y) + \alpha([X,Y]) = d\alpha(X,Y) + \alpha([X,Y]) \\
&\Rightarrow (d\alpha)(X,Y) = \alpha([X,Y])
\end{aligned}$$

となり，積分可能なら $[X,Y]_p \in H_p$ であるので $d\alpha = 0$ と同値になる．さらにこれは $\alpha \wedge d\alpha = 0$ と同値である．

Proof. 一般に，V を有限次元ベクトル空間として $\eta \in \Lambda^p V$ とする．$\phi \in V$ をゼロでないベクトルで $\phi \wedge \eta = 0$ とすると，$\eta = \phi \wedge \zeta$ となる $\zeta \in \Lambda^{p-1}V$ が存在する（カルタンの補題）．このとこを証明すればよい．$\phi = e_1$ として基底を $e_1, \cdots, e_n$ として η を e_1 を含む部分と含まない部分にわける，つまり $\eta = e_1 \wedge \zeta + \beta$ とかける．このとき $e_1 \wedge \eta = 0 = e_1 \wedge \beta = 0$ である．$\beta = \sum_I \alpha_I e_I$ で e_I は $\Lambda^{p-1}V$ の基底であり，e_1 を含まない．よって $\sum_I \alpha_I e_1 \wedge e_I = 0$ は $\alpha_I = 0$ を導く．よって $\eta = e_1 \wedge \zeta$ である．

可積分であることを微分形式で書けば $d\alpha = \beta \wedge \alpha$ となる β が存在することと同値であり，これは今述べたことから $\alpha \wedge d\alpha = 0$ と同値． □

接触構造とは H 上で $d\alpha$ が非退化ということであったので，H は積分可能とはならない．

4.1.2　examples

EXAMPLE 4.1.1. $\mathbb{R}^3$ 上で座標を (x,y,z) として $\alpha = xdy + dz$ とする．このとき

$$\alpha \wedge d\alpha = (xdy + dz) \wedge (dx \wedge dy) = dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$$

よって α は接触形式である．対応する H は，点 (x,y,z) 上で

$$H_{(x,y,z)} = \{v = a\partial/\partial x + b\partial/\partial y + c\partial/\partial z | \alpha(v) = bx + c = 0\}$$

EXAMPLE 4.1.2.

Proposition 4.1.2 (Martinet). 勝手なコンパクト向き付け可能な３次元多様体は接触構造をもつ．

勝手な向き付けコンパクト可能多様体は S^3 の絡み目に沿った Dehn 手術により構成できること（Lickorish) を用いる, つまり S^3 上の標準的な接触構造から接触構造込みで Dehn 手術を行う．

Open problem : コンパクト向き付け可能３次元接触多様体の分類（接触トポロジーへ）．

EXAMPLE 4.1.3. $\mathbb{R}^{2n+1}$ の座標を $(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n, z)$ とする．このとき $\alpha = \sum x_i dy_i + dz$ は接触形式である．

T^*X 上の標準的 1-form を α とする．$T^*X \times \mathbb{R}$ 上で $\alpha + dz$ は接触形式である．

Proof.

$$(\alpha + dz) \wedge (d(\alpha + dz))^n = (\alpha + dz) \wedge (d\alpha)^n = dz \wedge (d\alpha)^n$$

となる，$d\alpha^n$ は T^*X 上で体積要素であった．よって上は $T^*X \times \mathbb{R}$ 上の体積要素である． □

EXAMPLE 4.1.4. X を多様体とし T^*X を余接束とする．このとき X に随伴した次の二つの標準的な接触多様体が得られる．

$$\mathbb{P}(T^*X) \quad S(T^*X).$$

いくつかの段階にわけて証明していく．

（Step 1）：まず n 次元多様体 X の接触要素の多様体を考える．

$$C := \{(x, \chi_x) | x \in X,\ \chi_x \text{ は } T_xX \text{ の超平面 }\}$$

これは $\mathbb{P}(T^*X)$ と自然にファイバー束として同型である．つまり $\phi : C \to \mathbb{P}(T^*X)$ という微分同相が存在して，次が可換

$$\begin{array}{ccc} C \ni (x, \chi_x) & \xrightarrow{\phi} & (x, [\xi_x]) \in \mathbb{P}(T^*X) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{=} & X \end{array}$$

ここで $\chi_x = \ker \xi_x$ である．実際，$\xi_x \sim \xi'_x$ は $\lambda \xi_x = \xi'_x$ で入れているので $\ker \xi = \ker \xi' = \chi_x$ となるので上の写像は well-defied である（ファイバー束として同型であることも明らか）．

（**Step 2**）:このとき C 上に，標準的な超平面場 H が存在する．点 $p=(x,\chi_x)\in C$ 上の超平面を

$$H_p=(d\pi_p)^{-1}\chi_x\subset T_pC$$

とすればよい．ここで $d\pi_p:T_pC\to T_xX$ である．先ほどの同型から $\mathbb{P}(T^*X)$ 上にも超平面場 $\mathbb{H}$ が存在する．これは次のように書ける．$\xi\in T^*X\setminus\{0-section\}$ を $(d\pi_{(x,\xi)})^*:T_x^*X\to T^*_{(x,\xi)}(T^*X\setminus\{0-section\})$ で送れば，1-form $\alpha_{(x,\xi)}:=(d\pi_{(x,\xi)})^*\xi$ を得る（つまりシンプレクティック多様体上の標準的 1-from であり，$\alpha=\sum\xi_i dx_i$ である）．この 1-from の kernel を考えると fiber 方向の接ベクトルはすべて kernel に入る，さらに水平方向を考えると ξ が定める超平面場

$$\chi_x=\ker\xi_x=\{\sum a_i\partial/\partial x_i|\sum a_i\xi_i=0\}\quad(\xi=\sum\xi_i dx_i)$$

は kernel にはいる．これより $T^*X\setminus\{0-section\}=T^*X\setminus X$ に 1-form が入る．さて，これから $\mathbb{P}(T^*X)$ 上の 1-form がスカラー倍を除いて定まることを見ていく．$\lambda\xi$ を考えても，fiber 方向はすべて kernel に入り，水平方向も同じ kernel をもつ．つまり $(x,[\xi])$ 上の $\mathbb{H}\subset T_{(x,[\xi]}\mathbb{P}(T^*X)$ を定める．特に，$T^*_{(x,[\xi])}\mathbb{P}(T^*X)$ 上ではスカラー倍を除いて 1-from が定まる．そして，その kernel は fiber 方向の接ベクトルと ξ が定める水平方向の超平面 χ_x であるので，これは C 上の $(d\pi_p)^{-1}\chi_x$ に一致する．

（**Step ３**）：$(\mathbb{P}(T^*X),\mathbb{H})$ が接触多様体よって (C,H) が接触多様体になることを確かめる．

$(x,[\xi])\in\mathbb{P}(T^*X)$ とする．$[\xi]$ に対して，

$$\mathbb{H}_{(x,[\xi])}:=\ker((d\pi_{(x,\xi)})^*\xi)$$

T^*X の局所座標をとって $(x_1,\cdots,x_n,\xi_1,\cdots,\xi_n)$ とする．$\mathbb{P}(T^*X)$ の局所座標は $(x_1,\cdots,x_n,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ である（一般性を失うことのなく ξ_1 がゼロでないときの局所座標とする）．このとき

$$\alpha=dx_1+\sum_{i\geq 2}\xi_i dx_i$$

となり $\mathbb{H}=\ker\alpha$ となることがすぐわかる．これが接触形式の局所座標表示である．そこで

$$d\alpha=\sum_{i\geq 2}d\xi_i\wedge dx_i,\quad \alpha\wedge(d\alpha)^n=n!dx_1\wedge d\xi_2\wedge dx_2\cdots d\xi_n\wedge dx_n$$

となるのでこれは非退化である．

Remark 4.1.2. この接触多様体のシンプレクティック化はシンプレクティック多様体 T^*M からゼロ切断を除いたものである（後述）．

（**Step ４**）：上と同様にして，X の向きつき接触要素全体の多様体

$$C^o := \{(x,\chi_x^o)|x \in X,\ \chi_x \text{ は } T_xX \text{ の向きつき超平面 }\}$$

向きを込めて超平面を考えてるので C の二重被覆になる．また，この場合には．$S(T^*X)$ と同型になる，ここで余接球面束を定義する同値関係は$\xi \sim \xi' \iff \xi = \lambda\xi$ for $\lambda \in \mathbb{R}^+$ である．この場合にもまったく同様にして接触構造をいれることができる．

以上から，多様体 X に付随した標準的接触多様体が作れた．

4.2 接触力学

4.2.1 First Properties

まず **Darboux** の定理の接触多様体版が成立．

Theorem 4.2.1. (M,H) を接触多様体とし，$p \in M$ とする．このとき p を中心とする局所座標 $(U,x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n,z)$ で U 上

$$\alpha = \sum x_i dy_i + dz$$

が H の局所接触形式となるものが存在する．

Proof. 後で述べるシンプレクティック化を用いる．M のシンプレクティック化を $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}^+ \to M$ とする（λ を $\mathbb{R}^+$ の座標である）．ここには標準 1-form $\tilde{\alpha} = \lambda\alpha$ があり，$\omega = d\tilde{\alpha} = d\lambda \wedge \alpha + \lambda d\alpha$ がシンプレクティック形式．このとき $M = M \times \{1\} \subset \tilde{M}$ とみなす．$\tilde{\alpha}|_M = \alpha$ である．

$\tilde{M}$ はシンプレクティック多様体であるので，点 $p \in M \subset \tilde{M}$ の近傍 U で $\{p_1 = 0\} \cap U$ が M の p の近傍となるようにして，Darboux の定理から

$$\omega = d\tilde{\alpha} = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_n \wedge dq_n, \quad p = (0,\cdots,0) \in \tilde{M}$$

となる局所座標が存在．そこで $p_1dq_1 + \cdots + p_ndq_n$ の外微分は $d\tilde{\alpha}$ であるので局所的には

$$\tilde{\alpha} = \lambda\alpha = p_1dq_1 + \cdots + p_ndq_n + df$$

となり，f は適当に定数をたしてもよいので局所座標の原点でゼロとなる関数としてよい．特に $\{p_1 = 0\} \cap U$ 上に制限して $x_i = p_i|_U, y_i = q_i|_U, z = f|_U$ とすれば，

$$\alpha = x_2dy_2 + \cdots + x_ndy_n + dz$$

となる．あとは $x_i = p_i|_U, y_i = q_i|_U, z = f|_U$ が座標になることを確かめる．$(p_2, q_2, \cdots, p_n, q_n, q_1)$ は座標であるので $\partial f/\partial q_1(p) \neq 0$ を示せばよい．$\partial f/\partial q_1(p) = 0$ とすると，$\alpha((\partial/\partial q_1)_p) = 0$ である．よって $v = (\partial/\partial y_1)_p \in H_p$ である．しかし，$d\alpha|_{H_p}$ は非退化であったので $i_v d\alpha \neq 0$ である．シンプレクティック形式に関して $(T_pM)^\perp \subset T_{(p,1)}\tilde{M}$ は v で生成されるので T_pM 上で $i_v d\alpha = i_v\omega = 0$ となり矛盾． □

Moser の定理の類似（see 定理 3.2.2）が成立する．

Theorem 4.2.2 (Gray)**.** M をコンパクト多様体．α_t（$t \in [0,1]$）を M 上の大域的な接触構造の滑らかな族とする．$H_t = \ker\alpha_t$ とする．このときイソトピー $\rho : M \times \mathbb{R} \to M$ で $H_t = \rho_{t*}H_0$ となるものが存在する．

Proof. まず次のことに注意しておく．$H_t = \rho_{t*}H_0$ は $\rho_t^*\alpha_t = u_t \cdot \alpha_0$ となるあるゼロ点のない滑らかな関数族 $u_t : M \to \mathbb{R}$ が存在することと同値．実際 $\ker\rho_t^*\alpha_t = \rho_{t*}^{-1}H_t = H_0 = \ker u_t\alpha_0$ なので．

さてイソトピー ρ_t で

$$\rho_0 = \mathrm{id}, \quad \frac{d}{dt}(\rho_t^*\alpha_t) = \frac{d}{dt}(u_t\alpha_0)$$

となるものを見つける．まず

$$\frac{d}{dt}(\rho_t^*\alpha_t) = \rho_t^*(L_{v_t}\alpha_t + \frac{d\alpha_t}{dt})$$

であった．ここで $v_t = \frac{d\rho_t}{dt} \circ \rho_t^{-1}$ である．モーザーの trick から v_t を見つけて積分すればよい．また我々はベクトル場 v_t を $H_t = \ker\alpha_t$ 内でみつけることにする（これは単に証明を簡単にするため）．

そこで $\rho_t^*\alpha_t = u_t \cdot \alpha_0$，$v_t \in H_t$ が成立するための必要条件を書く（すると v_t が満たすべき方程式を得る）．

$$\begin{aligned}
&\rho_t^*(L_{v_t}\alpha_t + \frac{d\alpha_t}{dt}) = \frac{du_t}{dt}\alpha_0 \\
\Longleftrightarrow\ &\rho_t^*(d\iota_{v_t}\alpha_t + \iota_{v_t}d\alpha_t + \frac{d\alpha_t}{dt}) = \frac{du_t}{dt}\frac{1}{u_t}\rho_t^*\alpha_t \\
\Longleftrightarrow\ &\rho_t^*(\iota_{v_t}d\alpha_t + \frac{d\alpha_t}{dt}) = \frac{du_t}{dt}\frac{1}{u_t}\rho_t^*\alpha_t \\
\Longleftrightarrow\ &\iota_{v_t}d\alpha_t + \frac{d\alpha_t}{dt} = (\rho_t^*)^{-1}(\frac{du_t}{dt}\frac{1}{u_t})\alpha_t
\end{aligned}$$

そこで，$H_t = \ker\alpha_t$ 上に制限すれば，最後の式は

$$\iota_{v_t}d\alpha_t|_{H_t} = -\frac{d\alpha_t}{dt}|_{H_t}$$

を導く．$d\alpha_t|_{H_t}$ は非退化なので，この方程式は各点で解くことができ，ベクトル場 $v_t \in H_t$ が定まる．そこでこの v_t に対して $\iota_{v_t} d\alpha_t + \frac{d\alpha_t}{dt}$ は H_t 上でゼロであるので T_xM 上で

$$\iota_{v_t} d\alpha_t + \frac{d\alpha_t}{dt} = f_t \cdot \alpha_t$$

となる関数 f_t が存在する．さらに，

$$(\rho_t^*)^{-1}(\frac{du_t}{dt}\frac{1}{u_t}) = f_t$$

という微分方程式（$M \times \mathbb{R}$ 上で初期条件 $u_0 = 1$）を解いて nonzero 関数 $u_t = \exp \int_0^t \rho_t^* f_t dt$ が定まる．

そこで今みつけた v_t 及び u_t に対して，先ほどの式を逆にたどっていけば，

$$\frac{d}{dt}(\rho_t^*\alpha_t) = \frac{du_t}{dt}\frac{1}{u_t}\rho_t^*\alpha_t$$

が成立する．また

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{u_t}\rho_t^*\alpha_t) = -\frac{u_t'}{u_t^2}\rho_t^*\alpha_t + \frac{1}{u_t}\frac{d}{dt}(\rho_t^*\alpha_t) = 0$$

となる．よって

$$\frac{1}{u_t}\rho_t^*\alpha_t = \frac{1}{u_0}\rho_0^*\alpha_0 = \alpha_0$$

となる．よって $\rho_t^*\alpha_t = u_t\alpha_0$ を得る． □

4.2.2 Reeb ベクトル場

Proposition 4.2.3. (M, H) を接触多様体で（大域的）接触形式を α とする．このとき

$$\iota_R d\alpha = 0 \quad \iota_R \alpha = 1$$

を満たすベクトル場 R がただひとつ存在する．これを α **からきまる *Reeb* ベクトル場**とよぶ.（これは α のとり方に依存）.

Proof. $\iota_R d\alpha = 0$ から $R \in \ker d\alpha$ である．さらに $\iota_R\alpha = 1$ により R を normalize すればただひとつに定まる．($T_pM = \ker\alpha_p \oplus \ker d\alpha_p = H_p \oplus \ker d\alpha_p$ に注意） □

定義から Reeb ベクトル場は H と横断的である．

Proposition 4.2.4. R **から定まる *flow* は接触形式** α を保存する．つまり $\rho_t = \exp tR$ とすれば，R からイソトピー（この場合は 1 パラメータ変換群）が定まり，$\rho_t^*\alpha = \alpha$ を満たす．

Proof.
$$\frac{d}{dt}(\rho_t^*\alpha) = \rho_t^*(L_R\alpha) = \rho_t^*(d\iota_R\alpha + \iota_R d\alpha) = 0$$
よって $\rho_t^*\alpha = \alpha$ となる． □

Definition 4.2.1. **接触同相**とは接触多様体 (M, H) の微分同相 ϕ で $\phi_* H = H$ となるもの（各近傍で $\phi^*\alpha = h\alpha$ $h > 0 \in C^\infty(M)$ でもよい）．つまり接触構造を保存する微分同相．**無限小版は接触ベクトル場**とよぶ（これはベクトル場のリー環の**部分リー環**になる．$L_X\alpha = \lambda\alpha$ となる $\lambda \in C^\infty$ が存在するようなベクトル場）．

部分リー環になることを確かめておこう．$L_X\alpha = \lambda\alpha$, $L_Y\alpha = \mu\alpha$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} L_{[X,Y]}\alpha &= L_XL_Y\alpha - L_YL_X\alpha = L_X(\mu\alpha) - L_Y(\lambda\alpha) = X\mu\alpha + \lambda\mu\alpha - Y(\lambda)\alpha - \mu\lambda\alpha \\ &= (X\mu - Y\lambda)\alpha \end{aligned}$$

EXAMPLE 4.2.1. Reeb ベクトル場は接触ベクトル場である．また $\exp R$ は接触同相を与える．

EXAMPLE 4.2.2. $\mathbb{R}^{2n+1}$ 上の $\alpha = \sum x_i dy_i + dz$ を考える．このとき Reeb ベクトル場は $R = \partial/\partial z$ である.（直接確かめればよい）．また R から定まる接触同相は

$$\rho_t(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n, z) = (x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n, z + t)$$

EXAMPLE 4.2.3. 奇数次元球面 $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ を

$$\{(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n) | \sum x_i^2 + \sum y_i^2 = 1\}$$

と考える．$\mathbb{R}^{2n}$ 上で $\sigma = \frac{1}{2}\sum(x_i dy_i - y_i dx_i)$ とする．これを S^{2n-1} へ制限したもの $\alpha = i^*\sigma$ は球面上の接触形式を定める．

Proof. $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0$ を見ればよい．$\mathbb{R}^{2n}$ 上の 1-form $\nu = d(r^2) = 2\sum x_i dx_i + y_i dy_i$ を考えると $T_pS^{2n-1} = \ker \nu_p$ となる．そこで

$$\nu \wedge \sigma \wedge (d\sigma)^{n-1} = r^2(n-1)! dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

となり $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ 上でゼロでない．$p \in S^{2n-1}$ に対して，$T_p\mathbb{R}^{2n} = T_pS \oplus \mathbb{R}(\nu_p) = \ker \nu_p \oplus \mathbb{R}(\nu_p)$ であるので，これがゼロでないことは $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0$ を導く.（または
$$\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} = \frac{(n-1)!}{2}\iota_R dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots dx_n \wedge dy_n$$
であるので R は次で与える Reeb ベクトル場.） □

この接触超平面場 $H = \ker\alpha$ は S^{2n-1} 上の標準的接触構造という．これは $\mathbb{C}^n$ 上のシンプレクティック構造の射影化と考えられる（あとで S^{2n-1} のシンプレクティック化をみる）．また Reeb ベクトル場は $R = 2\sum(x_i\partial/\partial y_i - y_i\partial/\partial x_i)$ である（回転に対応するベクトル場を足し合わせたもの．よって S^{2n-1} に接する．Reeb ベクトル場であることは直接確かめればよい）．

またこの R は **Hopf ベクトル場**ともいう．つまりこの flow の軌道は Hopf fibration の circle である．$S^{2n-1} \ni (x_1, y_1 \cdots, x_n, y_n) \to [z_1, \cdots, z_n] \in \mathbb{CP}^{n-1}$ を Hopf fibration としたときの fiber のことである．Reeb ベクトル場はファイバー方向を向いている.（実際，$U(1)$ 作用である $e^{it}(x+iy)$ を微分すれば，$-y+ix$ となる）.

接触構造を $\mathbb{CP}^{n-1}$ のファイバーに垂直な超平面場として定義してもよい．また S^{2n-1} から一点を引けば $\mathbb{R}^{2n-1}$ の標準的接触構造を与えることにも注意.

EXAMPLE 4.2.4. X に計量（完備も仮定）が入ってると仮定する．標準的接触多様体 $C^o = S(T^*X)$ を考えると．この上に測地流がえられる．$S(T^*X)$ 上の標準接触形式に対する **Reeb ベクトル場を考えたとき，その flow が測地流**となる.（その軌道は，ポテンシャルがない場合の運動方程式の解であった．後で見る Weinstein 予想はリーマン多様体上の閉測地線の存在を意味する）.

Proof. ハミルトニアン $f : T^*M \to \mathbb{R}$ を $f(p,\xi) = g_p(\xi,\xi)/2$ で定義したときにハミルトン方程式が測地線方程式を与えた（ただし $TM \cong T^*M$ とみている）．$S(T^*M)$ 上で f は定数 $1/2$ であるので X_f は $S(T^*M)$ に接する（$X_f(f) = 0$ であった）．さて，$V \in T(S(T^*M)) \subset T(T^*M)$ に対して，

$$\omega(X_f, V) = df(V) = V(f) = 0 \Rightarrow \iota_{X_f} d\alpha|_{T(S(T^*M))} = 0$$

である．また，$\alpha(X_f) = 1$ となる．実際，T^*M 上で考えると $\alpha = \sum \xi_i dx_i$ であり，

$$X_f = \sum g^{ij}\xi_j\xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_i}\xi_k\xi_l \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

であった．そこで，

$$\alpha(X_f) = \sum g^{ij}\xi_j\xi_i = g_p(\xi,\xi)$$

となるので，これを単位円に制限すれば 1 である．つまり $S(T^*M)$ 上で $\alpha(X_f) = 1$ を得る．よって Reeb ベクトル場となる．□

EXAMPLE 4.2.5. (M,ω) をシンプレクティック多様体とする．さらに $[\omega] \in H^2(M,\mathbb{Z})$ とする．このとき M 上の複素直線束 L および接続 ∇ で

$$F(\nabla) = 2\pi i\omega$$

となるものがとれる．特に $c^1(L) = [\omega]$ である．この (L, ∇) を前量子化とよぶ（接触化ということもある）．対応する主 $U(1)$ 束を考える．これは $S(L)$ である．接続は $S(L)$ 上の $i\mathbb{R}$ 値微分形式であるが，$\mathbb{R} \ni t \to 2\pi i t \in i\mathbb{R}$ という写像により，$\mathbb{R}$ 値微分形式 θ とみなせば，$d\theta = \pi^*\omega$ である．

このとき $(S(L), \theta)$ は接触多様体になる．実際，$\theta \wedge d\theta^n = \theta \wedge \pi^*\omega^n$ となる．ω^n は M 上で非退化であった．また θ は接続形式であるので，基本ベクトル場に沿ってゼロでない．つまりファイバー方向で非退化．よって接触形式になる．このとき，Reeb ベクトル場はファイバー方向に接するベクトル場である．

4.2.3　接触ベクトル場のリー環

さて，(M, H) を接触多様体として α を（大域的）接触形式とする．接触変換のリー環は．接触ベクトル場は $L_X\alpha = h\alpha$（$h \in C^\infty(M)$，正とはかぎらない）を満たすものである．

接触多様体 M 上の関数 f に対して，次でハミルトンベクトル場 X_f を定義する．

$$df(V) = d\alpha(X_f, V) \quad \text{for } V \in H, \quad \alpha(X_f) = -f$$

この条件で X_f はただ一つに定まる．特に，$f = -1$ のとき $X_f = X_1$ は **Reeb** ベクトル場である．このように定数関数に対してもゼロでないハミルトンベクトル場が定まる．

Lemma 4.2.5. 接触ベクトル場全体とハミルトンベクトル場全体は一致する．

Proof. まず H 上で

$$L_{X_f}\alpha = (d\iota_{X_f} + \iota_{X_f} d)\alpha = -df + df = 0$$

である．よって $L_{X_f}\alpha = h\alpha$ となる．逆に $L_X\alpha = h\alpha$ とする．$f := -\alpha(X)$ とすれば 2 番目の条件は明らか．さらに

$$0 = df + d(\alpha(X)) = df + d\iota_X\alpha = df + (L_X - \iota_X d)\alpha = df + h\alpha - \iota_X d\alpha$$

である．よって H 上で $df = \iota_X d\alpha$ となる． □

Lemma 4.2.6. X_{-1} を *Reeb* ベクトル場とする．このとき

$$d\alpha(X_f, X_{-1}) = 0, \quad L_{X_f}\alpha = -X_{-1}(f)\alpha$$

となる．特に $L_{X_f}\alpha = h\alpha$ となる h は $h = -X_{-1}(f) = X_1 f$ となる．

Proof. $\alpha(X_f + fX_{-1}) = f - f = 0$ なので $X_f + fX_{-1} \in H$ である．そこで Reeb ベクトル場の定義から

$$0 = (d\alpha)(X_{-1}, X_f + fX_{-1}) = d\alpha(X_{-1}, X_f)$$

となる．

$L_{X_f}\alpha = h\alpha$ とする．このとき

$$\begin{aligned} h &= h\alpha(X_{-1}) = (L_{X_f}\alpha)(X_{-1}) \\ &= ((\iota_{X_f}d + d\iota_{X_f})\alpha)(X_{-1}) = d\alpha(X_f, X_{-1}) - (df)(X_{-1}) = 0 - X_{-1}(f) \end{aligned}$$

となる． □

Definition 4.2.2. 接触多様体上の関数全体にポアソン括弧 $\{f, g\}$ を

$$\{f, g\} = X_g(f) + fX_{-1}(g)$$

として定める．

Proposition 4.2.7. $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ はリー環となる．さらに，リー環 $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ と接触ベクトル場のリー環 $Lie(Aut(M, H))$ は同型である．

Proof. 接触ベクトル場全体は部分リー環となるのであった．さて，

$$C^\infty \ni f \mapsto X_f \in Lie(Aut(M, H))$$

はベクトル空間としての同型をあたえる．実際，接触ベクトル場とハミルトンベクトル場は同型であったので，全射がわかる．単射性は，$X_f = 0$ とすると，$0 = \alpha(X_f) = -f$ からわかる．

さて，$f, g \in C^\infty(M)$ とする．上の全単射から，$[X_f, X_g]$ は接触ベクトル場であるので $[X_f, X_g] = X_h$ となる関数 h がただ一つ存在する．そこで

$$\begin{aligned} \iota_{X_h}\alpha = \iota_{[X_f, X_g]}\alpha &= (L_{X_g}\iota_{X_f} - \iota_{X_f}L_{X_g})\alpha = -L_{X_g}(f) + \iota_{X_f}(X_{-1}(g)\alpha) \\ &= -L_{X_g}(f) - X_{-1}(g)f = -\{f, g\} \end{aligned}$$

となるので，$h = \{f, g\}$ である．よって $f \mapsto X_f$ は括弧積が保たれる．$C^\infty(M)$ と $Lie(Aut(M, H))$ はベクトル空間として同型であったので，$C^\infty(M)$ はリー環になる．そしてリー環の同型となる． □

4.2.4　シンプレクティック化

ここでは接触多様体からシンプレクティック多様体をつくる方法を紹介する．シンプレクティック化は，ワインシュタイン予想や接触ホモロジーの研究に用いられる．まず具体的な例から述べる．

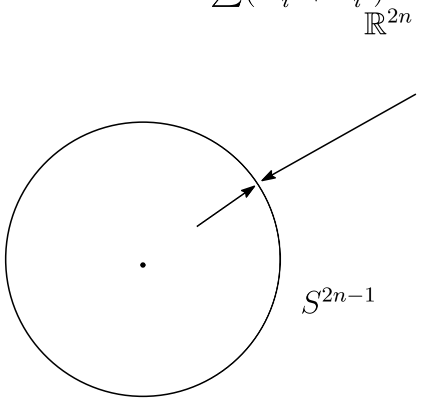
EXAMPLE 4.2.6. $M = S^{2n-1} \times \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}$ の座標を τ とかく．$\pi : M \ni (p, \tau) \to p \in S^{2n-1}$ を射影とする．M と $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ と次で同一視する．

$$\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \ni (X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n) \mapsto (\frac{1}{R}(X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n), \log R) \in M$$

ここで $R = \sum (X_i^2 + Y_i^2)$ である．射影は次のようになる

$$\pi : \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \ni (X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n) \mapsto \frac{1}{R}(X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n) \in S^{2n-1}$$

ここで $e^\tau = R = \sum (X_i^2 + Y_i^2)$ である（よって S^{2n-1} が半径 1 の球面である）．



さらに埋め込み $i : S^{2n-1} \to \mathbb{R}^{2n}$ を考えると，

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \ni (X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n) &\mapsto \frac{1}{R}(X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n) \\ &\mapsto \frac{1}{R}(X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n) = (x_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}\end{aligned}$$

となる．さて $\alpha = i^*\sigma$ を標準的な S^{2n-1} 上の接触構造とする．このとき $\omega = d(R\pi^*\alpha)$ は $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ 上の閉 2-form である．さらに，$\pi^* i^* x_i = X_i/R$，$\pi^* i^* y_i = Y_i/R$ である．よって

$$\pi^*\alpha = \pi^* i^* \sigma = \frac{1}{2} \sum \frac{X_i}{R} d(\frac{Y_i}{R}) - \frac{Y_i}{R} d(\frac{X_i}{R}) = \frac{1}{2R^2} \sum (X_i dY_i - Y_i dX_i)$$

となる．よって

$$\omega = d(R\pi^*\alpha) = \sum dX_i \wedge dY_i$$

となるので，これは $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ 上の標準的なシンプレクティック構造である．この (M, ω) を (S^{2n-1}, α) の標準的なシンプレクティック化とよぶ．

Theorem 4.2.8. (M, H) を接触形式 α の接触多様体とする．$\tilde{M} = M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} M$ を考える．このとき $\omega = d(e^\tau \pi^* \alpha)$ は $\tilde{M}$ 上のシンプレクティック形式である．これをシンプレクティック化とよぶ．

本によっては $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}^+$ として $\omega = d(t\pi^*\alpha)$ とする場合もある．

Proof. ω が閉 2-form であることはよい．そこで非退化性をみる．$\omega = e^\tau(d\tau \wedge \alpha + d\alpha)$ であるので，

$$\omega^n = ne^{n\tau} d\tau \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$$

となり右辺はゼロでない．よって非退化である． □

Remark 4.2.1. また τ をハミルトニアンとするハミルトンベクトル場を M に制限すると **Reeb** ベクトル場になる．

Proof.

$$\begin{aligned} d\tau = \iota_{X_\tau}\omega = \iota_{X_\tau} d(e^\tau \alpha) = \iota_{X_\tau}(d\tau e^\tau \wedge \alpha + e^\tau d\alpha) \\ = d\tau e^\tau \alpha(X_\tau) + e^\tau \iota_{X_\tau} d\alpha \end{aligned}$$

となる．$d\tau$ は $\mathbb{R}$ 上で，α は M 上なので，$e^\tau \alpha(X_\tau) = 1, e^\tau \iota_{X_\tau} d\alpha = 0$ を得る．これを $\tau = 0$ へ制限すれば Reeb ベクトル場の条件をみたす． □

ハミルトニアンベクトル場に対する周期軌道の数に対する評価がアーノルド予想であった．そこで，その接触版というべき予想はワインシュタイン予想とよばれる：予想「Reeb ベクトル場は周期軌道をもつ」

Remark 4.2.2. $\tilde{M}$ の別の表記の仕方：

$$\tilde{M} = \{(p, \xi) \in T^*M | p \in M, \xi \in T_p^*M, \ker \xi = H_p\}$$

とする（つまり接触形式の全体の集合）．これには $\mathbb{R}^*$ が

$$\lambda(p, \xi) = (p, \lambda\xi)$$

として作用する．さらに $\tilde{M}/\mathbb{R}^*$ は M と同型である．$\tilde{M}$ 上に，ある標準的 1-form $\tilde{\alpha}$ を $v \in T_{(p,\xi)}\tilde{M}$ 上で

$$\tilde{\alpha}_{(p,\xi)}(v) = \xi((d\pi)_{(p,\xi)} v)$$

として定める．このとき $\omega = d\tilde{\alpha}$ がシンプレクティック形式である．

Proof. この方法なら大域的接触形式 α がなくても定義できることに注意する．大域的接触形式が定義できるなら，ファイバーの positive なほうをとることにより，$\tilde{M} = M \times \mathbb{R}_{>0} \cong M \times \mathbb{R}$ とでき，これについては先ほどみた．

シンプレクティック形式であることをみるには局所的でよいので，$U \subset M$ 上接触形式 α が存在しているとしてよい．α により自明化すれば，$\tilde{M}|_U = U \times \mathbb{R}^*$ となる．つまり $\tilde{M}$ の点は，$\xi = \lambda\alpha$ としてかけるので局所座標 $\lambda \in \mathbb{R}^*$ をとれるのである．このとき $\tilde{\alpha}_{(p,\xi)} = \lambda\pi^*\alpha$ とかける（ただし $\tilde{\alpha}$ は α のとり方によらない）．あとは先ほどと同様である．

□

Remark 4.2.3. 接触同相はシンプレクティック化したシンプレクティック多様体上の $\mathbb{R}^*$ の作用と可換で $\tilde{\alpha}$ を保つシンプレクティック同相へと拡張できる．

EXAMPLE 4.2.7. X を n 次元多様体として $\mathbb{P}(T^*X)$ は接触多様体であった．このシンプレクティック化 T^*M からゼロ切断を引いたものである．そしてシンプレクティック化の標準 1-form $\sum \xi_i dx_i$ は上でつくったものに一致する．

4.2.5　Legendrian submanifold

$2n+1$ 次元接触多様体 (M, H) の部分多様体 Λ でその各点の接平面が接触平面に入るものの最大次元は n 次元であり，そのような n 次元部分多様体（接触分布に対する積分部分多様体）を **Legendre** 部分多様体とよぶ.（3 次元なら 1 次元部分多様体である）.

Proof. 局所的に H を定める接触形式 α に対して $\alpha|_\Lambda = 0$ である．よって $(d\alpha)|_\Lambda = d(\alpha|_\Lambda) = 0$ である．そこで H 上のシンプレクティック形式 $d\alpha$ に対して，$T_p\Lambda$ は isotropic な部分空間であるので次元は n 次元以下である． □

EXAMPLE 4.2.8. X を n 次元多様体として，$2n-1$ 次元接触多様体 $(\mathbb{P}(T^*X), \mathbb{H})$ を考える．$S \subset X$ を k 部分多様体として，射影余法バンドルを次で定義する．

$$\mathbb{P}(N^*S) := \{c = (x, [\xi]) \in \mathbb{P}(T^*X) | \pi(c) \in S, T_{\pi(c)}S \subset \xi\}$$

これは $n-1$ 次元部分多様体で，Legendre 部分多様体である（局所座標で確かめればよい）.

Proof. 余接法バンドルがラグランジアン部分多様体であることは前にのべた．実際，α を N^*S へ制限するとゼロであるので ω も制限すればゼロである．このとこから，これを射影化すれば，接触形式を $\mathbb{P}(N^*S)$ に制限したものはゼロである． □

一般に次の命題が成立する（証明は省略 Guillemin Sternberg「geometric asymptotics」[Guillemin-Sternberg(asy)] など）

Proposition 4.2.9. $L \subset \mathbb{P}(T^*X)$ を部分多様体として，$\pi : T^*X \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(T^*X)$ を射影化とする．L がルジャンドル部分多様体であるための必要十分条件は $\pi^{-1}(L)$ が T^*X のラグランジアン部分多様体であること．さらにこのとき $\tilde{\alpha}|_{\pi^{-1}(L)} = 0$ である．

EXAMPLE 4.2.9. M を $2n+1$ 次元の接触多様体で X を $n+1$ 次元の多様体．さらに $\pi : W \to X$ がファイバー束であるとして，各ファイバーがルジャンドル部分多様体のときルジャンドルファイブレーションという．

$\pi : \mathbb{P}(T^*X) \to X$，$\pi : S(T^*X) \to X$ はルジャンドルファイブレーションである．これは上の例の一点の場合である．

EXAMPLE 4.2.10. $(x, y) = (x_1, \cdots, x_n, y)$ という座標をもつ $n+1$ 次元ユークリッド空間 E を考える．さらに，超平面全体で $y = 0$ に（ユークリッド内積に関して）垂直でないもの全体のつくる $2n+1$ 次元接触多様体 M を考える（接触多様体 $\mathbb{P}(T^*E)$ の開接触部分多様体 $\cong \mathbb{R}^{2n+1}$ である）．接触形式は局所座標を (x, y, p) として

$$\alpha = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n - dy$$

である．これは別の見方をすれば，ジェット空間 $M = J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2n+1}$ 上の接触構造構造と考えられる．$y = f(x)$ という関数のグラフ（n 次元）を考え，グラフに接する超平面全体の集合を考えるとこれはルジャンドル部分多様体である．つまり $\mathbb{R}^n$ から $M = J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ へのルジャンドル埋め込みが $x \mapsto (x, f(x), df_x)$ により与えられる．

$2n+1$ 次元接触多様体 M で，座標 $(p, x, y) = (p_1, \cdots, p_n, x_1, \cdots, x_n, y)$ をもち接触構造は $\alpha = pdx - dy$ とする．このときルジャンドル対合とは，別の接触多様体 M' で座標 (P, X, Y)（接触構造 $PdX - dY$）をもつものへ，

$$P = x \quad X = p \quad Y = px - y$$

と移す変換である．

$$PdX - dY = xdp - pdx - xdp + dy = -pdx + dy$$

であるので．ルジャンドル対合は接触同相である．グラフ $G : y = f(x)$ の接平面がつくるルジャンドル部分多様体 S（つまり $(x, df_x, f(x))$）はルジャンドル対合のもとでルジャンドル多様体 S' へ移る（一般に接触同相ならルジャンドル多様体をルジャンドル多様体にうつす）．これをルジャンドル変換とよぶ．さらに S' を座標 (X, Y)

へ射影すれば，特異点のある多様体 G' となるが，これをグラフ $y = f(x)$ のルジャンドル変換という．また，$y = f(x)$ が凸なら G' もある関数のグラフ $Y = F(X)$ となり，これを関数 f のルジャンドル変換という．例として，ラグランジアンからハミルトニアンへと移す変換である（後で）．このとき，ラグランジアン（時間によらないとき）は関数 $L : TM \to \mathbb{R}$ でハミルトニアンは $H : T^*M \to \mathbb{R}$ である．

4.2.6　Seifelt and Weinstein 予想

Seifelt の問題（1948)：v をゼロ点なしの S^3 上のベクトル場とする．このとき v の flow は周期軌道を持つか．

反例：(Schweitzer 1974)：周期軌道を持たない C^1 ベクトル場が存在

反例：(Kristina Kuperberg 1994)：周期軌道を持たない C^∞ ベクトル場が存在．

問題：体積保存のベクトル場についてはどうか

反例：(Greg Kuperberg 1997）：周期軌道を持たない C^1 ベクトル場が存在．

C^∞ ではまだ反例はない．

この問題の一般化を考える．$M = S^3$ として γ を体積とする．v をゼロ点なしのベクトル場として体積保存とする．つまり $L_v\gamma = 0 \iff d\iota_v\gamma = 0 \iff \iota_v\gamma = d\alpha (\exists\alpha)$（最後は $H^2(S^3) = 0$ から）．

1-from α が与えられたとして，

$$\iota_v\gamma = d\alpha \quad \iota_v\alpha > 0$$

となるベクトル場を考える.（二番目の条件はベクトル場が positive という）．たとえば，S^3 上の標準接触構造に対して，Hopf ベクトル場の近傍のベクトル場は positive である．$R := v/\iota_v\alpha$ と正規化すれば，

$$\iota_R d\alpha = 0, \quad \iota_v\alpha = 1, \quad \alpha \wedge d\alpha \text{ is a volume form}$$

よってこれは (α, R) という接触形式と **Reeb** ベクトル場の組である．

予想（Weinstein 1978)：3 次元多様体 M と（大域的）接触形式 α を考える．v を Reeb ベクトル場としたとき，v は周期軌道をもつ．

Theorem 4.2.10 (Viterbo and Hofer 1993). *Weinstein* 予想は次の場合は正しい．

- $M = S^3$.
- $\pi_2(M) \neq 0$.
- 接触形式が *overtwisted*.

Remark 4.2.4. overtwisted とは．$H_D = H \cap D$ が周期軌道をもつようなう 2-disk D が存在すること．そうでないときは tight という．

この予想に関して以下は open problem

- 周期軌道はいくつあるか
- そのふるまいは
- unknotted なものはいつも存在するか
- linking はどうなるか

第5章　compatibleな概複素構造

シンプレクティック多様体には必ずcompatibleな概複素構造がはいる．この章ではその事実を証明する．概複素構造を入れることにより，シンプレクティック構造だけからではわからなかったこともわかってくる．例えば概正則曲線との関係である．これが今日のシンプレクティックトポロジーへとつながる（このノートでは，シンプレクティックトポロジーには触れないけど）．

5.1　概複素構造

すべてのシンプレクティック多様体は概複素構造をもつ，さらにそれはcompatibleな意味での概複素構造をもつ．よってシンプレクティック幾何と複素幾何をつなぐことができる．

5.1.1　ベクトル空間上の複素構造

V を $2n$ 次元ベクトル空間とする．まず V 上のシンプレクティック構造全体の空間を $\Omega(V)$ とする．$\Omega \in \Omega(V)$ に対して $Sp(V, \Omega)$ をシンプレクティック同型写像の全体の群 $\cong Sp(2n, \mathbb{R})$ とする．このとき

$$\Omega(V) \cong GL(V)/Sp(V, \Omega) = GL(2n, \mathbb{R})/Sp(2n, \mathbb{R})$$

である．同様に V 上の複素構造全体は

$$J(V) \cong GL(V)/GL(V, J) = GL(2n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C})$$

となる．(証明は $\Omega(V)$ に $GL(V)$ が引き戻しにより作用し，等質空間となる．このときのstabilizerは $Sp(V, \Omega)$ である）．

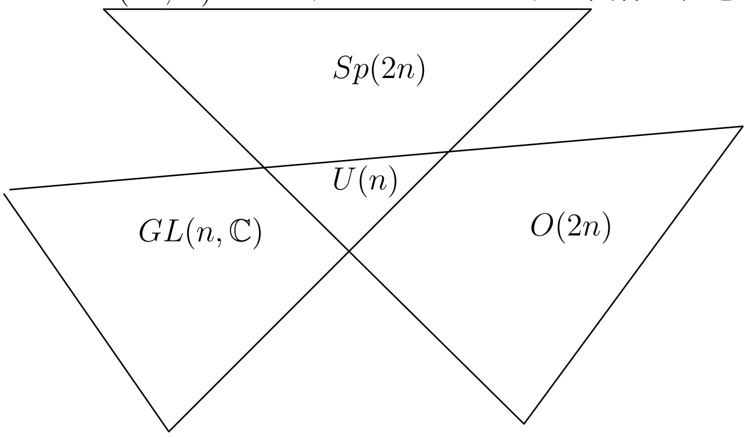
また $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ という標準的シンプレクティックベクトル空間を考える．

$$Sp(2n) := \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) | \Omega_0(Au, Av) = \Omega_0(u, v)\}$$

とする．また $GL(n,\mathbb{C})$ を $X+iY$ に対して

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

として $GL(2n,\mathbb{R})$ へ埋め込む．このとき次の関係に注意しておく．



Definition 5.1.1. (V,Ω) をシンプレクティックベクトル空間とする．複素構造 J が **compatible** とは

$$g_J(u,v) := \Omega(u,Jv) \quad \text{が } V \text{ 上の正定値内積}$$

$\Omega(Ju,Jv) = g_J(Ju,v) = g_J(v,Ju) = \Omega(v,-u) = \Omega(u,v)$ であるので，

$$J \text{ が } \Omega \text{ と compatible} \iff \Omega(Ju,Jv) = \Omega(u,v), \quad \Omega(u,Ju) > 0 \forall u \neq 0$$

Proposition 5.1.1. **シンプレクティックベクトル空間上には，必ず *compatible* な複素構造が存在する．**

Proof. シンプレクティック標準基底をとって，複素構造を定めるのがひとつの方法である．ここでは別の方法を与える．G を V 上の勝手な正定値内積とする．Ω, G はどちらも非退化であるので

$$V \ni u \mapsto \Omega(u,\cdot) \in V^*, \quad V \ni v \mapsto G(v,\cdot) \in V^*$$

は同型 $V \cong V^*$ を与える．よって $\Omega(u,v) = G(Au,v)$ により線形同型 $A : V \to V$ が定まる．この写像は内積に関して交代である．実際

$$G(A^t u, v) = G(u,Av) = G(Av,u) = \Omega(v,u) = -\Omega(u,v) = G(-Au,v).$$

なので $A^t = -A$ である．さて，この A の極分解を行う．まず，$(AA^t)^t = AA^t$ であり，$G(AA^tu, u) = G(A^tu, A^tu) > 0, \forall u \neq 0$ であるので，$AA^t = -A^2$ は対称かつ正定値である．そこで AA^t を対角化すれば

$$AA^t = B\mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}\}B^{-1}$$

を得る．ここで $\lambda_i > 0$ である．そこで

$$\sqrt{AA^t} = B\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_{2n}}\}B^{-1}$$

とすれば，これも対称，正定値である．そこで

$$J := (\sqrt{AA^t})^{-1}A, \quad A = \sqrt{AA^t}J$$

と A の**極分解**を得る（$GL(2n, \mathbb{R}) = Sym_{>0} \cdot O(2n)$．$Sym_{>0}$ は対称行列で正定値なもの）．さらに A は AA^t と可換（$A^t = -A$ を用いた）なので $\sqrt{AA^t}$ とも可換である．よって J と $\sqrt{AA^t}$ とも可換である．

$$J^tJ = A^t(\sqrt{AA^t})^{-1}(\sqrt{AA^t})^{-1}A = (-A^2)(-A^2)^{-1} = \mathrm{id}$$

であり，

$$J^t = A^t(\sqrt{AA^t})^{-1} = -(\sqrt{AA^t})^{-1}A = -J$$

である．よって $J^2 = -JJ^t = -id$ と複素構造である．さらに

$$\Omega(Ju, Jv) = G(AJu, Jv) = G(JAu, Jv) = G(Au, v) = \Omega(u, v)$$

および

$$\Omega(u, Ju) = G(Au, Ju) = G(-JAu, u) = G(\sqrt{AA^t}u, u) > 0 \quad \forall u \neq 0$$

となるので compatible である．　□

Remark 5.1.1. (V_t, Ω_t) をシンプレクティックベクトル空間の族とし，G_t を V_t 上の内積の族とすれば（すべて t に対して滑らかとする）．上の証明と同様にして V_t 上の compatible な複素構造の族 J_t を得ることができる．

Remark 5.1.2. **compatible な複素構造はただひとつとは限らない．**$Sp(2n, \mathbb{R})/U(n)$ **だけある．**

Remark 5.1.3. 複素構造 (V, J) に対して，J と compatible となるシンプレクティック構造が存在する．G を $J^* = -J$ となる正定値内積をとり，$\Omega(u, v) = G(Ju, v)$ とすればよい．これは $GL(n, \mathbb{C})$ の $U(n)$ へのつぶし方であり $GL(n, \mathbb{C})/U(n)$ がその集合となる．

Remark 5.1.4. (V,Ω) をシンプレクティックベクトル空間として J を **compatible な複素構造とする．L をラグランジアン部分空間とする．このとき JL はラグランジアンである．**（実際 $J \in Sp(V,\Omega)$ である）．そして $G_J(u,v)=\Omega(u,Jv)$ により定めた内積に関して $JL=L^{\perp}$ となる．

Proof. L ラグランジアンとは n 次元部分空間で $\Omega|_L=0$ となるものであった．JL が n 次元であることはよい．$\Omega(Ju,Jv)=\Omega(u,v)=0$ となるのでラグランジアンである．次に $JL=L^{\perp}$ を証明する．$JL\subset L^{\perp}$ を見てみる．$\forall u,v\in L$ に対して $G(u,Jv)=-\Omega(u,v)=0$ であるので, $JL\subset L^{\perp}$ である．L が n 次元で $L^{\perp}$ は直交補空間なので n 次元，よって $JL=L^{\perp}$ が成立． □

Remark 5.1.5. (V,Ω) をシンプレクティックベクトル空間とする．J が compatible となるための必要十分条件はシンプレクティック基底 $e_1,\cdots,e_n,f_1,\cdots,f_n$（$\Omega(e_i,e_j)=\Omega(f_i,f_j)=0$ かつ $\Omega(e_i,f_j)=\delta_{ij}$）で $f_i=Je_i$ となるものが存在．

5.1.2　compatible 構造

Definition 5.1.2. (M,ω) をシンプレクティック多様体とする．このとき ω と compatible な概複素構造とは，$g(u,v):=\omega(u,Jv)$ がリーマン計量になること．

Proposition 5.1.2. **シンプレクティック多様体上には *compatible* な概複素構造が存在する．**

Proof. M 上に勝手なリーマン計量をとり，極分解を行う． □

Proposition 5.1.3. (M,ω) をシンプレクティック多様体．J_0,J_1 を二つの *compatible* な概複素構造とする．このとき滑らか *compatible* 概複素構造の族 J_t で J_0,J_1 を結ぶものが存在する．

Proof. $g_0(u,v):=\omega(u,J_0v)$, $g_1(u,v):=\omega(u,J_1v)$ は M 上のリーマン計量である．そこで

$$g_t=(1-t)g_0+tg_1$$

はリーマン計量の滑らかな族である．この計量と ω に対して極分解を行うと，滑らかな概複素構造の族 J_t で望んでいたものを作れる． □

Corollary 5.1.4. **シンプレクティック多様体上のすべての *compatible* な概複素構造の集合は弧状連結である．**

5.2　compatibleな三つ組み

5.2.1　可縮性

上で (M, ω) 上の compatible な概複素構造は必ず存在し，その集合は弧状連結であることを証明した．実は，それが可縮であることを証明する．$J(T_xM, \omega_x)$ を (T_xM, ω) 上で comatible な概複素構造の同型類の空間とする．

Proposition 5.2.1. $J(T_xM, \omega_x)$ は可縮である．より詳しく言えば，ホモトピー

$$h_t : J(T_xM, \omega_x) \to J(T_xM, \omega_x)$$

で $h_0 = \mathrm{id}$ かつ $h_1 : J(T_xM, \omega_x) \to \{J_0\}$ となるものが存在．ここで J_0 はある固定した $J_0 \in J(T_xM, \omega_x)$ である．

Proof. 各点の話なので (V, Ω) としてシンプレクティック空間を考える．$J \in J(V, \Omega)$ とは $G_J(\cdot, \cdot) := \Omega(\cdot, J\cdot)$ が内積になることであった．さて，L_0 というラグランジアン部分空間を考える．そして $L(V, \Omega, L_0)$ を (V, Ω) の L_0 と横断的に交わるラグランジアン部分空間の全体とする．また $G(L_0)$ を L_0 上の正定値内積の空間とする．このとき

$$\Psi : J(V, \Omega) \ni J \mapsto (JL_0, G_J|_{L_0}) \in L(V, \Omega, L_0) \times G(L_0)$$

を考える．

- Ψ は well-defined である．JL_0 がラグランジアンであることは前にみた．そして L_0 と JL_0 は G_J に関して直交していたので，横断的である．よって $JL_0 \in L(V, \Omega, L_0)$ である．$G_J|_{L_0}$ が内積になることは明らか．

- Ψ は全単射である．単射性をまず証明する．$JL_0 = J'L_0$ かつ $G_J|_{L_0} = G_{J'}|_{L_0}$ とする．$u, v \in L_0$ とすると

  $$\Omega(u, Jv) = G_J(u, v) = G_{J'}(u, v) = \Omega(u, J'v)$$

  であるので $\Omega(u, (J - J')v) = 0$ である．これはすべての $u \in L_0$ に対して成立するので $(J - J')v \in (L_0)^{\Omega} = L_0$ である．一方 $Jv \in JL_0$ で $J'v \in J'L_0 = JL_0$ であるので $Jv - J'v \in JL_0$ である．JL_0 と L_0 の交わりは $\{0\}$ であるので，$Jv = J'v$ が成立する．つまり L_0 上で $J = J'$ がわかった．さらに，

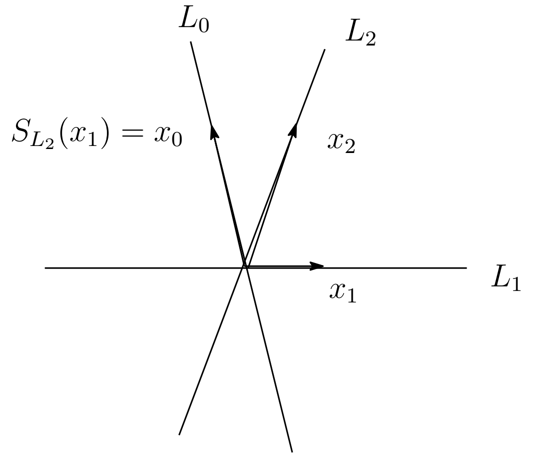
  $$G_J(Ju, Jv) = G_J(u, v) = G_{J'}(u, v) = G_{J'}(J'u, J'v) = G_{J'}(Ju, Jv)$$

  となりラグランジアン部分空間 $JL_0 = J'L_0$ 上でも同様のことが成立するので，$V = L_0 \oplus JL_0$ 上で $J = J'$ である．

次に全射を証明する．$(L,G) \in L(V,\Omega,L_0)\times G(L_0)$ に対して，J を次で定める．$v \in L_0$（長さ 1）に対して $v^\perp := \{u \in L_0 | G(u,v)=0\}$ は L_0 内の $n-1$ 次元部分空間である．$(v^\perp)^\Omega$ は V 内の $n+1$ 次元部分空間．さて $(v^\perp)^\Omega \cap L$ は 1 次元である．実際 $\dim(v^\perp)^\Omega \cap L = \dim(v^\perp)^\Omega + \dim L - \dim((v^\perp)^\Omega + L) = n+1+n-2n = 1$ となる．ここで，$V=(v^\perp)^\Omega + L$ を用いた．実際，$L_0 \subset (v^\perp)^\Omega$ であり，$L+L_0 = V$ であることから従う．そこで $w(\neq 0) \in (v^\perp)^\Omega \cap L$ を取ると，$\Omega(v,w) \neq 0$ である．実際，$\Omega(w,u)=0\ \forall u \in v^\perp \subset L_0$ かつ，$\Omega(w,u)=0\ \forall u \in L$ である．そこで，$\Omega(w,v)=0$ とすると，$\Omega(w,u)=0\ \forall u \in L+L_0 = V$ となり，Ω が非退化であるから，$w=0$ になってしまう．よって，$\Omega(w,v)\neq 0$ となる．このように，$w(\neq 0) \in (v^\perp)^\Omega \cap L$ かつ $\Omega(v,w)=1$ となる w がただ一つに定まる．これを $w = Jv$ と定める．この方法で L_0 の正規直交基底 $e_1,\cdots,e_n$ をとって $Je_1,\cdots,Je_n$ を定める．たとえば $Je_1 \in (e_1^\perp)^\Omega = \{e_2,\cdots,e_n\}^\Omega$ であるので $\Omega(Je_1,e_i)=0$ が成立する．また $Je_i, Je_j \in L$ であるので L がラグランジアンより $\Omega(Je_i,Je_j)=0$ が成立する．よって $\Omega(e_i,Je_i)=\delta_{ij}$, $\Omega(e_i,e_j)=0=\Omega(Je_i,Je_j)$ が成立する．つまり $\{e_1,\cdots,e_n,Je_1,\cdots,Je_n\}$ がシンプレクティック基底である．また $J(Je_i)=-e_i$ と定めて，あとは線形で拡張する．このとき $L=JL_0$, $G_J|_{L_0}=G$ である．

- $L(V,\Omega,L_0)$ は $n\times n$ の対称行列全体と同一視でき，とくに可縮である．

  L_0 と横断的なラグランジアン部分空間を L_1 を固定する（たとえば JL_0 とする）．このとき $V=L_0\oplus L_1$ である．L_0 と横断的なラグランジアン部分空間 L_2 をとる（$V=L_0\oplus L_2$）とこれは $S_{L_2}: L_1 \to L_0$ という線形写像のグラフとみなせる．つまり．$x_2 \in L_2$ が $x_2 = x_0 + x_1 \in L_0\oplus L_1$ と分解されるとき $S_{L_2}(x_1)=x_0$ とする．



$L_2 \cap L_1 \neq \{0\}$ などもありえることに注意

さらに，$x_1, y_1 \in L_1$ のとき，

$$Q(x_1, y_1) := \Omega(S_{L_2} x_1, y_1)$$

とすれば，L_1 上の対称形式である．実際，$x_1 = x_0 + x_2, y_1 = y_0 + y_2$ とすると，

$$Q(x_1, y_1) = \Omega(S_{L_2}(x_1), y_1) = -\Omega(x_0, y_1) = -\Omega(x_0, y_0 + y_2) = -\Omega(x_0, y_2) = -\Omega(x_1, y_2)$$
$$Q(y_1, x_1) = \Omega(S_{L_2}(y_1), x_1) = \Omega(-y_0, x_1) = \Omega(y_2, x_1)$$

となるので対称である．逆に L_1 上の対称形式 Q があるとする．$x_1 \in L_1$ として V^* の元 f_{x_1} を

$$f_{x_1}(y) := \begin{cases} Q(x_1, y_1) & y = y_1 \in L_1 \\ 0 & y \in L_0 \end{cases}$$

$\Omega : V^* \cong V$ により，f_{x_1} に対する元 $S(x_1)$ が定まる．つまり $\Omega(S(x_1), y) = f_{x_1}(y)$ である．$\Omega(S(x_1), y_0) = 0 \forall y_0 \in L_0$ であるので $S(x_1) \in L_0^{\Omega} = L_0$ である．よって $S : L_1 \to L_0$ という線形写像が定まる．この写像のグラフはラグランジアン部分空間を定める．実際，

$$\begin{aligned} \Omega(x_1 + S(x_1), y_1 + S(y_1)) &= \Omega(x_1, y_1) + \Omega(x_1, S(y_1)) + \Omega(S(x_1), y_1) + \Omega(S(x_1), S(y_1)) \\ &= 0 - Q(y_1, x_1) + Q(x_1, y_1) + 0 = 0 \end{aligned}$$

以上から，$L(V, \Omega, L_0)$ と L_1 上の対称形式全体が同一視できた．また対称行列の空間は $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ であるので可縮である．

- $G(L_0)$ は可縮である：G_0 を固定する．

$$h_t : G(L_0) \ni G \to (1-t)G + tG_0 \in G(L_0)$$

は well-defined であり，$h_0 = id, h_1(G(L_0)) = \{G_0\}$ であるので，可縮を与えるホモトピーを与える．

以上から $J(V, \Omega)$ は可縮である．　□

上の証明のほかに，$Sp(2n)/U(n)$ が可縮であることを用いてもよい．つまり $Sp(2n)/U(n) \cong J(V, \Omega)$．この同型は，$Sp(2n)$ を作用させて isotropy 群が $U(n)$ となることを確かめればよい（実は $U(n)$ は $Sp(2n)$ の極大コンパクト群）．可縮であることは次のように証明する．一般に $A \in GL(2n)$ に対する極分解は

$$A = PQ$$

ここで $P = \sqrt{AA^*}$ は対称行列で正定値なもの，$Q = P^{-1}A$ は直交群．また $B \in Sp(2n)$ で B が対称正定値なら $B^\alpha \in Sp(2n)$（$\alpha > 0$）である（後で）．よって P はシンプレクティックである．そこでホモトピーを

$$Sp(2n) \times [0,1] \ni (A, t) \mapsto (AA^*)^{-t/2}A$$

とするとこれは $Sp(2n)$ の $U(n)$ への縮約を与える．ここで $Sp(2n) \cap O(2n) = U(n)$ に注意．

$B \in Sp(2n)$ で B が対称正定値なら $B^\alpha \in Sp(2n)$（$\alpha > 0$）となることを証明しよう．

Lemma 5.2.2. $A \in Sp(2n)$ とする．λ が A の固有値であるなら λ^{-1} も A の固有値，さらに，これらは同じ重複度をもつ．また ± 1 が A の固有値なら偶数の重複度をもつ．また，$Av = \lambda v$, $Av' = \lambda' v'$，$\lambda\lambda' \neq 1$ なら $\Omega(v, v') = 0$ となる．

Proof. $\Omega(v, w) = (v, J_0 w)$ とする（つまりシンプレクティック形式を交代行列 J_0 で表す）．$A \in Sp(2n)$ とすれば，$\Omega(Av, Aw) = (Av, J_0 Aw) = (v, J_0 w)$ より，$A^t = J_0 A^{-1} J_0^{-1}$ である．つまり A^t と A^{-1} は相似であり．固有値は一致する．また A と A^t の固有値も一致するので，λ が A の固有値であるなら λ^{-1} も A の固有値であり．同じ重複度をもつ．また，A は体積を保つので行列式は 1 である．これより，-1 の重複度は偶数である．また，偶数次元で考えているので，1 の重複度も偶数であることが従う．また，$Av = \lambda v$, $Av' = \lambda' v'$，$\lambda\lambda' \neq 1$ とすれば，

$$\lambda\lambda'(v', J_0 v) = (Av', J_0 Av) = \Omega(Av', Av) = \Omega(v', v) = (v', J_0 v)$$

となるので，$\Omega(v', v) = (v', J_0 v) = 0$ となる． □

Lemma 5.2.3. $A \in Sp(n)$ で，対称かつ正定値とする．このとき $A^\alpha \in Sp(n)$（$\alpha > 0$）となる．

Proof. A に対して，V を固有空間分解する．対称，正定値なので，固有値は実数かつ正である．また，前補題から $\lambda\lambda' \neq 1$ なら $V_\lambda, V_{\lambda'}$ は Ω に関して直交している．また，$\lambda \neq 1$ なら，V_λ 上で $\Omega = 0$ となる．そこで，$v \in V_\lambda$, $v' \in V_{\lambda'}$ に対して

$$\Omega(A^\alpha v, A^\alpha v') = (\lambda\lambda')^\alpha \Omega(v, v') = \Omega(v, v')$$

となる．よって A^α はシンプレクティック構造を保存するので $A^\alpha \in Sp(n)$ となる． □

さて，次のよなファイバー束を考える．

$$J = \cup_{x \in M} J(T_x M, \omega_x) \quad \to M$$

(M, ω) 上の compatible 概複素構造はこのファイバー束の切断である．また fiber が可縮なので，この切断の空間も可縮である．

Remark 5.2.1. 今までの議論において，$d\omega = 0$ という条件は使っていない．つまり概シンプレクティック構造についても成立する結果である．概シンプレクティック多様体とは M と非退化 2-form の組のこと

Remark 5.2.2. $E \to M$ をベクトル空間として，fiberwise の非退化交代形式 $\omega_x : E_x \times E_x \to \mathbb{R}$ で x に対して滑らかなものがあるときシンプレクティックベクトル束という．このような ω の存在は，ベクトル束の構造群がシンプレクティック群に縮約できればよい．また，上と同様の議論により，シンプレクティックベクトル束には必ず概複素構造がはいる（つまり構造群が $GL(k, \mathbb{C})$ となる．$Sp(2k, \mathbb{R}) \cap GL(k, \mathbb{C}) = U(k)$ であるので $U(k)$ へ構造群がおちる）．つまり複素エルミートベクトル束になる．

5.2.2　構造の三つ組み

(ω, J, g) を compatible な三つ組みとする．これらの関係は

$$g(u, v) = \omega(u, Jv), \quad \omega(u, v) = g(Ju, v), \quad J(u) = \tilde{g}^{-1}(\tilde{\omega}(u))$$

ここで

$$\tilde{\omega} : TM \ni u \mapsto \omega(u, \cdot) \in T^*M, \quad \tilde{g} : TM \ni u \mapsto g(u, \cdot) \in T^*M.$$

これらの関係をまとめると，つぎのようになる．

- ω, J があるとき：こらが compatible であるためには $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$, $\omega(u, Ju) > 0$ for $u \neq 0$．このとき $g(u, v) := \omega(u, Jv)$ とすれば，正定値内積を得る．

- g, J があるとき：これが compatible になるためには $g(Ju, Jv) = g(u, v)$ である．このとき $\omega(u, v) = g(Ju, v)$ とすれば非退化交代形式である．

- ω, g があるとき：この二つから極分解により compatible な概複素構造 J をえる．ω, J から定まる計量はもとのとは異なる．

また，これらに対して次が問題となる．ω は閉形式か？また J は可積分か？これはケーラー幾何と関係する（詳細は後で）．

Proposition 5.2.4. (M, J) を概複素多様体とする．J が二つのシンプレクティック構造 ω_0, ω_1 と可換とする．このとき ω_0, ω_1 は変形同値である．つまり，ある ω_t というシンプレクティック構造の族が存在する．

Proof. $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$ とする．このとき ω_t は閉であることは明らか．さらに，

$$g_t(\cdot, \cdot) := \omega_t(\cdot, J\cdot) = (1-t)g_0(\cdot, \cdot) + tg_1(\cdot, \cdot)$$

は正定値であるので，ω_t が非退化となる． $\square$

Remark 5.2.3. この命題の逆は成立しない．$\mathbb{R}^4$ 上で次の例を考える．

$$\omega_t = \cos \pi t dx_1 dy_1 + \sin \pi t dx_1 dy_2 + \sin \pi t dy_1 dx_2 + \cos \pi t dx_2 dy_2$$

という族を考える．$\omega_t \wedge \omega_t = dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$ なのでこれは非退化である．

$$\omega_0 = dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2, \quad \omega_1 = dx_1 dy_2 + dy_1 dx_2$$

となるがこれらと可換な概複素構造は存在しない（行列で考えて J が満たす連立方程式に解がないことを示せばよい）．

Definition 5.2.1. (M, J) を概複素多様体として，その部分多様体 X を考える．これが概複素部分多様体とは $J(TX) \subset TX$ となることである（そのとき (X, J) は概複素多様体になる）．

Proposition 5.2.5. (M, ω) を可換な J をもつシンプレクティック多様体とする．このとき勝手な概複素部分多様体 X は (M, ω) のシンプレクティック部分多様体である．

Proof. $i : X \to M$ を埋め込みとする．このとき $i^*\omega$ は閉 2-form である．そこで非退化性をみる．$\omega_x(u, v) = g_x(J_x u, v)$ であるが $g_x|_{T_x X}$ は非退化である．よって $\omega_x|_{T_x X}$ も非退化である．よって $i^*\omega$ はシンプレクティックである． $\square$

EXAMPLE 5.2.1. シンプレクティック構造が入れば，必ず概複素構造が入った．しかし，以下の例をみればわかるように．概複素構造は入るが，シンプレクティック構造は入らない例が存在する．

- S^2 は概複素かつ複素多様体である．
- S^4 は概複素多様体にはならない．（シンプレクティック構造も入らなかった）

- S^6 は概複素多様体になりえる．知られている概複素構造（Cayley 数を使うなど）はすべて可積分でない．S^6 が複素構造をもつかは知られていない.（シンプレクティック構造は入らなかった）
- S^8 さらに高次元の球面は概複素構造をもたない.（シンプレクティック構造も入らなかった）.

球面 S^n（$n \neq 2, 6$）が概複素多様体にならないことは，例えば，小林野水の II の page 138 を参照.

5.3　複素多様体

複素多様体はよく知ってるので，あまり詳しくは書かない.

5.3.1　splitting

(M, J) を概複素多様体とする．$TM \otimes \mathbb{C}$ は概複素構造により分解する.

$$T^{1,0} = \{v \in TM \otimes \mathbb{C} | Jv = iv\} = \{v \otimes 1 - Jv \otimes i | v \in TM\}$$
$$T^{0,1} = \{v \in TM \otimes \mathbb{C} | Jv = -iv\} = \{v \otimes 1 + Jv \otimes i | v \in TM\}$$

それぞれ J 正則接空間，J 歪正則接空間という．また $(TM, J) \cong T^{1,0} \cong \overline{T^{0,1}}$ という複素ベクトル束としての同型が成立．同様に $T^*M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}$ となる.

また $\pi^{l,m} : \Lambda^k \otimes \mathbb{C} \to \Lambda^{l,m}$ として射影を定義し，$\partial := \pi^{l+1,m} d : \Omega^{l,m} \to \Omega^{l+1,m}$, $\bar{\partial} := \pi^{l,m+1} d : \Omega^{l,m} \to \Omega^{l,m+1}$.

また $\beta \in \Omega^{l,m}$，$k = l + m$ とすると，一般には

$$d\beta = \sum_{r+s=k+1} \pi^{r,s} d\beta = \pi^{k+1,0} d\beta + \cdots + \partial\beta + \bar{\partial}\beta + \cdots + \pi^{0,k+1} d\beta$$

が成立する.

関数空間上では $d = \partial + \bar{\partial}$ であるが一般には $d = \partial + \bar{\partial}$ は成立しない.（成立するには複素多様体でないとだめ）.

Definition 5.3.1. $f : M \to \mathbb{C}$ として，f が点 x で J 正則とは df_x が複素線形つまり $df_x J = i df_x$ が成立．すべての点で成立するとき，f を J 正則という．またこれは $df_x \in \Lambda^{1,0}$ と同値である．また $\bar{\partial} f = 0$ とも同値.

J 歪正則関数（ $\Longleftrightarrow$ $\partial f = 0$）も同様に定義する.

Remark 5.3.1. d と $f : M \to N$ の引き戻しは可換であった（$f^*d = df^*$）．しかし，∂，$\bar{\partial}$ は引き戻し f^* と可換とは限らない（f が正則などの条件が必要である）．微分形式の引き戻しを計算したい場合には注意すること．

Remark 5.3.2. 一般に，概複素多様体上で J 正則関数は存在するとは限らない．実際，n 個の J 正則関数で一次独立なものがあれば，$(f_1, \cdots, f_n)$ が複素座標になり，J は可積分である．一方で $f : \mathbb{C} \to M$ で $df \circ i = J \circ df$ という写像（J 正則曲線）はたくさん存在する．

(M, J) を概複素多様体で J が可積分とする．つまり複素多様体 M を考える．このときには $d = \partial + \bar{\partial}$ が成立する．さらに，このとき $d^2 = 0$ から

$$0 = d^2\beta = \partial^2\beta + \partial\bar{\partial}\beta + \bar{\partial}\partial\beta + \bar{\partial}^2\beta$$

となり，

$$\bar{\partial}^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0, \quad \partial^2 = 0$$

が成立する．そして，$\bar{\partial}^2 = 0$ からドルボー複体を得る．

$$H^{l,m}(M) := \frac{\ker \bar{\partial} : \Omega^{l,m} \to \Omega^{l,m+1}}{\mathrm{im}\ \bar{\partial}\Omega^{l,m-1} \to \Omega^{l,m}}$$

さらにドルボーの定理から複素多様体上では

$$H^{l,m}(M) \cong H^m(M, \mathcal{O}(\Omega^{l,0}))$$

右辺は層のコホモロジー．

Theorem 5.3.1 (Newlander-Nirenberg 1957). (M, J) を概複素多様体とする．N を *Nijenhuis tensor* とする．このとき次の同値がわかる

$$\begin{aligned} M \text{ は複素多様体} &\iff J \text{ は可積分} \\ &\iff N = 0 \\ &\iff d = \partial + \bar{\partial} \\ &\iff \bar{\partial}^2 = 0 \\ &\iff \pi^{2,0} d|_{\Omega^{0,1}} = 0 \end{aligned}$$

となる．

5.3.2　なぜ概複素多様体を扱うか？

シンプレクティック多様体があったとき，そこには compatible な概複素構造が入った．このとき概ケーラー多様体とよぶ．また comopatible な概複素構造の全体は可縮であった．そこでシンプレクティック多様体の大域的不変量を考察するには，概ケーラー多様体の不変量で，概複素構造の連続変形で不変なものを構成すればよい．これが複素構造ならば複素幾何の結果が使えるのであるが，compatible な複素構造は存在するとは限らないし，あってもその構造全体が可縮かはわからないことに注意.

概複素多様体上の正則関数はあまり存在しないが，複素一次元多様体からの概正則写像は存在する（J 正則曲線）．そこで，なぜ一次元複素多様体から概複素多様体への写像を考えるかについて述べる．これは 1 次元概複素多様体は必ず積分可能で，複素多様体になることによる．$\phi : (N, J_N) \to (M, J_M)$ という概正則写像があり，$\phi(N)$ が概複素多様体であるとする．さらに，はめ込みとすれば N に概複素構造が入るが，これが複素構造になることは，一次元以外ではあまりありえない．よって複素一次元多様体からの概正則写像を考える．

一次元の場合に，$\phi : \mathbb{CP}^1 \to (M, J_M)$ を勝手な写像としてはめ込みとすれば，N に概複素構造が導かれるが，これは微分同相を合成すれば，ϕ が概正則であるようにできる．より一般に，genus g のリーマン面には実 $6g-6$ 次元分の概複素構造が入るので，$\phi(N)$ が概複素多様体であることと ϕ が概正則写像であることは，微分同相を除けば，有限次元の差しかない．複素 2 次元以上であると，複素構造の作る空間は有限次元であるが，概複素構造の空間は無限次元である．これでは扱いにくい．

このようにして J 正則曲線を大域的なシンプレクティック幾何では扱う必要がでてくるのである．また，シンプレクティック多様体ではなく target を概複素多様体でもよいかとは思うが，J 正則曲線のモジュライ空間のコンパクト性のさい $d\omega = 0$ を用いることになるのである．

第6章　ケーラー多様体

ケーラー多様体はシンプレクティック多様体に，さらに幾何構造を課したものである．与えれたシンプレクティック多様体がケーラーなら，ケーラー幾何の様々な結果が使える．そこで，この章ではケーラー多様体の定義や基本的性質について学ぶ．またケーラー多様体，シンプレクティック多様体，概複素多様体，複素多様体の包含関係についてふれる．

6.1　ケーラー幾何

6.1.1　ケーラー形式

Definition 6.1.1. シンプレクティック多様体 (M,ω) が**ケーラー多様体**とは，ω と可換かつ可積分な概複素構造をもつこと．また，このとき ω を**ケーラー形式**という．

（いろいろ定義があるが，(M,ω) がケーラーなら ω がシンプレクティック形式になることに注意）．

このケーラー形式 ω が満たす条件は

1. 2-form
2. 複素構造と compatible
3. 閉形式である．
4. real である．
5. 非退化である．

これらの性質をほかの言葉で置き換えてみよう．

1. ω が 2-from であるので，ある複素局所座標で
$$\omega = \sum a_{jk} dz_j \wedge dz_k + \sum b_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k + \sum c_{jk} d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k$$
とかける．

2. J と可換とは $J^*\omega(u,v) := \omega(Ju,Jv) = \omega(u,v)$，$\omega(u,Ju) > 0\ \forall u \neq 0$ となることである．また $J^*dz_j = idz_j$, $J^*d\bar{z}_j = -id\bar{z}_j$ である．そこで
$$J^*\omega = \sum i^2 a_{jk} dz_j \wedge dz_k + \sum i(-i) b_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k + \sum (-i)^2 c_{jk} d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k = \omega$$
となるので $a_{jk} = 0 = c_{jk}$．つまり ω は $(1,1)$ 形式である（$\omega \in \Omega^{1,1}$）．$b_{jk} = \frac{i}{2}h_{jk}$ として
$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n} h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$
となる．$\omega(u,Ju) > 0\ \forall u \neq 0$ については後で．

3. $0 = d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega \in \Omega^{2,1} \oplus \Omega^{1,2}$ となる．よって $\partial\omega = 0$（∂-closed），$\bar{\partial}\omega = 0$（$\bar{\partial}$-closed）．特に
$$[\omega] \in H^{1,1}(M)$$
である．

4. ω は実形式，つまり $\omega = \bar{\omega}$ である．これは $h_{jk} = \bar{h}_{jk}$ と同値．特に (h_{jk}) は（局所的に）エルミート行列である．

5. 非退化とは $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega \neq 0$ である．また局所座標で
$$\omega^n = n!(i/2)^n \det(h_{jk}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$
となる．よって非退化とは $\det_{\mathbb{C}}(h_{jk}) \neq 0$ と同値（(h_{jk}) は非退化エルミート行列である．

6. $\omega(u,Ju) > 0\ \forall u \neq 0$ とは (h_{jk}) が正定値行列ということである．よって (h_{jk}) は正定値エルミート行列である．

以上をまとめて**ケーラー形式 ω は ∂-closed $\bar{\partial}$-closed な $(1,1)$ 形式で，局所的には**
$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n} h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$
と書けて (h_{jk}) は正定値エルミート行列となるものである．

応用をひとつあげておく

Theorem 6.1.1 (Banyaga). *M をコンパクト複素多様体で ω_0, ω_1 をケーラー形式とする．$[\omega_0] = [\omega_1] \in H^2_{de-Rham}(M)$ なら，(M,ω_0) と (M,ω_1) はシンプレクティック同相である．*

Proof. $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$ はシンプレクティックであることは前にみた．あとはコンパクトなので Moser の定理を使えばよい．定理 3.2.2 □

6.1.2 ケーラー形式のひとつの作り方

Definition 6.1.2. M を複素多様体．$\rho \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ が **strictly plurisubharmonic（s.p.s.h）**とは，各局所座標 U において行列

$$\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(p)\right)$$

が正定値（$\forall p \in U$）．

Proposition 6.1.2. M を複素多様体とする．ρ を ***s.p.s.h*** とする．このとき

$$\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\rho$$

はケーラー形式である．この ρ をケーラーポテンシャルという．

Proof. $\partial\omega = 0$, $\bar{\partial}\omega = 0$ は明らか．よって $d\omega = 0$ となる．また $\bar{\omega} = -i/2\bar{\partial}\partial\rho = i/2\partial\bar{\partial}\rho = \omega$ となる．また $\omega \in \Omega^{1,1}$ であるので $J^*\omega = \omega$．つまり $\omega(u, Jv)$ は対称テンソルである．

$$\omega = i/2\partial\bar{\partial}\rho = i/2\sum\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_k}dz_j\wedge d\bar{z}_k = \sum h_{jk}dz_j\wedge d\bar{z}_k$$

とすれば，ρ が s.p.s.h であるので (h_{jk}) は正定値（つまり $\omega(\cdot, J\cdot)$ は正定値）．特に ω は非退化．以上から ω はケーラーである． □

EXAMPLE 6.1.1. $M = \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ を考える．

$$\rho(z) = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2) = \sum|z_j|^2 = \sum z_j\bar{z}_j$$

とすれば，

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\rho = \delta_{jk}$$

であるので，これは s.p.s.h である．対応するケーラー形式は

$$\omega = i/2\sum dz_j\wedge d\bar{z}_j = \sum dx_j\wedge dy_j$$

という標準的なシンプレクティック形式となる．

6.1.3　ケーラー形式に対する局所形式

上で述べたケーラー形式の逆が局所的には成立する．

Theorem 6.1.3. ω を複素多様体上の閉実 $(1,1)$ 形式とする．このとき各点 $p \in M$ に対して近傍 U と局所関数 $\rho \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ が存在して

$$\omega = i/2\partial\bar{\partial}\rho$$

が成立．ω がケーラーなら ρ は局所的に $s.p.s.h$ である．これをケーラーポテンシャルという（**ケーラー形式は局所的にはポテンシャルをもつ**）．

Proof. $d\omega = 0$ より（局所的に）$\omega = d\psi$ とかける ψ は実なので $(0,1)$ 形式 ϕ があって $\psi = \phi + \bar{\phi}$ とかける．

$$\omega = \partial\phi + \bar{\partial}\phi + \partial\bar{\phi} + \bar{\partial}\bar{\phi}$$

左辺は $(1,1)$ であるので $\partial\phi = 0, \bar{\partial}\bar{\phi} = 0$ となる．よってドルボーの補題から，さらに近傍をとりなおして，$\phi = \partial p$, $\bar{\phi} = \bar{\partial}\bar{p}$ となる．よって $\frac{i}{2}\rho = p - \bar{p}$ とすればよい． □

Theorem 6.1.4. M を複素多様体とする $\rho \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ を $s.p.s.h$ とする．$i : X \to M$ を M の複素部分多様体とする．このとき $i^*\rho$ は $s.p.s.h$ である．よって**ケーラー多様体の複素部分多様体はケーラー**である．

Proof. $\dim_{\mathbb{C}} M = n$ として $\dim_{\mathbb{C}} X = n - m$ とする．$p \in X$ に対して M の近傍 $(U, z_1, \cdots, z_n)$ で $X \cap U$ が $z_1 = \cdots = z_m = 0$ となるものをとる．つまり $i^*\rho = \rho(0, \cdots, 0, z_{m+1}, z_n)$．

$$i^*\rho \text{ が s.p.s.h} \iff \frac{\partial^2\rho}{\partial z_{m+j}\partial\bar{z}_{m+k}}(0, \cdots, 0, z_{m+1}, \cdots, z_n) \text{ is 正定値}$$

であるが右辺は正定値行列 $\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(0, \cdots, 0, z_{m+1}, \cdots, z_n)$ の小行列であるので正定値である．

(M, ω) をケーラーとする．$i^*\omega$ がケーラー形式であることをみるには上の局所座標でさらに小さい局所座標をとれば ρ という局所的なケーラーポテンシャルが存在するので．$i^*\omega$ がケーラーである． □

Definition 6.1.3. 上の $(X, i^*\omega)$ を**ケーラー部分多様体**とよぶ．

EXAMPLE 6.1.2. $(\mathbb{C}^n, \omega)$ というケーラー多様体を考える．$\mathbb{C}^n$ 内のすべての複素部分多様体はケーラーである．

EXAMPLE 6.1.3. $\mathbb{C}P^n$ という複素射影空間を考え，Fubini-Study 形式という標準的なケーラー形式を考える．よってすべての非特異射影代数多様体はケーラーである．ここで非特異とは smooth であること．射影代数多様体とは斉次多項式の族のゼロ点集合の交わり．

EXAMPLE 6.1.4 (**Fubini-Study 構造**). まず，$\mathbb{C}^n$ 上で次の関数を考える

$$z \mapsto \log(|z|^2+1)$$

は s.p.s.h である．よって $\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log(|z|^2+1)$ はケーラー形式である．

Proof. $U(n)$ は $S^{2n-1} = \{z \mid \sum |z_i|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^n$ に推移的に作用する．また ρ は $U(n)$ の作用で不変である．そこで ω がケーラーであることを調べるには（ρ が s.p.s.h を調べるには）一方向について正定値性を調べればよい．つまり

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\rho = \frac{\sum_{i=2}^n |z_i|^2+1}{(|z|^2+1)^2} > 0$$

であるので，ω はケーラー形式である．　□

$\mathbb{C}^n$ 上の開集合 $U = \{z_1 \neq 0\}$ を考える．このとき

$$\phi : U \ni (z_1, \cdots, z_n) \mapsto \frac{1}{z_1}(1, z_2, \cdots, z_n) \in U$$

は双正則写像であり，

$$\begin{aligned}
\phi^* \log(|z|^2+1) =& \log(\frac{1}{|z_1|^2}(1+z_2\bar{z}_2+\cdots+z_n\bar{z}_n)+1) \\
=& \log(\frac{1}{|z_1|^2}(1+z_2\bar{z}_2+\cdots+z_n\bar{z}_n+z_1\bar{z}_1)) \\
=& \log(|z|^2+1)+\log\frac{1}{|z_1|^2} = \log(|z|^2+1)-\log z_1-\log\bar{z}_1
\end{aligned}$$

となる．これに $\partial\bar{\partial}$ をかければ，

$$\partial\bar{\partial}\phi^*\log(|z|^2+1) = \partial\bar{\partial}\log(|z|^2+1)$$

となる．とくに $\phi^*\omega = \omega$ となる．

そこで $\mathbb{CP}^n$ を考える．$U_i := \{[z_0, \cdots, z_n] \in \mathbb{CP}^n | z_i \neq 0\}$ として

$$\phi_i : U_i \ni [z_0, \cdots, z_n] \mapsto (\frac{z_0}{z_i}, \cdots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}. \cdots, \frac{z_n}{z_i}) \in \mathbb{C}^n.$$

これが局所座標を与える．この U_i 上で ω を与えると，$U_i \cap U_j$ 上の変換関数 $\phi_{i,j}$ $(i, j = 0, \cdots, n)$ に対して $\phi_{i,j}^* \omega = \omega$ が成立する．そこで，$[z_0, \cdots, z_n] \in \mathbb{C}P^n$ という斉次座標で

$$\omega_{FS} := \frac{i}{2} \log(|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2)$$

とすれば，ω は大域的な $\mathbb{CP}^n$ 上のケーラー形式を与える．これを **Fubini-Study** 形式という．特に，$\mathbb{CP}^n$ はシンプレクティック多様体である．$\mathbb{CP}^1$ 上の Fubini-Study 形式は $U_0 = \{[z_0, z_1] \in \mathbb{CP}^1 | z_0 \neq 0\}$ では，

$$\omega_{FS} = \frac{dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

ここで $z_1/z_0 = z = x + iy$ である．また $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ を $\mathbb{R}^3$ 上の単位球面とすると，極座標表示 (θ, h)（$0 \leq \theta < 2\pi, -1 \leq h \leq 1$）に関して $\omega = d\theta \wedge dh$ となる．よって S^2 上の標準的シンプレクティック形式 ω_{std} に対して $\omega_{FS} = \frac{1}{4}\omega_{std}$ である．

6.2　コンパクトケーラー多様体

6.2.1　ホッジ理論

M を複素多様体として ω をその上のケーラー形式とする．

Theorem 6.2.1 (Hodge). コンパクトケーラー多様体 (M, ω) 上で次が成立

$$H^k_{deRham}(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{l+m=k} H^{l,m}_{Dolbeaut}(M)$$

また $H^{l,m} = \bar{H^{m,l}}$ である．特に,． $H^{l,m}$ は有限次元．

ケーラー計量に対して，$*$ を Hodge 作用素とする．$\mathcal{H}^k = \{\alpha \in \Omega^k | \Delta\alpha = (d\delta + \delta d)\alpha = 0\}$ とする．$\Delta\alpha = 0 \iff d\alpha = \delta\alpha = 0$ に注意する．このとき

Theorem 6.2.2 (Hodge). コンパクト向きつきリーマン多様体上で

$$\mathcal{H}^k \cong H^k_{deRham}(M, \mathbb{R})$$

つまり，ドラームコホモロジー類の代表元として調和形式をとることができる．さらに，L^2 内積（$\int \alpha \wedge *\beta$）に関して

$$\Omega^k \cong \mathcal{H}^k \oplus \Delta(\Omega^k) \cong \mathcal{H}^k \oplus d\Omega^{k-1} \oplus \delta\Omega^{k+1}$$

さらに複素の Hodge 理論について考える．(M,ω) をケーラー多様体とする．このとき $\Delta = d\delta + \delta d = 2(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})$ が成立する．よって $\Delta : \Omega^{l,m} \to \Omega^{l,m}$ と次数を保存するので

$$\mathcal{H}^k = \bigoplus_{l+m=k} \mathcal{H}^{l,m}$$

となる．このとき

Theorem 6.2.3 (Hodge)**.** コンパクトケーラー多様体上で

$$\mathcal{H}^{l,m} \cong H^{l,m}_{Dolbeaut}(M)$$

つまり，代表元として調和形式を選ぶことができる．以上から次の同型が成立

$$H^k_{deRham}(M) \cong \mathcal{H}^k \cong \bigoplus_{l+m=k} \mathcal{H}^{l,m} \cong \bigoplus_{l+m=k} H^{l,m}_{Dolbeaut}(M)$$

が成立する．

一つ大事な応用を述べておく．

Lemma 6.2.4 (global dd^c-Lemma)**.** $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$ とする．M をコンパクトケーラー多様体として，η を実 (p,p)-*form* で実 $(2p-1)$-*form* ξ が存在して $\eta = d\xi$ となるとする．このとき，実 $(p-1,p-1)$-*form* θ が存在して $\eta = dd^c\theta$ となる．

Proof. まず ξ は実なので $\zeta + \bar{\zeta}$ と $(p-1,p)$, $(p,p-1)$ へ分解でき，$d\xi$ が (p,p) 形式であるので，$\bar{\partial}\zeta = \partial\bar{\zeta} = 0$ となる．また $\eta = \partial\zeta + \bar{\partial}\bar{\zeta}$ となる．さて，M がコンパクトケーラーであるので，この ζ に対して，上で述べたホッジ分解を使う．つまり

$$\zeta = \Delta\alpha + \zeta_H$$

となる α が存在する．ここで ζ_H は ζ の調和部分である．またケーラー多様体なので

$$\Delta = dd^* + d^*d = 2(\partial\partial^* + \partial^*\partial) = 2(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})$$

が成立する．また $\bar{\partial}\zeta = 2\bar{\partial}\bar{\partial}^*\bar{\partial}\alpha = 0$ となる．M コンパクトなので，

$$0 = (\bar{\partial}\bar{\partial}^*\bar{\partial}\alpha, \bar{\partial}\alpha) = (\bar{\partial}^*\bar{\partial}\alpha, \bar{\partial}^*\bar{\partial}\alpha) = \|\bar{\partial}^*\bar{\partial}\alpha\|^2$$

となり，$\bar{\partial}^*\bar{\partial}\alpha = 0$ となる．よって $\zeta = \zeta_H + \bar{\partial}\bar{\partial}^*\alpha$ となり，

$$\eta = \partial\zeta + \bar{\partial}\bar{\zeta} = \partial\bar{\partial}\bar{\partial}^*\alpha + \bar{\partial}\partial\partial^*\bar{\alpha} = \partial\bar{\partial}(\bar{\partial}^*\alpha - \partial^*\bar{\alpha})$$

また簡単な計算で $dd^c = 2i\bar{\partial}\partial$ となることがわかる．　□

Lemma 6.2.5. M をコンパクト複素多様体として，ω, ω_1 をケーラー形式とする．$[\omega] = [\omega_1] \in H^2(M, \mathbb{R})$ なら，ある実関数 ϕ で，$\omega = \omega_1 + dd^c\phi$ となるものが存在．ここで ϕ は定数の足し算を除いて唯一つである．

Remark 6.2.1. これはとても大事な補題であり，コホモロジー類を固定してケーラー形式を変形する場合には，自由度が関数まで落ちることを意味する．

Proof. 仮定より $\omega - \omega_1$ は exact な実 $(1,1)$ 形式である．そこで上の補題からある関数 ϕ が存在して $\omega_1 = \omega + dd^c\phi$ とかける．もし ϕ_1, ϕ_2 がそのような関数であるとすると $dd^c(\phi_1 - \phi_2) = 0$ を満たす．勝手な関数 f に対して $dd^c f = 0$ とすると，

$$dd^c f = 2i \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_j \partial z_i} d\bar{z}_j \wedge dz_i = 0$$

となり M がコンパクトなら f は定数である．よって $\phi_1 - \phi_2$ は定数となる． □

6.2.2 位相的な結果

ベッチ数 $b^k(M) := \dim H^k_{deRham}(M)$ とする．さらにホッジ数を $h^{l,m} = \dim H^{l,m}_{Dolbeaut}(M)$ とする．Hodge 理論からコンパクトケーラー多様体上では

$$b^k = \sum_{l+m=k} h^{l,m}, \quad h^{l,m} = h^{m,l}, \quad \chi(M) = \sum_{l,m} (-1)^{l+m} h^{l,m}$$

である．これからいくつかのコンパクトケーラー多様体に対する位相的結果が導かれる．

1. コンパクトケーラー多様体上では奇数次のベッチ数は偶数である．つまり

$$b^{2k+1} = \sum_{l+m=2k+1} h^{l,m} = 2 \sum_{l=0}^{k} h^{l,2k+1-l}$$

2. コンパクトケーラー多様体上で $h^{1,0} = \frac{1}{2} b^1$ は位相不変量である．

3. コンパクトシンプレクティック多様体上では偶数次のベッチ数は正である．ω^k は閉であるが完全でない．実際，$\omega^k = d\alpha$ と仮定すると，ストークスを使って

$$\int_M \omega^n = \int_M d(\alpha \wedge \omega^{n-k}) = 0$$

となるので矛盾．

4. コンパクトケーラー多様体上で，$h^{l,l}$ は正である．

   Proof. $[\omega^l] \in H^{l,l}$ であり，これがドルボーコホモロジー類として 0 でないこと証明すればよい．$\omega^l \in \Omega^{l,l}$ であることはよい．$d\omega = 0$ から $0 = d\omega^l = \partial\omega^l + \bar{\partial}\omega^l$ であるので $\bar{\partial}\omega^l = 0$ となる．よって $[\omega^l] \in H^{l,l}$ である．さらに $\omega^l = \bar{\partial}\beta$ とすると，

   $$\omega^n = \omega^l \wedge \omega^{n-l} = \bar{\partial}(\beta \wedge \omega^{n-l}) \Rightarrow 0 = [\omega^n] \in H^{n,n}_{Dolbeaut}(M) \cong H^{2n}_{deRham}(M, \mathbb{C})$$

   となり矛盾する． □

5. 複素偶数 $n = 2k$ 次元多様体上の符号数は $\tau(M) = \sum_{l,m}^{n} (-1)^m h^{l,m}$ となる（小林の複素幾何などをみよ）

ホッジ作用素を使って Hodge diamond というホッジ数に対する対称性を記述する．

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & h^{n,n} & & & & \\
 & & h^{n,n-1} & & & & h^{n-1,n} & & \\
h^{n,n-2} & & & & h^{n-1,n-1} & & & & h^{n-2,n} \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
h^{2,0} & & & & h^{1,1} & & & & h^{0,2} \\
 & & h^{1,0} & & & & h^{0,1} & & \\
 & & & & h^{0,0} & & & &
\end{array}$$

ここで左右は対称である（複素共役をとる）．対称軸の $h^{l,l}$ は正である．また中心に対しても点対称（ホッジ作用素による $h^{l,m} = h^{n-l,n-m}$ または Serre の双対定理）．また ω を掛けたり（またはその随伴作用素）の操作により $h^{l,m}$ に対していくつかの不等式なども成立する（$H^{l,m}$ をさらに既約分解していく）．

6.2.3 ケーラー多様体の例

- 向き付け可能コンパクト２次元多様体を考える．これは genus で分類される．面積要素はシンプレクティック形式である．そこで，リーマン計量を一つとれば，シンプレクティック形式が定まる．また９０度回転により概複素構造も定まるが，２次元なので必ず可積分である．よって，任意の計量はケーラーとなる．

- Stein manifold：**Stein 多様体とはケーラー多様体** (M, ω) **でそれが大域的かつ proper なケーラーポテンシャルをもつもの．**つまりある proper な関数 $\rho : M \to \mathbb{R}$ があって $\omega = i/2\partial\bar{\partial}\rho$．ここで proper とは，コンパクト集合の逆像がコンパクトであること（言い換えると $p \mapsto \infty$ **のとき** $\rho(p) \mapsto \infty$ **となる**連続写像である）

  Stein 多様体は $\mathbb{C}^n$ の properly embdded 解析多様体として分類される．

- 複素トーラス $M = \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^n$．ここで $\mathbb{Z}^n$ はある格子である．ケーラー計量を $\mathbb{C}^n$ 上の $\omega = \sum dz_j \wedge d\bar{z}_j$ から induce する．

- 複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ に Fubini-Study 計量を入れたもの．**Taubes は** $\mathbb{CP}^2$ **上にはシンプレクティック同相を除いてシンプレクティック構造はただひとつしか**ないことを証明した．

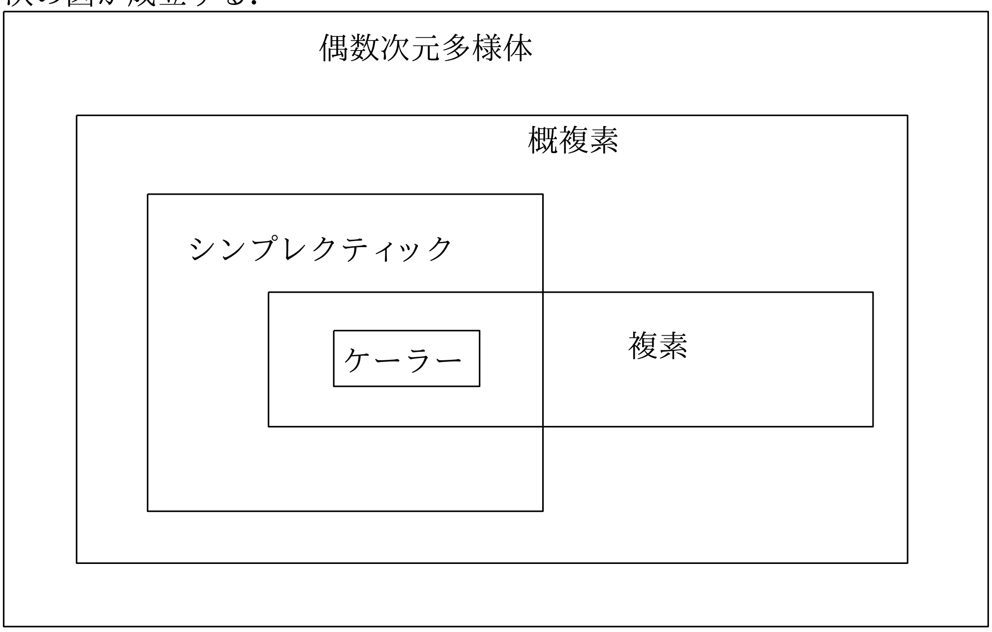
- 複素グラスマン多様体．

- ケーラー多様体の積

- ケーラー多様体の複素部分多様体．

6.2.4　ケーラー，概複素，シンプレクティックの関係

次の図が成立する．



うえの各領域は空集合であるかという問題を考える．さらに，それが単連結または特別な基本群をもつかを考える.（それぞれ，難しい問題である．細かいことは元本の参考文献をみよ）

- 偶数次元多様体で概複素構造をもたないものが存在する．たとえば $S^4, S^8, S^{10}, \cdots$ である．

- M がシンプレクティックかつ複素多様体とする．これはケーラーになるか？答えは NO である．

  Kodaira-Turston example : $\mathbb{R}^4$ 上で $dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$ をかんがえ Γ を次のシンプレクティック同相で生成される離散群とする．

$$\begin{aligned}
\gamma_1 : (x_1, x_2, y_1, y_2) &\mapsto (x_1, x_2 + 1, y_1, y_2)\\
\gamma_2 : (x_1, x_2, y_1, y_2) &\mapsto (x_1, x_2, y_1, y_2 + 1)\\
\gamma_3 : (x_1, x_2, y_1, y_2) &\mapsto (x_1 + 1, x_2, y_1, y_2)\\
\gamma_4 : (x_1, x_2, y_1, y_2) &\mapsto (x_1, x_2 + y_2, y_1 + 1, y_2)
\end{aligned}$$

  このとき $M = \mathbb{R}^4/\Gamma$ は，ある 2 トーラス上の flat2 トーラス束である．小平はこの M に複素構造が入ることを証明した．しかし $\pi_1(M) = \Gamma$ であるので $H^1(M, \mathbb{Z}) = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ は rank 3 であるので $b^1 = 3$ と奇数となる．よってこれはケーラー多様体ではない．

- シンプレクティック多様体上には（可換でなくてもよい）複素構造が必ず存在するか？答えは NO

  Fernandez-Gotay-Gray 1988 : 複素構造を持たないシンプレクティック多様体が存在する．その例はたとえば，2-トーラス上の S^1 束上の S^1 束である．

- M 上に複素構造が入ってたとして,（可換でなくてもよい）シンプレクティック構造は存在するか？答えは NO である．

  Hopf surface $S^1 \times S^3$ はシンプレクティックではない．実際 $H^2(S^1 \times S^3) = 0$ であるので．しかし $S^1 \times S^3 \cong (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\Gamma$（ ここで $\Gamma = \{2^n \mathrm{id} | n \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ にたいして複素変換 $(z_1, z_2) \to (2z_1, 2z_2)$ が生成する群）．よって複素多様体である．

  より一般の Hopf 多様体 $S^{2n-1} \times S^1$ は複素多様体であるが，シンプレクティック構造は入らない．特に，ケーラー構造は入らない．しかし，**局所的共形ケーラー構造**という構造が入る，

- 複素構造もシンプレクティック構造も入らない概複素多様体が存在する．

  $\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2$ は概複素多様体である（特性類を計算することによる）．しかし，小平の複素曲面の分類には適合しないので複素多様体ではない．また Taubes はサイバーグウィッテン方程式を使ってシンプレクティック構造が入らないことを証明した．

- Gompf は基本群が勝手な有限群と同型であるコンパクトシンプレクティック多様体の構成を与えた．特に，単連結な例を見つけることができる．この方法でおこなうと，シンプレクティックだがケーラーでない例をつくれる．

第7章　ハミルトン力学

この章でやっと，ハミルトン力学について触れる．まず基本的なことを復習した後で，可積分系について学ぶ．アーノルドリュウビルの定理の証明である．さらにハミルトン系（ハミルトン方程式）とラグランジアン系（オイラーラグランジュ方程式）について学び，それらを結ぶルジャンドル変換を与える．

7.1　ハミルトンベクトル場

7.1.1　ハミルトンベクトル場とシンプレクティックベクトル場

(M,ω) をシンプレクティック多様体とする．$H : M \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする．これをハミルトニアンという．ω の非退化性から $\iota_{X_H}\omega = dH$ となるベクトル場が存在する．($\omega(X_H, Y) = Y \cdot H$)．$M$ がコンパクトまたは X_H が完備として，X_H を積分して $\rho_t : M \to M$ という微分同相の 1 パラメータ族を得る．

$$\rho_0 = \mathrm{id}_M \quad \frac{d\rho_t}{dt} \circ \rho_t^{-1} = X_H$$

である．このとき各微分同相 ρ_t は ω を保存する．

$$\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega = \rho_t^* L_{X_H}\omega = \rho_t^*(d\iota_{X_H}\omega + \iota_{X_H}d\omega) = \rho_t^*(ddH + 0) = 0$$

このように関数はシンプレクティック同相の family を与える．**この X_H をハミルトン関数 H に対するハミルトンベクトル場という．**

X_H は

$$L_{X_H}H = \iota_{X_H}dH = \iota_{X_H}\iota_{X_H}\omega = 0$$

である．つまり**ハミルトンベクトル場はハミルトン関数を保存する**．特に**積分曲線 $\rho_t(x)$ は H の level set 内に含まれる**．つまり

$$H(x) = (\rho_t^*H)(x) = H(\rho_t(x))$$

となる．

EXAMPLE 7.1.1. $(M, \omega) = (S^2, d\theta \wedge dh)$ を考える．この S^2 上の高さ関数 $H(\theta, h) = h$ を考えると，

$$\iota_{X_H}(d\theta \wedge dh) = dh$$

をとけば $X_H = \partial\theta$ というベクトル場である．そしてこれが生成する変換群は $\rho_t(\theta, h) = (\theta + t, h)$ という回転である．とくに，高さ h はこの変換で不変である．つまり H の level set が保存される．

EXAMPLE 7.1.2. W を多様体として，W 上のベクトル場 X を考える．このときシンプレクティック多様体 T^*W 上の**ベクトル場** $X_\#$ **でその flow が** X **の flow の lift となるようなものがただひとつ存在**する．このベクトル場 $X_\#$ を X の lift とよぶ．さらに，α を標準的 1-from として $\omega = -d\alpha$ をシンプレクティック形式とする．このとき $H := \iota_{X_\#}\alpha$ **とすれば，**$X_\#$ **はこのハミルトニアンに対するハミルトンベクトル場**である．

Proof. $f : W \to W$ を微分同相としたときその lift $f_\# : T^*W \to T^*W$ が自然に $f_\#(x, \xi) = (f(x), ((df_x)^*)^{-1}\xi)$ として定まった．またこのとき $f_\#^*\alpha = \alpha$（よって $(f_\#)^*\omega = \omega$）．そこで X に対する微分同相を ϕ_t とする．この lift を考えると，T^*W 上の 1-parmeter 変換群 $\phi_{t\#}(x, \xi) = (\phi_t(x), (\phi_{t,x}^*)^{-1}\xi)$ が定まり，それを微分すればベクトル場 $X_\#$ が定まる．これは $L_{X_\#}\alpha = 0$ を満たす．よって

$$dH(Y) = (d\iota_{X_\#}\alpha)(Y) = (L_{X_\#}\alpha)(Y) - (\iota_{X_\#}d\alpha)(Y) = (\iota_{X_\#}\omega)(Y)$$

となる．

練習のため具体的に証明してみよう．局所座標で $X_\# = \sum X_i\partial x_i + Y_i\partial\xi_i$ とする．このベクトル場を満たす方程式として $\pi_*(X_\#) = X$, $L_{X_\#}\alpha = 0$ となるものを構成する．このとき

$$dH(Y) = (d\iota_{X_\#}\alpha)(Y) = (L_{X_\#}\alpha)(Y) - (\iota_{X_\#}d\alpha)(Y) = (\iota_{X_\#}\omega)(Y)$$

となる．そこで勝手なベクトル場を $Y = \sum a_i\partial x_i + b_i\partial\xi_i$ とする．このとき

$$\alpha(Y) = \sum \xi_i a_i, \quad X_\#(\alpha(Y)) = \sum \xi_j X_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} + Y_j a_j + Y_i \frac{\partial a_j}{\partial \xi_i}\xi_j$$

$$\alpha([X_\#, Y]) = \sum \xi_j X_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} + \sum Y_i \xi_j \frac{\partial a_j}{\partial \xi_i} - \sum a_j \xi_i \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \sum b_j \xi_i \frac{\partial X_i}{\partial \xi_j}$$

であるので，方程式として，$(L_{X_\#}\alpha)(Y) = X_\#(\alpha(Y)) - \alpha([X_\#, Y]) = 0$ をとけば，

$$\sum_i \xi_i \frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} = 0, \quad Y_j = -\sum_i \xi_i \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

となるので，$\pi_*(X_\#)=X$ を考えれば，$X_i(x,\xi)=X_i(x)$ であり，$X=\sum X_i(x)\partial x_i$ としたときに

$$X_\#=\sum X_i\partial x_i-\sum\xi_i\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\partial\xi_j$$

となる．特に，ハミルトニアンは

$$H=\iota_{X_\#}\alpha=\sum X_i\xi_i$$

である．

この局所座標で定義したものは，大域的に well-definde であることを確かめよう．$(x',\xi')=(x'(x),\xi'(x,\xi))=(x'(x),\sum\xi_i\frac{\partial x_i}{\partial x'_j})$ とすれば $X'_i=\sum X_j\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$，$\xi'_j=\sum\xi_i\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$ である．また

$$\frac{\partial}{\partial x'_i}=\sum\frac{\partial\xi_k}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial\xi_k}+\frac{\partial x_k}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_k}=\sum\xi'_l\frac{\partial}{\partial x'_i}(\frac{\partial x'_l}{\partial x_k})\frac{\partial}{\partial\xi_k}+\frac{\partial x_k}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_k}$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi'_i}=\sum\frac{\partial\xi_k}{\partial\xi'_i}\frac{\partial}{\partial\xi_k}=\sum\frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial\xi_k}$$

$$\begin{aligned}
&\sum X'_i\partial x'_i-\sum\xi'_i\frac{\partial X'_i}{\partial x'_j}\partial\xi'_j\\
=&\sum X_i\partial x_i+\sum X_l\frac{\partial x'_i}{\partial x_l}\xi'_j\frac{\partial}{\partial x'_i}(\frac{\partial x'_j}{\partial x_k})\partial\xi_k-\sum\xi'_i\frac{\partial X'_i}{\partial x'_j}\frac{\partial x'_j}{\partial x_k}\partial\xi_k\\
=&\sum X_i\partial x_i+\sum X_l\frac{\partial x'_i}{\partial x_l}\xi'_j\frac{\partial}{\partial x'_i}(\frac{\partial x'_j}{\partial x_k})\partial\xi_k-\sum\xi'_i(\frac{\partial X_l}{\partial x'_j}\frac{\partial x'_i}{\partial x_l}+X_l\frac{\partial}{\partial x'_j}(\frac{\partial x'_i}{\partial x_l}))\frac{\partial x'_j}{\partial x_k}\partial\xi_k\\
=&\sum X_i\partial x_i+\sum X_l\frac{\partial x'_i}{\partial x_l}\xi'_j\frac{\partial}{\partial x'_i}(\frac{\partial x'_j}{\partial x_k})\partial\xi_k-\sum\xi'_i(\frac{\partial X_l}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial x'_j}\frac{\partial x'_i}{\partial x_l}+X_l\frac{\partial}{\partial x'_j}(\frac{\partial x'_i}{\partial x_l}))\frac{\partial x'_j}{\partial x_k}\partial\xi_k\\
=&\sum X_i\partial x_i+\sum X_l\frac{\partial x'_i}{\partial x_l}\xi'_j\frac{\partial}{\partial x'_i}(\frac{\partial x'_j}{\partial x_k})\partial\xi_k-\sum\xi_l\frac{\partial X_l}{\partial x_s}\partial\xi_s-\sum\xi'_jX_l\frac{\partial}{\partial x'_i}(\frac{\partial x'_j}{\partial x_l})\frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\partial\xi_k\\
=&\sum X_i\partial x_i+\sum X_l\xi'_j\frac{\partial x'_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_p}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_p}(\frac{\partial x'_j}{\partial x_k})\partial\xi_k-\sum\xi_l\frac{\partial X_l}{\partial x_s}\partial\xi_s-\sum\xi'_jX_l\frac{\partial x_p}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_p}(\frac{\partial x'_j}{\partial x_l})\frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\partial\xi_k\\
=&\sum X_i\partial x_i+\sum X_p\xi'_j(\frac{\partial^2x'_j}{\partial x_px_k})\partial\xi_k-\sum\xi_l\frac{\partial X_l}{\partial x_s}\partial\xi_s-\sum\xi'_jX_l(\frac{\partial^2x'_j}{\partial x_px_l})\partial\xi_p\\
=&\sum X_i\partial x_i-\sum\xi_l\frac{\partial X_l}{\partial x_s}\partial\xi_s
\end{aligned}$$

□

Definition 7.1.1. M 上の ω を保存するベクトル場をシンプレクティックベクトル場という（$L_X\omega=0$）．これはシンプレクティック同相のリー群のリー環である．

また

$$\begin{cases} X \text{ はシンプレクティック} & \iff \iota_X\omega \text{ は } \mathbf{closed} \\ X \text{ はハミルトニアン} & \iff \iota_X\omega \text{ は } \mathbf{exact} \end{cases}$$

である．実際 $\iota_X\omega = df$ なら $X = X_f$ となり，$d\iota_X\omega = 0$ なら $L_X\omega = d\iota_X\omega + \iota_X d\omega = 0$ である．

局所的にはシンプレクティックベクトル場はハミルトンベクトル場である．$H^1(M) = 0$ なら大域的に成立．

EXAMPLE 7.1.3. $(M,\omega) = (T^2, d\theta_1 \wedge d\theta_2)$ とする．ベクトル場 $X_1 = \partial\theta_1$, $X_2 = \partial\theta_2$ を考えるとこれらはシンプレクティックベクトル場であるがハミルトンベクトル場ではない．

7.1.2 Brackets

X, Y をベクトル場とする．このときリー括弧 $[X,Y]$ は再びベクトル場である．

Theorem 7.1.1. X, Y をシンプレクティックベクトル場とする．このとき $[X,Y]$ はハミルトン関数 $\omega(Y,X) = -\omega(X,Y)$ に対するハミルトンベクトル場である．

Proof. まず勝手な微分形式 ϕ に対して，

$$\iota_{[X,Y]}\phi = L_X\iota_Y\phi - \iota_Y L_X\phi = [L_X, \iota_Y]\phi$$

が成立する．さらに，シンプレクティックベクトル場 X に対して $\iota_X\omega$ は閉形式であった．そこで

$$\begin{aligned} \iota_{[X,Y]}\omega &= L_X\iota_Y\omega - \iota_Y L_X\omega \\ &= d\iota_X\iota_Y\omega + \iota_X d\iota_Y\omega \\ &= d\iota_X\iota_Y\omega = d(\omega(Y,X)) \end{aligned}$$

となるので． □

Corollary 7.1.2. $\mathfrak{X}^{symp}(M)$, $\mathfrak{X}^{ham}(M)$ をシンプレクティックベクトル場の全体，ハミルトンベクトル場の全体とする．これらはリー環となる．さらに，次の部分リー環の包含関係が成立．

$$\mathfrak{X}^{ham}(M) \subset \mathfrak{X}^{symp}(M) \subset \mathfrak{X}(M).$$

Definition 7.1.2. f, g を滑らかな関数とし，**ポアソン括弧**を

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) = (\iota_{X_f}\omega)(X_g) = (df)(X_g) = X_g f = -X_f g$$

と定義する．ここで

$$X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$$

に注意する．実際 $X_{\omega(X_f,X_g)} = [X_g, X_f]$ であった．

Remark 7.1.1. ハミルトニアン f に対して，ハミルトンベクトル場 X_f に対する flow を ϕ_t とすれば，

$$\frac{d}{dt} g(\phi^t(p)) = \{g, f\}$$

となる．特に，

$$\frac{d}{dt} f(\phi^t(p)) = \{f, f\} = 0$$

は，f は flow の軌道 $\phi^t(p)$ 上で一定であることを述べている．

Theorem 7.1.3. ポアソン括弧はヤコビ律をみたす．つまり

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

である．さらに，ライプニッツ則をみたす．つまり

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

Proof. ライプニッツ則はポアソン括弧が微分で定義されているから明らかである．実際，

$$\begin{aligned}\{f, gh\} &= \omega(X_f, X_{gh}) = -\iota_{X_{gh}}\omega(X_f) \\ &= -(d(gh))(X_f) = -(X_f g)h - g(X_f h) = \{f, g\}h + g\{f, h\}\end{aligned}$$

となる（一般に，$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ というライプニッツ則を満たす線形写像があったなら，それはベクトル場であった．今の場合に $\{f, \cdot\}$ に対応するものが $-X_f$ である）．次に，ヤコビ律を証明しよう．

$$\{f, \{g, h\}\} = \omega(X_f, X_{\{g,h\}}) = \omega(X_f, [X_h, X_g])$$

である．そこで

$$
\begin{aligned}
0 =& d\omega(X_g, X_h, X_f) \\
=& \omega([X_g, X_h], X_f) - \omega([X_f, X_h], X_g) + \omega([X_f, X_g], X_h) \\
& + X_f\omega(X_g, X_h) - X_g\omega(X_f, X_h) + X_h\omega(X_f, X_g) \\
=& \omega([X_g, X_h], X_f) - \omega([X_f, X_h], X_g) + \omega([X_f, X_g], X_h) \\
& + \omega([X_f, X_g], X_h) - \omega([X_g, X_f], X_h) + \omega([X_h, X_f], X_g) \\
& + \omega(X_g, [X_f, X_h]) - \omega(X_f, [X_g, X_h]) + \omega(X_f, [X_h, X_g]) \\
=& 3\omega([X_g, X_h], X_f) - 3\omega([X_f, X_h], X_g) + 3\omega([X_f, X_g], X_h) \\
=& 3\{f, \{g, h\}\} + 3\{g, \{h, f\}\} + 3\{h, \{f, g\}\}
\end{aligned}
$$

となる．このように，ヤコビ律は $d\omega = 0$ から従うことに注意しよう． □

Definition 7.1.3. ポアソン代数 $(P, \{\cdot,\cdot\})$ とは．可換結合的代数でライプニッツ則をみたすリー環 $\{\cdot,\cdot\}$ が入っていること．

ポアソン代数をもつ多様体について section 8.4 で詳しく述べる．

EXAMPLE 7.1.4. (M, ω) がシンプレクティック多様体のとき $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ はポアソン代数である．またリー環の反準同形

$$C^\infty(M) \ni h \mapsto X_h \in \mathfrak{X}^{ham}(M) \subset \mathfrak{X}(M), \quad \{\cdot,\cdot\} \mapsto -[\cdot,\cdot]$$

を得る．

また，以上の議論から次のリー環の完全系列が成立する．

Proposition 7.1.4. 次はリー環の完全系列を与える．

$$
\begin{aligned}
&0 \to \mathfrak{X}^{ham}(M) \to \mathfrak{X}^{symp}(M) \to H^1(M, \mathbb{R}) \to 0 \\
&0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(M) \to \mathfrak{X}^{ham}(M) \to 0
\end{aligned}
$$

第一式は (3.4.1) のリー環版である．

7.1.3 古典力学

$\mathbb{R}^{2n}$ をユークリッド空間として座標を $(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ としてシンプレクティック形式を $\omega_0 = \sum dq_j \wedge dp_j$ とする．H をハミルトン関数とすると，

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)$$

である．よって積分曲線 $\rho_t = (q(t), p(t))$ は次で定まる

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

これをハミルトン方程式という．

また，ポアソン括弧 $\{f, g\}$ は

$$\{f, g\} = -X_f g = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}$$

となる．

Remark 7.1.2. $\mathbb{R}^{2n}$ のユークリッド計量を考えて，H の gradient を考える．

$$\nabla H = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial p_i})$$

さらに J を概複素構造とする，$J(\partial q_i) = \partial p_i$，$J(\partial p_i) = -\partial q_i$ である．これを使えば，$JX_H = \nabla H$，よって $X_H = -J\nabla H$ となる．

より一般のシンプレクティック多様体と compatible 複素構造があれば，

$$dH(Y) = \omega(X_H, Y) = g(JX_H, Y) = g(\nabla H, Y)$$

であるので $X_H = -J\nabla H$ である．つまりハミルトンベクトル場はハミルトニアン H の gradient を J で回転させたものである.（$\mathbb{R}^2$ なら９０度回転である）．例えば，gradient flow は H の level set と compatible な内積に関して直交する．ハミルトニアンの flow は level set 内にある．

$n = 3$ の場合に考える，**配位空間** $\mathbb{R}^3$ 内を動く質量 m の粒子を考え，ポテンシャルを $V(q)$ とする．座標を (q_1, q_2, q_3) とする．このとき粒子の運動方程式は

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = -\nabla V(q)$$

である．運動量を $p_i = m\frac{dq_i}{dt}$ と定義する．そしてエネルギー関数を

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}\|p\|^2 + V(q)$$

$T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ を**相空間**とする．このとき運動方程式はハミルトン方程式と同値である

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{p_i}{m} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = m\frac{d^2q_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

特に，エネルギー H は運動において保存される．

7.1.4 可積分系

Definition 7.1.4. ハミルトン系とは三つ組み (M, ω, H) のことである．ここで (M, ω) はシンプレクティック多様体で $H \in C^\infty(M)$ である（これをハミルトン関数という）．

Theorem 7.1.5. 関数 f に対して，$\{f, H\} = 0$ となるための必要十分条件は f が X_H の積分曲線に沿って定数．

Proof. ρ_t を X_H に対する flow とする．このとき

$$\frac{d}{dt}(\rho_t^* f) = \rho_t^* L_{X_H} f = \rho_t^* \omega(X_f, X_H) = \rho_t^* \{f, H\} = 0$$

□

この定理の関数 f を運動の**積分**（第一積分または運動の定数）という．一般に，ハミルトン系はハミルトン関数と独立な運動の積分をもつとはかぎらない．ここで関数 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ が独立とは $(df_1)_x, \cdots, (df_n)_x$ が線形独立であること．

ポアソン括弧について可換な第一積分があるとすると，各点 $p \in M$ に対して，それら関数のハミルトンベクトル場は T_pM の **isotropic** ベクトル空間を生成する

$$\omega(X_{f_i}, X_{f_j}) = \{f_i, f_j\} = 0$$

また isotropic ベクトル空間の最大次元は $n = \dim M/2$ であった（それ以上あると ω の非退化性に反する）．そして，$f_1, \cdots, f_n$ が独立な第一積分とすれば，各点で $X_{f_1}, \cdots, X_{f_n}$ はラグランジアン部分空間となる．

Definition 7.1.5. ハミルトン系 (M, ω, H) が**（完全）可積分**とは，$n = \dim M/2$ 個の独立かつポアソン括弧に対して可換な第一積分 $f_1 = H, f_2, \cdots, f_n$ を持つことである.（一次独立性は稠密な開集合上で一次独立とする）.

EXAMPLE 7.1.5. 単振り子，調和振動子など，2次元ハミルトン系は可積分である（ハミルトニアンのみでよい）.

EXAMPLE 7.1.6. ハミルトン系 (M, ω, H) で M が4次元とする．このとき H と独立な第一積分をもてば可積分である.（後でみる球面振り子が例）.

EXAMPLE 7.1.7. n 個の調和振動子を考える．$H = \sum p_k^2 + q_k^2$．このとき $\tau_k = p_k^2 + q_k^2$ は独立な第一積分で $\{\tau_i, \tau_j\} = 0$ をみたす．よって完全可積分である．

EXAMPLE 7.1.8. $\mathbb{R}^3$ におけるケプラー問題を考える．このとき相空間は $T^*(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ である．また適当な変換によりハミルトニアンは

$$H(q,p)=\frac{1}{2}\|p\|^2-\frac{1}{\|q\|}$$

である．このとき角運動量は

$$G_1=x_2y_3-x_3y_2,\quad G_2=x_3y_1-x_1y_3,\quad G_3=x_1y_2-x_2y_1$$

である．これらはポアソン可換ではない．しかし，ポアソン可換な第一積分として

$$F_1=H,\quad F_2=G_3,\quad F_3=G_1^2+G_2^2+G_3^2$$

が取れる．よって可積分である．

EXAMPLE 7.1.9. ハミルトンヤコビの方法で求積法でとけるハミルトン系は，正準座標で変換したとき，ハミルトニアンが $H(Q,P)=K(Q)$ となるものであった．このとき Q_i が独立な第一積分となる．

EXAMPLE 7.1.10. 戸田格子を考える．これは直線上に n 個の粒子があり，となり同士が指数的なバネで力が働いてるものである．ハミルトニアンは

$$H=\frac{1}{2}\sum y_i^2+\sum_{k=1}^{n-1}e^{x_k-x_{k+1}}$$

である．ただし $x_0=\infty$, $x_{n+1}=-\infty$ としている．このとき運動方程式は

$$x_k'=y_k,\quad y_k'=e^{x_{k-1}-x_k}-e^{x_k-x_{k+1}}$$

である．次の変数変化を行う．

$$a_k=\frac{1}{2}e^{x_k-x_{k+1}}/2,\quad b_k=-\frac{1}{2}y_k$$

とすれば，

$$a_k'=a_k(b_{k+1}-b_k)\quad b_k'=2(a_k^2-a_{k-1}^2)$$

となる．そこで

$$L=\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0\\ a_1 & b_2 & a_2 & \dots & 0\\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1}\\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0\\ -a_1 & 0 & a_2 & \dots & \vdots\\ 0 & -a_2 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1}\\ 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば，運動方程式は

$$\frac{dL}{dt} = [B, L]$$

とかける.（**Lax pair** という）．このとき L の固有値は第一積分である.

Proof. $U(t) = e^{tB(t)}$（$U(0) = 1$）とすれば，Lax 方程式（運動方程式）を使って，

$$\frac{d}{dt}(U^{-1}(t)L(t)U(t)) = 0$$

がわかる．よって $L(t) = U(t)L(0)U(t)^{-1}$ となるので，$L(0)$ の固有値と $L(t)$ の固有値は一致する．つまり，$L(t)$ の固有値を考えるとこれは flow 上で定数である．$F_k = \mathrm{tr}\, L^k$ が独立でポアソン可換な第一積分である．ポアソン可換であることの証明は可積分系の本を参照（例えば，高崎「可積分系の世界」[高崎]）． □

EXAMPLE 7.1.11. シンプレクティックトーリック多様体（後述）も完全可積分である.

さて (M, ω, H) を $2n$ 次元の可積分系とする．そして運動の積分を $f_1 = H, f_2, \cdots, f_n$ とする．$c \in \mathbb{R}^n$ を $f = (f_1, \cdots, f_n)$ の regular value とする．**このとき $f^{-1}(c)$ はラグランジアン部分多様体である.**

Proof. regular value なので $f^{-1}(c)$ の各点で $df \neq 0$ であるので陰関数定理から n 次元多様体である．X_{f_i} が張る部分空間を $L_f \subset T_pM$ とするとこれはラグランジアン部分空間であった．$f^{-1}(c)$ 上の接ベクトル X は $df_i(X) = 0$ をみたす．そこで

$$\omega(X_{f_i}, X) = (\iota_{X_{f_i}}\omega)(X) = Xf_i = 0$$

となる．よって $X \in (L_f)^{\omega_p} = L_f$ となるので X はラグランジアン部分空間 L_f に入る．よって ω を $f^{-1}(c)$ に制限するとゼロであり，$f^{-1}(c)$ はラグランジアン部分多様体である．また X_{f_i} が $f^{-1}(c)$ 上のベクトル場になることに注意する（これは $X_{f_i}f_j = 0$ であることからわかる）． □

Lemma 7.1.6. ハミルトンベクトル場 $X_{f_1}, \cdots, X_{f_n}$ が $f^{-1}(c)$ 上で完備であるとする．$f^{-1}(c)$ の連結成分は $\mathbb{R}^n$ に対する等質空間である．つまり $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{T}^k$ と微分同相である.

Proof. X_{f_i} に対する flow を考えれば $f^{-1}(c)$ 上に $\mathbb{R}$ の作用ができる．さらに $[X_{f_i}, X_{f_j}] = 0$ から $\mathbb{R}^n$ の作用となる．$\mathbb{R}^n$ の等質空間は $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{T}^k$ であることはよくしられた事実. □

$f^{-1}(c)$ の連結成分がコンパクトならそれはトーラスになるが，そのとき**リュウビルトーラス**とよぶ.（たとえば f が proper 写像ならよい）.

Theorem 7.1.7 (Arnord-Liouville)**.** (M, ω, H) を上記のような可積分系とする．レベル曲面 $f^{-1}(c)$ は M のラグランジアン部分多様体である

1. $f^{-1}(c)$ の点 p から出発する $X_{f_1}, \cdots, X_{f_n}$ の *flow* が完備なら，$f^{-1}(c)$ の連結成分は $\mathbb{R}^n$ の等質空間である．この *affine* 構造に関してその連結成分は座標 $\phi_1, \cdots, \phi_n$ で $X_{f_1}, \cdots, X_{f_n}$ の *flow* が線形となるようなものをもつ．これを *angle coordinate*（角座標）とよぶ．

2. 座標 $\psi_1, \cdots, \psi_n$ で角座標の補座標で，各 ψ_i は運動の積分（保存量）で $\phi_1, \cdots, \phi_n$, $\psi_1, \cdots, \psi_n$ がダルブー座標となるもの（$\omega = \sum d\phi_i \wedge d\psi_i$）が存在.（$\psi_1, \cdots, \psi_n$ を作用座標という）

この定理から可積分系の力学はとても単純である．この座標に関しては解が explicit にもとまる.（ただし，上のような座標を具体的に取ることは，簡単ではない）

Remark 7.1.3. 上の角座標を幾何学的に解釈すれば regular value c の近傍において $f : M \to \mathbb{R}^n$ がラグランジアンファイブレーションとなっていることである．つまり局所自明かつその fiber がラグランジアン多様体である．ファイバーに関する座標が角座標になっている．作用座標は $f : M \to \mathbb{R}^n$ における $\mathbb{R}^n$ の座標の存在を述べている．それらの座標は角座標とポアソン積で可換である．

定理を step に分けて証明していく（詳細は [伊藤]）．簡単のため，$f^{-1}(c)$ がコンパクト，つまりトーラスになる場合のみを議論する．

Proposition 7.1.8. (M, ω) をシンプレクティック多様体で，点 p において $(df_1, \cdots, df_n)$ は一次独立で，ポアソン可換とする．このとき局所座標 $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ をもつ p の近傍 (U, Φ) で

$$\Phi^*\omega = \sum dy_k \wedge dx_k \qquad f_i \circ \Phi = y_i$$

となるものが存在する．またこのとき $X_{f_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ である．

Proof. ダルブーの定理から $\Phi(0) = p, \Phi^*\omega = \sum dy_i \wedge dx_i$ となるものが存在する．$f_i \circ \Phi(x, y) = F_i$ としておく．仮定から $F = (F_1, \cdots, F_n)$ としたとき，$rank(F_x, F_y) = n$ である．（ここで $F_x = (\frac{\partial F_k}{\partial x_j})$ である）．

またポアソン可換の式を書くと，$1 \leq k, l \leq n$ に対して，

$$\sum \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \frac{\partial F_l}{\partial y_i} = \sum \frac{\partial F_k}{\partial y_i} \frac{\partial F_l}{\partial x_i}$$

となるので，

$$F_x{}^t F_y - F_y{}^t F_x = \left(\sum_i \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \frac{\partial F_l}{\partial y_i} - \sum_i \frac{\partial F_k}{\partial y_i} \frac{\partial F_l}{\partial x_i} \right)_{kl} = 0$$

が成立する．そこで，適当なシンプレクティック変換を行って $\det F_y \neq 0$ としてもかまわない（補題2.2.1）．陰関数定理から $\eta = F(x, y)$ を考えると，これは $y = G(x, \eta)$ と解ける．このとき G_x は対称行列である．実際，上の式を書き換えて

$$F_y^{-1}F_x - {}^tF_x{}^tF_y^{-1} = 0$$

なので $F_y^{-1}F_x$ は対称である．一方，$y = G(x, F(x, y))$ を x, y で微分して

$$0 = G_x + G_\eta F_x, \quad I = G_\eta F_y$$

を得る．よって $G_x = -G_\eta F_x = -F_y^{-1}F_x$ となり対称行列．そこで

$$W_x(x, \eta) = G(x, \eta)$$

という連立線形偏微分方程式を考えると，これは G_x 対称から

$$G_x = (\frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i})_{ij} = (\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j})_{ij}$$

が成立する．つまり，$W_{x_i x_j} = W_{x_j x_i}$ が成立するので可積分である．このような関数 W（$G_x = W$ の解 W）をとっておくと，$\det W_{x\eta} = \det G_\eta = \det F_y^{-1} \neq 0$ であり，

$$\xi = -W_\eta, \quad y = W_x = G(x, \eta)$$

とすれば，これは $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$ という正準変換の母関数である．よってこの (ξ, η) を座標とすれば求めるものである．（実際，$\eta = F(x, y)$ であった）． □

$\{X_{f_i}\}$ を考えてその flow を作る．このとき $f^{-1}(c_0)$ の点 p を勝手にとって

$$\mathbb{R}^n \ni t = (t_1, \cdots, t_n) \mapsto \phi_1^{t_1} \circ \cdots \circ \phi_n^{t_n}(p) \in f^{-1}(c_0)$$

を考える．つまり $\mathbb{R}^n$ の $f^{-1}(c_0)$ への作用である．これは局所自由（locally free）な作用であり，各点 $x \in f^{-1}(c_0)$ の軌道が，開部分多様体となることがわかる．そこで，$f^{-1}(c_0)$ はそのような開部分多様体の disjoint な和であるので，連結成分には $\mathbb{R}^n$ が推移的に作用しているとしてよい．さて，このとき

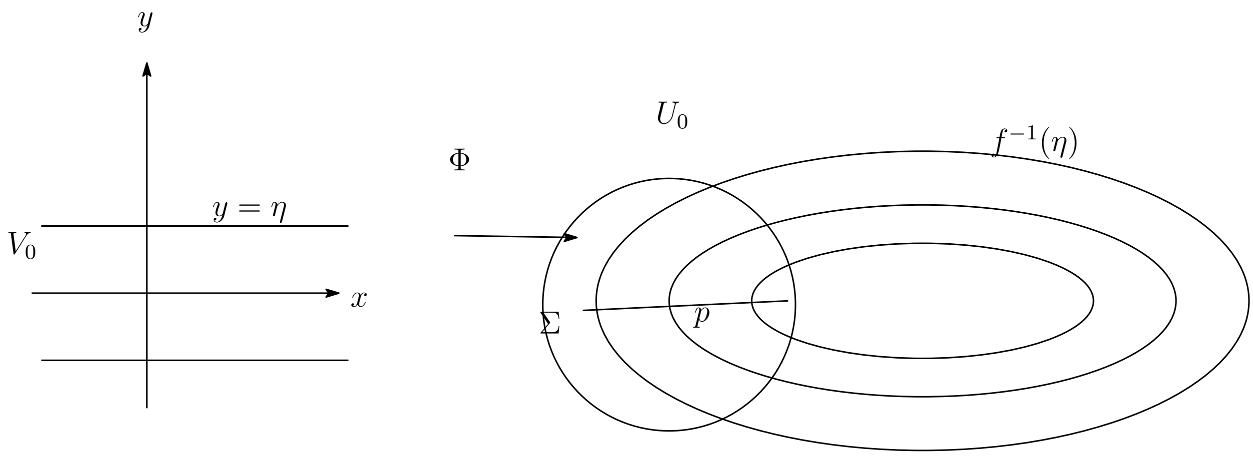
$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R}^n | \phi^t(p) = p\}$$

となる集合を考えると，$T_1, \cdots, T_s \in \mathbb{R}^n$ という独立な元が存在して

$$\Gamma = \{\sum m_j T_j \mid (m_1, \cdots, m_s) \in \mathbb{Z}^s\}$$

とかけ，$f^{-1}(c_0)$ と $T^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ が微分同相である．さらにコンパクトなので $f^{-1}(c_0) \cong T^n$ となる．(Γ は $\mathbb{R}^n$ 内の格子である．その格子の基底が $T_1, \cdots, T_n \in \mathbb{R}^n$ である）．

先ほどの命題の局所シンプレクティック変換 $\Phi : V_0 \ni (x, y) \mapsto q \in U_0$（$\Phi(0,0) = p$）をとっておく．$p \in f^{-1}(c_0)$ に対して周期 T_k が存在して $\phi^{T_k}(p) = p$ であった．



このときまず p の近傍 U_0 上の点 q に対しても同様に $\phi^{T'_k}(q) = q$ となる n 個の周期が存在することを証明する．

$$\Sigma := \{\Phi(0, y) | y \in W_0\}$$

（ここで W_0 は $\{0\} \times W_0 \subset V_0$ を満たす y 方向の $\mathbb{R}^n$ の近傍）．$q = \Sigma \cap f^{-1}(\eta) = \Phi(0, \eta)$ として次の補題が成立

Lemma 7.1.9. $\Phi(0, \eta) = q$ とする．このとき $\phi^{T'_k}(q) = q$ をみたす $T'_k \in \mathbb{R}^n$ が，次のように定まる．

$$T'_k = T_k - \frac{\partial Q_k}{\partial \eta}(\eta), \quad \frac{\partial Q_k}{\partial \eta}(0) = 0, \quad Q_k(0) = 0$$

ここで Q_k（$k = 1, \cdots, n$）は $\mathbb{R}^n$ の原点の近傍で定義された関数である．

Proof. T'_k は T_k に近いと考えて，

$$T'_k = T_k + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

とかける．この ξ を η の関数として表したい．また $\eta = 0$ のとき $\xi = 0$ となるようにしたい．

$\mathbb{R}^{2n}$ の原点の近傍 V_0 を取って，

$$\Phi_1 : V_0 \ni (\xi, \eta) \mapsto (x, y) = \Phi^{-1} \phi^{T_k} \Phi(\xi, \eta)$$

とする．ここで $\Phi_1(0,0) = \Phi^{-1}\phi^{T_k}\Phi(p) = (0,0)$ である．flow は $X_{f_i} = \partial x_i$ で定義されるので，$\Phi^{-1}\phi^t\Phi(x,y) = (x+t,y)$ となることに注意すれば，

$$\Phi^{-1}\phi^{T_k+\xi}\Phi(0,\eta) = \Phi^{-1}\phi^{T_k}\Phi(\xi,\eta)$$

をみたす．特に，$y=\eta$ をみたすシンプレクティック変換である（シンプレクティックであることは $\Phi^*\omega = \sum dx \wedge dy$ であることと，ϕ^t がシンプレクティック同相であることから）．

シンプレクティック変換なので，$dx\wedge dy + d\eta\wedge d\xi = 0$ となる．よって，$xdy+\eta d\xi = dS(\xi,y)$ となる関数 S（母関数）が局所的には存在する．このとき，

$$x_j = \frac{\partial S}{\partial y_j}, \quad \eta_j = \frac{\partial S}{\partial \xi_j}$$

となるのであった．さらに，$y=\eta$ であるので，η の関数 $Q_k(\eta)$ が存在して

$$S(\xi,y) = \langle \xi, y\rangle + Q_k(\eta), \quad Q_k(0) = 0$$

となり，

$$\Phi_1(\xi,\eta) = (\xi + \frac{\partial Q}{\partial \eta}(\eta), \eta)$$

となる．そこで，$T'_k = T_k - \frac{\partial Q}{\partial \eta}(\eta)$ とすれば，

$$\Phi^{-1}\phi^{T'_k}\Phi(0,\eta) = (0,\eta)$$

となるので $\phi^{T'_k}(q) = q$ を満たす．また $\Phi_1(0,0) = (0,0)$ から，$\frac{\partial Q}{\partial \eta}(0) = 0$ となる．　□

そこで次の写像を考える

$$\Phi_2 : \mathbb{R}^n \times W_0 \ni (\xi,\eta) \mapsto \phi^\xi\Phi(0,\eta) \in M$$

まずこのとき ϕ^ξ によって f_k は不変なので，

$$f_k \circ \Phi_2(\xi,\eta) = f_k \circ \Phi(0,\eta) = \eta$$

さらに，上の補題から $T'_k = T_k(\eta)$ として，

$$\Phi_2(\xi + T_k(\eta), \eta) = \Phi_2(\xi,\eta)$$

となる．よって微分同相

$$\Phi_2 : \mathbb{R}^n/\Gamma(\eta) \ni [\xi] \mapsto \Phi_2(\xi,\eta) \in f^{-1}(\eta)$$

を得る.（このように M のある点の近傍は $T^n \times W_0$ となる）.

さて，残った問題は．トーラスの周期が η によって変化してしまうことである．周期が一致していれば，Φ_2 が求めるもになる．そこで周期を正規化しよう．$\Phi_3 : (\phi, \psi) \mapsto (\xi, \eta)$ を次の母関数で定義されるシンプレクティック変換とする．

$$S = S(\phi, \eta) = \sum \frac{\phi_k}{2\pi}(\langle T_k, \eta\rangle - Q_k(\eta)), \quad \xi = \frac{\partial S}{\partial \eta}, \quad \psi = \frac{\partial S}{\partial \phi}$$

このとき，

$$\xi = \sum \frac{\phi_k}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}(\langle T_k, \eta\rangle - Q_k(\eta)), \quad \psi = {}^t(\langle T_1, \eta\rangle - Q_1(\eta), \cdots, \langle T_n, \eta\rangle - Q_n(\eta))$$

となる．

$$\xi + \frac{\partial}{\partial \eta}(\langle T_j, \eta\rangle - Q_j(\eta)) = \sum \frac{(\phi_k + 2\pi\delta_{kj})}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}(\langle T_k, \eta\rangle - Q_k(\eta))$$

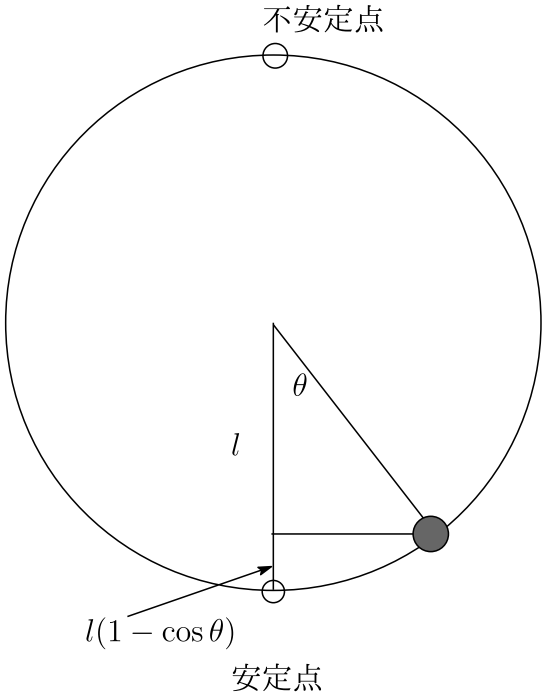
よって

$$\begin{aligned}\Phi_3(0, \psi) &= (0, \eta), \\ \Phi_3(\phi + 2\pi e_j, \psi) &= (\xi + \frac{\partial}{\partial \eta}(\langle T_j, \eta\rangle - Q_j(\eta)), \eta) = (\xi + T_j - \frac{\partial Q_j}{\partial \eta}, \eta) = (\xi + T_j(\eta), \eta)\end{aligned}$$

となる（$y = \eta = \psi$ が運動の保存量であった）．以上から定理が証明された．

7.1.5　単振子

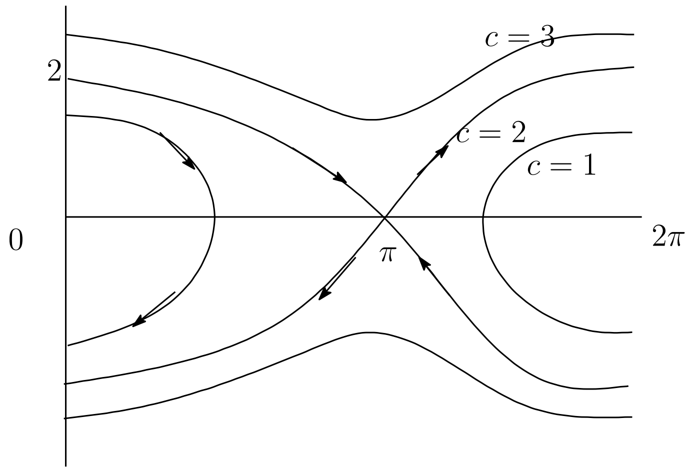
EXERCISE 7.1.1 (単振子). 単振り子を考えよう．垂直方向と長さ l の棒との間の（向きつき）角度を θ とする．また，ξ を T^*S^1 のファイバー座標で S^1 の角度から導かれるものとする．また，T^*S^1 を配位空間としている．



重力からくるポテンシャルエネルギーは $V(\theta) = ml(1-\cos\theta)$ である（重力定数は 1 としている）．また運動エネルギーは $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ である．ラグランジアンは $L = K - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - ml(1-\cos\theta)$ となる．ルジャンドル変換すれば $\xi = ml^2\dot{\theta}^2$（ここで $p = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}$ を計算した) となる．よってハミルトニアンは

$$H : T^*S^1 \mapsto \mathbb{R}, \quad H(\theta,\xi) = \frac{1}{2ml^2}\xi^2 + ml(1-\cos\theta)$$

以下簡単のため $l = m = 1$ とする．$H = \frac{1}{2}\xi^2 + (1-\cos\theta)$ である．このときハミルトン関数のレベル曲線を考える．



$0 < c < 2$ に対しては $H = c$ というレベル曲線は閉曲線の和（θ は $\mathbb{R}$ 上動かすと見て）になる．そしてこれを θ 軸へ射影すると長さ π 以下の区間になる．

このハミルトン関数の臨界点は二つの臨界点をもつ（$\theta \mod 2\pi$ としている）．実際

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \xi, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = \sin\theta$$

であるので．$(0,0), (\pi, 0)$ が臨界点である．前者の $H = 0$ となる臨界点を s とし，$H = 2$ となる臨界点を u とする．そして s が安定点，u が不安定点である．その意味はハミルトンベクトル場を考えると，

$$X_H = \xi\partial\theta - \sin\theta\partial\xi$$

であり，その積分曲線を考える．s に近い初期値から出発した軌道は s の近くにいる．u に近い点から出発した軌道は u から離れていくのである（ただし $H = 2$ 上の軌跡は別）．

物理的には安定点は，振子がとまっている状態（一番下にある状態）で，少し動かしてもそのその範囲で振動する．不安定点は振子が一番上にある状態である．

7.2 変分法

7.2.1 運動方程式

EXAMPLE 7.2.1. $\mathbb{R}^3$ 内の質量 m の点粒子と力 F を考える．このとき運動方程式（ニュートンの第二法則）．

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x(t))$$

である．さらに曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ に対する仕事を考える．

$$W_\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma(t)}{dt} dt$$

となる．さらに F がポテンシャル場であるとする，つまり W_γ は端点 $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$ にのみ依存するとする（べつの言い方をすればあるポテンシャル関数 U があって $F = -\frac{\partial U}{\partial x}$ となること）．このときポテンシャルエネルギーを

$$V(q) := W_\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

と定義する（ただし基点 $p_0 \in \mathbb{R}^3$ を固定している．このとき運動方程式は

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}(x(t))$$

となる．$\mathbb{R}^3$ 上（配位空間）の運動方程式が $T^*\mathbb{R}^3$ 上（相空間）のハミルトン方程式と同値であることはすでにみた．ここで $p_i = m\frac{dq_i}{dt}$，$H(q, p) = \frac{1}{2m}|p|^2 + V(q)$ である．よって，運動方程式を解くことは，このハミルトニアンに対するハミルトンベクトル場の積分曲線を求めることになる．

EXAMPLE 7.2.2. 太陽の周りの地球の運動を考える．太陽は原点で動かないとする．このとこポテンシャル関数は $V(x) = c/|x|$ であり，重力ポテンシャルという．そして地球の位置 $x(t)$ は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

となる．

7.2.2　最小作用の原理

EXAMPLE 7.2.3. $\mathbb{R}^3$ 内の n 粒子系を考える質量は $(m_1, \cdots, m_n)$ とする．配位空間は

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n}, \quad x_i \in \mathbb{R}^3$$

である．V をポテンシャルエネルギーとする．このときの運動方程式は

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}(t) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

である．道の空間

$$\mathcal{P} := \{\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^{3n} | \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$$

を考えたとき作用とは

$$A(\gamma) := \int_a^b (\sum \frac{m_i}{2} |\frac{d\gamma_i}{dt}(t)|^2 - V(\gamma(t)))dt$$

のことである．そして最小作用の原理とは**物理的な軌道は** $A(\gamma)$ **を最小にするものである**

拘束系の場合：粒子が部分多様体 M 内に制限されてる場合を考えるときは，$\gamma : [a,b] \to M$ $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$ となる道の全体を考え，そのときに $A(\gamma)$ を最小にするものが物理軌道である．

7.2.3　変分法

M を n 次元多様体として，TM を接束の多様体とする．また

$$F : TM \to \mathbb{R}$$

という関数を考える．$\gamma : [a,b] \to M$ を滑らかな曲線とすれば，これは自然に TM 内の曲線へと lift する．

$$\tilde{\gamma} : [a,b] \ni t \mapsto (\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t))TM$$

このとき γ の作用を

$$A(\gamma) := \int_a^b (\tilde{\gamma}^* F)(t)dt = \int_a^b F(\gamma(t), \frac{d\gamma(t)}{t})dt$$

により定義する．また道の空間としては

$$\mathcal{P}(a,b,p,q) := \{\gamma : [a,b] \to M | \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$$

を考える．この空間で作用を最小にする点（道）を求めよう．まず最小にする道はいつも局所的に最小である．つまり

Lemma 7.2.1. $\gamma_0 : [a,b] \to M$ が最小にする道とする．$[a_1, b_1] \subset [a,b]$ として $p_1 = \gamma_0(a_1), q_1 = \gamma_0(b_1)$ とする．このとき $\gamma_0 | [a_1, b_1]$ は $\mathcal{P}(a_1, b_1, p_1, q_1)$ で作用を最小にする道である．

さらに，最小にすることを道の摂動により**必要条件**を解くことができ，それが**オイラーラグランジュ方程式**である（証明は略．どの教科書にも載ってる）．すなわち

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma, \frac{d\gamma}{dt}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial v_i}(\gamma, \frac{d\gamma}{dt})$$

である．ここで TM の座標を $(x_1, \cdots, x_n, v_1, \cdots, v_n)$ としている（$\partial x_1, \cdots, \partial x_n$ による自明化に対する標準的な局所座標）．物理的軌道はこの方程式を満たすのである．

7.2.4　オイラーラグランジュ方程式の解き方

1. $F(x,v)$ が v に依存しない場合．この場合には
$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma, \frac{d\gamma}{dt}) = 0$$
となるので，γ_0 は F の臨界点の集合上（ここで F を TM 上の関数とみての臨界点）である．generic な F に対しては臨界点は孤立している，よって $\gamma_0(t)$ は定数曲線でなければならない．

2. $F(x,v)$ が v について，線形に依存している場合，つまり
$$F(x,v) = F_0(x) + \sum F_j(x)v_j$$
とする．このとき E-L 方程式の左辺は
$$\frac{\partial F_0}{\partial x_i}(\gamma(t)) + \sum \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\gamma(t))\frac{d\gamma_j}{dt}(t)$$
右辺は
$$\frac{d}{dt}F_i(\gamma(t)) = \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\gamma(t))\frac{d\gamma_j}{dt}(t)$$
となるので，
$$\frac{\partial F_0}{\partial x_i}(\gamma(t)) = \sum_j (\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\gamma(t)) - \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\gamma(t)))\frac{d\gamma_j}{dt}(t)$$
となる．そこで $n \times n$ 行列 $(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\gamma(t)) - \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\gamma(t)))$ が逆行列 $G_{ij}(x)$ をもつとすると
$$\frac{d\gamma_j}{dt}(t) = \sum G_{ji}(\gamma(t))\frac{\partial F_0}{\partial x_i}(\gamma(t))$$
を得る．これは一階微分方程式である．解の一意性から，局所的には各点 $\gamma(a) = p$ を通るただひとつの解をもつが（一階なので初期条件は位置だけでよい），この曲線上に $\gamma(b) = q$ がないなら $\mathcal{P}(a,b,p,q)$ に対するオイラーラグランジュ方程式の解が存在しない．よって，ちゃんとした解を持つためには，F に対して非線形という条件が必要になる．

3. そこで，ルジャンドル条件
$$\det(\frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial v_j}) \neq 0$$

という条件を仮定する．このとき $G_{ij} = (\frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial v_j})^{-1}$ とする．E-L 方程式は

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma, \frac{d\gamma}{dt}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial v_i}(\gamma, \frac{d\gamma}{dt}) = \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial v_i}(\gamma, \frac{d\gamma}{dt})\frac{d\gamma_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial v_j \partial v_i}(\gamma, \frac{d\gamma}{dt})\frac{d^2\gamma_j}{dt^2}$$

であるので

$$\frac{d^2\gamma_j}{dt^2} = \sum_i G_{ji}\frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma, \frac{d\gamma}{dt}) - \sum_{i,k} G_{ji}\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial v_i}(\gamma, \frac{d\gamma}{dt})\frac{d\gamma_k}{dt}$$

これは二階常微分方程式であり初期条件

$$\gamma(a) = p, \quad \frac{d\gamma}{dt}(a) = v$$

に対してただひとつの解をもつ．

7.2.5 最小性

上の解は局所的に最小を与えるかを考えよう（オイラーラグランジュ方程式は臨界点であるという必要条件であった）任意の (x, v) に対して $(\frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial v_j}) >> 0$ と仮定する．**つまり x を固定したときに，$v \to F(x, v)$ が狭義凸（strictly convex）とする．** このとき $\gamma_0 \in \mathcal{P}(a, b, p, q)$ がオイラーラグランジュ方程式を満たすとする．このとき γ_0 は $A(\gamma)$ を最小にするか？局所的には，次の定理により正しい．

Theorem 7.2.2. 上の γ_0 に対して，十分小さい $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ に対して，$\mathcal{P}(a_1, b_1, p_1, q_1)$ は局所的に最小である．

Proof. Wirtinger 不等式を思い出す．つまり $f \in C^1([a, b])$, $f(a) = f(b) = 0$ ならば，

$$\int_a^b |\frac{df}{dt}|^2 \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2}\int_a^b |f|^2 dt$$

が成立する．$\gamma_0 : [a, b] \to U$ が E-L 方程式を満たすとする．$c_i \in C^\infty([a, b]), c_i(a) = c_i(b) = 0$ となるものをとり $c = (c_1, \cdots, c_n)$ とする．$\gamma_\epsilon = \gamma_0 + \epsilon c \in \mathcal{P}(a, b, p, q)$ として $A_\epsilon = A(\gamma_\epsilon)$ とする．このとき E-L 方程式は $\frac{A_\epsilon}{d\epsilon} = 0$ と同値である．そこで

$$\begin{aligned}\frac{d^2 A_\epsilon}{d\epsilon^2}(0) = &\int_a^b \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\gamma_0, \frac{d\gamma_0}{dt}) c_i c_j dt \quad (1)\\ &+ \int_a^b \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial v_j}(\gamma_0, \frac{d\gamma_0}{dt}) c_i \frac{dc_j}{dt} dt \quad (2)\\ &+ \int_a^b \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial v_j}(\gamma_0, \frac{d\gamma_0}{dt}) \frac{dc_i}{dt}\frac{dc_j}{dt} dt \quad (3)\end{aligned}$$

となる，凸条件から

$$
\begin{aligned}
(3) &\geq K_3|\frac{dc}{dt}|^2_{L^2([a,b])} \\
|(1)| &\leq K_1|c|^2_{L^2([a,b])} \\
|(2)| &\leq K_2|c|_{L^2([a,b])}|\frac{dc}{dt}|_{L^2([a,b])}
\end{aligned}
$$

（$K_1, K_2, K_3 > 0$）．よって Wirtinger 不等式から $b-a$ が十分小さいなら，$(3) > |(1)|, |(2)|$ となる．よって γ_0 は局所的に最小． □

7.3　ルジャンドル変換

ルジャンドル変換はラグランジアンとハミルトニアンへの変換や，統計力学・熱力学などに用いられる．解析力学の場合に，ラグラジアン $L = T - V$（T は運動エネルギー，V はポテンシャル）から，$H = T + V$ という変換が現れる．この理由を一般論で解釈する．

7.3.1　1次元での例

一変数の場合に何が起こっているのかを見ていきたい．

関数 $F(x)$ が与えられたとき，その関数の情報を変換する方法として，フーリエ変換やラプラス変換が知られている．例えば，フーリエ変換 $\hat{F}(p) = \int e^{ipx}F(x)dx$ は，関数 $F(x)$ を**別の変数** p **に対する** $\hat{F}$ **へ変換**する．ルジャンドル変換も関数を変換する方法の一つである．

$F : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ を凸関数とする．このとき，

$$I^* = \{s \mid \sup_{x\in I}(sx - F(x)) < \infty\}$$

として，新しく I^* 上の関数を

$$G(s) = \sup_{x\in I}(sx - F(x))$$

として定義する．この関数の幾何学的な意味を考えてみよう．s を固定して，F が滑らかとして，$K(x) = sx - F(x)$ とすれば，

$$K'(x) = s - F'(x) = 0$$

のとき極小となる．F が凸（$F'' > 0$）であることから，このような点 x は I 上で一点のみである．それを x_0 とすれば，$s = F'(x_0)$ であり，

$$G(s) = sx_0 - F(x_0) = F'(x_0)x_0 - F(x_0) = -(F'(x_0)(0 - x_0) + F(x_0))$$

となる．右辺を見ると，傾き s をもつ $y = F(x)$ の接線（それは一つしかなく，点 x_0 で接する接線）の y 切片のマイナス倍が．$G(s)$ であることがわかる．

これを s の関数として表示するには，次のようにすればよい．簡単のため $I = \mathbb{R}$ としておく．$s = F'(x_0)$ に注目すると，$s = F'(x_0)$ となる点は一点のみなので，s は x の関数として，

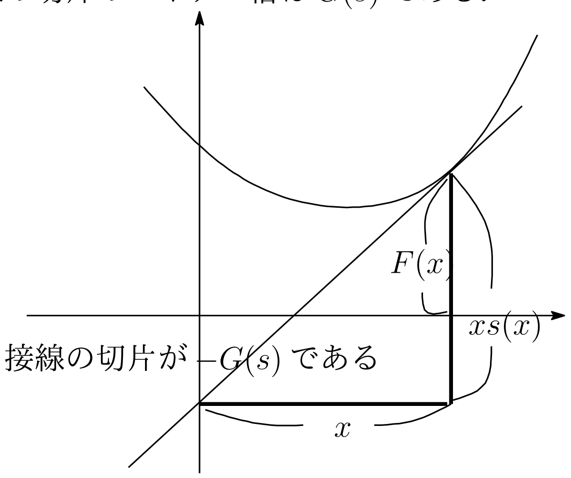
$$s(x) := \frac{dF}{dx}(x)$$

とかける．よって，

$$G(s) := sx(s) - F(x(s))$$

とするのである．

下の図を見ればわかるように，$(x, F(x))$ における，接線の傾きが s であり，接線の切片のマイナス倍は $G(s)$ である．



このように，**ルジャンドル変換とは，関数** $F(x)$ **の情報を，**dF/dx **を変数とした別の関数で表すこと**である．普通に考えると，陰関数定理より $F(x) = F(x(s))$ とすれば，F が s の関数として表せることになる．しかし，ルジャンドル変換は余分な $sx(s)$ を加えて（かつ $-F$ にして）$G(s) := sx(s) - F(x(s))$ とするのである．この変換の性質の一つは G の微分が x に戻ることである．

$$x(s) = \frac{dG}{ds}$$

Proof.

$$G'(s) = x(s) + sx'(s) - \frac{dF}{dx}(x(s))x'(s) = x(s)$$

□

さらに，

$$sx = F(x) + G(s)$$

という対称性がある．そこで，$x(s) = \frac{dG}{ds}$ であることを用いれば，ルジャンドル変換を2回施せば $F(x) \mapsto G(s) \mapsto F(x)$ ともとに戻ることがわかる．

また，F にはただ一つの最小が存在するので，$F_{\min} = F(x_{\min})$ とする．このとき，接線の傾きはゼロであるので，$s(x_{\min}) = 0$ となる．つまり，

$$F_{min} = -G(0)$$

となる．もちろん，対称性から

$$G_{\min} = -F(0)$$

これは，図からも明らかであり，接線の切片は $F(0)$ を超えることはないことに対応する．

7.3.2 Strict Convexity

V を n 次元ベクトル空間とする．$e_1, \cdots, e_n$ を V の基底として，対応する座標を $v_1, \cdots, v_n$ とする．$F = F(v_1, \cdots, v_n) : V \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする．$p \in V$ として $u = \sum u_i e_i \in V$ とする．F のヘッセ行列とは

$$(d^2F)_p(u) := \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial v_j}(p) u_i u_j$$

とう V 上の2次形式である．

Remark 7.3.1. $(d^2F)_p(u) = \frac{d^2}{dt^2} F(p + tu)|_{t=0}$ である．

Definition 7.3.1. F **が strictly convex（狭義凸）とは** $(d^2F)_p >> 0$ **（**$\forall p \in V$**）．つまり各点で正定値．**

(べつの定義：$\forall p, v \in V$ に対して直線 $\{p + xv | x \in \mathbb{R}\}$ 上に F を制限したら狭義凸．凸とは $\phi(tp + (1-t)q) \leq t\phi(p) + (1-t)\phi(q)$ となること）．

Theorem 7.3.1. *F を strictly convex 関数とする．このとき次は同値*

1. *F は臨界点をもつ．つまり $dF_p = 0$ なる点 p が存在．*

2. *F は，ある点で極小となる．*

3. F は，ただひとつの臨界点をもつ（それは大域的に最小）.

4. F は *proper* である.（つまり $F(p) \mapsto +\infty$（$p \mapsto \infty$））.

Proof. 一変数関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で $f''(x) > 0$ となるものに対してみていく.

1. ある点 x_0 に対して $f'(x_0) = 0$ とする．$f''(x_0) > 0$ なのでそれは極小である. またその逆も成立する.

2. ある点 x_0 で最小であるとすると，それは極小である．逆に極小であるとすると，$f''(x_0) > 0$ なので $f'(x)$ はゼロ点が一つのみである．よって極小点は最小点である.

3. $f'(x)$ のゼロ点は一つのみなので，最小点があるとすると，$x \to \pm\infty$ のとき $f(x) \to \infty$ である．逆も同様.

多変数の場合でも同様である（すべての方向に対して上の議論が成立するので）. □

Definition 7.3.2. 上の条件をみたす strictly convex 関数 F は，安定であるという.

EXAMPLE 7.3.1. $f(x) = e^x + ax$（ただし $x > 0$ の範囲で考える．というのも $x \to -\infty$ のとき $f'' \to 0$ となってしまうから）という関数を考える.

$$f''(x) = e^x > 0$$

であるのでこれは strictly convex 関数である．しかし $a > -1$ のときは stable ではない．最小もないし，$x = 0$ の近傍を考えると proper でない（コンパクトの逆像がコンパクトでない）ことがわかる.

$f(x) = x^2 + ax$（$x \in \mathbb{R}$）は任意の a に対して strictly convex かつ安定である.

7.3.3 ルジャンドル変換

F を V 上 strictly convex 関数とする．$l \in V^*$ に対して，

$$F_l : V \ni v \to F_l(v) = F(v) - l(v) \in \mathbb{R}$$

とする．$(d^2F)_p = (d^2F_l)_p$ なので，F が狭義凸と F_l が狭義凸は同値である.

Definition 7.3.3. 狭義凸関数 F の安定集合（stability set）を次で定義

$$S_F = \{l \in V^* |\ F_l \text{ が安定 } \} = \{l \in V^* |\ dF_p = l \text{ となる点 } p \in V \text{ が存在 } \}$$

（ここで F 自体が安定とは限らないことに注意）.

Definition 7.3.4. $F \in C^\infty(V)$ に対する**ルジャンドル変換**とは

$$L_F : V \ni p \mapsto dF_p \in V^* \cong T_p^* V$$

である（とりえあえず変数の変換．関数 F がどう変換されるかは後述）．

F が strictly convex であった．L_F は点 p の近傍を $L_F(p)$ の近傍へ微分同相にうつす．

Proof. L_F は正確に書けば

$$L_F(p) = (\frac{\partial F}{\partial v_1}(p), \cdots, \frac{\partial F}{\partial v_n}(p)) \in V^*$$

そこで L_F の点 p での微分を考える．$p + tu$ として代入して t について微分すればよい．このとき $d^2F_p(u)$ を得る．これは正であったので，逆関数定理から微分同相である． □

Theorem 7.3.2. S_F は V^* の**開凸集合**である．

Proof. $F = F_0$ が安定と仮定して，$0 \in V^*$ の十分小さな近傍が S_F に入ることを証明すればよい（ほかの点 $l \in S_F \subset V^*$ に対しては $\tilde{F} = F(v) - l(v)$ としてやればよい）．F が安定という仮定から p_0 を $(dF)_{p_0} = 0$ となる点とする．ルジャンドル変換

$$L_F : V \ni p \mapsto (dF)_p \in V^*$$

を考える．p_0 において $(dF)_{p_0} = 0$ であり，これは局所的には微分同相であったので，$|l| << \epsilon$ に対して $(dF)_p = l \in V^*$ となる p が p_0 の近傍に存在する．よって $F_l := F - l(\cdot)$ を微分すれば $(d(F_l))_p = 0$ となる点が存在．つまり F_l は安定である．

次に，凸であることを証明する．$l, l' \in S_F$ として，p, p' を $F_l, F_{l'}$ の最小点とする．つまり $dF_p = l, dF_{p'} = l'$ とする．また l, l' を結ぶ線分上の勝手な点を $(1-t)l + tl'$ とする．このとき $dF_{p''} = (1-t)l + tl'$ となるような点 p'' の存在を証明すればよい．

$$G = (1-t)F_l + tF_{l'} = (1-t)(F - l) + t(F - l') = F - (1-t)l - tl' : V \mapsto \mathbb{R}$$

という凸関数を考え，これが安定であることをしめせばよい．安定であることの必要十分条件は proper 写像であった．$(1-t)F_l$，$tF_{l'}$ が凸かつ proper なので，G も proper 写像である．よって，安定． □

Theorem 7.3.3. F を *strictly convex* とする．このとき

$$L_F : V \ni p \mapsto dF_p \in S_F \subset V^*$$

は微分同相である．

Proof. まず well-defined を証明する．$G(v) = F(v) - (dF_p)(v)$（$dF_p(v)$ は線形写像）とする．このとき

$$dG_q = dF_q - dF_p$$

である．これは $q = p$ とすれば，$dG = 0$ となるので，G は安定である．よって $dF_p \in S_F$ となる．次に局所的には微分同相であるので，全単射を証明すればよい．まず単射を述べる．$dF_p = dF_q$ であるとすると，p と q を結ぶ直線上で F が狭義凸ということに反する．全射を証明する $F(v) - l(v)$ が安定とする．その最小点を p_0 とすれば $dF_{p_0} - l = 0$ であるので $L_F(p_0) = l$ である． □

上の証明にあるように $l \in S_F$ に対して $p_0 = L_F^{-1}(l)$ は F_l の最小点をあらわす．つまり $L_F^{-1} : S_F \to V$ は，$l \in S_F$ に対して $F_l = F - l$ の最小点である p を対応される写像である．また点 p は $F(v) - dF_p(v)$ の最小点を与えること注意する．

Definition 7.3.5. F を狭義凸関数とする．F が quadratic growth at infinity とは，V 上の正定値二次形式 Q と定数 K があり，$F(p) \geq Q(p) - K$（$\forall p$）となること．

Proposition 7.3.4. 上の *quadratic growth at infinity* の F に対して，$S_F = V^*$ である．特に $L_F : V \to V^*$ は微分同相を与える．

Proof. $l \in V^*$ に対して $F(p) - l(p)$ を考える．$F(p) - l(p) \geq Q(p) - l(p) - K$ であるが Q は正定値行列で，あるので $Q(p) - l(p) - K$ は porper 関数である．よって $F(p) - l(p)$ は proper な狭義凸関数であるので，stable よって．$S_F = V^*$ である． □

さて，以上で舞台設定が終わり，ようやく F のルジャンドル変換を定義することにする．

Definition 7.3.6. F の双対関数 F^* を

$$F^* : S_F \to \mathbb{R}, \quad F^*(l) = -\min_{p \in V} F_l(p) = -\min_{p \in V}\{F(p) - l(p)\}$$

として定義する．

$L_F : V \ni p \mapsto dF_p \in S_F$ と合成してみると，

$$F^* \circ L_F : V \ni p \mapsto dF_p \mapsto -\min_{q \in V}(F(q) - dF_p \cdot q) = dF_p \cdot p - F(p) \in \mathbb{R}$$

となる．V と S_F は微分同相写像だったので，F^* は滑らかな写像である．別の書き方をすれば，

$$F^* : S_F \to \mathbb{R}, \quad F^*(l) = l \cdot p - F(p) = l \cdot L_F^{-1}(l) - F(L_F^{-1}(l))$$

以上から，次のような双対性が成立する．

$$F^*(l) + F(p) = l \cdot p, \quad L_F(p) = dF_p = l, \quad L_F^{-1}(l) = dF_l^* = p$$

となる．また，

以下は $L_F(p) = l$ でない場合の一般化された命題である．

Proposition 7.3.5. $F : V \to \mathbb{R}$ を *strictly convex* 関数で $F^* : S_F \to \mathbb{R}$ をその双対関数とする．$\forall p \in V$, $\forall l \in S_F$ に対して *Young* の不等式

$$F(p) + F^*(l) \geq l(p)$$

が成立する．

Proof.

$$F(p) - l(p) - \min_{q \in V} F_l(q) = F(p) - l(p) - \min_{q \in V}(F(q) - l(q)) \geq 0$$

であるので． □

以下で，ルジャンドル変換の双対性をシンプレクティック幾何の言葉で表現してみよう．

さて α_1 を $T^*V \cong V \times V^*$ を標準 1-form，α_2 を $T^*V^* \cong V^* \times V \cong V \times V^*$ 上の標準 1-form とする．これらの微分形式を $V \times V^*$ 上の微分形式だとみたとき，$\beta : V \times V^* \ni (p, l) \to l(p) \in \mathbb{R}$ という関数に対して

$$\alpha_1 = d\beta - \alpha_2$$

が成立する．

Proof. T^*V 上の α_1 を $\alpha_1 = \sum l_i dp_i$ とする（ここで l_i が $T_q^*V \cong V^*$ の座標である）．このとき $\alpha_2 = \sum p_i dl_i$ とかける．$\beta = \sum p_i l_i$ であるので $d\beta = \sum p_i dl_i + l_i dp_i$ であるので． □

$F : V \to \mathbb{R}$ を strictly convex とする．さらに F が quadratic growth at infinity とする．よって $S_F = V^*$ である．さらに Λ_F を L_F の $V \times V^*$ 内のグラフとする．このとき Λ_F は $\omega_1 = -d\alpha_1, \omega_2 = -d\alpha_2$ 両方に対してラグランジアン部分多様体である．

Proof. 上で述べたことから $\omega_1 = -\omega_2$ である．そこで Λ_F が ω_1 に対してラグランジアン部分多様体となることを確かめる．グラフは

$$\Lambda_F = (q, dF_q) \in V \times V^*$$

である．前に述べたように，μ を 1-form として，T^*X の部分多様体 (x, μ_x) がラグランジアンになるための必要十分条件は μ が閉形式であった．よって上は明らかに閉なのでラグランジアンである． □

$pr_1 : V \times V^* \to V$, $pr_2 : V \times V^* \to V^*$ とし，$pr_1 : \Lambda_F \to V$, $pr_2 : \Lambda_F \to V^*$ を考える．また $i : \Lambda_F \to V \times V^*$ を埋め込みとする．このとき

$$i^*\alpha_1 = d((pr_1)^*F)$$

が成立する．よって

$$i^*\alpha_2 = d(i^*\beta - (pr_1)^*F)) = d((pr_2)^*F^*)$$

を得る．

Proof. $\phi = (pr_1)^{-1} : V \to \Lambda_F \subset V \times V^*$ は section なので微分同相である．そこですべて V に引き戻して考えればよい．$i : \Lambda_F \to V \times V^*$ は $i\phi : V \to (q, dF_q) \in V \times V^*$ とみなす．このとき

$$\phi^* i^* \alpha_1 = \sum \frac{\partial F}{\partial q_i}(q) dq_i = dF$$

となる．よって $i^*\alpha_1 = dpr_1^*F = pr_1^*dF$ がいえる．次に $i^*\beta - pr_1^*F = pr_2^*F^*$ を証明する．

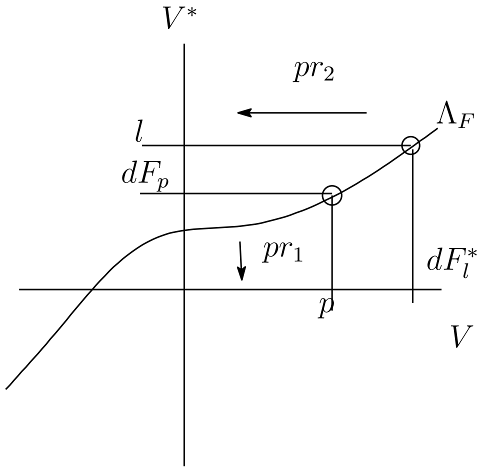
$$(\phi^* i^* \beta)(q) = \sum q_i \frac{\partial F}{\partial q_i}(q), \quad (\phi^* pr_1^* F)(q) = F(q), \quad (\phi^* pr_2^* F^*)(q) = -\min_{x \in V}(F(x) - \sum \frac{\partial F}{\partial q_i}(q) x_i)$$

最後の項は前に述べたように $\min_{x \in V}(F(x) - \sum \frac{\partial F}{\partial q_i}(q)x_i) = F(q) - \sum \frac{\partial F}{\partial q_i}(q) q_i$ であるので $i^*\beta - pr_1^*F = pr_2^*F^*$ となり，

$$i^*\alpha_2 = dpr_2^*F^*$$

が成立する．また，**この式は** Λ_F **が** dF^* **を** V^* **上の 1-from とみて** $\Lambda_F = (l, dF_l^*) \in V^* \times V^{**}$ **となることをあらわす．** □

上の証明で述べたように，F **に関するルジャンドル変換** $L_F : V \to V^*$ **の逆写像** L_F^{-1} **は双対関数** F^* **に対するルジャンドル変換**である．



Theorem 7.3.6. $L_F^{-1} = L_{F^*}$ である．（ただし，F が $S_F = V^*$ となるとき）．

7.3.4 変分問題への応用

M を多様体として $F : TM \to \mathbb{R}$ を関数（つまりラグランジアン）とする．$A(\gamma) = \int \tilde{\gamma}^* F$ を最小にする軌道が物理的軌道であった．

$p \in M$ として，

$$F_p = F|_{T_pM} : T_pM \to \mathbb{R}$$

とする．これが任意の p に対して strictly convex であるとする．また，簡単のため $S_{F_p} = T_p^*M$ と仮定する．このとき各接空間上でルジャンドル変換

$$L_{F_p} : T_pM \ni v \to d(F_p)_v \in T_p^*M$$

を得る．さらにその双対 F_p^* を得る．**fiberwise にルジャンドル変換を行って**

$$L : TM \to T^*M, \quad L|_{T_pM} := L_{F_p} : T_pM \to T_p^*M$$

および

$$H : T^*M \to \mathbb{R}, \quad H|_{T_p^*M}(\xi) = F_p^*(\xi) = \xi \cdot L_{F_p}^{-1}(\xi) - F_p(L_{F_p}^{-1}(\xi))$$

を得る．このとき L は微分同相であり，H は滑らかな関数である．（局所自明化して行えばよい）．

そこで

Theorem 7.3.7. γ がオイラーラグランジュ方程式を満たすための必要十分条件は $L\circ\tilde{\gamma}:[a,b]\to T^*M$ のハミルトンベクトル場の積分曲線になることである．このようにして，ルジャンドル変換により，ラグランジュ系とハミルトン系は同値である．

Proof. $(U,x_1,\cdots,x_n)$ を M の座標，$(TU,x_1,\cdots,x_n,v_1,\cdots,v_n)$ を TM の対応する座標，$(T^*U,x_1,\cdots,x_n,\xi_1,\cdots,\xi_n)$ を T^*M の対応する座標とする．

TU 上で $F=F(x,v)$ として，T^*U 上で $H=H(x,\xi)$ とする．またルジャンドル変換は

$$L:TU\ni(x,v)\mapsto(x,\xi)=(x,L_{F_x}(v))=(x,\frac{\partial F}{\partial v}(x,v))\in T^*U$$

である．(ξ は (x,v) の関数である．逆に v は (x,ξ) の関数である．また，これの対応で運動量座標 $\xi=\frac{\partial F}{\partial v}(x,v)$ が定まる）．そして T^*U 上の関数であるハミルトニアンは

$$H(x,\xi)=F_x^*(\xi)=\xi\cdot v-F(x,v),\quad L(x,v)=(x,\xi)$$

である．

ハミルトンベクトル場に対する積分曲線 $(x(t),\xi(t))$ は

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\xi}(x,\xi),\quad\frac{d\xi}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}(x,\xi)$$

を満たす．一方オイラーラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,\frac{dx}{dt})=\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial v}(x,\frac{dx}{dt})$$

である．

さて，ルジャンドル変換 $(x(t),\xi(t))=L(x(t),\frac{dx}{dt}(t))$ で移した場合には，ハミルトン方程式の第一式は自動的に満たされる．実際

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\xi}(x,\xi)=L_{F_x^*}(\xi)=L_{F_x}^{-1}(\xi),\iff\xi(t)=L_{F_x}(\frac{dx}{dt})=\frac{\partial F}{\partial v}(x(t),\frac{dx}{dt}(t))$$

となる．次に $(x,\xi)=L(x,v)$ のときに $\frac{\partial F}{\partial x}(x,v)=-\frac{\partial H}{\partial x}(x,\xi)$ となることを証明する．これには，$H(x,\xi)=\xi\cdot v-F(x,v)=H(x,\xi(x,v))=\xi(x,v)\cdot v-F(x,v)$ を x について微分する．ただし，$\xi=L_{F_x}(v)=\xi(x,v)$ とする．

$$\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot v-\frac{\partial F}{\partial x}$$

となるので成立する．

そこでハミルトン方程式の第二式が成立しているなら，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial v}(x(t),v(t)) &= \frac{d\xi(t)}{dt} \quad \text{by } \xi = L_{F_x}(v) \\ &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x,\xi) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,v)\end{aligned}$$

となるのでオイラーラグランジュ方程式をみたす．逆も同様．□

EXAMPLE 7.3.2. ちょとわかりずらいので，古典力学でのルジャンドル変換を書いてみる．ラグランジアンを $L(x,v):\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ とする．このとき，ルジャンドル変換を

$$\mathbb{R}^{2n}\ni(x,v)\mapsto(x,p)=(x,\frac{\partial L}{\partial v})\in\mathbb{R}^{2n}$$

と定義する．仮定としてこれが微分同相であるとする．定義からファイバーを保つ写像であるが，ファイバーごとの写像は x に依存している．つまり $v=v(x,p)$, $p=p(x,v)$ とかける．

ハミルトニアンを

$$H(x,p)=p\cdot v-L(x,v)=p\cdot v(x,p)-L(x,v(x,p))$$

と定義する（$H+L=pv$ という双対性！）

このときラグランジュ系とハミルトン系が同値であることをみてみる．

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}(x(t),p(t)),\quad \frac{dp(t)}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),p(t))\\ \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x(t),x'(t))&=\frac{\partial L}{\partial x}(x(t),x'(t))\end{aligned}$$

オイラーラグランジュ方程式が成立しているとすると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_i}(x(t),p(t)) &= v_i+\sum p_k\frac{\partial v_k}{\partial p_i}-\sum\frac{\partial L}{\partial v_k}\frac{\partial v_k}{\partial p_i}\\ &= v_i+\sum p_k\frac{\partial v_k}{\partial p_i}-\sum p_k\frac{\partial v_k}{\partial p_i}=v_i=x_i'(t)\end{aligned}$$

であるので，ハミルトン方程式の第一式は成立．次に，

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,p)=p\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_i}=-\frac{\partial L}{\partial x_i}(x,v(x,p))$$

であるので，

$$\frac{dp(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x(t),x'(t))=\frac{\partial L}{\partial x}(x(t),x'(t))=-\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),p(t))$$

となる．よって第二式も成立．

第8章　モーメント写像

完備シンプレクティックベクトル場があればシンプレクティック同相の 1 パラメータ変換群を得る．これは $\mathbb{R}$ のシンプレクティック多様体へのシンプレクティック作用とみなせる．ある場合には，シンプレクティックベクトル場は，あるハミルトン関数に対するハミルトンベクトル場となることがあり，これを $\mathbb{R}$ のハミルトン作用という．より一般のリー群がシンプレクティック多様体にシンプレクティック作用している場合に，これはハミルトン作用（＋同変性）になるであろうか？これに対する答えがモーメント写像である．これは古典的な回転群に対する角運動量の一般化とも言える．この章では，リー群の多様体への作用および軌道の基本事項（slice 定理）を説明し，モーメント写像を定義する．

8.1　作用

8.1.1　滑らかな作用

M を多様体として．X を完備ベクトル場とする．ρ_t を対応する変換群とする．$\rho_t(p)$ は次をみたす

$$\rho_0(p) = p \quad \frac{d\rho_t(p)}{dt} = X(\rho_t(p))$$

である．また $\rho_t\rho_s = \rho_{t+s}$, $\rho_t^{-1} = \rho_{-t}$ をみたす（解の一意性から）．つまり

$$\mathbb{R} \mapsto Diff(M)$$

は群準同形である．

G をリー群として，M への作用があるとする．つまり

$$\psi : G \ni g \mapsto \psi_g \in Diff(M)$$

が群準同形（ここで左作用を考えている．右作用の場合には歪準同形である）．このとき evaluation 写像とは

$$ev_\psi : M \times G \ni (p, g) \mapsto \psi_g(p) \in M$$

である．この写像が滑らかなとき，作用が滑らかであるという．

EXAMPLE 8.1.1. X を完備ベクトル場として，

$$\rho : \mathbb{R} \ni t \mapsto \rho_t = \exp tX \in Diff(M)$$

を考えると，これは滑らかな作用である．

逆に $\mathbb{R}$ の M への作用は，ある完備ベクトル場によって定義される．（それは単に微分すればよい $X_p = \frac{d\psi_t(p)}{dt}|_{t=0}$）．

8.1.2　シンプレクティックとハミルトン作用

Definition 8.1.1. (M, ω) をシンプレクティック多様体とする．$\psi : G \to Diff(M)$ がシンプレクティック作用とは．

$$\psi : G \to Symp(M, \omega) \subset Diff(M)$$

となること．

EXAMPLE 8.1.2. 完備なシンプレクティックベクトル場の全体と $\mathbb{R}$ の M へのシンプレクティック作用は一対一に対応する．

Proof. シンプレクティックベクトル場 X があれば，シンプレクティック同相を引き起こす $\mathbb{R} \ni t \mapsto \psi_t \in Symp(M, \omega)$．逆に $\mathbb{R}$ の M へのシンプレクティック作用 ψ_t があるとする，このときこれを微分すればシンプレクティックベクトル場を得る． □

EXAMPLE 8.1.3. $\mathbb{R}^{2n}$ 上で $\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$ を考える．ベクトル場として

$$X = -\frac{\partial}{\partial y_1}$$

を考える．X から生成される作用の軌道は y_1 軸に並行な直線である．

このベクトル場は $H = x_1$ としたときのハミルトンベクトル場であるので，よってシンプレクティックベクトル場である．

EXAMPLE 8.1.4. S^2 上で $\omega = d\theta \wedge dh$ を考える．$X = \frac{\partial}{\partial \theta}$ とすると，軌道は水平方向の円である $\{(\theta + t, h) | t \in \mathbb{R}\}$．これは 2π で閉じている．そこで

$$\psi : S^1 \ni t \mapsto h \text{ 軸のまわりの角度 } t \text{ の回転} \in Symp(S^2, \omega)$$

をえる．これがシンプレクティックであることは $H = h$ としたときのハミルトンベクトル場であることからわかる．

Definition 8.1.2. S^1 **or** $\mathbb{R}$ **の** (M,ω) **の作用** ψ **がハミルトニアン作用とは** ψ **で生成されるベクトル場がハミルトンベクトル場であること．言い換えると，**ψ **を微分したベクトル場** X **に対して，**$H: M \to \mathbb{R}$ **があって** $dH = \iota_X \omega$ **となる．**

（ハミルトニアン作用とシンプレクティック作用の違いに注意せよ）

一般の G に対しては，ハミルトン関数を一般化した，モーメント写像をつかう必要がある．

8.1.3 随伴表現と余随伴 (coadjoint) 表現

G をリー群とする．

$$L_g : G \ni a \mapsto ga \in G$$

で左作用が定まる．X をベクトル場としてこれが左不変とは $(L_g)_* X = X$ となるもの．$\mathfrak{g}$ を左不変ベクトル場全体とし，これはリー環になる．$T_e G = \mathfrak{g}$ であることに注意．

$$G \ni g \mapsto \psi_g \in Diff(G)$$

を $\psi_g(a) = gag^{-1}$ で定義すると，この原点での微分を考えると $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ という写像を得る．G の $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現

$$Ad : G \ni g \mapsto Ad_g \in GL(\mathfrak{g})$$

が定まる．具体的に行列群でかけば，

$$Ad_g(Y) = gYg^{-1}$$

である．さらに $X \in \mathfrak{g}$ として，$g = \exp tX$ として，微分すると

$$\frac{d}{dt} Ad_{\exp tX}(Y)|_{t=0} = [X,Y]$$

となる．

さて，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ の間の自然なペアリングを考える．

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \ni (\xi, X) \mapsto \langle \xi, X \rangle = \xi(X) \in \mathbb{R}$$

このとき $\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対して**余随伴表現** $Ad_g^* \xi$ を

$$\langle Ad_g^* \xi, X \rangle = \langle \xi, Ad_{g^{-1}} X \rangle$$

により定義する（g^{-1} にしてるのは左表現にするため．$Ad_g^* Ad_h^* = Ad_{gh}^*$）．以上で余随伴表現

$$Ad^* : G \ni g \mapsto Ad_g^* \in GL(\mathfrak{g}^*)$$

が定義できた．

8.1.4　例：エルミート行列への $U(n)$ の作用

$\mathcal{H}$ を $n\times n$ のエルミート行列全体とする．この空間には $U(n)$ を $A\cdot\xi = A\xi A^{-1}$ で作用させることができる．歪エルミート行列はエルミート行列を i 倍すればよいから，これは余随伴表現とも思える．(歪エルミート行列全体は $U(n)$ のリー環．また内積をいれて，リー環の双対空間と同一視)．

$\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して，$\mathcal{H}_\lambda$ を $n\times n$ エルミート行列で固有値が λ であるもの全体とする．ただし，$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n$ とする．

1. **$U(n)$ の作用の軌道は $\mathcal{H}_\lambda$ である**

   Proof. $\xi\in\mathcal{H}_\lambda$ に対して，$A\cdot\xi\in\mathcal{H}_\lambda$ であることはすぐにわかる．またエルミート行列はユニタリ行列により対角化可能であった．よって軌道は $\mathcal{H}_\lambda$ である． □

2. 固定した λ に対して $\mathcal{H}_\lambda$ の stabilizer を考える．一般のエルミート行列であるすべての固有値が異なる場合（$\lambda_i\neq\lambda_j$ となる場合）には，stabilizer は diagonal なユニタリ行列であるトーラス $\mathcal{T}^n$ となる．また，aI に対する stabilizer は $U(n)$ 全体となる．このように**固有値の重複度によって，stabilizer は変わる**ことになる．($H_\lambda = U(n)/G_\lambda$ とかけるが，この stabilizerG_λ は λ によって変化する)

3. $\mathcal{H}$ 上で対称 2 次形式 $(X,Y)\mapsto\mathrm{tr}\,(XY)$ を考えると，これは非退化である（キリング形式）．これは $i\mathcal{H}$ が歪対称行列であるので，ユニタリ群の接空間とみなせる．

   さて，$\xi\in\mathcal{H}$ に対して **$\mathfrak{u}(n)$ 上の交代形式**を

   $$\omega_\xi(X,Y) = i\mathrm{tr}\,([X,Y]\xi)\quad X,Y\in i\mathcal{H}$$

   により定義する．このとき

   $$\omega_\xi(X,Y) = i\mathrm{tr}\,(XY\xi - YX\xi) = i\mathrm{tr}\,(X(Y\xi-\xi Y))$$

   である．ここで $Y\xi-\xi Y\in\mathcal{H}$ である．よって $\mathrm{tr}(XY)$ の非退化性から $\ker\omega_\xi = K_\xi = \{Y\in\mathfrak{u}(n)|[Y,\xi]=0\}$ となる．

4. ξ の stabilizer のリー環は K_ξ である．よって，ω_ξ は $\mathcal{H}_\lambda$ 上の非退化 2-form を導き，さらにこれは閉である．特に，**すべての軌道 $\mathcal{H}_\lambda$ はコンパクトシンプレクティック多様体**である．

Proof. $A\xi A^{-1} = \xi$ を微分すれば $Y\xi - \xi Y = 0$ となるので，stablizer のリー環は K_ξ である．

さて，まず $\mathcal{H}_\lambda$ の原点 λ の接空間上で 2-from を定義する．$T_\lambda\mathcal{H}_\lambda$ の元としては $X, Y \in \mathfrak{u}(n)$ の基本ベクトル場をとることができる．つまり $\exp tX\lambda \exp -tX$ は λ を通る $\mathcal{H}_\lambda$ 内の曲線であり，これを微分すれば，

$$X^*_\lambda = X\lambda - \lambda X$$

が λ における接ベクトルであり，逆に任意の接ベクトルはこの形である．K_λ に入る X の基本ベクトル場はもちろんゼロ．つまり

$$\mathfrak{u}(n)/K_\lambda \cong T_\lambda\mathcal{H}_\lambda, \quad X \mapsto [X, \lambda]$$

である．そこで，

$$\omega_\lambda(X, Y) = i\mathrm{tr}\left([X, Y]\lambda\right)$$

と定義すれば well-defined である．また，非退化であることがわかる．実際 $\omega_\lambda(X, Y) = 0$（$\forall Y \in \mathfrak{u}(n)$）とすると，$X\lambda - \lambda X = 0$ となるので，$\mathcal{H}_\lambda$ の接ベクトルとしてはゼロである．次に $\xi \in \mathcal{H}_\lambda$ 上へこの ω を拡張する．これは $\xi = g\lambda g^{-1} \in \mathcal{H}_\lambda$ として，ξ における接ベクトルは，$\exp tXg\lambda g^{-1} \exp -tX$ を微分した

$$X^*_\xi = Xg\lambda g^{-1} - g\lambda g^{-1}X = X\xi - \xi X$$

である．また

$$g_* X^*_\lambda = g(X\lambda - \lambda X)g^{-1} = gXg^{-1}\xi - \xi gXg^{-1}$$

であるので $X^*_\xi = g_*(g^{-1}Xg)^*_\lambda$ が成立．そこで

$$\omega_\xi(g_* X^*_\lambda, g_* Y^*_\lambda) := \omega_\lambda(X^*_\lambda, Y^*_\lambda) = i\mathrm{tr}\left([X, Y]\lambda\right)$$

となる（つまり ω_λ を g の作用で ξ へ移したものである）．特に，

$$\omega_\xi(X^*_\xi, Y^*_\xi) = i\mathrm{tr}\left([g^{-1}Xg, g^{-1}Yg]\lambda\right) = i\mathrm{tr}\left([X, Y]g\lambda g^{-1}\right) = i\mathrm{tr}\left([X, Y]\xi\right)$$

を得る．（これは ω が G の作用で不変であることを述べている．言い換えると，G の作用はシンプレクティック作用である）．

閉形式であることを確かめる．ベクトル場として $X, Y, Z \in \mathfrak{u}(n)$ からみちびかれる X^*, Y^*, Z^* を考える．このとき

$$\begin{aligned} X^*\omega_\lambda(Y^*, Z^*) &= X^* i\mathrm{tr}\left([Y, Z]\lambda\right) = \frac{d}{dt} i\mathrm{tr}\left([Y, Z]\exp tX\lambda \exp -tX\right) \\ &= i\mathrm{tr}\left([Y, Z][X, \lambda]\right) = -i\mathrm{tr}\left([X, [Y, Z]]\lambda\right) \end{aligned}$$

となることに注意すれば，

$$\begin{aligned}(d\omega(X,Y,Z))_\lambda =&\omega_\lambda([X,Y],Z)-\omega_\lambda([X,Z],Y)+\omega_\lambda([Y,Z],X)\\ &+X\omega_\lambda(Y,Z)-Y\omega_\lambda(X,Z)+Z\omega_\lambda(X,Y)\\ =&2i\mathrm{tr}\left([[X,Y],Z]\lambda\right)-2i\mathrm{tr}\left([[X,Z],Y]\lambda\right)+2i\mathrm{tr}\left([[Y,Z],X]\lambda\right)=0\end{aligned}$$

となる（あとは $U(n)$ の作用でうつして各点で $d\omega=0$ を得る）． □

5. $\mathcal{H}_\lambda$ がどのようになるかを考える．まず，$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_1)$ と固有値がすべて一致する場合には，$\mathcal{H}_\lambda=\{pt\}$ である．次に，$\lambda_1\neq\lambda_2=\ldots=\lambda_n$ の場合を考える．λ_1 に対する固有空間は直線であり λ_2 に対する固有空間はそれにエルミート直交する超平面である．このとき $\mathcal{H}_\lambda=\mathbb{CP}^{n-1}$ となる．また固有値がすべて異なる場合には satbilzier は $\mathbb{T}^n$ であった，よって full flag である $U(n)/\mathbb{T}^n$ を得る．

Proof. stabilizer を調べると，つまり $A\lambda=\lambda A$ である．これは $\mathfrak{u}(1)\oplus\mathfrak{u}(n)$ となる．または群の作用での stablilizer を調べると $U(1)\times U(n)$ になる．よって $\mathcal{H}_\lambda=\mathbb{CP}^{n-1}$ となる．他も同様．

実際に isotopy 群を計算してみる．二つの異なる固有値 λ,μ を持つする．

$$\begin{pmatrix}\lambda A & \mu B\\ \lambda C & \mu D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda I & 0\\ 0 & \mu I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda I & 0\\ 0 & \mu I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda A & \lambda B\\ \mu C & \mu D\end{pmatrix}$$

となるが $\lambda\neq\mu$ なら，$B=C=0$ となり，$A\in U(m),D\in U(n-m)$ である．よって，等質空間として $U(n)/U(m)\times U(n-m)$ を得る． □

このように重複度を変えずに固有値の値を変化させれば，$\mathbb{CP}^{n-1}$ 上にシンプレクティック形式をたくさんつくれる．一般の $\mathcal{H}_\lambda$ は一般化旗多様体となる．

8.2 Orbit に関する基本事項

G が M の作用しているときの orbit space についての基礎事項．ここの話は [Audin] に基づいている．

8.2.1 作用と軌道

Definition 8.2.1. G の $p \in M$ を通る**軌道 (orbit)** とは $\{\psi_g(p)|g \in G\}$ のこと．**stabilizer** (or isotropy）とは $G_p := \{g \in G|\psi_g(p) = p\}$ のことである．

Definition 8.2.2. G の作用が

- **推移的**とは，軌道が一つのみ．つまり，M の任意の 2 点は，G の作用で移れる．$\forall p, q \in M$，$\exists g \in G$ such that $\psi_g(p) = q$.
- **自由**とは，すべての strabilizer が $\{e\}$ のこと（軌道はすべて G になる）.
- **局所自由**とはすべての **stabilizer** が離散群となること.
- **効果的に作用してる**とは，
$$\cap_{p \in M} G_p = \{e\}$$
となること．つまり，$g \neq e$ なら $g \notin \cap_{p \in M} G_p$ であり，$\exists p \in M$ such that $gp \neq p$ となる．つまり，単位元でない任意の $g \in G$ は M の点を少なくとも一点は動かす.

1. q が p の軌道に入れば，G_p, G_q は共役な部分群である．そこで，G_p の共役類を (G_p) と書く．このとき軌道 $G \cdot p$ を **type**(G_p) の軌道という．これで軌道の種類を分類する.
2. 写像
$$G/G_p \ni g \to gp \in M$$
を軌道写像とよぶ．これは単射，はめ込みである．しかし，一般には埋め込みにならない

   EXAMPLE 8.2.1. $\mathbb{R}$ の $\mathbb{T}^2$ への作用
$$t \cdot (x, y) = (x + t, y + \alpha t)$$
の軌道は α が無理数なら埋め込み（像への同相．像には誘導位相を入れてる）ではない.

   EXAMPLE 8.2.2. G がコンパクトなら，軌道は部分多様体（proper かつ単射かつはめ込み）になる.

   はめ込みになることなどについて，あとで詳しく述べる.

3. $\cap G_p$ は G の閉正規部分群であり，商群 $G/\cap G_p$ の作用を考えると，効果的作用になる．また，概効果的作用とは $\cap G_p$ が離散部分群となること

EXAMPLE 8.2.3. S^1 の S^3 への作用

$$t \cdot (z_1, z_2) = (t^{m_1} z_1, t^{m_2} z_2), \quad (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$$

を考えるとき m_1, m_2 が互いに素なら効果的.

Proof. (z_1, z_2) の satbilizer は $(t^{m_1} z_1, t^{m_2} z_2) = (z_1, z_2)$ となるものである．$(1, 0)$ の場合には，$t^{m_1} = 1$ となるもの，$(0, 1)$ の場合には $t^{m_2} = 1$ となるものである．そのほかの点では $t^{m_1} = 1 = t^{m_2}$ となるものである．つまり $\mathbb{Z}_{m_1} \cap \mathbb{Z}_{m_2}$ であるので，互いに素なら $\mathbb{Z}_{m_1} \cap \mathbb{Z}_{m_2} = \{1\}$ となる． □

EXAMPLE 8.2.4. G が単純（非自明かつ連結な正規部分群がない）なら，その作用は概効果的作用（自明作用を除く）.

4. p, q が同じ軌道にはいるとき $p \sim q$ として同値関係を入れれば

$$\pi : M \ni p \mapsto \text{orbit throgh } p \in M/G$$

として $M/\sim = M/G$ という軌道空間が定まる.

この M/G のには π が連続となるもので最も弱い位相を入れる（商位相）．つまり $U \subset M/G$ が開とは $\pi^{-1}(U)$ が M 内で開と定義する．しかし，多様体となるとは限らない.

EXAMPLE 8.2.5. $G = \mathbb{R}$ が $M = \mathbb{R}$ に $t \mapsto \psi_t = \text{multiplication by } e^t$ で作用しているとする．このときの軌道は $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \{0\}$ であるが，$\{0\}$ に対応する軌道空間は開集合でない．よって軌道空間（３点）はハウスドルフではない.

EXAMPLE 8.2.6. $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を $M = \mathbb{C}^n$ に掛け算で作用させる．このとき

$$M/G = \mathbb{CP}^{n-1} \cup \{0\}$$

である．商位相で $\mathbb{CP}^{n-1}$ には通常の位相が入る．M/G の商位相で $\{0\} \in M/G$ を含む開集合は M/G 全体となり，これもハウスドルフではない.

しかし，$\mathbb{C}^n$ から $\{0\}$ を取り去れば軌道空間は $\mathbb{CP}^{n-1}$ であり，ハウスドルフ空間，さらにコンパクトになる.

$$\mathbb{CP}^{n-1} = (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = S^{2n-1}/S^1$$

EXAMPLE 8.2.7. G がコンパクトなら，M/G はハウスドルフ空間で，$M \to M/G$ は閉写像かつ **proper** 写像である.（局所座標がとれるわけではないので，多様体になるかはわからない）これは次の subsection での定理の証明を参照.

8.2.2 slice 定理その 1

さて，われわれは次の定理を後で使う．

Theorem 8.2.1. G をコンパクト群で M に自由に作用しているとする．このとき M/G は多様体であり，$\pi : M \to M/G$ は主 G 束になる．

この定理を今から証明する．まず次の命題を証明する

Proposition 8.2.2. G をコンパクトとする．$p \in M$ への作用が自由とする．このとき p を通る G 軌道は G と微分同相であり，M 内のコンパクト部分多様体である（この本の部分多様体の定義は閉埋め込みのこと）．

Proof. まず作用は滑らかであった．つまり $ev : G \times M \ni (g,p) \mapsto g \cdot p \in M$ が滑らか．写像 $ev_p : G \ni g \to g \cdot p \in M$ が求める埋め込みを与える．ev_p の像が p を通る G 軌道であることはよい．さらに作用が自由であるので単射がわかる．さらに A をコンパクト集合とすると M 内で閉集合である（ハウスドルフ空間内のコンパクト集合は閉集合）．よってその逆像 $ev_p^{-1}(A)$ は閉集合であり，コンパクトな G 内でコンパクト集合である，よって写像は proper である（一般に，**コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続写像は proper** である）．あとは ev_p がはめ込みでることを確かめる．$X \in \mathfrak{g}$ とすると，作用が自由であることから，

$$d(ev_p)_e(X) = 0 \iff X_p^* = 0 \iff X = 0$$

となる．とりあえず $e \in G$ でははめ込みであることがわかった．他の点 $g \in G$ で調べよう．まず，$ev_{gp} : G \ni g' \mapsto g'gp \in M$ を考えると $ev_p \circ R_g(g') = g'gp = ev_{gp}(g')$ であるので，$ev_p \circ R_g = ev_{g \cdot p}$ が成立する．上で示したことから $ev_p \circ R_g = ev_{g \cdot p}$ は e で単射である．そこで，$X \in T_gG$ として，

$$d(ev_p)_g(X) = 0 \iff d(ev_p \circ R_g)_e \circ (dR_{g^{-1}})_g(X) = 0$$

となるが．$(dR_{g^{-1}})_g$ は同型であるので $d(ev_p)_g$ は単射となる． □

Remark 8.2.1. 同様にして，G の作用が自由でなくても．G 軌道は M のコンパクト部分多様体になる．そしてその軌道は G/G_p と微分同相．

さて，p での軌道 $\mathcal{O}_p$ に横断的な切断 S を slice とよぶ．p の周りの局所座標 $x_1, \cdots, x_n$ で

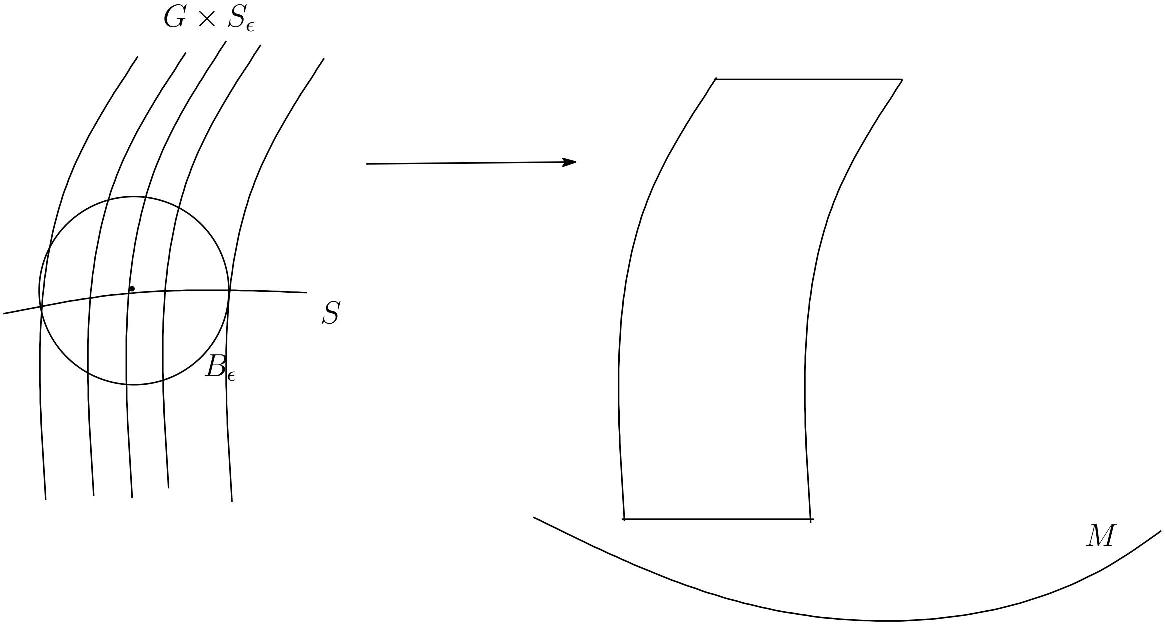
$$\mathcal{O}_p \cong G : x_1 = \cdots = x_k = 0, \quad S : x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$$

となる座標をとる．$S_\epsilon \cap B_\epsilon(0, \mathbb{R}^n)$ として，

$$\eta : G \times S_\epsilon \ni (g,s) \mapsto g \cdot s \in M$$

に対して次の equivariant 管状近傍定理を適用する．

Theorem 8.2.3 (slice theorem（equivariant 管状近傍定理）). G をコンパクトリー群で $p \in M$ において自由に作用するとする．このとき ϵ を十分小さくとれば，$\eta : G \times S_\epsilon \to M$ は p を通る G 軌道の G 不変近傍 U に微分同相にうつすことができる．



outline. 1. $d\eta_{e,p}$ は全単射である．これはそのように S をとったので．

2. G の $G \times S$ への作用を，G へは左作用で，S へは自明に作用させる．このとき $\eta : G \times S \to M$ は G-equivariant．実際 $\eta(hg, s) = (hg) \cdot s = h \cdot (g \cdot s) = h\eta(g, s)$ である．

3. $d\eta$ は $G \times \{p\}$ 上のすべての点で全単射である．実際 (e, p) では全単射であった．さらに G-equivariant 及び作用が free であることから $G \times \{p\}$ 上のすべての点で全単射である．

4. $G \times \{p\}$ はコンパクト，$G \times S \to M$ は $G \times \{p\}$ 上では単射さらに，$G \times \{p\}$ 上で $d\eta$ は全単射である．よって逆関数定理から $G \times S$ 内の $G \times \{p\}$ の近傍 U_0 があって，U_0 は微分同相に p を通る G 軌道の近傍 U へとうつされる．

5. ϵ を十分小さくとれば，$G \times \{p\}$ の近傍 $G \times S_\epsilon$ を上の U_0 とすることができる．

   Step 4,5 を詳しく言うと，$G \times \{p\}$ の各点で逆関数定理を使う．そのとき各点の近傍で微分同相なものが取れるが，$G \times \{p\}$ の各点は単射で移されるので，共通部分を小さくとれば，コンパクトより $G \times \{p\}$ の近傍 U_0 を微分同相にうつすことができる．この U_0 に $G \times S_\epsilon$ が入るように ϵ を調節すればよい．

□

さて slice 定理から次が成立する．

Corollary 8.2.4. G の作用が p で自由なら，上の定理でとった U でも作用は自由である．

（これは $G \times S_\epsilon$ と U が G-equivariant なので）．

Corollary 8.2.5. G がコンパクトなら G が自由に作用する点の集合は開集合である．

（これは上の系からすぐわかる）．

Corollary 8.2.6. $G \times S_\epsilon \cong U$ は G 不変である．よって商空間 $U/G \cong S_\epsilon$ は滑らかな多様体．

（これも明らかである）．

以上の結果を使って，コンパクト群 G が M に自由に作用している場合には M/G が多様体であり，さらに $\pi : M \to M/G$ が滑らかな fiber map になることを証明する．

Proof. $p \in M$ として $q = \pi(p) \in M/G$ とする．slice 定理から p の G 不変な近傍 U で $U \cong G \times S$ となるものが存在する．$\pi(U) = U/G =: V$ は q の M/G 内の開近傍である．slice 定理から $S = V$ である．これら V を M/G の局所座標としてとることができる．そこで変換関数が滑らかであることを証明する．U_1, U_2, S_1, S_2 をとり，$S_{12} = S_1 \cap U_2$, $S_{21} = S_2 \cap U_1$ とすれば，これらはどちらも $U_1 \cap U_2$ に対するスライスである．そこで

$$S_{12} \xrightarrow{\cong} id \times S_{12} \to G \times S_{12} \xrightarrow{\cong} U_1 \cap U_2 \xleftarrow{\cong} G \times S_{12} \leftarrow \mathrm{id} \times S_{21} \xleftarrow{\cong} S_{21}$$

を考えて，合成写像

$$S_{12} \to U_1 \cap U_2 \xrightarrow{\cong} G \times S_{21} \xrightarrow{pr} S_{21}$$

は滑らかである．次に fiber map となることをみる．$p \in M$, $q = \pi(p)$ に対して，p を通る G 軌道の G 不変な近傍 U で，$\eta : G \times S \xrightarrow{\cong} U$ となるものをとる．$V = U/G$ が q の M/G 内の近傍である．そこで

$$\begin{array}{ccc} M \supset U & \xrightarrow{\eta} & G \times S = G \times V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M/G \supset V & \xrightarrow{=} & V \end{array}$$

を考えると，右辺の射影は滑らかであるので π は滑らか．よって主 G 束である.（G の作用は左からにしている）．以上で定理が証明できた． □

8.2.3　slice 定理その 2

さて，より一般には次が成立する．

Theorem 8.2.7 (slice 定理その 2)**.** G をコンパクトとして M に作用しているとする（自由とは限らない）．このとき軌道は部分多様体であった．$x \in M$ として，$V_x := T_xM/T_x(G \cdot x)$ とする．このとき $g \in G_x$ とすれば，

$$dg_x : T_xM \to T_{gx}M = T_xM$$

を与えるが，これは $T_x(G \cdot x)$ 上で恒等写像である．よって

$$G_x \to GL(V_x)$$

という表現を得る．このとき「$G \times_{G_x} V_x \to G/G_x$ というベクトル束におけるゼロ切断 $\cong G/G_x$ の近傍」と「M における軌道 $G \cdot x$ の近傍」は ***equivariant*** 微分同相（G 多様体として微分同相）となる．

言い換えると軌道写像 $f_x : G/G_x \to G \cdot x \subset M$ に対して拡張写像 $\tilde{f}_x$ が存在する．

$$\begin{array}{ccc} G/G_x & \xrightarrow[zero section]{} & zero\ section \text{ の近傍} \subset G \times_{G_x} V_x \\ {\scriptstyle f_x}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}_x} \\ G \cdot x & \xrightarrow[i]{} & M \end{array}$$

Proof. 一般に管状近傍定理からコンパクト部分多様体 $Y \subset M$ があれば,「Y の normal bundle におけるゼロ切断の近傍」と「M における Y の近傍」を同一視できる．これはリーマン計量を入れて $NY \ni (x, v) \mapsto \exp_x(v) \in M$ を考えればよかった．

M にいれたリーマン計量が G 不変とする（G コンパクトなので可能）．まず V_x と $T_x(G \cdot x)$ の直交補空間は同一視できる．このとき，

$$G \times_{G_x} V_x \ni [g, v_x] \mapsto (g \cdot x, dg_x(v_x)) \in N(G \cdot x)$$

という写像を考える（左辺は $[g, v_x] = [gh^{-1}, dh_x v_x]$（$h \in G_x$）という同値関係である）．

$$\begin{array}{ccc} G \times_{G_x} V_x & \longrightarrow & N(G \cdot x) \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G/G_x & \xrightarrow[g \to g \cdot x]{} & G \cdot x \end{array}$$

という束同型を得る．G 不変な計量に対して，$w_x \in T_x(G\cdot x)$ とすると，$dg_x(w_x) \in T_{gx}(G\cdot x)$ であるので $g(dg_x(v_x), dg_x(w_x)) = g(v_x, w_x) = 0$ となることから $dg_x(v_x)$ は normal 方向に入る．そこで

$$G \times_{G_x} V_x \ni [g, v_x] \mapsto \exp_{g\cdot x}(dg_x(v_x)) \in M$$

が求めるものである．これが G 不変であることを見てみる．左辺への作用は $g'[g, v_x] = [g'g, v_x]$ である．これを移せば $\exp_{g'gx}(d(g'g)_x(v_x))$ となる．これは $g'gx$ を出発して，速度が $dg'dg(v_x)$ の測地線の時間 1 での値である．計量が G 不変であることから，G の作用で測地線は測地線に移る．よって $\exp_{g'gx}(d(g'g)_x(v_x)) = g'(\exp_{g\cdot x}(dg_x(v_x)))$ が成立する． $\square$

Remark 8.2.2. G の作用が x **で自由のときは** $G_x = \mathrm{id}$ であり $G \times_{G_x} V_x = G \times T_xM/T_x(G\cdot x)$ となる．これが前に述べた場合である．ここで注意すべきは，この場合には，**自明化構造が入る**ことである．よって，normal 束を作ったときも，**normal 束は自明束**となる．一般に，$Y \subset M$ を考えたとき normal 束は自明束にはなるとは限らない．例えば，$\mathbb{R}P^2$ 内で非自明な loop に対して normal 束はメビウスの帯になる．

この slice 定理は強力な定理であり，軌道の近傍の G の作用の情報が G 同伴ベクトル束の G の作用として書けるので分かりやすくなる．次の subsection の応用でみるように色々なことが理解できる．

例をいくつか挙げて理解してみよう．

EXAMPLE 8.2.8. S^2 に z 軸を軸とした回転を考える．つまり S^1 の作用である．N を北極点とすると，この軌道は N 自身であり，$H = G_N = S^1$ である．また，$V_N = T_NS^2 = \mathbb{R}^2$ であり，この空間へは S^1 は回転で作用することがわかる．よって，

$$G \times_H V \cong S^1 \times_{S^1} \mathbb{R}^2 \ni [z, v] \mapsto (1, zv) \ni \{N\} \times \mathbb{R}^2$$

とすれば well-defined であり，自明化を与える．さらに，このベクトル束への $G = S^1$ の作用（G_N の作用ではない）を考えてみると，

$$z[1, v] = [z, v] = [1, zv]$$

であるので，V には回転で作用していることがわかる．

一方，北極や南極以外の点 $x \in S^2$ における軌道は S^1 であり，$H = G_x = \{e\}$ である．$V = T_xS^2/T_x(G\cdot x) = \mathbb{R}$ であり，

$$G \times_H V \cong S^1 \times_e \times \mathbb{R} = S^1 \times \mathbb{R}$$

となる．$G = S^1$ の作用は．

$$z(z', v) = (zz', v)$$

であり，fiber 方向は動かさない．

EXAMPLE 8.2.9. 中身が詰まったトーラス（solid torus）$D \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$（$D$ は 2 次元円盤）を考えて,．$G = U(1) \times U(1) = S^1 \times S^1$ の作用

$$(p, q)(z, x) = (pz, qx), \quad (p, q) \in G = S^1 \times S^1, \quad (z, x) \in D \times S^1$$

を考える．このとき，点 $(z, y) \neq (0, y)$ における軌道は $U(1) \times U(1)$ というトーラスである．一方，$(0, 1)$ における軌道は $\{(0, x) \in D \times S^1 | x \in S^1\} \cong S^1$ であり，isotorpy 群は，$H = U(1) \times \{1\} \cong U(1)$ である．この軌道の近傍は，

$$(U(1) \times U(1))_{U(1)\times\{1\}} V \ni [(p, q), v] = [(1, q), pv] \mapsto (q, pv) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$$

により，$S^1 \times \mathbb{R}^2$ である．ここで $V = \mathbb{R}^2$ であり，$H = U(1)$ が回転で作用していることに注意．そこで，G の作用を考えてみよう．

$$(p', q')[(1, q), v] = [(p', q')(1, q), v] = [(1, q'q), p'v]$$

となるので，

$$G \times (S^1 \times \mathbb{R}^2) \ni ((p', q'), (q, v)) \mapsto (q'q, p'v) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$$

である．つまり，$G = S^1 \times S^1$ の作用は，zero section 以外の点では，base space の方向も，ファイバーも同時に動かす（これは，$S^1 \times S^1$ の $D \times S^1$ への作用そのものである）．また，零切断以外の $G \times_H V$ の点における G 軌道は $G = S^1 \times S^1$ である．

上の例を見て分かるように，$G \times V$ への G の作用は $g'(g, v) = (g'g, v)$ と V には作用させるわけではないが，$G \times_H V$ への G の作用を考えると，base 空間である G/H の点も動かすし，ファイバー方向にも作用している．例えば，上の例のように，$G \times_H V$ が位相的に自明束 $G/H \times V$ だとしても，G の作用込みで考えると自明でないのである．

また，点 x での軌道 $G \cdot x \subset M$ を考える．この近傍は $G \times_H V \to G/H$ と G 同変微分同相であるが，G の $G \times_{G_x} V \to G/G_x$ への作用を考えてみる．$p = [g, v] \in G \times_{G_x} V$ の軌道は

$$G \cdot [g, v]$$

となる．これは $G \times_{G_x} V \to G/G_x$ 部分多様体である．例えば，$[g, 0]$ における軌道は，ゼロ切断であり $G \cdot x$ のことである．さて，base-space G/G_x に G は推移的に作用しているので，

$$\pi : G \cdot [g, v] \ni g'[g, v] = [g'g, v] \mapsto g'gH \in G/H$$

は全射で，微分も全射であることがわかる．よって，**type** (G_x) **の軌道** $G\cdot x$ **の近傍における他の軌道の次元は** $G\cdot x$ **と同じまたはそれ以上である．**

8.2.4 応用その1

上の定理の応用をいくつか述べる．詳しくは [Audin]．G はコンパクトとしておく．

Proposition 8.2.8. 与えられた *type* のすべての軌道の和集合は M の部分多様体である．特に，**固定点（*type*** (G)**）の和集合は部分多様体である．**

Proof. (H) を H の共役類とする．

$$M_{(H)} := \{x \in M | G_x \in (H)\}$$

がわれわれが考えてるもので type (H) の和集合である．$x \in M_{(H)}$ の軌道の近傍で $M_{(H)}$ が部分多様体であることを確かめればよい．slice 定理から $G_x = H$，$V_x = V$ として，$G \times_H V$ 内の type (H) の軌道を調べればよいことになる．

$[g,v] \in G \times_H V$ とする．このとき

$$g' \in G_{[g,v]} \iff g'[g,v] = [g'g,v] = [g,v] \iff \exists h \in H \text{ such that } g'g = gh^{-1}, v = h{\cdot}v$$

である．よって $G_{[g,v]} = gH_vg^{-1}$ となり，これは部分群 $H_v \subset H \subset G$ と共役である．これが H と共役であるための条件をかんがえる．その条件は，$G_{[g,v]} = gH_vg^{-1} = g'Hg'^{-1}$ であるが $H_v = g^{-1}g'Hg'^{-1}g$ となるので，$H_v \subset H$ であったので，$H_v = H$ となる．つまり $[g,v]$ の軌道が type (H) であるための必要十分条件は $H_v = H$，つまり v が H の固定点であることである．

そこで H の V への作用の固定点集合を F とする．この F は V の部分空間である（実際，$h(\alpha v + \beta w) = \alpha v + \beta w$）．そこで，

$$(G \times_H V) \cap M_{(H)} = \{[g,v] \in G \times_H V | G_{[g,v]} \in (H)\} = G \times_H F$$

となり，これは部分ベクトル束であるので，部分多様体である． □

Proposition 8.2.9. M **がコンパクトなら，軌道の *type* は有限個しかない．**

Proof. M がコンパクトなので，各軌道の近傍に軌道の種類が有限個しかなことを示せばよい．M の次元に関する帰納法を行う．$\dim M = 0$ ならコンパクトから有限個の点のみである（この場合はタイプは (G)）．軌道の近傍を考えればよいので，$N = G \times_H V$ 内の軌道の種類が有限個であることを証明すればよい．V 上に H が

作用しているので，V 上の H 不変計量を考えれば，$G \times_H V$ に計量が入る．これは G 不変計量でもある．確かめてみよう，まず $G \times_H V$ の計量は

$$([g,v],[g,v']) = (v,v')_H$$

として定義される．

$$([g,v],[g,v']) = (v,v')_H = (hv,hv')_H = ([gh^{-1},hv],[gh^{-1},hv'])$$

となるので，計量は well-defined である．また，G の作用を考ええると，

$$(g'[g,v],g'[g,v']) = ([g'g,v],[g'g,v']) = (v,v')$$

となるので G の作用で不変である．そこで，$SN = G \times_H S(V)$ を spher bundle とすれば．G が作用していて，次元は $n-1$ でコンパクトであるので，仮定から軌道の種類は有限個である．

SN と N の軌道の種類を比べてみる．$[g,v] \in SN$ $(|v| = 1)$ の軌道を考えると，この軌道は N 内の $[g,\lambda v]$（$\lambda \neq 0$）に対する軌道と同じ type である（V への H の作用が線形のため）．つまり，前命題の記号を使えば $(H_v) = (H_{\lambda v})$ となる．よって，N 内の軌道の種類は，SN 内の有限個の種類の軌道と G/H という軌道である．よって証明できた．　□

Remark 8.2.3. SN の軌道と N の軌道の種類は一致するというわけではない．例えば，メビウスの帯に S^1 が作用している場合を考える．メビウスの帯を

$$[-1,1] \times [0,2\pi]/\sim$$

として考えてみる．$[-1,1] \times \{0\}$ と $[-1,1] \times \{2\pi\}$ を向きを反対にしてくっつけている．このとき，S^1 の作用を $t[p,q] = [(p,q+2t)]$（$0 \leq t \leq 2\pi$）とすればよい．このとき，$[(p,0)]$（$p \neq 0$）に対しては isotropy 群は自明であるが，$[(0,0)]$ に対する isotropy 群は $\mathbb{Z}_2$ である．

この例のように，SN 内の軌道と N 内軌道の種類は異なることがある．また，異なるとしたらゼロ切断に対応するところ．

M, G がコンパクトなら，軌道の type は有限個しかないことがわかったが，実は，主軌道（principal orbit）という $M_{(H)}$ が M 内で稠密開集合となるものが存在する．つまり，ある (H) が存在して，ほとんどの点で type (H) である．

Proposition 8.2.10. M/G が連結と仮定する．このとき，ある軌道 ***type*** (H) があって，$M_{(H)}$ が M 内で稠密となるものが存在する．さらに $M_{(H)}/G$ は連結多様体になる．またこのような軌道を ***principal orbit***（主軌道）という．

Proof. 簡単のため G は連結と仮定しておく．$n = \dim M$ に対する帰納法で証明する．$n = 0$ のとき，仮定から M/G は連結であるので，一点集合である．これは一つの軌道しかないので明らか．帰納法の仮定として $\dim M \leq n-1$ の場合に成立するとして，ある軌道の近傍 $N = G \times_{H'} V$ を考える．

SN に対して，帰納法を使いたいので，命題の仮定 $M/G = SN/G$ が連結ということを確かめる必要がある．そのためには SN が連結であることを確かめる．底空間 G/H' は連結なので，SV の次元が 1 以上なら明らかである．そこで SV の次元が 0 の場合には G/H' の二重被覆になる．非自明な二重被覆なら SN は連結である．自明な場合には $\dim V = 1$ であり，H' が V へ自明に作用する場合である．この場合には $N = SN \times [-1, 1]$ であり，SN の軌道の種類は N の軌道の種類に 1 対 1 対応する．よって，SN で証明されれば N でも成立する．

そこで，SN/G が連結であると仮定してよい．このとき仮定から SN 内で，軌道 type (H) で $SN_{(H)}$ が SN 内で開かつ稠密となるものが存在する．そこで N を考えた場合には，先ほどの命題の証明と同様にして，SN 内の軌道 type (H) と同じ type をとれば $N_{(H)}$ が開かつ稠密となる．

以上から equivariant 管状近傍に対して命題が証明できた．あとは M に対して equivariant 管状近傍の局所有限被覆をとって，軌道空間 M/G が連結であることを使えば，命題がいえる． □

Remark 8.2.4. 軌道が principal なら，それ上の点における $x \in M$ において，G_x の V_x への表現は自明表現である（逆も正しい）．また**主軌道はすべての軌道の中で最大次元をもつ軌道**である．なぜなら，すべての軌道の近傍には，その軌道の次元以上の軌道しかないのであった．また，主軌道は稠密であるので，主軌道は最大次元をもつことになる．主軌道ではないが，同じ次元をもつ軌道を **exceptional 軌道**という．また次元が主軌道より小さい軌道を **singular 軌道**という．

EXAMPLE 8.2.10. 先ほどのメビウスの帯の例は S^1 の exceptional 軌道の例である．

EXAMPLE 8.2.11. G がコンパクト可換群とする．$(H) = \{H\}$ を主軌道の type とする（可換なので共役なものはそれ自身のみ）．主軌道の定義から，$M_{(H)} = \{x \in M | G_x = H\}$ は稠密開集合である．よって isotoropy 群 H は M 内の稠密開集合上のすべての点を固定する．作用が滑らかなので H は M 内のすべての点を固定する．そこで作用が効果的であるとすれば，$h \in H$ はすべての点を固定するので，$h = e$ となる．以上から，**可換群の作用が効果的なら，主軌道は (e) である**．そして，ほとんどの点での軌道は G に同型である．

Definition 8.2.3. すべての軌道が principal のとき**作用が principal** であるという．

Remark 8.2.5. 軌道が principal なら，G_x の V_x への表現は自明表現であった．よって作用が **principal** なら，M/G **は多様体になる．**（局所座標が V_x として取れる）．例えば，作用が自由なら principal である．

8.2.5　応用その 2（同変 Daruboux の定理）

シンプレクティック多様体へのシンプレクティック G 作用への応用を見てみる．以下で述べる定理は，G 作用があるシンプレクティック多様体を調べる際に，とても強力な定理である．

Theorem 8.2.11 (**同変 Daruboux-Moser-Weinstein の定理**)**.** M を多様体として X を部分多様体とする．また，ω_0, ω_1 を M 上のシンプレクティック形式で，$\omega_0|_X = \omega_1|_X$ とする．さらに，コンパクト群 G が M へ作用して，$g^*\omega_0 = \omega_0$, $g^*\omega_1 = \omega_1$，$g(X) = X$（$\forall g \in G$）であるとする．このとき X の G 同変近傍 U_0, U_1 及びシンプレクティック同相 $\phi : (U_0, \omega_0) \to (U_1, \omega_1)$ で，$\phi(p) = p$（$\forall p \in X$）かつ，G の作用と可換なものが存在する．

Proof. G 同変管状近傍定理から，Moser のトリックで用いたホモトピー作用素 Q やイソトピー ρ_t を G 同変であるとしてよい．また，$\omega_0 - \omega_1 = d\mu$ における μ も G で平均化すれば G 不変となる．あとは，同変でない場合と同様にすればよい． □

Corollary 8.2.12 (**同変 Daruboux の定理**)**.** G をコンパクト群として，M へ作用しているとする．また $x \in M$ を固定点とする．ω_0, ω_1 を G 不変シンプレクティック形式とする．このとき x の G 同変近傍 U と G 同変写像 $\phi : U \to U$ で，$\phi(x) = x$ かつ $\phi^*\omega_1 = \omega_0$ となるものが存在する．

特に，(M, ω) に G が作用して，$x \in M$ が固定点とすると，G 不変近傍 U と座標 $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ がとれて，

$$\omega|_U = \sum dx_k \wedge dy_k$$

となり，G の U への作用は $\mathbb{R}^{2n}$ への G のある線形作用となる．ここで，$\mathbb{R}^{2n}$ への作用とは，T_pM への G の作用と同値である（固定点なので G の作用が定まる）．

また，Lagrangian 近傍定理，isotropic 埋め込み，coistropic 埋め込みなどの G 同変版も成立する．

8.3 ハミルトン作用

8.3.1 モーメント写像と余モーメント写像

(M,ω) をシンプレクティック多様体．G をリー群とし，(M,ω) に滑らかなシンプレクティック作用があるとする．

まず $G=\mathbb{R}$ の場合を考える．このとき $\mathbb{R}$ のシンプレクティック作用と完備シンプレクティックベクトル場の間に一対一対応があった．$\psi:\mathbb{R}\to Symp(M,\omega)$ をその作用とする．ψ がハミルトニアンとは $H:M\to\mathbb{R}$ という関数が存在して，$dH=\iota_X\omega$ となることであった（ここで $\psi=\exp tX$）．

次に $G=S^1$ の場合．S^1 の作用は $\mathbb{R}$ の作用で周期が 2π のものである（$\psi_{2\pi}=\psi_0$）．S^1 の作用がハミルトニアンとは，$\mathbb{R}$ の作用と見たときにハミルトニアンであることと定義する．

一般の場合を考えよう．G をリー群とし，(M,ω) に滑らかなシンプレクティック作用があるとする．基本ベクトル場 X^* はシンプレクティックベクトル場であるので，$\iota_X\omega$ が closed であることと同値．また，$\iota_X\omega$ が exact のときハミルトニアンベクトル場と呼び，ハミルトン関数 f で $X_f=X^*$ が存在するのであった．ここで，X_f を与えるハミルトニアン関数は局所定数関数の差を除いてただ一つである．そこで，局所的には各基本ベクトル場に対してハミルトニアンが存在するが，G の作用がハミルトニアンというときは，大域的に各基本ベクトル場に対してハミルトニアンが存在することを要請する（それほど強い条件ではない．例えば，$H^2(\mathfrak{g})=0$，$H^1(\mathfrak{g})=0$ ならば自動的に従う．例えば G が半単純なら問題ない．または，M の条件として $H^1(M)=0$ ならよい）．そこで，各リー環の元 $X\in\mathfrak{g}$ に対して，ハミルトニアン関数 $\mu^*(X)$ が定まり，

$$\mu^*:\mathfrak{g}\to C^\infty(M)$$

という線形写像が定まる．また，$X,Y\in\mathfrak{g}$ に対して，$[X,Y]\in\mathfrak{g}$ に対応する基本ベクトル場は $[X,Y]^*=-[X^*,Y^*]$ となる．一方，X^*,Y^* に対するハミルトン関数 $\mu^*(X),\mu^*(Y)$ に対する，ポアソン括弧を考えると，

$$-[X^*,Y^*]=X_{\{\mu^*(X),\mu^*(Y)\}}=X_{\omega(X^*,Y^*)}$$

という関係式が成立した．よって，

$$X_{\{\mu^*(X),\mu^*(Y)\}}=[X,Y]^*$$

を得る．$\mu^*([X,Y])$ と $\{\mu^*(X),\mu^*(Y)\}$ には局所定数関数の差しかないことに注意する（定数は X,Y に依存しているが）．そこで，さらなる仮定として．$\mu([X,Y])=$

$\{\mu(X), \mu(Y)\}$（$\forall X, Y \in \mathfrak{g}$）を要請する．このように，リー環準同型 $\mu^* : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ が存在するということが G の作用がハミルトン作用ということである．

以下でちゃんと定義していこう．

Definition 8.3.1. 作用 $\psi : G \to Symp(M, \omega)$ がハミルトニアン作用とは，

$$\mu : M \to \mathfrak{g}^*$$

という関数で次を満たすものが存在．

1. $X \in \mathfrak{g}$ として，

$$\mu^X : M \ni p \to \mu^X(p) = \langle \mu(p), X \rangle \in \mathbb{R} \quad X \text{ に沿った } \mu \text{ の成分}$$

とする．また $X \in \mathfrak{g}$ として，X^* を M 上に導かれたベクトル場とする．このとき

$$d\mu^X = \iota_{X^*}\omega$$

つまり μ^X が X^* に対するハミルトン関数となる．

2. μ は G の作用 ψ および余随伴表現 Ad^* **on** $\mathfrak{g}^*$ に対して **equivariant** である．

$$\mu \circ \psi_g = \mathrm{Ad}_g^* \circ \mu : M \to \mathfrak{g}^* \quad \forall g \in G$$

（別の書き方では，$\mu^Y(\psi_g(p)) = \mu^{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}Y}(p)$（$\forall Y \in \mathfrak{g}, \forall p \in M$）である．

このとき (M, ω, G, μ) をハミルトニアン G 空間とよび μ をモーメント写像とよぶ．

２番目の同変性なしでも，モーメント写像というときもある．シンプレクティック作用がいつハミルトン作用になるかは section 10.2 で議論する．

EXAMPLE 8.3.1 ($G = S^1, \mathbb{R}$ の場合). $G = S^1, \mathbb{R}$ の場合を考える．G のシンプレクティック作用は完備シンプレクティックベクトル場 X と対応していた．この場合には，$\mathbb{R}$ の作用に対して，$X = 1 \in \mathbb{R}$ に対する基本ベクトル場 X^* を得る．

さて，モーメント写像 $\mu : M \to \mathbb{R}$ を考える．ここで $\mathfrak{g} = \mathbb{R}, \mathfrak{g}^* = \mathbb{R}$ である．$\mathfrak{g}$ の生成元として，$X = 1 \in \mathbb{R}$ をとると，$\mu^X(p) = \langle \mu(p), 1 \rangle = \mu(p)$ となる．そこで最初の条件は

$$d\mu = \iota_{X^*}\omega$$

である．つまり μ がハミルトニアンであり，シンプレクティックベクトル場 X^* がハミルトンベクトル場である．第二の条件を考える．G が可換なので，$\mathrm{Ad}_g^* = \mathrm{id}$ である．よって

$$\mu(\psi(p)) = \mu(p) \quad \forall p \in M$$

つまり，μ は ψ により保存されることを言っている．$L_{X^*}\mu = \iota_{X^*}d\mu = 0$ である．（$G = S^1, \mathbb{R}$ の場合は第一の条件から自動的に満たされる）．

EXAMPLE 8.3.2 ($G = \mathbb{T}^n$ の場合). $G = \mathbb{T}^n$ の場合を考える．$\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n = \mathfrak{g}^*$ であり，作用に対するモーメント写像 $\mu : M \to \mathbb{R}$ があるとする．$X_i \in \mathbb{R}^n = \mathfrak{g}$ を基底とする．$\mu^{X_i}(p) = \langle \mu(p), X_i \rangle$ とする．X_i^* は M 上のベクトル場である．そこで第一の条件は $d\mu^{X_i} = \iota_{X_i^*}\omega$ となり，μ^{X_i} がハミルトンベクトル場 X_i^* に対するハミルトニアンとなる．

第二の条件は G が可換群なので Ad^* は自明表現で，$\mu(\psi_g(p)) = \mu(p)$ となる．つまり μ が G の作用で不変ということ．これは先ほどの場合と異なり自動的ではない．言い換えると $L_{X_i^*}\mu^{X_j} = \{\mu^{X_j}, \mu^{X_i}\} = 0$（$\forall i, j$）となること．

さて，G が連結の場合には．ハミルトニアン G 作用を次のように余モーメント写像で定義してもよい．(M, ω) をシンプレクティック多様体，G の滑らかなシンプレクティック作用があるとする．このとき余モーメント写像とは

$$\mu^* : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$$

で次を満たすものが存在すること

1. $\mu^*(X)$ が X^* に対するハミルトン関数（実は $\mu^*(X) = \mu^X$ である）．

2. μ^* がリー環の準同形である．つまり

$$\mu^*([X, Y]) = \{\mu^*(X), \mu^*(Y)\}, \quad \mu^*(aX + bY) = a\mu^*(X) + b\mu^*(Y)$$

Proof. モーメント写像 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ があるとする．このとき $\mu^*(X) = \mu^X = \langle \mu(p), X \rangle$ により μ^* を定義する．モーメント写像の第一の条件は μ^X が X^* のハミルトン関数であることと同値である（$d\mu^X = \iota_{X^*}\omega$）．

次に，第二の条件を考える．連結から次のように書き換えてよい．$X \in \mathfrak{g}$ に対して $g = \exp tX$ として $\mu^Y(\psi_g(p)) = \mu^{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}Y}(p)$ を微分すると，

$$L_{X^*}\mu^Y = \iota_{X^*}d\mu^Y = \omega(Y^*, X^*) = -\langle \mu, [X, Y] \rangle = \mu^{[Y,X]}$$

となる（$[X, Y]$ に対するハミルトニアンは $\omega(X, Y)$ であった）．そこで，$\mu^*([Y, X]) = \mu^{[Y,X]}$, $\{\mu^*(Y), \mu^*(X)\} = \{\mu^Y, \mu^X\} = \omega(Y^*, X^*)$ であるので，これらは同値である．

逆に余モーメント写像 μ^* があったとき $\mu^*(X)(p) = \langle \mu(p), X \rangle$ として μ が定まる．あとは，同様． □

EXAMPLE 8.3.3. $G = \mathbb{R}, S^1$ の場合を考える．このとき作用は完備シンプレクティックベクトル場と対応した．そのとき $1 \in \mathbb{R}$ に対応した基本ベクトル場を X^* と書く．

第一の条件を考える．$\mu^*(1)$ が X^* に対するハミルトン関数なので，$H = \mu^*(1)$ とおく．リー環の準同形なので，$tH = \mu^*(t)$ となる．

$$\mu^* : \mathbb{R} \ni t \mapsto tH \in C^\infty(M)$$

EXAMPLE 8.3.4. $\omega = i/2 \sum dz_i \wedge d\bar{z}_i = \sum dx_i \wedge dy_i = \sum r_i dr_i \wedge d\theta_i$ を $\mathbb{C}^n$ 上のシンプレクティック形式とする．$(\mathbb{C}^n, \omega)$ へ S^1 作用を考える．ψ_t は e^{it} の掛け算で作用させる．この作用は次のモーメント写像をもつ，

$$\mu : \mathbb{C}^n \ni z \mapsto -|z|^2/2 + const \in \mathbb{R}$$

である．

Proof. シンプレクティック多様体に G 作用があった場合，まずは，モーメント写像を探すには，$d\mu^X = \iota_{X^*}\omega$ を解けばよい．あとは定数などを微調整していけばよい（section 10.2 参照）．まず

$$X^* = \sum \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \quad \iota_{X^*}\omega = -\sum r_i dr_i$$

である．そこで，$d\mu = -\sum r_i dr_i$ となる関数 μ を探せばよいが，$\mu = -1/2 \sum r_i^2 + const$ とすれば，第一条件は満たされる．S^1 作用なので第二条件も満たされる（μ が S^1 作用で不変ということ）． □

さて，μ の定数項を 1/2 ととる．このとき $\mu^{-1}(0) = S^{2n-1}$ である．この空間に S^1 の作用を制限し，軌道空間を考えると

$$\mu^{-1}(0)/S^1 = S^{2n-1}/S^1 = \mathbb{CP}^{n-1}$$

となる．この $\mathbb{CP}^{n-1}$ を reduced space とも呼ぶ．この一般論を後で議論する．

8.3.2　古典的例

モーメント写像の由来は．次の古典力学の運動量，角運動量の一般化である．相空間 $T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ 上のハミルトニアン $H = H(q, p)$ が平行移動の対称性や回転対称性を持っている場合を考える．$\mathbb{R}^3$ の平行移動 $q \mapsto q + a$ は $\mathbb{R}^6$ 上では，$(q, p) \mapsto (q + a, p)$ として作用する．また，$\mathbb{R}^3$ の回転 $q \mapsto gq$（$g \in SO(3)$）は，$\mathbb{R}^6$ 上では，$(q, p) \mapsto (gq, gp)$ として作用する．そこで，ハミルトニアン

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}\|p\|^2 + V(q)$$

で，$V(q)=0$ の場合は H は平行移動での不変性をもつ．また，$V(q)=c\|q\|^2$ など，$V(gq)=V(q)$ の場合には，H は回転不変性をもつ．このとき，ネーターの原理（Theorem 9.2.1）により，平行移動不変の場合には運動量保存則，回転不変の場合には角運動量保存則が成立する．つまり，ハミルトニアン H に対する flow 上で，運動量が一定なのである．

そこで，古典力学での運動量，角運動量を我々の言葉で再定義してみよう．

EXAMPLE 8.3.5. $(\mathbb{R}^6, \omega=\sum dp_i\wedge dq_i)$ を考える．$\mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^6$ に平行移動で作用する．

$$\mathbb{R}^3 \ni a \mapsto \psi_a \in Symp(\mathbb{R}^6,\omega), \quad \psi_a(q,p)=(q+a,p)$$

このときの $a\in\mathbb{R}^3=Lie(\mathbb{R}^3)$ に対するベクトル場は

$$X^*=a_1\partial q_1+a_2\partial q_2+a_3\partial q_3$$

であるので，

$$\iota_{X^*}\omega=\sum a_i dp_i$$

である．また $\mu:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^3$ として，

$$\mu^a(q,p)=\mu(q,p)\cdot a$$

であり（右辺は内積），

$$\sum a_i dp_i = d(\mu(q,p)\cdot a)$$

となるものを探す．これは明らかに $\mu(q,p)=p$ とすれば満たすことが分かる．

そこで，モーメント写像として

$$\mu:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^3=Lie(\mathbb{R}^3)^* \quad \mu(q,p)=p$$

をとればよく，

$$\mu^a(q,p)=\langle\mu(q,p),a\rangle=p\cdot a$$

となる．この p を古典的に運動量ベクトルという（q は位置ベクトル）．そしてこの μ を線形運動量（線形モーメント）という．

ハミルトニアン $\mathbb{R}^3$ 作用になることを証明する．$\mathbb{R}^3$ は可換群なのでモーメント写像が作用で不変であることを確かめる．$\mu(q+a,p)=\mu(q,p)$ なので明らか．また，$d\mu^a=\iota_{X^*}\omega$．よってハミルトニアン作用である．

EXAMPLE 8.3.6. 次に $\mathbb{R}^3$ の $SO(3)$ の作用を考え，その lift により $\mathbb{R}^6=T^*\mathbb{R}^3$ 上のシンプレクティック作用を得る．つまり $g\in SO(3)$，$x\in\mathbb{R}^3$ に対して作用を gx とすれば，(x,y) に対する作用は $(gx,(dg)_x y)=(gx,gy)$ である．

基本ベクトル場を求める．これは上の作用を $g = \exp ta$ として微分すればよい．

$$\mathbb{R}^3 = \mathfrak{so}(3) \ni a \mapsto A^* \in \mathfrak{X}^{symp}(\mathbb{R}^6) \quad A^*(x,y) = (a \times x, a \times y)$$

である（ベクトルは位置 (x,y) に依存している．外側に行けば行くほど，ベクトル場の大きさは大きくなる）．また，

$$\begin{aligned}\iota_{A^*}\omega = \iota_{(a\times x, a\times y)}\omega &= (a_2x_3 - a_3x_2)dy_1 + (-a_1x_3 + a_3x_1)dy_2 + (a_1x_2 - a_2x_1)dy_3 \\ &\quad + (a_3y_2 - a_2y_3)dx_1 + (a_1y_3 - y_1a_3)dx_2 + (-a_1y_2 + a_2y_1)dx_3 \\ &= a_1(x_2dy_3 + y_3dx_2 - x_3dy_2 - y_2dx_3) + a_2(x_3dy_1 + y_1dx_3 - x_1dy_3 - y_3dx_1) \\ &\quad + a_3(x_1dy_2 + y_2dx_1 - x_2dy_1 - y_1dx_2)\end{aligned}$$

となる．そこで，

$$\mu^a(x,y) = \mu(x,y)\cdot a$$

で，$d\mu^a = \iota_{A^*}\omega$ となる，μ を計算すると，

$$\mu^a(x,y) = \langle \mu(x,y), a\rangle = (x_2y_3 - x_3y_2)a_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)a_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)a_3 = (x\times y)\cdot a$$

とすればよいことがわかる．よって，この作用に対するモーメント写像は

$$\mu : \mathbb{R}^6 \ni (x,y) \mapsto x \times y \in \mathbb{R}^3 = \mathfrak{so}(3)^*$$

と定義すればよい．この μ を角運動量（角モーメント）とよぶ．

Proof. モーメント写像になることを確かめよう．第一の条件はよい．そこで，第二の条件 $\mu^a(\psi_g(x,y)) = \mu^{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}a}(x,y)$ を確かめる．

$$\begin{aligned}\mu^a(gx,gy) &= (gx \times gy)\cdot a = \langle [gxg^{-1}, gyg^{-1}], a\rangle \\ &= \langle g[x,y]g^{-1}, a\rangle = \langle [x,y], \mathrm{Ad}_{g^{-1}}a\rangle = \mu^{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}a}(x,y)\end{aligned}$$

（$\mu^{-1}(a)/G_a$ の記述は,「Geomtry and Quantum Field theory」[Freed. Eds] などを参照）． □

$SO(3)$ 不変なハミルトニアンがあれば，モーメント写像はそのハミルトニアンに対する flow 上で一定である．つまり，角運動量保存則である．

EXAMPLE 8.3.7. $2n$ 次元シンプレクティック多様体上で可積分系を考える．第一積分を $f_1, \cdots, f_n$ とすれば，$\{f_i, f_j\} = 0$ であった．例えば，M をコンパクトとすれば，各シンプレクティックベクトル場に対する flow $\phi_1, \cdots, \phi_n$ は可換であり，完備である．よって，$\mathbb{R}^n$ の M へのハミルトン作用を得る．ここでモーメント写像は，

$$\mu = (f_1, \cdots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n$$

となる．

8.3.3 Coadjoint orbit

ここでは重要な例である Coadjoint 軌道について述べる．リー群 G の Coadjoin-orbit 上にシンプレクティック構造を入れ，さらに G の作用がハミルトニアン作用になることを見てみる．

G をリー群，$\mathfrak{g}$ をリー環とする．

まず G の $\mathfrak{g}$ への随伴表現を考える．$X \in \mathfrak{g}$ から生成される $\mathfrak{g}$ 上のベクトル場 X^* は点 $Y \in \mathfrak{g}$ 上で

$$X^*_Y = [X, Y]$$

となる．

Proof. $Y \in \mathfrak{g}$ に対して $(\exp tX)Y(\exp -tX)$ が Y を通る曲線であり，これを微分すればよいので $[X, Y]$ である． □

次に G の $\mathfrak{g}^*$ への**余随伴表現**を考える．つまり，$\langle Ad_{g^{-1}}Y, \xi\rangle = \langle Y, \mathrm{Ad}^*_g\xi\rangle$ によって余随伴作用を定義する（左作用）．このとき $X \in \mathfrak{g}$ からくる $\mathfrak{g}^*$ 上のベクトル場 X^* は

$$\langle X^*_\xi, Y\rangle = \langle \xi, [Y, X]\rangle = \langle \mathrm{ad}^*_X\xi, Y\rangle$$

となる．つまり，ベクトル場 X^* は

$$X^*_\xi = \mathrm{ad}^*_X(\xi) \in T_\xi\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^*$$

として定義される．また，$\eta = g' \cdot \xi = \mathrm{Ad}^*_{g'}\xi$ に対して，$g'_*(X^*_\xi) = (\mathrm{Ad}_{g'}X)^*_\eta$ となる．

Proof. $\langle Ad_{g^{-1}}Y, \xi\rangle = \langle Y, \mathrm{Ad}^*_g\xi\rangle$ により作用を定義した．これを $g = \exp tX$ として微分すれば，

$$\langle [Y, X], \xi\rangle = \langle Y, X^*_\xi\rangle$$

である．また，

$$\langle Y, \mathrm{Ad}^*_{g'}\mathrm{Ad}^*_g\xi\rangle = \langle \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\mathrm{Ad}_{g'^{-1}}Y, \xi\rangle$$

であるので，$g = \exp tX$ として微分すれば，

$$\begin{aligned}\langle Y, g'_*(X^*_\xi)\rangle &= \langle [\mathrm{Ad}_{g'^{-1}}Y, X], \xi\rangle = \langle \mathrm{Ad}_{g'^{-1}}[Y, \mathrm{Ad}_{g'}X], \xi\rangle = \langle [Y, \mathrm{Ad}_{g'}X], \mathrm{Ad}^*_{g'}\xi\rangle \\ &= \langle Y, (\mathrm{Ad}_{g'}X)^*_\eta\rangle\end{aligned}$$

□

$\xi \in \mathfrak{g}^*$ の stablizer のリー環 $\mathfrak{g}_\xi$ の元 X に対して，$X^*_\xi = 0$ であり，

$$\mathfrak{g}_\xi = \{X \in \mathfrak{g} | \langle [Y, X], \xi\rangle = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$$

となる．

Proof. $X \in \mathfrak{g}_\xi$ なら，$g = \exp tX$ としたとき，$\mathrm{Ad}_g^*\xi = \xi$ であるので，$X_\xi^* = 0$ であり，

$$\langle [Y, X], \xi \rangle = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{g}$$

が成立する．逆に，これを満たせば $X \in \mathfrak{g}_\xi$ となる． □

$\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対して，$\mathfrak{g}$ 上の交代線形形式を

$$\omega_\xi(X, Y) = \langle \xi, [X, Y] \rangle$$

として定義する．この ker は余随伴表現に対する ξ の satbilizer のリー環 $\mathfrak{g}_\xi$ である．

Proof. stabilizer のリー環は $Ad_g^*\xi = \xi$ となるものであるので，$\langle \xi, [Y, X] \rangle = 0 \ \forall Y$ となるような X で生成されるリー環である．一方 ω_ξ の kernel は $\omega_\xi(X, Y) = 0 \ \forall Y$ となる X である． □

上の ω_ξ は ξ を通る余随伴軌道の ξ 上の接空間に非退化２次形式を定義する．また，ω_ξ は ξ の余随伴軌道上に閉 **2-from** を定める．そして，G の随伴作用はシンプレクティック作用である（実は，ハミルトニアン作用であるが，それについては後述）．

Proof. まず，ξ における接空間は $T_\xi(G \cdot \xi) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\xi$ となる．これは，

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto X_\xi^* \in T_\xi(G \cdot \xi)$$

が全射であり，その kernel が $\mathfrak{g}_\xi$ となることからわかる．そこで，$T_\xi(G \cdot \xi)$ の元は，$\exists X \in \mathfrak{g}$ に対して，X_ξ^* と表すことができるので，

$$\omega_\xi(X_\xi^*, Y_\xi^*) := \langle \xi, [X, Y] \rangle$$

として $T_\xi(G\xi)$ 上で交代形式を定義する．$X \in \mathfrak{g}_\xi$ とすれば，右辺も左辺も 0 になるので，これは well-defined である（つまり，代表元 $X \in \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\xi$ のとり方に依らない）．また，これが非退化であることは，ω_ξ の kernel が stabilizer のリー環であることからわかる．

$G\xi$ のほかの点に対して考えてみる．$\eta = g' \cdot \xi$ として，

$$\omega_\eta(X_\eta^*, Y_\eta^*) := \langle \eta, [X, Y] \rangle$$

として定める．また $g'_*(X_\xi^*) = (\mathrm{Ad}_{g'}X)_\eta^*$ であったので，

$$\begin{aligned}\omega_\eta(g'_*(X_\xi^*), g'_*(Y_\xi^*)) =& \omega_\eta((\mathrm{Ad}_{g'}X)_\eta^*, (\mathrm{Ad}_{g'}Y)_\eta^*) = \langle \mathrm{Ad}_{g'}^*\xi, [\mathrm{Ad}_{g'}X, \mathrm{Ad}_{g'}Y] \rangle \\ =& \langle \xi, [X, Y] \rangle = \omega_\xi(X_\xi^*, Y_\xi^*)\end{aligned}$$

となる．つまり．ω は G 作用で不変である．つまり G の作用はシンプレクティック作用である．

閉形式であることを確かめよう．$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ として X^*, Y^*, Z^* を考える．$[X^*, Y^*] = -[X, Y]^*$（これは左作用なのでマイナスが付く）に注意すると，

$$\begin{aligned}(d\omega(X^*, Y^*, Z^*))_\xi =& \omega_\xi([X^*, Y^*], Z^*) - \omega([X^*, Z^*], Y^*) + \omega_\xi([Y^*, Z^*], X^*) \\ &+ X^*\omega_\xi(Y^*, Z^*) - Y^*\omega(X^*, Z^*) + Z^*\omega_\xi(X^*, Y^*) \\ =& - \langle \xi, [[X, Y], Z]\rangle + \langle \xi, [[X, Z], Y]\rangle - \langle \xi, [[Y, Z], X]\rangle \\ &+ X^*\langle \xi, [Y, Z]\rangle - Y^*\langle \xi, [X, Z]\rangle + Z^*\langle \xi, [X, Y]\rangle \\ =& X^*\langle \xi, [Y, Z]\rangle - Y^*\langle \xi, [X, Z]\rangle + Z^*\langle \xi, [X, Y]\rangle \quad (\text{ヤコビ律から}) \\ =& - \langle \xi, [X, [Y, Z]]\rangle + \langle \xi, [Y, [X, Z]]\rangle - \langle \xi, [Z, [X, Y]]\rangle = 0\end{aligned}$$

最後のところで，$g = \exp tX$ として，

$$X^*\langle \xi, [Y, Z]\rangle = \frac{d}{dt}\langle \mathrm{Ad}_g^*\xi, [Y, Z]\rangle = \frac{d}{dt}\langle \xi, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}[Y, Z]\rangle = -\langle \xi, [X, [Y, Z]]\rangle$$

を使った．以上から $d\omega = 0$ である．

□

この余随伴軌道上の 2-from を標準的シンプレクティック形式という．または **Kostant-Kirillov シンプレクティック構造**などという．このように余随伴軌道はシンプレクティック多様体になり，特に偶数次元である．

この余随伴軌道への G のシンプレクティック作用がハミルトニアン作用になることを見てみよう．軌道 $\mathcal{O}$ を考える．

$$\mu : \mathcal{O} \ni \xi \to \xi \in \mathfrak{g}^*$$

としてモーメント写像を定義する．このとき，$X \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$(d\mu^X)_\xi(Y_\xi^*) = Y_\xi^*\langle \xi, X\rangle = \frac{d}{dt}\langle \mathrm{Ad}_{\exp tY}^*(\xi), X\rangle = \langle \mathrm{ad}_Y^*(\xi), X\rangle = \langle \xi, [X, Y]\rangle = \omega_\xi(X_\xi^*, Y_\xi^*)$$

となるので，$d\mu^X = \iota_{X^*}\omega$ である．さらに，

$$\mu(\mathrm{Ad}_g^*\xi) = \mathrm{Ad}_g^*(\xi) = \mathrm{Ad}_g^*\mu(\xi)$$

であるので，$\mu : \mathcal{O} \ni \xi \to \xi \in \mathfrak{g}^*$ はモーメント写像になる．

以上で，余随伴軌道がハミルトニアン G 空間になることがわかった．

8.4　ポアソン多様体

リー環の双対空間にはポアソン構造が入る．ポアソン構造とはシンプレクティック構造に一般化であった．ここでは，ポアソン多様体について詳しく述べた後で，リー環のポアソン構造と余随伴軌道のシンプレクティック構造の関係を見ていきたい．ポアソン多様体の詳細は [Marsden-Ratiu] を見よ．

8.4.1　ポアソン多様体

Definition 8.4.1. 多様体 P 上の**ポアソン括弧**とは，

$$C^\infty(P) \times C^\infty(P) \ni (f, g) \to \{f, g\} \in C^\infty(P)$$

で，$\{\cdot, \cdot\}$ がリー環であり，さらに，ライプニッツ則

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$$

を満たすものである．このような構造をもつ多様体 P を**ポアソン多様体**とよぶ．

また，$f \in C^\infty(P)$ に対して，$\{\cdot, f\}$ は微分であるので，

$$X_f g = \{g, f\}$$

となるベクトル場が唯一つ定まる．これを f に対する**ハミルトンベクトル場**とよぶ．

EXAMPLE 8.4.1. シンプレクティック多様体には，ポアソン括弧が入った．よって，シンプレクティック多様体はポアソン多様体である．

EXAMPLE 8.4.2. $\mathbb{R}^n$ 上の関数空間を考える．A を交代行列として，$B^{ij} = A^{ij} x_i x_j$（和をとっているわけではない）．このとき，

$$\{f, g\} = \sum_{1 \le i,j \le n} B^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$$

はポアソン構造を定める．

ポアソン多様体に対しても，ハミルトン力学を考えることができ，シンプレクティック多様体の場合と同様のことがそれなりに成立する．例えば，次である．

Proposition 8.4.1. f, g に対するハミルトンベクトル場を X_f, X_g とすれば，

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$$

が成立．また，X_f に対する *flow* を ϕ_t とすれば，

$$\frac{d}{dt} g(\phi^t(p)) = \{g, f\}$$

が成立する．特に，f は *flow* の軌道 $\phi_t(p)$ 上で一定である．

Proof.

$$
\begin{aligned}
[X_f, X_g]h =& X_f X_g h - X_g X_f h = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\
=& -\{h, \{f, g\}\} = -X_{\{f,g\}} h
\end{aligned}
$$

他は定義から明らかである． □

Definition 8.4.2. ポアソン多様体上で，すべての関数とポアソン可換な関数を**カシミール関数**という．任意の関数 f に対して，$X_C f = \{f, C\} = 0$ であるので，C がカシミール関数とは，$X_C = 0$ のことである（その意味で，カシミール関数は自明な力学系である）

EXAMPLE 8.4.3. シンプレクティック多様体の場合のカシミール関数を考えてみる．C をカシミール関数とすれば，$X_C = 0$ であり，$dC(Y) = \omega(X_C, Y) = 0$（$\forall Y$）となるので，$dC = 0$ となる．つまり，局所定数関数である．

この例では面白くないが，あとでポアソン多様体の場合に非自明な例を与える．

8.4.2　ポアソン構造

ポアソン多様体上のポアソン積をもう少し詳しく見てみる．$f, f' \in C^\infty(P)$ として，$df_p = df'_p$ とする．このとき，

$$\{g, f\}(p) = (X_g f)_p = (df)_p(X_g) = (df')_p(X_g) = \{g, f'\}(p)$$

である．ポアソン積の第一成分も同様の性質をもつ．つまり，$\{f, g\}$ の点 $p \in P$ での値は，df_p, dg_p にのみ依存している．そこで，

$$B_p : T_p^* P \times T_p^* P \ni (\alpha_p, \beta_p) \mapsto \{f, g\}(p) \in \mathbb{R}$$

という交代線形形式を得る．ここで f，g は $df_p = \alpha_p$，$dg_p = \beta_p$ となる関数である．B_p は p について滑らかであるので，交代 2 テンソル場（2-vector field という）

$$B : T^* P \times T^* P \to C^\infty(P)$$

を得る．この B を**ポアソン構造**または**ポアソンテンソル**という．局所座標で書けば，

$$B = \sum B^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$$

というテンソル場である（ここで，$B^{ij}(x) = -B^{ji}(x)$ と仮定してよい）．そして，

$$\{f, g\} = \sum B^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$$

という表示が成立する．特に，

$$\{x^i, x^j\} = B^{ij}(x)$$

である．この場合に，ヤコビ律を書いてみると

$$\{\{x^i, x^j\}, x^k\} + \{\{x^k, x^i\}, x^j\} + \{\{x^j, x^\}, x^I\} = 0$$

となり，B^{ij} が満たすべき方程式を得る．

$$\sum_l B^{li}\frac{\partial B^{jk}}{\partial x^l} + B^{lj}\frac{\partial B^{ki}}{\partial x^l} + B^{lk}\frac{\partial B^{ij}}{\partial x^l} = 0$$

もちろん，これは必要条件であるが十分条件であることも容易にわかる．

Remark 8.4.1. 2-vector filed B が定まったとき，いつこの方程式を満たすかという問題が生じる．一般の多様体上で，q-vector filed に対して，**Schouten Bracket** という．

$$\Omega_*(P) \times \Omega_*(P) \ni (A, C) \to [A, C] \in \Omega_*(P)$$

という双線形写像を得ることができる．実は，2 ベクトル場 B に対するポアソン積がヤコビ律を満たすことと，$[B, B] = 0$ が同値である（難しくはない）．

また，f に対するハミルトンベクトル場は $X_f g = \{g, f\}$ であるので，

$$X_f^i = \sum B^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}$$

となる．

EXAMPLE 8.4.4. シンプレクティック多様体 (M, ω) を考え，

$$\omega = \sum \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$$

と書いておく．このとき，f に対するハミルトンベクトル場の定義は

$$\omega(X_f, Y) = df(Y)$$

であったので，

$$\omega_{ij} X_f^i Y^j = \frac{\partial f}{\partial x^j} v^j$$

となり，

$$\omega_{ij} X_f^i = \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

となる．$\Omega := (\omega_{ij})$ は非退化行列であるので，逆行列が存在する．また，$(\Omega^{-1})^t = (\Omega^t)^{-1} = (-\Omega)^{-1} = -\Omega^{-1}$ で交代行列であることに注意する．そこで，

$$X_f^i = \omega^{ji}\frac{\partial f}{\partial x^j} = -\Omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}$$

となる．このように，

$$B^{ij} = -\omega^{ij}$$

となる．

上の例は局所座標で確かめたが，次のようにしてもよい．まず，ポアソン多様体上のポアソン構造から線形写像

$$B^{\#} : T_p^*P \ni df_p \mapsto (X_f)_p \in T_pP$$

が定まる（ポアソンの場合には同型とは限らない！）．つまり，

$$\{f,g\} = B(df,dg) = \langle df, B^{\#}dg\rangle = \langle df, X_g\rangle$$

である．シンプレクティック多様体の場合にも，

$$\omega^{\flat} : T_pM \ni v \mapsto \omega(v,\cdot) \in T_p^*M, \quad \omega^{\#} : T_p^*M \to T_pM$$

が定まっていた．ここで $\omega^{\#} = (\omega^{\flat})^{-1}$ である．そこで，

$$\langle \omega^{\flat}X_f, w\rangle = \omega(X_f, w) = df(w)$$

であるので，

$$X_f = \omega^{\#}df$$

であった．このように，

$$B^{\#} = \omega^{\#} : T_p^*M \to T_pM$$

となる．座標で書くと転置されるので，マイナス倍がつくことになる．

そこで，シンプレクティック多様体はポアソン多様体であるが，ポアソン多様体がいつシンプレクティック多様体になるかという問題は B を使えば解決できる．これは B が非退化，つまり $B^{\#} : T_p^*P \ni df_p \mapsto (X_f)_p \in T_pP$ が各点において同型ならよいのである．ω が閉であることは，ヤコビ律から従う．

Theorem 8.4.2. P をポアソン多様体として，**ポアソンテンソルを** B **とする．これが非退化なら，シンプレクティック多様体となる．**シンプレクティック構造は

$$\omega(X_f, X_g) = \{f,g\}$$

と定めればよい．

8.4.3 Lie-Poisson 構造

さて，リー環の双対空間にポアソン構造を入れよう．$\mathfrak{g}$ のリー環構造は $\mathfrak{g}^*$ 上に標準的ポアソン構造を定義する．

$$\{f, g\}(\xi) := \langle \xi, [df_\xi, dg_\xi] \rangle$$

ここで $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, $\xi \in \mathfrak{g}^*$, であり $df_\xi : T_\xi \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ は $\mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$ の元として定義している．この構造を **Lie-Poisson 構造**という

また，f に対するハミルトンベクトル場は

$$X_f(\xi) = \mathrm{ad}^*_{df_\xi}(\xi) \in T_\xi \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^*$$

で与えられる．

Proof. $g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対して，

$$\{f, g\}(\xi) = \langle \xi, [df_\xi, dg_\xi] \rangle = \langle \xi, \mathrm{ad}_{df_\xi} dg_\xi \rangle = -\langle \mathrm{ad}^*_{df_\xi} \xi, dg_\xi \rangle$$

一方，

$$\{f, g\}(\xi) = (X_g f)(\xi) = -(X_f g)(\xi) = -\langle dg_\xi, X_f(\xi) \rangle$$

となる．ここで，$X_f(\xi) \in T_\xi \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$ として，$dg_\xi \in \mathfrak{g}$ とみなしている．以上のことは任意の関数 g に対して成立し，dg_ξ が $\mathfrak{g}$ を span するので，$X_f(\xi) = \mathrm{ad}^*_{df_\xi}(\xi)$ となる． □

さて，上で定義したポアソン括弧に対して，ヤコビ律とライプニッツ則が成立することを確かめよう．

Proof. $f, h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対して，$d(fh)_\xi = df_\xi h(\xi) + f(\xi) dh_\xi$ となる．そこで

$$\begin{aligned} \{fh, g\}(\xi) =& \langle \xi, [df_\xi h(\xi) + f(\xi) dh_\xi, dg_\xi] \rangle = h(\xi) \langle \xi, [df_\xi, dg_\xi] \rangle + f(\xi) \langle \xi, [dh_\xi, dg_\xi] \rangle \\ =& \{f, g\} h + f \{h, g\} \end{aligned}$$

となる．次にヤコビ律を確かめよう．まず，$(T_\xi \mathfrak{g}^*)^* = \mathfrak{g}$ とみなして，

$$d\{g, h\} = d\langle \xi, [dg_\xi, dh_\xi] \rangle = [dg_\xi, dh_\xi] - d^2 h_\xi(\mathrm{ad}^*_{dg_\xi}(\xi), \cdot) + d^2 g_\xi(\mathrm{ad}^*_{dh_\xi}(\xi), \cdot)$$

となる．そこで，

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} &= \langle \xi, [df_\xi, [dg_\xi, dh_\xi]] \rangle - d^2 h_\xi(\mathrm{ad}^*_{dg_\xi}(\xi), \mathrm{ad}^*_{df_\xi} \xi) + d^2 g_\xi(\mathrm{ad}^*_{dh_\xi}(\xi), \mathrm{ad}^*_{df_\xi} \xi) \\ \{g, \{h, f\}\} &= \langle \xi, [dg_\xi, [dh_\xi, df_\xi]] \rangle - d^2 f_\xi(\mathrm{ad}^*_{dh_\xi}(\xi), \mathrm{ad}^*_{dg_\xi} \xi) + d^2 h_\xi(\mathrm{ad}^*_{df_\xi}(\xi), \mathrm{ad}^*_{dg_\xi} \xi) \\ \{h, \{f, g\}\} &= \langle \xi, [dh_\xi, [df_\xi, dg_\xi]] \rangle - d^2 g_\xi(\mathrm{ad}^*_{df_\xi}(\xi), \mathrm{ad}^*_{dh_\xi} \xi) + d^2 f_\xi(\mathrm{ad}^*_{dg_\xi}(\xi), \mathrm{ad}^*_{dh_\xi} \xi) \end{aligned}$$

を足せばよいので, リー環 $\mathfrak{g}$ のヤコビ律から,

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$$

が従う. □

以上から，$\mathfrak{g}^*$ はポアソン多様体である．

$\mathfrak{g}^*$ にポアソン構造が入ったが，モーメント写像との関係を述べておく．

Theorem 8.4.3. (M,ω,G,μ) をハミルトニアン G 空間とする．このとき，モーメント写像 $\mu: M\to\mathfrak{g}^*$ はポアソン写像である．すなわち，$\mu^*: C^\infty(\mathfrak{g}^*)\to C^\infty(M)$ はポアソン括弧を保存する．言い換えると，$f,g\in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対して，

$$\{f\circ\mu, g\circ\mu\}=\{f,g\}\circ\mu$$

が成立する．

Proof. C^∞ 関数の空間において，多項式全体の空間は稠密である（Weierstrass の近似定理．証明は伊藤清三の「ルベーグ積分」などをみよ）．そこで，多項式 f,g について考える．また，ポアソン括弧のライプニッツ則を考えれば，f,g は $\mathfrak{g}^*$ 上の線形汎関数としてよい．つまり，$f=X$, $g=Y$（$X,Y\in\mathfrak{g}$）で証明すれば十分である．f は線形汎関数なので，その微分 df も $X\in\mathfrak{g}=(T\mathfrak{g}^*)^*$ である．そこで，μ^*f に対するハミルトンベクトル場は，

$$\omega_x(Z,X_{\mu^*f})=(d\mu^*f)(Z)=(df)_{\mu(x)}((\mu_*)_x(Z))=\langle(\mu_*)_x(Z),X\rangle$$

となる．一方，

$$(d\mu^X)_x(Z)=Z\langle\mu,X\rangle=\langle(\mu_*)_x(Z),X\rangle=(\iota_{X^*}\omega)(Z)=\omega(X^*,Z)$$

となるので，$-X_{\mu^*\circ f}=X^*$ となる．そこで，

$$\{\mu^*f,\mu^*g\}(x)=\omega_x(X^*,Y^*)=\langle\mu,[X,Y]\rangle$$

となる．一方，

$$\mu^*\{f,g\}(x)=\langle\mu(x),[X,Y]\rangle$$

となる．よって，ポアソン写像である． □

8.4.4　ポアソン写像

Definition 8.4.3. P, Q をポアソン多様体として，写像 $F : P \to Q$ が**ポアソン写像**とは，

$$F^* : C^\infty(Q) \to C^\infty(P)$$

がポアソン括弧について準同型となること．

これは，シンプレクティック多様体の間の写像の一般化となるものである．少し，シンプレクティック多様体の間の写像について述べておく．

Definition 8.4.4. M, N がシンプレクティック多様体で $F : M \to N$ がシンプレクティック構造を保つとき，**シンプレクティック写像**という．つまり $F^*\omega_N = \omega_M$．

Remark 8.4.2. $F : M \to N$，$F^*\omega_N = \omega_M$ の場合に，ω_M が非退化であることから，F_* **は単射**でなくてはならない．実際，$F_*X = 0$ となるゼロでない $X \in T_pM$ が存在したとすると，$0 = \omega_N(F_*X, F_*Y) = \omega_M(X, Y)$（$\forall Y$）であるので，$X = 0$ となり矛盾する．このように，シンプレクティッ写像なら，はめ込みになる．

また，$\dim M = \dim N$ を仮定すると，シンプレクティック写像は局所微分同相になることがわかる．実際．$\phi^*\omega_N = \omega_M$ と体積要素を保存するので，ϕ のヤコビ行列はゼロでない．よって逆関数定理により局所微分同相である．

シンプレクティック写像 $\phi : M \to N$ が微分同相の場合（つまり，シンプレクティック同相！）には，ポアソン積は保存されることは容易に想像つくであろう．実際，次が成立する．

Proposition 8.4.4. 微分同相写像 $\phi : (M, \omega_M) \to (N, \omega_N)$ について，次は同値である．

- シンプレクティック写像（よってシンプレクティック同相）
- 任意の $f \in C^\infty(N)$ に対して，
$$X_f = \phi_* X_{\phi^* f}$$
- ϕ がポアソン写像．つまり，
$$\phi^*\{f, g\} = \{\phi^* f, \phi^* g\}$$

このように，シンプレクティック多様体の間の微分同相に対して，シンプレクティック構造を保つこととポアソン構造を保つことは同値である．

Proof. $f, g \in C^\infty(N)$ として，$df(Y) = \omega_N(X_f, Y)$ であった．そこで，仮定に関係なく

$$(\omega_N)_{\phi(p)}((X_f)_{\phi(p)}, \phi_* Z_p) = (\phi^* df)_p(Z_p) = (d\phi^* f)_p(Z_p) = (\omega_M)_p((X_{\phi^* f})_p, Z_p)$$

が成立する．

ϕ がシンプレクティック同相と仮定すると

$$\begin{aligned}(\omega_N)_{\phi(p)}((X_f)_{\phi(p)}, \phi_* Z_p) =&(\omega_M)_p((X_{\phi^* f})_p, Z_p) = (\phi^*\omega_N)_p((X_{\phi^* f})_p, Z_p)\\ =&(\omega_N)_{\phi(p)}(\phi_*(X_{\phi^* f})_p, \phi_* Z_p)\end{aligned}$$

となる．よって，ϕ_* が全単射であることから，$(X_f)_{\phi(p)} = \phi_*(X_{\phi^* f})_p$（$\forall p$）となり，

$$X_f = \phi_* X_{\phi^* f}$$

となる．逆に，これが成立しているなら，上でのべたことから，

$$(\omega_N)_{\phi(p)}(\phi_*(X_{\phi^* f})_p, \phi_* Z_p) = (\omega_N)_{\phi(p)}((X_f)_{\phi(p)}, \phi_* Z_p) = (\omega_M)_p((X_{\phi^* f})_p, Z_p)$$

となるので，

$$(\phi^*\omega_N)_p((X_{\phi^* f})_p, Z_p) = (\omega_M)_p((X_{\phi^* f})_p, Z_p)$$

ϕ が微分同相なので，$f_1, \cdots, f_n \in C^\infty(N)$ で，$(X_{\phi^* f_i})_p$ が T_pM を張るようなものが存在する．よって，$\phi^*\omega_N = \omega_M$ である．

次に，$X_f = \phi_* X_{\phi^* f}$ と仮定する．

$$\begin{aligned}\phi^*\{f, g\}_p =&(X_g)_{\phi(p)} f\\ \{\phi^* f, \phi^* g\}_p =&(X_{\phi^* g})_p \phi^* f = \phi_* X_{\phi^* g} f\end{aligned}$$

となるので，$\phi^*\{f, g\} = \{\phi^* f, \phi^* g\}$ である．逆に，これが成立しているなら，

$$(X_g)_{\phi(p)} f = \phi_* X_{\phi^* g} f$$

が任意の関数 f について成立するので，$X_f = \phi_* X_{\phi^* f}$．　□

証明を見ればわかるように，命題の２，３の条件はシンプレクティック構造がなくても成立する．

Corollary 8.4.5. $\phi : P \to Q$ をポアソン多様体の間の写像とする．ϕ ポアソン写像であるための必要十分条件は，任意の $f \in C^\infty(Q)$ に対して，X_f と $X_{\phi^* f}$ が ϕ 関係であること（つまり，$X_f = \phi_* X_{\phi^* f}$）．

また，次もわかる．

Corollary 8.4.6. (M, ω) をシンプレクティック多様体として，ハミルトニアン H に対するベクトル場 X_H が生成する *flow* を ϕ_t とすれば，

$$\phi_t^*\{f, g\} = \{\phi_t^* f. \phi_t^* g\}$$

（もちろん，X がシンプレクティックベクトル場の場合でも成立）．

この系は一般化することができ，ポアソン多様体上のハミルトンベクトル場に対する flow はポアソン構造を保つことがわかる．

Proposition 8.4.7. P をポアソン多様体として，$H \in C^\infty(P)$ に対するハミルトニアンベクトル場を X_H，*flow* を ϕ_t とする．このとき，ϕ_t はポアソン同相写像である．つまり．

$$\phi_t^*\{f, g\} = \{\phi_t^* f. \phi_t^* g\}$$

Proof.

$$k(t, p) = \{\phi_t^* f, \phi_t^* g\} - \phi^t\{f, g\}$$

を微分すれば，

$$\begin{aligned}\frac{dk}{dt} =& \{\{\phi_t^* f, H\}, \phi_t^* g\} + \{\phi_t^* f, \{\phi_t^* g, H\}\} - \{\phi_t^*\{f, g\}, H\} = \{\{\phi_t^* f, \phi_t^* g\} - \phi_t^*\{f, g\}, H\} \\ =& \{k, H\} = X_H(k)\end{aligned}$$

となる．解は $k_t(p) = k_0(\phi_t(p))$ である．解はただ一つであり，$k_0 = 0$ であるので $k(t, p) = 0$ を得る．□

Remark 8.4.3. ポアソン構造を保存するのであるから，ポアソン構造である 2-ベクトル場 B に対して，$L_{X_H} B = 0$ であることを意味する（もちろん，$L_{X_H} B = 0$ を直接証明することも可能）．

さて，シンプレクティック多様体 M, N があり，$i : M \to N$ という埋め込みで $i^*\omega_N = \omega_M$ とシンプレクティック写像になるときを考える．つまり M は N のシンプレクティック部分多様体である．このとき，ポアソン写像となるとは限らない．命題 8.4.4 にあるように,「$\phi^*\{f, g\} = \{\phi^* f, \phi^* g\}$」は「$X_f$ と $X_{\phi^* f}$ が ϕ 関係になること」と同値であった．しかし，$T_p N = \{(X_f)_p | f \in C^\infty(N)\}$ であるので，必要条件として M は N の開部分多様体でなければならない．これは，$i : P \to M$ というポアソン多様体からシンプレクティック多様体への埋め込みの場合も同様である．

しかし，次に見るように，ポアソン多様体からポアソン多様体への埋め込みの場合には，そのような条件は必要としてない．これは，ポアソン多様体の場合は $T_p N$ と $\{(X_f)_p | f \in C^\infty(P)\}$ は一致するとは限らないからである．

さて，余随伴軌道上のシンプレクティック構造と $\mathfrak{g}^*$ 上のポアソン構造との関係を見ていこう．

Proposition 8.4.8. 余随伴軌道 $\mathcal{O}$ 上の標準的シンプレクティック形式と *Lie-Poisson bracket* とは次のような関係がある．

$$\{f, g\}|_{\mathcal{O}} = \{f|_{\mathcal{O}}, g|_{\mathcal{O}}\}$$

つまり，$i : \mathcal{O} \to \mathfrak{g}^*$ を自然な単射とすると，

$$C^\infty(\mathfrak{g}^*) \ni f \mapsto i^* f = f|_{\mathcal{O}} \in C^\infty(\mathcal{O})$$

はポアソン写像である．

Proof. $\mu \in \mathcal{O}$ とする．まず，次のことを証明しよう．

$$X_{f|_{\mathcal{O}}}(\mu) = \mathrm{ad}^*_{df_\mu}(\mu)$$

$X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$\omega_\mu(X^*_\mu, Y^*_\mu) = \omega(\mathrm{ad}^*_X(\mu), \mathrm{ad}^*_Y(\mu)) = \langle \mu, [X, Y] \rangle = -\langle \mathrm{ad}^*_X(\mu), Y \rangle$$

となる．そこで，$Y = df_\mu$ とすれば，

$$\omega(\mathrm{ad}^*_X(\mu), \mathrm{ad}^*_{df_\mu}(\mu)) = -\langle \mathrm{ad}^*_X(\mu), df_\mu \rangle = -df_\mu(\mathrm{ad}^*_X(\mu))$$

が任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して成立するので（X^*_μ らは $T_\mu\mathcal{O}$ を span する），ハミルトンベクトル場の定義から $X_{f|_{\mathcal{O}}}(\mu) = \mathrm{ad}^*_{df_\mu}(\mu)$ となる．

そこで，定義を思い出せば，

$$\{f, g\}(\mu) = \langle \mu, [df_\mu, dg_\mu] \rangle,$$

となる．一方，

$$\{f|_{\mathcal{O}}, g|_{\mathcal{O}}\}(\mu) = \omega_\mu(X_{f|_{\mathcal{O}}}, X_{g|_{\mathcal{O}}})$$

であったので，

$$\begin{aligned}\{f|_{\mathcal{O}}, g|_{\mathcal{O}}\}(\mu) =& \omega(X_{f|_{\mathcal{O}}}, X_{g|_{\mathcal{O}}}) = \omega_\mu(\mathrm{ad}^*_{df_\mu}(\mu), \mathrm{ad}^*_{dg_\mu}(\mu)) = df_\mu(\mathrm{ad}^*_{dg_\mu}(\mu)) \\ =& \langle \mu, [df_\mu, dg_\mu] \rangle = \{f, g\}(\mu)\end{aligned}$$

となる．（注意：$i_* X_{i^* f}(\mu) = X_{f|_{\mathcal{O}}}(\mu) = \mathrm{ad}^*_{df_\mu}(\mu) = X_f(\mu)$ であるので，証明の後半部は不要である）　□

Corollary 8.4.9. *1.* $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対して，ハミルトンベクトル場 X_H を考える．$\mu \in G \cdot \mu$ の X_H から生成される *flow* による軌跡は $G \cdot \mu$ に入る．

2. $C \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ がカシミール関数になるための必要十分条件は $dC_\mu \in \mathfrak{g}_\mu$ となること（$\forall \mu \in \mathfrak{g}^*$）

3. $C \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ が G の作用で不変とする（つまり軌道上で定数）．このとき C はカシミール関数である．つまり，$\{f, C\} = 0$（$\forall f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$）

Proof. $X_H(\mu) = \mathrm{ad}^*_{dH_\mu}(\mu)$ であった．よって，X_H は余随伴軌道に接しているので，軌跡は余随伴軌道に乗っている．

次に，C がカシミール関数とは $X_C = 0$ のことであった．つまり $X_C(\mu) = \mathrm{ad}^*_{dC_\mu}(\mu) = 0$ である．一方，

$$\mathfrak{g}_\mu = \{X \in \mathfrak{g} | \langle [Y, X], \mu \rangle = 0 \forall Y \in \mathfrak{g}\} = \{X \in \mathfrak{g} | \mathrm{ad}^*_X(\mu) = 0\}$$

であったので，$dC_\mu \in \mathfrak{g}_\mu$（$\forall \mu$）であることと C がカシミール関数であることは同値である．

次に，C が G の作用で不変とする．つまり $C(\mathrm{Ad}^*_g \mu) = C(\mu)$ である．これを微分すれば，$dC_\mu(X^*_\mu) = 0$ を得る．よって，

$$\langle X^*_\mu, dC_\mu \rangle = \langle \mu, [dC_\mu, X] \rangle = 0$$

を得る．これは $dC_\mu \in \mathfrak{g}_\mu$ を意味する．

□

ポアソン多様体上で二つの点が（局所的に定義された）ハミルトンベクトル場に対する flow で piece wise に結ばれるとき同値として，**シンプレクティック葉層**を得る．実は，**ポアソン多様体はシンプレクティック leaf の（互いに交わらない）和集合として書ける**ことが知られている（symplectic stratification Theorem と呼ばれる．by Kirillov 1976）．

Theorem 8.4.10. P を（有限次元）ポアソン多様体とする．このとき P はシンプレクティック *leaf* の *disjoint union* である．各シンプレクティック *leaf* は，*Poisson submanifold* であり，*induced Poisson sturcture* はシンプレクティックとなる．また，$p \in P$ を通る *leaf* の次元は，その点におけるポアソン構造（ポアソンテンソル B）のランクに等しい．そして，*leaf* の接空間は

$$B^\#(T^*_p P) = \{(X_f)_p | f \in C^\infty(P)\}$$

である．特に，$f, g \in C^\infty(P)$ の点 p におけるポアソン積を計算するには，p を通るシンプレクティック *leaf* 上で計算すればよい．

（証明は省略するが，直感的にはそれほど難しいことではない）．

さらに，カシミール関数はシンプレクティック leaf 上で定数である．

Proof. C が lead Σ 上で定数でないとする．このとき，ある点 $z \in \Sigma$ と $v \in T_z\Sigma$ が存在して，$dC_z(v) \neq 0$ となる．一方，leaf の定義から，$T_z\Sigma$ は X_f（$f \in C^\infty(P)$）で span される．よって，$(X_f)_z = v$ とすれば，$dC_z(X_f(z)) = \{C, f\}(z) \neq 0$ となる．これはカシミール関数の定義に反する．□

ポアソン多様体 $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot,\cdot\})$ の場合を考えよう．$H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対するハミルトンベクトル場 X_H を考えて，$\xi \in \mathfrak{g}^*$ から出発する flow の曲線は $G \cdot \xi$ 内にある．逆に，$T_\xi(G \cdot \xi)$ は（局所的）ハミルトンベクトル場で span することができる．よって,（連結な）**余随伴軌道はポアソン多様体 $\mathfrak{g}^*$ のシンプレクティック leaf** である．上で述べたように，$C \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ が G の作用で不変なら，C はカシミール関数であった．逆に，すべての軌道が連結とすれば，C がカシミール関数なら，C は G の作用で不変である．

Proof. カシミール関数は leaf 上で定数であった．また，連結な余随伴軌道はシンプレクティック leaf である．そこで，余随伴軌道上でカシミール関数は定数である．すべての軌道が連結とすれば，すべての余随伴軌道上でカシミール関数は定数になるので，G の随伴作用で不変となる．□

EXAMPLE 8.4.5. $G = SO(3)$ とする．$\mathfrak{g}$ は 3×3 の交代行列で，$\mathbb{R}^3$ と同一視できる．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto a = (a_1, a_2, a_3)$$

このとき $[A, B]$ は外積 $a \times b$ に対応する．

また $SO(3)$ の $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*$ の作用は $\mathbb{R}^3$ の普通の作用（回転）に対応する．

よって $\mathbb{R}^3$ 上への coadjoint 作用の軌道は $\mathbb{R}^3$ 内の原点を中心とした球面である（半径は通る点によって変わる．原点の軌道は原点）．また余随伴軌道（in $\mathfrak{g}^*$）には標準的シンプレクティック構造がはいるのであった．カシミール関数として，$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ を取れる．この関数は，すべての軌道（球面）上で定数である．

この例は剛体に対する力学系を与えるが，詳細は [Marsden-Ratiu] を見よ．

第9章　シンプレクティック簡約

力学系に k 次元の対称性があると，位置と運動量に対する自由度は $2k$ 次元下がることになる．これを数学的に定式化する．数学的にいえばシンプレクティック多様体にリー群 G（対称性）がハミルトン作用しているときに，新しいシンプレクティック多様体をつくることである．これをシンプレクティック簡約という．この章では，シンプレクティック簡約について学ぶ．

9.1　Marsden-Weinstein-Meyer 定理

9.1.1　statement

Theorem 9.1.1 (Marsden-Weinstein-Meyer)**.** (M, ω, G, μ) をハミルトニアン G 空間とし，G コンパクトリー群とする．$i : \mu^{-1}(0) \to M$ を埋め込みとする．さらに $\mu^{-1}(0)$ に G が自由に作用しているとする．このとき

1. 軌道空間 $M_{red} = \mu^{-1}(0)/G$ は多様体である．

2. $\pi^{-1}(0) \to M_{red}$ は主 G 束である．

3. M_{red} 上にはシンプレクティック形式 ω_{red} で $i^*\omega = \pi^*\omega_{red}$ となるものが存在する．

Definition 9.1.1. 上のシンプレクティック多様体 (M_{red}, ω_{red}) をシンプレクティック商または簡約空間などという．

以下で，上で述べた定理を証明していく．

簡単な場合に考えてみる．$G = S^1$, $\dim M = 4$ とする．$p \in \mu^{-1}(0)$ として，局所座標 $(\theta, \mu, \eta_1, \eta_2)$ で次のものをとる

1. θ は p を通る軌道の座標である

2. μ はモーメント写像である．

3. η_1, η_2 は $\mu^{-1}(0)/S^1$（２次元）の座標（の引き戻し）．

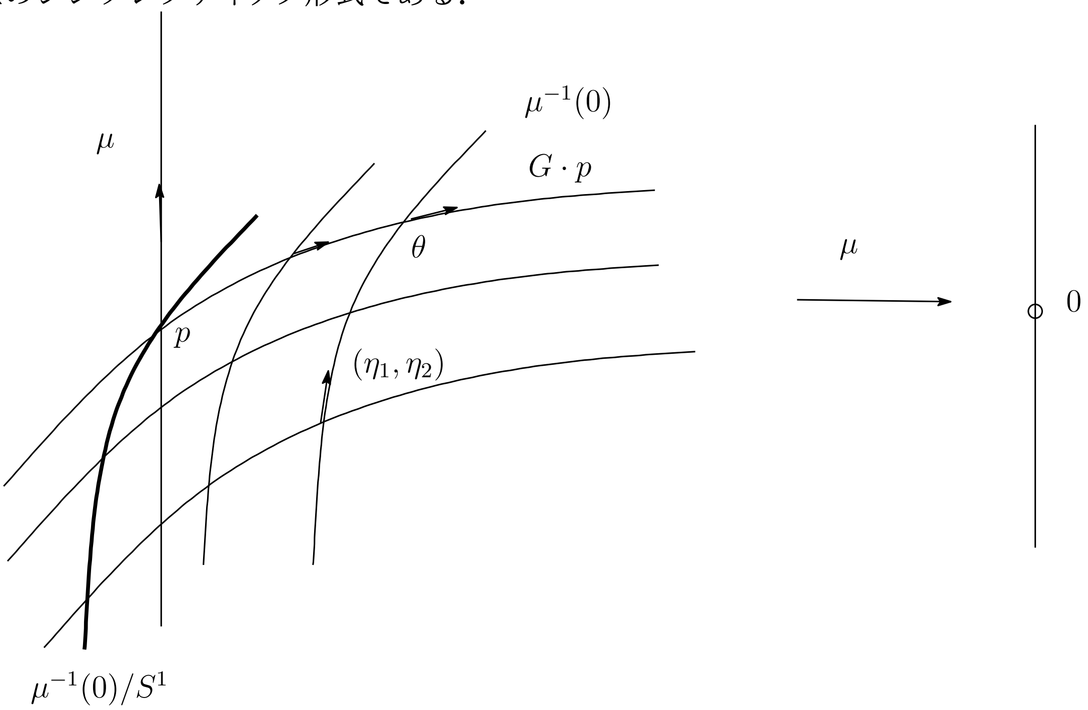
このときシンプレクティック形式は

$$\omega = Ad\theta \wedge d\mu + \sum B_j d\theta \wedge d\eta_j + \sum C_j d\mu \wedge d\eta_j + Dd\eta_1 \wedge d\eta_2$$

とする．条件から $d\mu = \iota(\partial\theta)\omega$ であるので $A = 1, B_j = 0$ がわかる．よって

$$\omega = Ad\theta \wedge d\mu + \sum C_j d\mu \wedge d\eta_j + Dd\eta_1 \wedge d\eta_2$$

となるが非退化より $D \neq 0$ である．よって $i^*\omega = Dd\eta_1 \wedge d\eta_2$ となる．これが M_{red} 上のシンプレクティック形式である．



9.1.2 準備

$p \in M$ に対する stabilizer を G_p として，そのリー環を $\mathfrak{g}_p$ とする．また p を通る軌道を $\mathcal{O}_p = G\cdot p$ とする．このとき，モーメント写像の点 p での微分 $d\mu_p : T_pM \to \mathfrak{g}^*$ を考える．

$$\ker d\mu_p = (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p}, \quad \mathrm{im}\, d\mu_p = \mathfrak{g}_p^0 := \{\xi \in \mathfrak{g}^* | \langle \xi, X\rangle = 0 \forall X \in \mathfrak{g}_p\}$$

となる．

Proof. μ がモーメント写像であることから，$d\mu^X = \iota_{X^*}\omega$ となるのであった．($\mu^X = \langle \mu, X\rangle$)．そこで

$$\langle d_p\mu(v), X\rangle = (\iota_{X_p^*}\omega_p)(v) = \omega_p(X_p^*, v)$$

が成立する．よって $d_p\mu$ の ker は $\omega_p(X_p^*, v) = 0$（$\forall X \in \mathfrak{g}$）である．$X \in \mathfrak{g}$ に対して X_p^* により $T_p\mathcal{O}_p$ は張られるのであった．よって $\ker d\mu_p = (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p}$ となる．

次に，$\mathrm{im}\, d\mu_p$ を考える．$X \in \mathfrak{g}_p$ とすると，$X_p^* = 0$ である．よって $\langle d_p\mu(v), X\rangle = 0$（$\forall X \in \mathfrak{g}_p$）となるので，$d\mu_p(v) \in \mathfrak{g}_p^0$ に入る．つまり $\mathrm{im}\, d\mu_p \subset \mathfrak{g}_p^0$ となる．これが一致することを確かめるために次元を数える．

M を $2n$ 次元として，$\mathfrak{g}$ を l 次元．$\mathfrak{g}_p$ の次元を s 次元とすると，O_p を $l-s$ 次元とする．$T_p\mathcal{O}_p$ は $l-s$ 次元で，$(T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p}$ は $2n-(l-s)$ 次元である．よって

$$\dim \mathrm{im}\, d\mu_p = 2n - (2n - l + s) = l - s = \dim \mathfrak{g}_p^0 = \dim \mathfrak{g}^* - \dim \mathfrak{g}_p.$$

□

そこで，G の作用を考えた場合に**次の四つは同値．**

- p における作用が局所自由
- $\iff$ $\mathfrak{g}_p = 0$
- $\iff$ $d\mu_p$ が全射
- $\iff$ p が μ の regular point（regular point の定義は $d\mu_p$ が全射）．

$0 \in \mathfrak{g}^*$ を固定する．モーメント写像の第二の条件から $\mu(\psi_g(p)) = Ad_g^*(\mu(p))$ であるので．$p \in \mu^{-1}(0)$ としたとき $\mu(\psi_g(p)) = 0$ となるので，$\mu^{-1}(0)$ **に** G **が作用する．**

そこで，G **が** $\mu^{-1}(0)$ **への作用が自由であるとする（仮定）．このとき** 0 **は** μ **の正則値**である（$\forall p \in \mu^{-1}(0)$ が free なので p は regular point）．よって $\mu^{-1}(0)$ は M の閉部分多様体である．codim は $\dim \mathfrak{g}^*$ である．($\dim \mu^{-1}(0) = \dim M - \dim G$ となる）．

さらに，このとき $T_p\mu^{-1}(0) = \ker d\mu_p$ である（$\mu(\mu^{-1}(0)) = 0$ であるので微分したらゼロであるので）．よって，$\ker d\mu_p = (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p}$ であったので，$T_p\mu^{-1}(0)$ **と** $T_p\mathcal{O}_p$ **は** T_pM **内で** ω_p**-直交**する（しかし G が $\mu^{-1}(0)$ に作用するので $T_p\mathcal{O}_p \subset T_p\mu^{-1}(0)$ であることに注意）．特に．$p \in \mu^{-1}(0)$ **を通る軌道の接空間** $T_p\mathcal{O}_p$ **は** T_pM **内の isotropic 部分空間**である．よって，$\mu^{-1}(0)$ **内の軌道は** M **内の isotropic 部分多様体**である．また $T_p\mu^{-1}(0) = (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p}$ から $(T_p\mu^{-1}(0))^{\omega_p} = T_p\mathcal{O}_p \subset T_p\mu^{-1}(0)$ であるので $\mu^{-1}(0)$ **は coisotropic 部分多様体**である．

Remark 9.1.1. isotropic であることを直接確かめてみよう．$X, Y \in \mathfrak{g}$，$p \in \mu^{-1}(0)$ とすると X^*, Y^* で $\mathcal{O}_p$ 上の接ベクトルは生成される．そこで

$$\begin{aligned}\omega_p(X_p^*, Y_p^*) =& [Y^*, X^*] \text{ に対するハミルトン関数の点 } p \text{ での値}\\ =& -[Y, X]^* \text{ に対するハミルトン関数の点 } p \text{ での値}\\ =& \mu^{[X,Y]^*}(p) = 0\end{aligned}$$

次の補題は次の subsection で使う．

Lemma 9.1.2. (V,ω) をシンプレクティックベクトル空間とする．I を *isotropic* 部分空間（$\omega|_I=0$．$I\subset I^\omega$）．ω は I^ω/I 上のシンプレクティック形式 Ω を自然に導く．

Proof. $u,v\in I^\omega$ とする．$[u],[v]\in I^\omega/I$ とする．このとき $\Omega([u],[v])=\omega(u,v)$ と定義する．これが well-defined，非退化をみる．$i,j\in I$ として，

$$\omega(u+i,v+j)=\omega(u,v)+\omega(u,j)+\omega(i,v)+\omega(i,j)=\omega(u,v)$$

となるので well-defined である．次に非退化をみる．$u\in I^\omega$ として $\omega(u,v)=0$ （$\forall v\in I^\omega$）とする．このとき $u\in(I^\omega)^\omega=I$ となる．よって $[u]=0$ である．　□

Remark 9.1.2. 同様にして，I が coisotropic のとき（$I^\omega\subset I$），I/I^ω にシンプレクティック構造を入れることができる．

9.1.3　Marsden-Weinstein-Meyer の定理の証明

(M,ω,G,μ) をハミルトニアン G 作用とし，G をコンパクト，さらに，G が $\mu^{-1}(0)$ に自由に作用しているとする．

G が $\mu^{-1}(0)$ に自由に作用するので，$d\mu_p$ は任意の $p\in\mu^{-1}(0)$ に対して全射であり，0 は regular 値である．そして $\mu^{-1}(0)$ は次元 $\dim M-\dim G$ の部分多様体である．

そこで，$M_{red}=\mu^{-1}(0)/G$ は多様体であり，$\pi:\mu^{-1}(0)\to M_{red}$ は主 G 束である．

証明すべきは M_{red} 上にシンプレクティック形式が存在することである．まず $\mu^{-1}(0)$ 上にシンプレクティック形式 ω を制限する（もちろん非退化性はいえない）．ω が G 不変なので $\mu^{-1}(0)\to\mu^{-1}(0)/G$ で落とせば，M_{red} 上の 2-from であることはわかる．これが非退化閉であることを見る．$p\in\mu^{-1}(0)$ として，軌道上の接空間 $T_p\mathcal{O}_p\subset T_p\mu^{-1}(0)\subset T_pM$ は (T_pM,ω_p) 内の isotropic 部分空間であった．また

$$(T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p}=\ker d\mu_p=T_p\mu^{-1}(0)$$

であるので，補題から $T_p\mu^{-1}(0)/T_p\mathcal{O}_p$ 上にはシンプレクティック形式が存在する．また $[p]\in M_{red}=\mu^{-1}(0)/G$ の接空間は $T_{[p]}M_{red}=T_p\mu^{-1}(0)/T_p\mathcal{O}_p$ であるので M_{red} 上に非退化 2-from ω_{red} が存在する（まだ閉はわからない）．ω_{red} の構成から，$i^*\omega=\pi^*\omega_{red}$ である．そこで $\pi^*d\omega_{red}=d\pi^*\omega_{red}=di^*\omega=0$ となる．$\pi^*:$ は単射なので（$\pi_*:T_p\mu^{-1}(0)\to T_{[p]}M_{red}$ は全射），$d\omega_{red}=0$ を得る．

Remark 9.1.3. (M,ω) 上に別のリー群 H が作用しているとして，モーメント写像 $\phi : M \to \mathfrak{h}^*$ を持つとする．さらに H の作用と G の作用が可換で，ϕ が G 不変な関数とする．このとき M_{red} 上には H のハミルトン作用でモーメント写像が $\phi_{red} : M_{red} \to \mathfrak{h}^*$ となるものが存在（$\phi_{red} \circ \pi = \phi \circ i$）.（証明は，後で述べる直積群の場合のシンプレクティック簡約と同様に行う）.

次は明らかであろう.

Proposition 9.1.3. (M,ω,G,μ) をハミルトニアン G 空間として，M がケーラー多様体とする．つまり *compatible* な複素構造が入っているとする．さらに，G の作用が複素構造を保存するなら，$\mu^{-1}(0)/G$ もケーラー多様体になる.

9.2 Reduction

9.2.1 ネーターの原理

(M,ω,G,μ) をハミルトニアン G 空間とする.

Theorem 9.2.1 (Noether). $f : M \to \mathbb{R}$ を G 不変関数とする．このとき f のハミルトンベクトル場に対する ***flow*** の ***trajectory*** 上で μ は定数である.（またこの逆も成立）.

Proof. v_f をハミルトンベクトル場とする．$X \in \mathfrak{g}$ として $\mu^X = \langle \mu, X \rangle : M \to \mathbb{R}$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
L_{v_f}\mu^X &= (v_f)\mu^X = \iota_{v_f} d\mu^X \\
&= \iota_{v_f}\iota_{X^*}\omega \quad (\mu \text{ がモーメント写像なので}) \\
&= -\iota_{X^*}\iota_{v_f}\omega = -\iota_{X^*}df = -L_{X^*}f \\
&= 0 \quad (f \text{ が } G \text{ 不変から})
\end{aligned}$$

逆に，μ が flow の軌道上で定数なら，$L_{X^*}f = 0$ を得るので，f は G 不変関数になる. □

f をハミルトニアンだと思えば，μ が運動に対する保存量になる.

Definition 9.2.1. G 不変関数 $f : M \to \mathbb{R}$ を (M,ω,G,μ) の第一積分という．μ がハミルトンベクトル場 v_f の軌道上で定数のとき，対応する微分同相の 1 パラメータ群を (M,ω,G,μ) に対する **symmetry** という.

上のネーターの定理は．symmetry と運動の積分の間に一対一対応しているということ.

Remark 9.2.1. ふつうのネーターの定理とは，ラグランジアンに無限小対称性 X があるとする．また $\omega_L = \sum \frac{\partial L}{\partial p_i} dx^i$ を TM 上のラグランジアンから決まる 1-from とする．このとき $\omega_L(X)$ はオイラーラグランジュの解曲線上で定数．(対称性があれば，保存量を得ることになる）．

9.2.2 reduction の基礎理論

$2n$ 次元の力学系に対してある対称性（または第一積分）があれば，それは $2n-2$ 次元の問題に reduce する．そこで (M, ω, H) という $2n$ 次元ハミルトン系に対して，f という対称性（第一積分）があったとする．以下局所的にみていく．局所的には U をダルブー座標 $x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n$ として，$f = \xi_n$ としてよい．ξ_n が第一積分ということは $\xi_n = const$ 上に v_H の軌道がある．そして，$\{\xi_n, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x_n} = 0$ であるので．$H = H(x_1, \cdots, x_{n-1}, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ となる．そこで $\xi_n = c$ 上でハミルトン方程式を書けば

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \xi_1}(x_1, \cdots, x_{n-1}, \xi_1, \cdots, c) \\
&\cdots \\
\frac{dx_{n-1}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \xi_{n-1}}(x_1, \cdots, x_{n-1}, \xi_1, \cdots, c) \\
\frac{d\xi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_{n-1}, \xi_1, \cdots, c) \\
&\cdots \\
\frac{d\xi_{n-1}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_{n-1}}(x_1, \cdots, x_{n-1}, \xi_1, \cdots, c) \\
\frac{dx_n}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \xi_n}(x_1, \cdots, x_{n-1}, \xi_1, \cdots, c) \\
\frac{d\xi_n}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_{n-1}, \xi_1, \cdots, c) = 0
\end{aligned}
$$

そこで reduce した相空間を

$$
\begin{aligned}
U_{red} = \{&(x_1, \cdots, x_{n-1}, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{2n-2} \\
&|(x_1, \cdots, x_{n-1}, a, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, c) \in U, \text{ for some } a\}
\end{aligned}
$$

として，reduce したハミルトニアンを

$$
H_{red} : U_{red} \ni (x_1, \cdots, x_{n-1}, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) \mapsto H(x_1, \cdots, x_{n-1}, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, c) \in \mathbb{R}
$$

とする．$\xi_n = c$ 上でもとの系の軌道を見つけるには，上の H_{red} に対する軌道

$$x_1(t), \cdots, x_{n-1}(t), \xi_1(t), \cdots, \xi_{n-1}(t)$$

を見つければよい．これは上の $2n-2$ 個の式を解けばよい．その後に

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_n}(x_1(t), \cdots, x_{n-1}(t), \xi_1(t), \cdots, \xi_{n-1}(t), c)$$

を積分して，$x_n(t)$ がもとまる．$\xi_n(t)$ は c（この c は最初に決めるものである）であった．

$$\begin{cases} x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial \xi_n}(x_1(t), \cdots, x_{n-1}(t), \xi_1(t), \cdots, \xi_{n-1}(t), c) dt, \\ \xi_n(t) = c \end{cases}$$

とすれば元の系の軌道がわかる．

9.2.3 product 群に対する reduction

G_1, G_2 をコンパクト連結リー群とする．$G = G_1 \times G_2$ とする．(M, ω, G, ψ) をハミルトニアン G 空間とする．ここでモーメント写像は

$$\psi = (\psi_1, \psi_2) : M \to \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_2^*$$

このとき ψ が equivariant（モーメント写像の第二の条件）から，ψ_1 は G_2 で不変．ψ_2 は G_1 で不変ということになる．(M, ω) を G_1 作用に関して，reduce する．

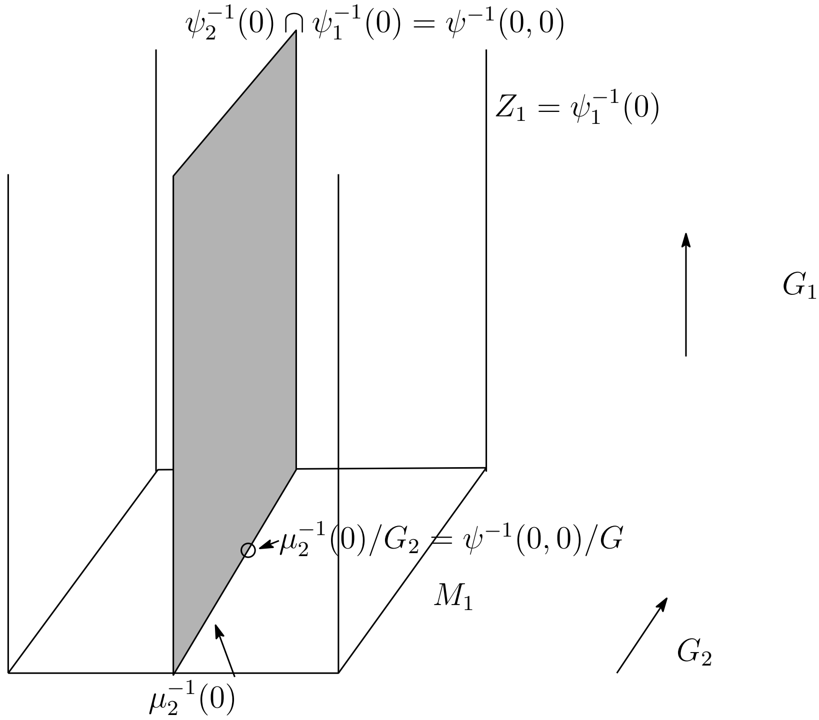
$$Z_1 = \psi_1^{-1}(0)$$

として，G_1 が自由に作用しているとする．$M_1 = Z_1/G_1$ としてシンプレクティック形式を ω_1 とする（$i_1^*\omega = p_1^*\omega_1$ on Z_1）．ψ_1 は G_2 不変であるので，G_2 は Z_1 に作用するが，G_2 は Z_1 上の G_1 の作用と可換であるので M_1 上に G_2 は作用する．また G_2 は ω を保存するので，G_2 は (M_1, ω_1) にシンプレクティック同相で作用する．

さらに，G_1 は ψ_2 を保存するので，G_1 は $\psi_2 \circ i_1 : Z_1 \to \mathfrak{g}_2^*$ を保存する（$i_1 : Z_1 \to M$ である）．よって $p_1 : Z_1 \to M_1$ というファイバー束を考えたとき，各 fiber 上で $\psi_2 \circ i_1$ は定数である．以上から $\mu_2 : M_1 \to \mathfrak{g}_2^*$ で $\mu_2 \circ p_1 = \psi_2 \circ i_1 : Z_1 \to \mathfrak{g}_2^*$ となるものを得る．

Proposition 9.2.2. このとき $(M_1, \omega_1, G_2, \mu_2)$ はハミルトニアン G_2 空間である．さらに，G が $\psi^{-1}(0,0)$ に自由に作用しているとき，G_2 は $\mu_2^{-1}(0)$ に自由に作用し，次のシンプレクティック多様体としての同型を得る．

$$\mu_2^{-1}(0)/G_2 \cong \psi^{-1}(0,0)/G.$$



Proof. $\psi = (\psi_1, \psi_2) : M \to \mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_2^*$ はモーメント写像であったので，

$$d\psi_1^{X_1} = \iota_{X_1^*}\omega, \quad d\psi_2^{X_2} = \iota_{X_2^*}\omega$$

および，

$$\langle \psi_1(g \cdot p), X_1 \rangle = \langle \psi_1(p), g^{-1}X_1 g \rangle, \quad \langle \psi_2(g \cdot p), X_2 \rangle = \langle \psi_2(p), g^{-1}X_2 g \rangle$$

を満たした.（たとえば左側の式において，$g = g_2$ をとれば，X_1 には自明で作用するので ψ_1 が G_2 不変な関数であることがわかる）.

$X_2 \in \mathfrak{g}_2$ として，$[p] \in M_1 = Z_1/G_1$ とする．$\mu_2^{X_2}(p) = \langle \mu_2(p), X_2 \rangle$ とする．このとき $d\mu_2^{X_2} = \iota_{X_2^*}\omega_1$ を確かめる.

$$p_1^* d\mu_2^{X_2} = dp_1^*\mu_2^{X_2} = i_1^* d\psi_2^{X_2} = i_1^*\iota_{X_2^*}\omega = \iota_{X_2^*} i_1^*\omega = \iota_{X_2^*} p_1^*\omega_1 = p_1^*(\iota_{p_{1*}X_2^*}\omega_1)$$

よって p_1^* が単射なので $d\mu_2^{X_2} = \iota_{X_2^*}\omega_1$ となる.

次に，$\langle \mu_2(g_2 \cdot [p]), X_2 \rangle = \langle \mu_2([p]), g_2^{-1}X_2 g_2 \rangle$ を確かめる．まず，$\langle \psi_2(g_2 \cdot p), X_2 \rangle = \langle \psi_2(p), g_2^{-1}X_2 g_2 \rangle$ を満たした（$p \in Z_1 \subset M$）．よって

$$\begin{aligned}
&\langle (\mu_2 \circ p_1)(g_2 \cdot p), X_2 \rangle = \langle \mu_2 \circ p_1(p), g_2^{-1}X_2 g_2 \rangle \\
&\quad \Rightarrow \langle (\mu_2)([g_2 \cdot p]), X_2 \rangle = \langle \mu_2([p]), g_2^{-1}X_2 g_2 \rangle \\
&\quad \Rightarrow \langle (\mu_2)(g_2 \cdot [p]), X_2 \rangle = \langle \mu_2([p]), g_2^{-1}X_2 g_2 \rangle
\end{aligned}$$

次に，G が $\psi^{-1}(0,0)$ に自由に作用してるときに，G_2 が $\mu_2^{-1}(0)$ に自由に作用することを証明する．$\psi^{-1}(0,0)=\psi_1^{-1}(0)\cap\psi_2^{-1}(0)$ である．これを p_1 で落とせば $\mu_2^{-1}(0)$ に一致する．実際，$p\in\psi_1^{-1}(0)\cap\psi_2^{-1}(0)$ とすると $\psi_2(p)=\psi_1(p)=0$ である．そこで $\mu_2\circ p_1(p)=\mu_2([p])=\psi_2(p)=0$ である．逆に $[p]\in M_1=Z_1/G_1$ とすると $p\in Z_1=\psi_1^{-1}(0)$ であり，$\mu_2([p])=0$ なら $\psi_2(p)=0$ を得る．

べつの言い方をすれば，$\psi^{-1}(0,0)$ は $\mu_2^{-1}(0)\subset M_1$ 上の主 G_1 ファイバー束である．とくに，$\psi^{-1}(0,0)/G_1=\psi_2^{-1}(0)$ である．そこで G が自由に作用していることおよび G_1,G_2 の可換性から G_2 が $\psi^{-1}(0,0)/G_1=\psi_2^{-1}(0)$ に自由に作用することになる．

またこのとき，$\mu_2^{-1}(0)/G_2\cong\psi^{-1}(0,0)/G$ となる．シンプレクティック形式が一致することは ω が G 不変であるので，構成の仕方からわかる．　$\square$

上の証明をみればわかるように，直積リー群の場合には，順番に reduction すればよい．またこの方法は $H\subset G$（正規部分群）に対して，リー群 G/H と H と順番に reduction すれば，G の reduction になることへと拡張できる．

また，ハミルトニアン G 空間 (M,ω,G,μ) があったとき，$H\subset G$ に対して，$i:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ は $i^*:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{h}^*$ を導く．このとき $\mu':=i^*\mu:M\to\mathfrak{h}^*$ とすれば，(M,ω) はハミルトニアン H 空間になる.（証明は容易である）．たとえば，G が余随伴軌道 $\mathcal{O}_\lambda$ に作用しているとき，$T\subset G$ を極大トーラスとしてハミルトニアン T 空間と考えると（$\lambda\in\mathfrak{t}^*$ とする），表現論に密接に関係してくる．例えばその像は polytope になるが，polytope の頂点は λ のワイル群軌道になる．

9.2.4　他のレベルでの reduction

(M,ω,G,μ) をハミルトニアン G 空間で G がコンパクトリー群とする．

$\xi\in\mathfrak{g}^*$ に対して，ξ に対する**レベル** $\mu^{-1}(\xi)$ **を考える．これを reduce するには，**G **で保存される必要がある**（$\xi=0$ の場合は自動的に保存される）．そのための必要十分条件は $\mu\circ\psi_g=Ad_g^*\circ\mu$ から

$$Ad_g^*\xi=\xi\quad\forall g\in G$$

（つまり ξ が G により保存される）．G **がトーラス群の場合**には，勝手な ξ に対して満たされる．さらに，$\phi(p):=\mu(p)-\xi$ とすれば，これはモーメント写像となるので，$\mu^{-1}(\xi)$ を考えることと $\phi^{-1}(0)$ を考えることは同値である．例えば S^1 作用を考えたとき，singular 値を通らない場合は，上のような shift に対して微分同相となる．しかし，ξ が変わることにシンプレクティック形式は変わる．このようにして**シンプレクティック多様体の family を作ることができる．**

$\mu^{-1}(\xi)$ が G 不変でない場合には，$\mu^{-1}(\xi)$ 内の G 軌道上で考えるとか，$\mu^{-1}(\xi)$ を保存するような G の最大群を取るなどの方法がある．

$\mu^{-1}(\xi)$ 内の G 軌道上で考える方法について述べる．$p \in \mu^{-1}(\xi)$ とする．このとき $\mu(g \cdot p) = Ad_g^* \circ \mu(p) = Ad_g^* \xi$ であるので，$\mu^{-1}(\xi)$ **の軌道の** μ **での像は** ξ **の随伴軌道**である．そこで，$\mathcal{O}$ を $\mathfrak{g}^*$ 内の余随伴軌道として，標準的なシンプレクティック構造 ω_c を入れておく．$\mathcal{O}^-$ を $-\omega_c$ をもつ軌道 $\mathcal{O}$ とする．$M \times \mathcal{O}^-$ への G の自然な作用を考えて，モーメント写像として

$$\mu_{\mathcal{O}}(p, \xi) = \mu(p) - \xi$$

をとることができる．この $M \times \mathcal{O}^-$ に対して，reduction の仮定が満たされる（$\mu_{\mathcal{O}}^{-1}(0)$ への作用が自由）とすると，我々は**余随伴軌道** $\mathcal{O}$ **に随伴したシンプレクティック簡約空間**を得る．

Proof. モーメント写像になることを確かめてみる．まず，シンプレクティック構造は $\omega' = pr_1^*\omega - pr_2^*\omega_c$（twisted product）．これがシンプレクティック構造になることを確かめる．$d\omega' = 0$ はすぐにわかる．また非退化性は，M を $2n$ 次元，$\mathcal{O}$ を $2k$ 次元とすると，$(\omega')^{n+k} = const\omega^n \wedge \omega_c^k$ であることからわかる．さて，余随伴軌道上のシンプレクティック形式は

$$-\omega_{c,\xi}(X_\xi^*, Y_\xi^*) := -\langle \xi, [X, Y] \rangle$$

として定めるのであった．そして，余随伴軌道上でのモーメント写像は $\mu_c : \mathcal{O} \ni \xi \to \xi \in \mathfrak{g}^*$ であった．これより，$\mu_{\mathcal{O}}$ がモーメント写像になることはすぐわかる．□

ξ の軌道 $\mathcal{O}_\xi$ が一点 ξ の場合には $\mu_{\mathcal{O}}^{-1}(0) = \mu^{-1}(\xi) \subset M \times \{\xi\}$ になる．たとえば，$\xi = 0$ のときは ξ の軌道は 0 のみであるので，これは普通のシンプレクティック簡約になる．一般には，$\mu_{\mathcal{O}}^{-1}(0) = \mu^{-1}(\mathcal{O})$ である．つまり軌道 $\mathcal{O}$ の逆像に対する reduction である．$\mu_{\mathcal{O}}^{-1}(0)/G$ は $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ **に対するシンプレクティック簡約を行ったことになる**．よって $\mu^{-1}(\mathcal{O})/G \cong \mu_{\mathcal{O}}^{-1}(0)/G$ というシンプレクティック同相を得ることがわかる．

9.2.5 blow-up in complex geometry

ここでは簡約空間の一つの応用として，シンプレクティック爆発（blow-up）について触れる．**シンプレクティック blow-up は，あるシンプレクティック多様体から，新しいシンプレクティック多様体を構成する重要なテクニックの一つである．**この subsection で，複素幾何での blow-up（特に，点での blow-up）を説明し，次

の subsection で．シンプレクティック blow-up 及び簡約空間を使った具体的に構成について説明する．

複素多様体における blow-up を説明する．blow-up とは複素多様体と部分複素多様体に対して定義できるものであるが，まずは点に対する blow-up について詳しく解説する．

まず $\mathbb{C}^n$ での一点 blow-up について述べる．$\mathbb{C}^n \times \mathbb{CP}^{n-1}$ に対する部分多様体 $\tilde{\mathbb{C}}^n$ を

$$\tilde{\mathbb{C}}^n = \{(z_1, \cdots, z_n; [w_1, \cdots, w_n]) | z = \lambda w \text{ for some } \lambda \in \mathbb{C}\}$$

とし，各成分への射影を

$$\Phi : \tilde{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{C}^n, \quad pr : \tilde{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{CP}^{n-1}$$

とする．まず $pr : \tilde{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{CP}^{n-1}$ は $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上の複素直線束で，universal line bundle である．

Proof. 簡単のため $n = 2$ で考える．$[w_1, w_2] \in \mathbb{CP}^1$ の fiber を考えてみる．$(z_1, z_2) = \lambda(w_1, w_2)$ であるので，(z_1, z_2) は $\mathbb{C}^2$ 内の原点をとおり方向が (w_1, w_2) の直線である．よって，これは $\mathbb{CP}^1$ 上の **universal line bundle** になっている．

また，$\tilde{\mathbb{C}}^n$ の局所座標としては，例えば $w_n \neq 0$ のとき，

$$\mathbb{C}^n \ni (z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n) \mapsto (z_n z_1, \cdots, z_n z_{n-1}, z_n, [z_1, \cdots, z_{n-1}, 1]) \in \tilde{\mathbb{C}}^n$$
$$\mathbb{C}^n \ni (z_1/z_n = w_1/w_n, \cdots, z_{n-1}/z_n = w_{n-1}/w_n, z_n) \leftarrow (z_1, \cdots, z_n, [w_1, \cdots, w_{n-1}, w_n]) \in \tilde{\mathbb{C}}^n$$

とすればよい．この張り合わせを考え，推移関数を計算すれば universal line bundle になっていることは確かめられる．また，Φ は局所座標では，

$$\Phi : (z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n) \to (z_n z_1, \cdots, z_n z_{n-1}, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

となっているので，正則写像である．　□

この Φ を詳しく見てみよう．まず，$\Phi^{-1}(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$ 上で Φ は全単射かつ双正則である．さらに $\Sigma = \Phi^{-1}(0) = \mathbb{CP}^{n-1}$（**例外因子 exceptional divisor** という）である．また，$\mathbb{C}^n$ 上の $U(n)$ の作用は，自然に $\tilde{\mathbb{C}}^n$ への作用へと lift し，Φ は $U(n)$ 同変である．

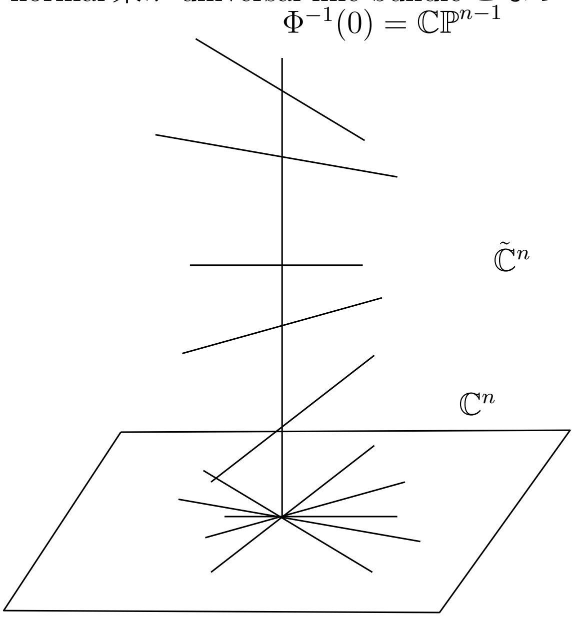
Proof. Φ が全射は明らかである．つぎに $\Phi((z_1; [w_1])) = \Phi((z_2; [w_2]))$ と仮定すると，$z_1 = z_2 \neq 0$ であり，$z_i = \lambda_i w_i$ の $\lambda_i \neq 0$ であるので，$w_1 = w_2$ が成立する．よって単射である．また，局所座標表示から $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ において Φ の微分はゼロでないことがわかるので双正則であることもわかる．また

$$\Phi^{-1}(0) = \{(0, \cdots, 0; [w_1, \cdots, w_n])\} = \mathbb{CP}^{n-1}$$

となる．

また $\mathbb{C}^n$ の $U(n)$ の作用をリフトさせるには，$(z,[w]) \to (Az,[Aw])$ とすればよい（$z=\lambda w$ から $Az=\lambda Aw$ となる）．このとき Φ が $U(n)$ 同変であることは明らかである． □

以上の考察により，$\tilde{\mathbb{C}}^n$ は，$\mathbb{C}^n$ の原点を通るすべての直線の全体と同一視でき，$\tilde{\mathbb{C}}^n$ は $\Sigma=\Phi^{-1}(0)$ 上の univrsal 直線束 L となることがわかった．特に，$\tilde{\mathbb{C}}^n$ 内の Σ の normal 束が universal line bundle となっている．



この $\tilde{\mathbb{C}}^n$ を $\mathbb{C}^n$ の原点における **blow-up** と呼ぶ．簡単に言えば，$\mathbb{C}^n$ の原点を $\mathbb{C}P^{n-1}$ に取り換えたものである．もう少し幾何学的に述べてみる．$\mathbb{C}^n$ の原点の近傍である $D^{2n}=\{z\in\mathbb{C}||z|\le\epsilon|\}$ を $\mathbb{C}^n$ から切り取る．その境界は S^{2n-1} である．一方，Hopf-fibration $\mathbb{C}^n\supset S^{2n-1}\to S^{2n-1}/S^1=\mathbb{C}P^{n-1}$ を考える．これは，$\mathbb{C}P^{n-1}$ 上の universal line budle の unit sphere bundle であり，universal budnle 内で zero-section である $\mathbb{C}P^{n-1}$ の近傍の境界と見なせる．そこで，この unit disk bundle を $\mathbb{C}^n\setminus D^{2n}$ に，境界 S^{2n-1} に沿って張り合わせたものが，blow-up $\tilde{\mathbb{C}}^n$ である．

Remark 9.2.2. 複素幾何で知られているように $c_1(L)=-c$ である，ここで c は $H^2(\mathbb{CP}^{n-1},\mathbb{Z})$ の生成元．特に，$n=2$ のとき $\langle c_1(L),[\Sigma]\rangle=-1$ である．

以上をモデルとして，一般の複素多様体上での一点 blow-up を定義しよう．M を n 次元複素多様体として，ある点 p の近傍 (W,p) を $(U,0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ と双正則となるようにして，(W,p) を取り除いて $\Phi^{-1}(U)$ を貼り付ける．また，$\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ の 0 を保存する双正則写像があれば $\tilde{\mathbb{C}}^n\to\tilde{\mathbb{C}}^n$ という双正則写像へ lift するので，こ

の操作は（十分小さい）近傍 W の取り方よらず，well-defined である．つまり，できた多様体らは双正則となる．このようにして得られた複素多様体 $\tilde{M}$ を M の点 p における**一点 blow-up** という．$\pi : \tilde{M} \to M$ を得るが，$S = \pi^{-1}(p)$ とすれば，$\pi : \tilde{M} \setminus S \to M \setminus \{p\}$ は双正則写像である．

Proof. well-defined を確かめてみる．$p \in M$ の近傍における正則座標を $z \in U \subset \mathbb{C}^n$ として，$(z'_1, \cdots, z'_n) = (f^1(z). \cdots, f^n(z))$ を別の正則座標とするして，$U' = f(U)$ とする．また，$f^i(0) = 0$ としても一般性を失わない．U の原点における blow-up を $\tilde{U}$ として，新しい座標での blow-up を $\tilde{U}'$ と書くことにする．f^i をべき級数展開すれば，１次以上の項しかないので，$f^i(z) = \sum f^i_j(z) z_j$ と書くことができる．ここで $f^i_j(z)$ は $f^i_j(0) = \frac{\partial f^i}{\partial z_j}(0)$ となる正則関数である．このような f^i_j の取り方はたくさんある．さて，f の拡張を

$$\tilde{f} : \tilde{U} \ni (z, [w]) \mapsto (z', [w']) = (f(z), [\sum f^1_j(z) w_j, \cdots, \sum f^n_j(z) w_j]) \in \tilde{U}'$$

として定義する．$z = \lambda w$ であるので，$z \neq 0$ なら，$\lambda \neq 0$ であり，

$$[\sum f^1_j(z) w_j, \cdots, \sum f^n_j(z) w_j] = [f^1(z), \cdots, f^n(z)]$$

と f^i_j の取り方によらずに well-defined である．また，$z = 0$ の場合には，

$$[\sum f^1_j(0) w_j. \cdots, \sum f^n_j(0) w_j] = [\sum \frac{\partial f^1}{\partial z_j}(0) w_j, \cdots, \sum \frac{\partial f^n}{\partial z_j}(0) w_j]$$

となるので，f^i_j の取り方によらずに well-defined である．つまり，上の $\tilde{f}$ は f から unique に決まる正則関数である．さらに，次の図式を可換にしていることがわかる．

$$\begin{tikzcd} \tilde{U} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\Phi"'] & \tilde{U}' \arrow[d, "\Phi'"] \\ U \setminus \{0\} \arrow[r, "f"] & U' \setminus \{0\} \end{tikzcd}$$

また，可換であることと $\Phi : \tilde{U} \setminus \Phi^{-1}(0) \to U \setminus \{0\}$ が双正則であることから，$\tilde{f} : \tilde{U} \setminus \Phi^{-1}(0) \to \tilde{U}' \setminus \Phi'^{-1}(0)$ は双正則である．あとは $\Phi^{-1}(0)$ の近傍で双正則であることを確かめればよい．次のように示せばよい，$\tilde{f}$ の構成と同様にして，$\tilde{f}^{-1}$ を作れる．このように作った $\tilde{f}^{-1}$ が $\tilde{f} : \tilde{U} \setminus \Phi^{-1}(0) \to \tilde{U}' \setminus \Phi'^{-1}(0)$ に対し逆写像であることは明らかである．また，$z' = 0$ のところ（$\Phi'^{-1}(0)$ のところ）では，$\tilde{f}^{-1}$ は，

$$[\sum \frac{\partial (f^{-1})^1}{\partial z_j}(0) w'_j, \cdots, \sum \frac{\partial (f^{-1})^n}{\partial z_j}(0) w'_j]$$

となるので，

$$\sum \frac{\partial f^k}{\partial z_j}(0)\frac{\partial (f^{-1})^j}{\partial z_i}(0)w_i = \sum \delta_i^k w_i = w_k$$

により，$\tilde{f}^{-1}$ は，$\tilde{f} : \Phi^{-1}(0) \to \Phi'^{-1}(0)$ の逆写像になっていることがわかる．また，局所座標を使えば $\tilde{f}, \tilde{f}^{-1}$ は正則関数であることがわかる．以上から，$\tilde{f}$ は双正則である． □

さらに $\tilde{\mathbb{C}}^n$ は $\overline{\mathbb{CP}^n}$ から一点を除いたものと向きも込みで微分同相である．よって $\tilde{M}$ は $M\#\overline{\mathbb{CP}^n}$ と微分同相となる．$\overline{\mathbb{CP}^n}$ は $\mathbb{C}P^n$ の向きを入れ替えたものであり，複素多様体とは限らない．

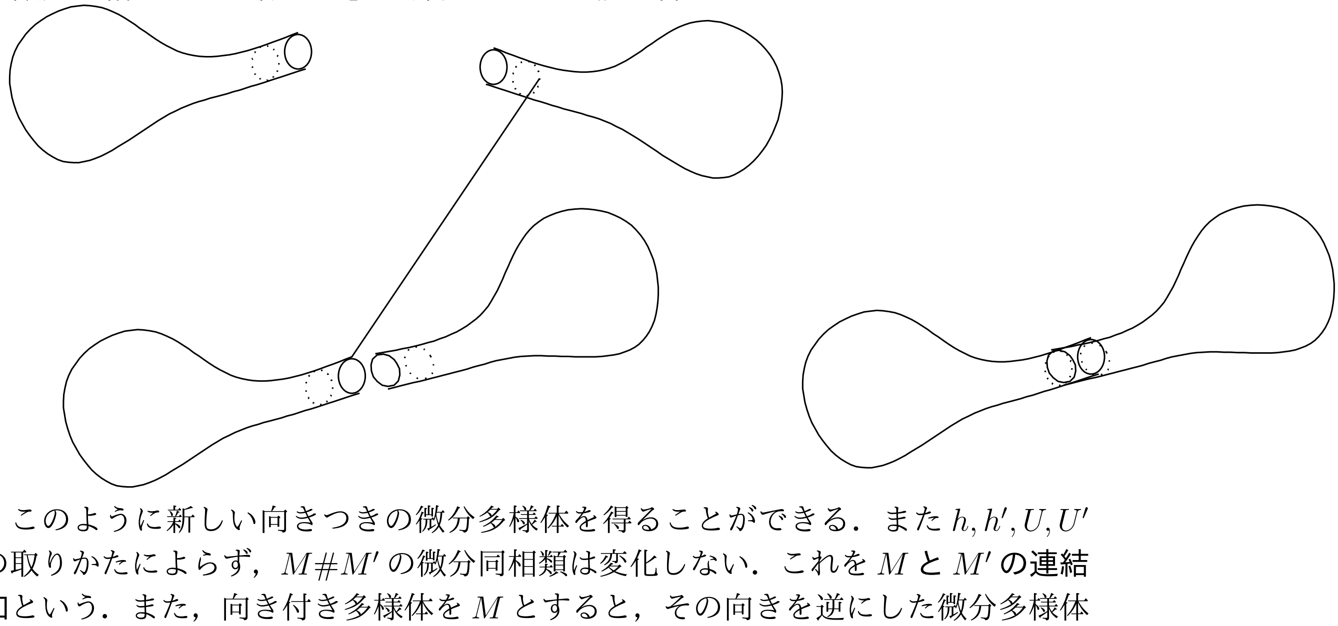
二つの微分多様体 M, M' の**連結和** $M\#M'$ を定義しておく．M, M' を n 次元微分多様体とする．$B \subset \mathbb{R}^n$ を単位円盤とする．また，$U \subset M$，$U' \subset M'$ という開集合で，$h : B \cong U$，$h' : B \cong U'$ となるので h は向きを保存する微分同相，h' は向きを逆にする微分同相とする．また，

$$\phi : B \setminus \frac{1}{2}\bar{B} \ni x \mapsto \frac{x}{2|x|^2} \in B \setminus \frac{1}{2}\bar{B}$$

とすれば，これは向きを逆にする微分同相である．そこで，

$$M\#M' := (M \setminus h(\bar{B}/2)) \cup_{h'\circ\phi\circ h^{-1}} (M' \setminus h'(\bar{B}/2))$$

とする．ここで，$h' \circ \phi \circ h^{-1} : h(B) \setminus h(\bar{B}/2) \to h'(B) \setminus h'(\bar{B}/2)$ という向きを保つ微分同相により「糊しろ」の部分がうまく張り合うことになる．



このように新しい向きつきの微分多様体を得ることができる．また h, h', U, U' の取りかたによらず，$M\#M'$ の微分同相類は変化しない．これを M と M' の**連結和**という．また，向き付き多様体を M とすると，その向きを逆にした微分多様体を $\bar{M}$ とする．

さて，$\tilde{M}$ は $M\#\overline{\mathbb{CP}^n}$ と微分同相となることを証明しよう．

Proof. 連結和は局所的な性質なので，局所的に証明すればよい．そこで，M を単位開円盤 $U \subset \mathbb{C}^n$ として，blow-up $\tilde{U}$ を使って証明する．

まず $U\#\overline{\mathbb{C}P^n}$ を構成しよう．上の連結の和の説明における h を $h = \mathrm{id}$ とする．また，

$$h' : U \ni z = (z_1, \cdots, z_n) \mapsto [1, z_1, \cdots, z_n] \in U' \subset \overline{\mathbb{C}P^n}$$

とする．$\overline{\mathbb{C}P^n}$ は向きを逆にしたものであるので，$h' : U \to U'$ は向きを逆にする微分同相である．このようにして，

$$U\#\overline{\mathbb{C}P^n} = (U \setminus \bar{U}/2) \cup_{h'\circ\phi} (\overline{\mathbb{C}P^n} \setminus h'(\bar{U}/2))$$

が得られる．ここで，$\phi : U \setminus \frac{1}{2}\bar{U} \ni x \mapsto \frac{x}{2|x|^2} \in U \setminus \frac{1}{2}\bar{U}$ である．また，今の場合には，$(U \setminus \bar{U}/2)$ が糊しろの部分であるので，$U\#\overline{\mathbb{C}P^n} = \overline{\mathbb{C}P^n} \setminus h'(\bar{U}/2))$ である．

さて，次に blow-up $\tilde{U}$ を考える．blow-up での射影を以前のように，

$$\Phi : \tilde{U} = \{(z, [w]) \in \tilde{U} | |z| < 1\} \ni (z, [w]) \mapsto z \in U$$

としておく．我々は，

$$F : U\#\overline{\mathbb{C}P^n} = \overline{\mathbb{C}P^n} \setminus h'(\bar{U}/2)) \to \tilde{U}$$

という向きを保つ微分同相で．糊しろの部分で

$$F = \Phi^{-1} \circ \phi \circ h'^{-1} : h'(U) \setminus h'(\frac{1}{2}\bar{U}) \cong \{(z, [w]) \in \tilde{U} | \frac{1}{2} < |z| < 1\}$$

となるものを構成すればよい．このようなものが構成できれば，一般の場合に $\tilde{M} = M\#\overline{\mathbb{C}P^n}$ がわかる．この写像は具体的に，次のようにすればよい．

$$[w] = [w_0, w'] = [w_0, w_1, \cdots, w_n] \in \overline{\mathbb{C}P^n}$$

に対して，

$$F : \overline{\mathbb{CP}^n} \setminus h'(\frac{1}{2}\bar{U}) \ni [w] \mapsto (z, [w]) = (\frac{\bar{w}^0}{2}\frac{w_1}{|w'|^2}, \cdots, \frac{\bar{w}^0}{2}\frac{w_n}{|w'|^2}, [w']) \in \tilde{U}$$

とすればよい．これが我々が求めるものであることを確かめよう．

まず，$z = \lambda w'$ の関係式も満たしており．$F(c[w]) = F([w])$ も満たしている．つまり，F は well-defined な写像である．また，

$$\overline{\mathbb{CP}^n} \setminus h'(\frac{1}{2}\bar{U}) = \{[w_0, w'] = [1, w'/w_0] \in \overline{\mathbb{CP}^n} \mid |w'|/|w_0| > 1/2\}$$
$$h'(U) \setminus h'(\frac{1}{2}\bar{U}) = \{[w_0, w'] = [1, w'/w_0] \in \overline{\mathbb{CP}^n} \mid 1/2 < |w'|/|w_0| < 1\}$$

となるので，

$$|z|^2 = \sum \frac{|w_0|^2}{4}\frac{|w_i|^2}{|w'|^4} = \frac{|w_0|^2}{4|w'|^2} < 1$$

が成立する．よって，$F(\overline{\mathbb{CP}^n} \setminus h'(\frac{1}{2}\bar{U})) = \tilde{U}$ となることもわかる．さらに，

$$\Phi^{-1}\circ\phi\circ h'^{-1}([w_0, w']) = \Phi^{-1}\circ\phi(w'/w_0) = \frac{w'}{2w_0}\frac{|w_0|^2}{|w'|^2} = \Phi^{-1}(\frac{\bar{w_0}w'}{2|w'|^2}) = (\frac{\bar{w_0}w'}{2|w'|^2}, [w'])$$

となるので，糊しろの部分で $F = \Phi^{-1}\circ\phi\circ h'^{-1}$ となることがわかる．また，

$$\frac{\bar{w}^0}{2}\frac{w'}{|w'|^2}$$

を見ると，$\bar{w_0}$ のところで，向きが逆になり，$\frac{w'}{|w'|^2}$ の部分でも向きが逆になる．これらを合わせれば，F は向きを保つ写像であることがわかる．また，F^{-1} を簡単に構成できるので，以上を合わせれば向きを保つ微分同相であり，糊しろの部分で $F = \Phi^{-1}\circ\phi\circ h'^{-1}$ となる．

次のように幾何的の述べることもできる．$n = 2$ の場合に $\mathbb{CP}^2 \setminus \{[1, 0, 0]\}$ から $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^2$ への写像を

$$F([1, z_2, z_3]) = (\frac{\bar{z}_0 z_2}{|z_2|^2 + |z_3|^2}, \frac{\bar{z}_0 z_3}{|z_2|^2 + |z_3|^2}; [z_2, z_3]))$$

として定義する．これが $\mathbb{CP}^2 \setminus \{[1, 0, 0]\}$ から $\tilde{\mathbb{C}}^n \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^2$ への微分同相写像を与えていることはすぐにわかる．また，$\{[0, z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^2\}$ が exceptional divisor $\Phi^{-1}(0)$ に対応しており，ここでは向きは保たれている．F が向きを保つ写像であるとすると，$\mathbb{CP}^2$ 内の $\mathbb{CP}^1$ の normal 束の第一チャーン類は c であり，一方 Σ の normal 束の第一チャーン類は $-c$ 上である．これは矛盾するので，向きは逆になっている． □

Remark 9.2.3. $\tilde{C}^n$ は $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上の line budle であったので，$\mathbb{C}P^{n-1}$ と同じホモトピー型をもつ．そこで，Mayer-Vietoris 議論により，M の 1 点 blow up した $\tilde{M}$ のコホモロジーは

$$H^*(\tilde{M}) = H^*(M) \oplus \tilde{H}^*(\mathbb{C}P^{n-1})$$

Remark 9.2.4. M を複素多様体としたとき，点 p の blow-up は微分多様体としては，$\tilde{M}$ は $M\#\overline{\mathbb{CP}^n}$ であることから，微分多様体としての構造は点 p に依存しない．しかし，複素多様体としての構造は異なる可能性がある．

Remark 9.2.5. 次は個人用の覚書：M を n 次元複素多様体として，$\pi : \tilde{M} \to M$ を一点 blow-up とする．$E = \pi^{-1}(0)$ を exceptional divisor とする．このとき，

$$K_{\tilde{M}} \cong \pi^* K_M \otimes [E]^{n-1}$$

が成立．$p \in N \subset M$ を複素部分多様体とすれば，

$$\tilde{N} = \overline{\pi^{-1}(N \setminus \{p\})}$$

は $\tilde{M}$ の部分複素多様体で，N の proper transformation という．N が hypersurface なら，$\tilde{N}$ は N の点 p での blow-up に双正則．

以上で点の blow-up の説明を終える．**逆に，$\mathbb{CP}^{n-1}$ という部分多様体で normal 束が L と同型なものがあれば（例外因子があれば），この blow-up と逆の操作を行うことができる．これを blow-down という．**ちなみに X と Y が双有理同値とは blow-up と blow-down の操作を何回か行って双正則となるものである（本当は，ちょっと違う．複素曲面の場合はこの定義でかまわない）．

blow-up の具体的な例を挙げておこう．

EXAMPLE 9.2.1. $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上の universal line bundle L と自明な line bundle の直和 bundle を考え，fiber を射影化する．つまり $P(L \oplus \mathbb{C})$ である．また，

$$\beta : P(L \oplus \mathbb{C}) \ni ([p], [\lambda p : w]) \mapsto [\lambda p : w] \in \mathbb{C}P^n$$

右辺の $[\lambda p : w]$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ の直線である．また，$[p] \in \mathbb{C}P^{n-1}$ に対して，この直線は $L_{[p]} \oplus \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 内にある．さて，$P(L \oplus \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}P^{n-1} \times \mathbb{C}P^n$ 内の部分集合であるが，

$$([x_1, \cdots, x_n], [y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}]) \in \mathbb{C}P^{n-1} \times \mathbb{C}P^n$$

という座標を使うと，$x_1 y_i - x_i y_1 = 0$ という方程式で与えられる代数多様体である．実際，

$$[p] = [x_1, \cdots, x_n], \quad [\lambda p : w] = [y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}]$$

より，

$$(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n, w) = (k y_1, \cdots, k y_n, k y_{n+1})$$

となるので，$x_1 y_i - y_1 x_i = 0$ を得る．つまり，

$$P(L \oplus \mathbb{C}) = \{[x], [y] \in \mathbb{C}P^{n-1} \times \mathbb{C}P^n | x_1 y_i - y_1 x_i = 0\}$$

また，$P(L \oplus \mathbb{C})$ 内の

$$E := \{([p], [0, \cdots, 0, 1]) \in P(L \oplus \mathbb{C}) | [p] \in \mathbb{C}P^{n-1}\} \cong \mathbb{C}P^{n-1}$$

は，β により，$[0, \cdots, 0, 1] \in \mathbb{C}P^n$ へ移される．一方で，その補集合上では微分同相で移る．

$$S := \{([p], [\lambda p, w]) \in P(L \oplus \mathbb{C}) | [p] \in \mathbb{C}P^{n-1}, \lambda \in \mathbb{C}^*, w \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}P^n \setminus \{[0, \cdots, 0, 1]\}$$

そこで，$P(L \oplus \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}P^n$ の一点 blow-up である．

このℂP^2 の一点 blow-up は第一 Hirzebruch 曲面（$m=1$ のとき）と呼ばれるものである．一般の Hirzebruch 曲面は，

$$W_m = \{([a,b],[x,y,z]) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2 | a^m y - b^m x = 0\}$$

で定義され，上の例のようにすれば，$P(\mathcal{O}(m) \oplus \mathbb{C})$ と同一視できる．$\mathcal{O}(m) = L^m$ のこと．また，$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^1$ を W_m に制限すれば，$\mathbb{C}P^1$ 上の $P^1(\mathbb{C})$ 束になることがわかる．実際，$b \neq 0$ として，$u = a/b$，$f(t) = \frac{1}{1+t^{-m}}$ とすれば，

$$\phi : \mathbb{C} \times \mathbb{C}P^1 \ni (u,[v,w]) \mapsto ([u,1],[f(|u|)\bar{u}^m v, f(|u|)v, w]) \in W_m$$

が束の自明化を与えるている．$a \neq 0$ でも同様にすれば，推移関数は

$$\psi^{-1} \circ \phi(u,[v,w]) = (u,[\frac{\bar{u}^m}{|u|^{-m}}v,w])$$

となる．このように，Hirzebruchk 曲面は二つの $D^2 \times \mathbb{C}P^1$ を境界である $S^1 \times \mathbb{C}P^1$ のところで.

$$g : S^1 \times \mathbb{C}P^1 \ni (z,[v,w]) \mapsto (z,[\bar{z}^k, v, w]) \in S^1 \times \mathbb{C}P^1$$

により張り合わせたものとなっている．また，m が偶数のときは，$S^2 \times S^2$ に微分同相であり，m が奇数のときは，$\tilde{\mathbb{C}P}^2$ に微分同相である．

Proof. 張り合わせ関数を考えると，

$$z \mapsto ([v,w] \mapsto [\bar{z}^m v, w])$$

は $S^1 \to SO(3)$ となっている．これは m が偶数の場合には定数 loop に homotopic であり，m が奇数なら $m=1$ の場合に homotopic であることがわかるので，m が偶数なら，自明束であり，S^2 束は $S^2 \times S^2$ に微分同相．奇数なら $\tilde{\mathbb{C}P}^2$ に微分同相． □

EXAMPLE 9.2.2. $Q = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ とする．ここで $\mathbb{Z}_2 = \{1,-1\}$ でスカラー倍で作用させている．$\pi : \mathbb{C}^2 \to Q$ を射影として，$q_0 = \pi(0)$ とする．q_0 以外のところでは，２重被覆を与えており $\mathbb{Z}_2$ は正則構造と可換なので，$Q \setminus \{q_0\}$ は複素多様体となり，π は q_0 以外のところで２重被覆を与えている．さて，$(t_1,t_2) \in \mathbb{C}^2$ に対して，

$$z_0 = t_1 t_2, \quad z_1 = t_1^2, \quad z_2 = t_2^2$$

とすれば，Q は $\mathbb{C}^3$ 内の代数超曲面

$$\mathbb{C}^2 \ni (t_1,t_2) \mapsto (t_1 t_2, t_1^2, t_2^2) \in H = \{(z_0,z_1,z_2) \in \mathbb{C}^3 | z_0^2 = z_1 z_2\} \subset \mathbb{C}^3$$

は原点以外のところで2重被覆を与えており，$(0,0,0)\in H$ に対応するには $(0,0)\in\mathbb{C}^2$ に対応する．よって，H は Q に同一視される．特に，H における $(0,0,0)$ が特異点がある．

さて，$\mathbb{C}^3$ を原点で blow-up すれば，

$$\tilde{\mathbb{C}}^3=\{(z,[w])\in\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}P^2|z=\lambda w\}$$

を得る．また，

$$\Phi^{-1}(H\setminus\{0\})=\{(z,[w])\in\tilde{\mathbb{C}}^3|z\neq 0,w_0^2=w_1w_2\}$$

であるが，この閉包 $\overline{\Phi^{-1}(H\setminus\{0\})}$ は，

$$\tilde{H}=\{(z,[w])\in\tilde{\mathbb{C}}^3|w_0^2=w_1w_2\}\subset\tilde{\mathbb{C}}^3$$

となり，$\tilde{\mathbb{C}}^3$ の局所座標を用いれば，複素部分多様体となることがわかる．また，

$$C=\pi^{-1}(H\cap\{0\})=\{(0,[w])|w_0^2=w_1w_2\}=\{[w]\in\mathbb{C}P^2|w_0^2=w_1w_2\}$$

であり，これは $\mathbb{C}P^1$ である．実際，$\mathbb{C}P^2$ の通常の covering で $U_1\cup U_2$ に含まれることがわかるが，$U_1\cap C$ 上で，$z_2/z_1=(z_0/z_1)^2$ なので，正則座標として $u_1=z_0/z_1$ として．同様に $U_2\cap C$ 上で $u_2=z_0/z_2$（$z_1/z_2=(z_0/z_2)^2$）とすれば，座標変換は $u_2=1/u_1$ となる．よって，C は $\mathbb{C}P^1$ と双正則である．これは．

$$\mathbb{C}P^1\ni[1,z]\mapsto[1,z,z^2]\in\mathbb{C}P^2$$

を拡張したものであり，$\mathbb{C}P^1$ は $\mathbb{C}P^2$ 内の次数2の曲線である．

さて，$\Phi^{-1}(H\setminus\{0\})\cong H\setminus\{0\}$ であるので，上で行った操作は，H の特異点の部分を $\mathbb{C}P^1$ に取り換えたことに対応する．このように，**blow-up は特異点を除去するためによく使われる操作**である．

点における blow-up は理解できたので，部分多様体における blow-up を簡単に解説しておく．考え方は同じである．$U\subset\mathbb{C}^n$ を原点の近傍として，

$$V=U\cap\{z\in\mathbb{C}^n|z_{m+1}=\cdots=z_n=0\}$$

とする．このとき，

$$\tilde{U}_V:=\{(z,[w]=[w_{m+1},\cdots,w_n])\in U\times\mathbb{C}P^{n-m-1}|z_iw_j=z_jw_i\forall i,j=m+1,\cdots,n\}$$

とすると，$\Phi:\tilde{U}_V\to U$ は V を除いて双正則であり，例外因子として $E_V=\Phi^{-1}(V)\cong V\times\mathbb{C}P^{n-m-1}$ を持つ．この $\tilde{U}_V$ が V での blow-up である．

Proof. $\tilde{U}_V$ を $\Phi^{-1}(V)$ の部分と $\tilde{U}_V \setminus \Phi^{-1}(V)$ に分けて考える．まず，$\Phi^{-1}(V) \cong V \times \mathbb{C}P^{n-m-1}$ である．写像としては，

$$\Phi^{-1}(V) \ni (z, [w]) \mapsto (\Phi(z), [w]) \in V \times \mathbb{C}P^{n-m-1}$$

を考えればよい．実際，$z \in \Phi^{-1}(V)$ とは，$\Phi(z) \in V$ なので $z_{m+1} = \cdots = z_n = 0$ となる．よって，$(z, [w]) \in \Phi^{-1}(V)$ の $[w]$ は任意のとれるので，全射である．また，単射や微分同相も明らかであろう．一方で，$(z, [w]) \in \tilde{U}_V \setminus \Phi^{-1}(V)$ の場合には，$z_{m+1}, \cdots, z_n$ のいずれかはゼロでないので，z が定まれば，$[w]$ も定まる．このことから，$\Phi : \tilde{U}_V \setminus \Phi^{-1}(V) \to U \setminus V$ が全単射となる．双正則であることも座標をとって示せばよい． □

また，$pr : \tilde{U}_V \to E_V = \Phi^{-1}(V) = V \times \mathbb{C}P^{n-m-1}$ は，$\mathbb{C}P^{n-m-1}$ 上の universal line bundle L の $V \times \mathbb{C}P^{n-m-1}$ への引き戻したものであることがわかる．ゼロ切断である E_V の ϵ 近傍の境界は，$V \times S^{2(n-m)-1}$ となる

Proof. $(z, [w]), (z', [w']) \in \tilde{U}_V$ に対して，$pr(z, [w]) = pr(z', [w'])$ とする．つまり，同じファイバー上にあるとする．このとき，$(\Phi(z), [w]) = (\Phi(z'), [w'])$ なので，$z_1 = z'_1, \cdots, z_m = z'_m$ となり，$[w] = [w']$ と z, w の関係式から，$[z_{m+1}, \cdots, z_n] = [w] = [w'] = [z'_m, \cdots, z'_n]$ となる．つまり，$(z_{m+1}, \cdots, z_n)$，$(z'_m, \cdots, z'_n)$ は $\mathbb{C}^{n-m}$ 内の $[w]$ 方向の直線である． □

さて，一方で，V の $\mathbb{C}^n$ 内での管状近傍（または normal 束）は，

$$V \times W = \{(z_1, \cdots, z_m, z_{m+1}, \cdots, z_n) | z \in U\} \to V$$

と書ける．その（fiber 方向の）境界は $V \times S^{2(n-m)-1}$ であり，先ほどの境界と一致する．そこで，$\mathbb{C}^n$ 内で V の近傍を取り出して，境界に沿って $L \to V \times \mathbb{C}P^{n-m-1}$ のゼロ切断の近傍を代わりにくっつけたものが，blow-up $\tilde{U}_V$ である．簡単に言えば，$\mathbb{C}^n$ 内で m 次元部分多様体 V を $V \times \mathbb{C}P^{n-m-1}$ を取り換えることに対応する．

一般の場合を考えてみる．X を n 次元複素多様体として，Y を m 次元部分複素多様体とする．$h : X \to U$ かつ $h(Y) = V$ となる局所座標をとることができるので，$\tilde{U}_V$ を得る．これらを Y に沿って張り合わせていくとにより．X の Y での blow-up $\tilde{X}_Y$ という複素多様体を得ることができる．exceptilonal divisor $E = \pi^{-1}(Y)$ を考えると $\pi : E \to Y$ は，Y の X における normal 束を射影化したものになっている．

Remark 9.2.6. このとき，$K_{\tilde{X}_Y} \cong \pi^* K_X \otimes [E]^{n-m-1}$ が成立．

9.2.6　シンプレクティック blow-up

さて，以上のことをシンプレクティック多様体でも行うことが可能である．その概略を述べたい（詳細は [Macduff-Salamon]）．$\tilde{\mathbb{C}}^n$ 上の blow-up シンプレクティック形式とは，$U(n)$ 不変なシンプレクティック形式 ω であり，$\omega - \Phi^*\omega_0$ がコンパクトサポートを持つものである．ここで $\Phi : \tilde{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{C}^n$ であり，ω_0 は $\mathbb{C}^n$ の標準的なシンプレクティック形式である．また，二つの blow-up シンプレクティック形式が同値とは，ある $U(n)$ 同変微分同相で移りあうこと．このとき，それらを $\Phi^{-1}(0)$ へ制限したとき等しいことが同値であるための必要十分条件である（by Guillemin Sternberg）．さらに Ω^ϵ（$\epsilon > 0$）を blow-up シンプレクティック形式で $\Phi^{-1}(0)$ へ制限したとき $\epsilon\omega_{FS}$ となるもの全体の集合とする．そして，$\mathbb{C}^n$ の ϵ-blow-up とは，$(\tilde{\mathbb{C}}^n, \omega)$（$\omega \in \Omega^\epsilon$）のことである．

具体的には次のようにすれば，ϵ-blow up が作れる．

$$j : \tilde{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$$

を埋め込みとする．ω_0 を $\mathbb{C}^n$ 上の標準的なシンプレクティック形式として，ω_{FS} を $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上の Fubini-Study 形式とする．このとき

$$\omega_\epsilon = j^*(\omega_0 + \epsilon\omega_{FS})$$

とする．$: \tilde{\mathbb{C}}^n$ は複素部分多様体であるので，$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$ 上のケーラー形式を制限すれば，そこでもケーラー形式となるのであった．よって，ω_ϵ はシンプレクティック形式となる．また，例外因子 $\Sigma = \Phi^{-1}(0)$ 上で，$\epsilon\omega_{FS}$ となる．

$\Phi : \tilde{\mathbb{C}}^n \setminus \Sigma \to \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ は双正則写像であった．そこで，$\Phi^*\omega_0$ と ω_ϵ が一致すればよいのであるが，それはうまくいかない．次のような補正をすれば，双正則性は崩れるが，シンプレクティック同相になる．

$D_\epsilon \subset \mathbb{C}^n$ として，

$$f_\epsilon : \mathbb{C}^n \setminus D_\epsilon \ni z \mapsto \frac{\sqrt{|z|^2 - \epsilon}}{|z|} z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

という微分同相を考える．また，$\Phi : \tilde{\mathbb{C}}^n \setminus \Sigma \to \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ により $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \cong \tilde{\mathbb{C}}^n \setminus \Sigma$ とみなす．このとき，

$$f_\epsilon^*\omega_\epsilon = \omega_0$$

となる．つまり，$(\mathbb{C}^n \setminus D_\epsilon, \omega_0)$ と $(\tilde{\mathbb{C}}^n \setminus \Sigma, \omega_\epsilon)$ はシンプレクティック同相である．

Proof. $\omega_0 = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}|z|^2$ であり，$\omega_{FS} = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log|w|^2$ である．そこで，

$$\begin{aligned}
j^*(\omega_0 + \epsilon\omega_{FS}) =& \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}(|z|^2 + \epsilon\log|z|^2) = \frac{i}{2}\partial(\sum z_i d\bar{z}_i + \epsilon\sum\frac{z_i}{|z|^2}d\bar{z}_i) \\
=& \frac{i}{2}(\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i + \epsilon\sum\frac{|z|^2 dz_i - z_i\sum\bar{z}_k dz_k}{|z|^4}\wedge d\bar{z}_i) \\
=& \frac{i}{2}(\sum_i dz_i \wedge d\bar{z}_i + \frac{\epsilon}{|z|^2}\sum_i dz_i\wedge d\bar{z}_i - \frac{\epsilon}{|z|^4}(\sum_i \bar{z}_k dz_k)\wedge(\sum_i z_i d\bar{z}_i)
\end{aligned}$$

となる．また $f_\epsilon^{-1}(z) = \sqrt{1+\frac{\epsilon}{|z|^2}}z$ であるので，

$$df_\epsilon^{-1}(z)_i = (1+\epsilon/|z|^2)^{1/2}dz_i - (1+\epsilon/|z|^2)^{-1/2}\frac{\epsilon z_i d|z|^2}{2|z|^4}$$

であるので，

$$\begin{aligned}
f_\epsilon^{-1}(\sum dz_i\wedge d\bar{z}_i) =& (1+\epsilon/|z|^2)\sum dz_i\wedge d\bar{z}_i - \frac{\epsilon}{2|z|^4}\sum(\bar{z}_i dz_i - z_i d\bar{z}_i)\wedge\sum(\bar{z}_k dz_k + z_k d\bar{z}_k) \\
&+ (1+\epsilon/|z|^2)\frac{\epsilon^2}{4|z|^6}d|z|^2\wedge d|z|^2 \\
=& (1+\epsilon/|z|^2)\sum dz_i\wedge d\bar{z}_i - \frac{\epsilon}{|z|^4}\sum\bar{z}_i dz_i\wedge\sum z_k d\bar{z}_k
\end{aligned}$$

以上のことを合わせれば，$f_\epsilon^*\omega_\epsilon = \omega_0$ となる． □

さて，(M,ω) をシンプレクティック多様体として，ある点 q でダルブー座標をとり $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍と同一視する．このとき，近傍の外側でのシンプレクティック構造を変えずに，原点で ϵ-blow-up することができる．つまり，原点の近傍を，$\tilde{\mathbb{C}}^n$ の zero 切断 $\mathbb{C}P^{n-1}$ の近傍に置き換えるのである．このとき，$\omega_\epsilon - \Phi^*\omega_0$ がコンパクトサポートを持つことから，原点近傍の外側のシンプレクティック構造は変わらないわけである．このようにして得られたシンプレクティック多様体を点 q での ϵ **blow-up** とよぶ．

Remark 9.2.7. (M,ω) のある点での ϵ blow-up を $(\tilde{M},\tilde{\omega})$ とする．また，例外因子を $E = \Phi^{-1}(0)$ とする．$\tilde{M} = (M\setminus D_\epsilon)\cup\tilde{D}_\epsilon$ と分割すれば，$(M\setminus D_\epsilon)\cap\tilde{D}_\epsilon \cong S^{2n-1}$ である．そこで，Mayer-Veitoris sequnse を使うと．

$$0 \mapsto H^2(\tilde{M}) \to H^2(M\setminus D_\epsilon)\oplus H^2(\tilde{D}_\epsilon) \to 0$$

が成立する．そこで，$\tilde{\omega}$ のそのコホモロジー類は．$[\tilde{\omega}] = [\omega] + \epsilon[\omega_{FS}]$ と書ける．我々の ϵ-blow-up の構成法で，できたシンプレクティック多様体が well-defined か？つまり，構成の際のいろいろなものの取り方によらずシンプレクティック同相になるのか？という疑問がわくが，$[\tilde{\omega}]$ は構成の仕方によらないので，Moser のトリックを使えば，well-defined となる．

さて，簡約空間を使って ϵ blow-up を構成しよう．以下で述べるのは Lerman によるシンプレクティック cutting の特別な場合である [Lerman]．M をシンプレクティック多様体としてハミルトニアン S^1 作用があるとする．モーメント写像は μ_1 とする．また $(\mathbb{C}, dx \wedge dy)$ を $\mu(z) = -|z|^2$ として標準的な S^1 作用によりハミルトニアン S^1 空間と思う．さらに，μ_1 は点 q において唯一つの非退化な最小値となるとする．さらに $\mu_1(q) = 0$ とする．また，ϵ が十分小さいなら，S^1 は $\mu_1^{-1}(\epsilon)$ に自由に作用しているとする．このとき $M \times \mathbb{C}$ に S^1 を作用させて，モーメント写像

$$\mu(p, z) := \mu_1(p) - \frac{1}{2}|z|^2$$

を考える．このとき ϵ は regular 値である．そして，

$$\begin{aligned}\mu^{-1}(\epsilon) =&\{(p, z) \in M \times \mathbb{C} | \mu_1(p) - \frac{1}{2}|z|^2 = \epsilon\} \\ =&\{(p, 0) \in M \times \mathbb{C} \mid \mu_1(p) = \epsilon\} \cup \{(p, z) \in M \times \mathbb{C} \mid \mu^1(p) > \epsilon, |z| = \sqrt{2(\mu_1(p) - \epsilon)}\}\end{aligned}$$

となる．前者は $\mu_1^{-1}(\epsilon)$ であり，後者は

$$\{(p, z) \in M \times \mathbb{C} | \mu_1(p) > \epsilon, |z| = \sqrt{2(\mu_1(p) - \epsilon)}\} \ni (p, z) \mapsto (p, \frac{z}{|z|}) \in \mu_1^{-1}((\epsilon, \infty)) \times S^1$$

により，$\mu_1^{-1}((\epsilon, \infty)) \times S^1$ に S^1 同変微分同相である．

Proof. $(p, z/|z|) = (p', z'/|z'|)$ とすれば，$p = p'$，$\arg z = \arg z'$，また，$|z| = \sqrt{2(\mu_1(p) - \epsilon)} = |z'|$ となるので，$z = z'$ となり，単射となる．$(p, e^{i\theta}) \in \mu_1^{-1}((\epsilon, \infty)) \times S^1$ に対して，$(p, \sqrt{2(\mu_1(p) - \epsilon)}e^{i\theta})$ をとれば，全射が分かる．また，滑らかであることや S^1 同変であることも明らか． □

このように，

$$\mu^{-1}(\epsilon) = \mu_1^{-1}(\epsilon)/S^1 \cup \{p \in M | \mu_1(p) > \epsilon\}$$

となるので，**シンプレクティック簡約 $M_\epsilon = \mu^{-1}(\epsilon)/S^1$ は開部分多様体 $\mu^{-1}((\epsilon, \infty))$ を含み，その補集合が $\mu_1^{-1}(\epsilon)/S^1$ となるもの**である．つまり，シンプレクティック多様体 M の q の周りを切って，シンプレクティック部分多様体である $\mu_1^{-1}(\epsilon)/S^1$ を加えて閉じることになる．

上で，μ_1 に対していくつか仮定したが，それらの仮定により，同変 Darboux 座標をとれば，$(w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ という座標で，$q = 0$ であり，S^1 が

$$(w_1, \cdots, w_n) \mapsto (t^{-1}w_1, \cdots, t^{-1}w_n)$$

と作用し，$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum dw_i \wedge d\bar{w}_i$ としてよい．そして，モーメント写像は

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(|w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2)$$

である．このようにすれば，q は μ_1 に最小値で非退化臨界点である（また S^1 作用の固定点）．そこで，$\mu_1^{-1}(\epsilon)$ は $S^{2n+1}(\epsilon)\subset\mathbb{C}^n$ とみなせる．これを S^1 で割れば，$\mathbb{C}P^{n-1}$ であり，シンプレクティック形式は $\epsilon\omega_{FS}$ となる（Excersice 10.1.7 を参照．ω_{FS} は Fubini-Study 形式）．このように，簡約空間の一部である $\mu_1^{-1}(\epsilon)/S^1$ 上では $\epsilon\omega_{FS}$ となる．

次に，$\mu_1^{-1}((\epsilon,\infty))$ の部分を考えてみよう．S^1 同変微分同相

$$\{(p,z)\in M\times\mathbb{C}|\mu_1(p)>\epsilon,|z|=\sqrt{2(\mu_1(p)-\epsilon)}\}\ni(p,z)\mapsto(p,\frac{z}{|z|})\in\mu_1^{-1}((\epsilon,\infty))\times S^1$$

を思い出す．右辺が局所座標と考えて，

$$i:\mu_1^{-1}((\epsilon,\infty))\times S^1\ni(p,\theta)\mapsto(p,r,\theta)\to(p,\sqrt{2(\mu_1(p)-\epsilon)},\theta)\in\mu_1^{-1}((\epsilon,\infty))\times\mathbb{C}\subset M\times\mathbb{C}$$

が S^1 同変埋め込みである．また，$\mu_1^{-1}((\epsilon,\infty))\times S^1$ を S^1 で割った空間を考えると，

$$(\mu_1^{-1}((\epsilon,\infty))\times S^1)/S^1\ni[p,e^{i\theta}]\mapsto e^{i\theta}p\in\mu_1^{-1}((\epsilon,\infty))$$

により，well-defined かつ微分同相である．そこで射影は，

$$\pi:\mu_1^{-1}((\epsilon,\infty))\times S^1\ni(p,\theta)\to e^{i\theta}p\in\mu_1^{-1}((\epsilon,\infty))=(\mu_1^{-1}((\epsilon,\infty))\times S^1)/S^1$$

となる．$M\times\mathbb{C}$ のシンプレクティック形式を $\omega+\omega_0$ として，商空間のシンプレクティック形式を ω_{red} とする．このとき，$i^*(\omega+\omega_0)=\pi^*\omega_{red}$ が成立するのであった．$\omega_0=rdr\wedge d\theta$ である．$r=\sqrt{2(\mu_1(p)-\epsilon)}$ であるので，

$$i^*(\omega+\omega_0)=i^*(\omega+rdr\wedge d\theta)=\omega+d\mu_1\wedge d\theta$$

また，$\mu_1=\frac{1}{2}(|w_1|^2+\cdots|w_n|^2)$ であったので，

$$d\mu_1=\frac{1}{2}\sum(\bar{w}_idw_i+w_id\bar{w}_i)$$

一方，$\omega=\frac{i}{2}\sum dw_i\wedge d\bar{w}_i$ であったので，

$$\begin{aligned}\pi^*\omega&=\frac{i}{2}\sum d(e^{i\theta}w_i)\wedge d(e^{-i\theta}\bar{w}_i)\\&=\frac{i}{2}\sum(id\theta e^{i\theta}w_i+e^{i\theta}dw_i)\wedge(-id\theta e^{-i\theta}\bar{w}_i+e^{-i\theta}d\bar{w}_i)\\&=\frac{i}{2}\sum dw_i\wedge d\bar{w}_i-\frac{1}{2}\sum d\theta\wedge w_id\bar{w}_i+\frac{1}{2}\bar{w}_idw_i\wedge d\theta\\&=\omega+d\mu_1\wedge d\theta\end{aligned}$$

このように，$\omega_{red} = \omega$ となることがわかる．このように，シンプレクティック簡約 $M_\epsilon = \mu^{-1}(\epsilon)$ の開部分多様体 $\mu_1^{-1}((\epsilon, \infty))$ 上の簡約シンプレクティック形式は，M 上のものと一致する．

以上から，**簡約空間 M_ϵ は ϵ-blow-up に一致**．また，上の構成法は，Darboux 座標をとれば，任意のシンプレクティック多様体で局所的に行えることが理解できる．

また，M がケーラー多様体ならば，$M \times \mathbb{C}$ もケーラー多様体である．propositon 9.1.3 により，その簡約空間にもケーラー構造が入る．よって，**M がケーラー多様体なら blow-up $\tilde{M}$ もケーラー多様体**である．ただし，局所的な構成の際に見たように，**$M \setminus U_p \to \tilde{M}$ はシンプレクティック埋め込みであるがケーラー多様体としての isomtery は与えない**．

(M, ω) に S^1 作用と可換なリー群 K がハミルトニアン作用しているとき，$M \times \mathbb{C}$ の第一成分へ K を作用させることを考える．production 群に対する reduciton ができるので，$\tilde{M}$ に K がハミルトニアン作用する．M にトーラス T^k がハミルトニアン作用している場合を考える．次の chapter で証明するように，$\mu : M \to \mathfrak{t}^* = \mathbb{R}^k$ による像 $\mu(M)$ は凸多面体である．$X \in \mathfrak{t}$ をとり，$S^1 = \{\exp tX | t \in \mathbb{R}\} \subset T^k$ 作用を考える．T^k は可換群であるので，T^k の作用と S^1 の作用は可換である，この S^1 作用を使って，ϵ blow-up を構成する．blow-up した多様体のモーメント写像による像は，

$$\mu(M) \cap \{\xi \in \mathfrak{t}^* | \langle \xi, X \rangle \geq \epsilon\}$$

である．

上の簡約空間を使ったシンプレクティック blow-up の一般化が，**Lerman によるシンプレクティック cutting**．(M, ω) がシンプレクティック多様体で，ハミルトニアン S^1 作用があるとして，S^1 が $\mu_1^{-1}(\epsilon)$ に自由に作用しているとする．よって，ϵ は regular 値であることに注意．上と同様にして，$M \times \mathbb{C}$ 上で $\mu = \mu_1 - \frac{1}{2}|z|^2$ を考える．そして，

$$\bar{M}_{\mu_1 \geq \epsilon} := \mu(\epsilon)/S^1 = \{(w, z) \in M \times \mathbb{C} | \mu_1(w) - \frac{1}{2}|z|^2 = \epsilon\}/S^1$$
$$\bar{M}_{\mu_1 \leq \epsilon} := \mu(\epsilon)/S^1 = \{(w, z) \in M \times \mathbb{C} | \mu_1(w) + \frac{1}{2}|z|^2 = \epsilon\}/S^1$$

を考えることができる．$M_{\mu_1 \geq \epsilon}$ と $M_{\mu_1 \leq \epsilon}$ に，どちらも $\mu_1(\epsilon)/S^1$ を貼り付けて閉じたものである．この埋め込まれたシンプレクティック部分多様体 $\mu_1(\epsilon)/S^1$ は余次元が 2 であり，normal bundle は反対方向を向いているので，**Gompf によるシンプレクティック gluing** が行える．それで gluing すると元の M が再現されるのである．そこで，この操作を cutting と呼ぶ．

9.2.7 Orbifolds

EXAMPLE 9.2.3. $G = \mathbb{T}^n$ とする．$\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対して $\mu^{-1}(\xi)$ は G の作用で保存される．ξ が μ の regular 値であるとする（サードの定理から，μ の singular 値はメジャーゼロであった．つまり ξ は generic な点．ただし，$\mu^{-1}(\xi) = \emptyset$ の場合も regular というので，以下の話は $\mu^{-1}(\xi) \neq \emptyset$ となる regular 値の話）．$\mu^{-1}(\xi)$ は余次元が n の部分多様体である．さて ξ が regular であるので，$d\mu_p$ が全射．よって $\mathfrak{g}_p = 0$（$\forall p \in \mu^{-1}(\xi)$）．つまり $\mu^{-1}(\xi)$ 上の**各点の stabilizer は有限群**である．（自由ということを仮定してないのでこのようなことが起こる）．**そこで** $\mu^{-1}(\xi)/G$ **はある orbifold になる．**

G_p を p での stabilizer とすると slice 定理より $G \cdot p$ の近傍は $G \times_{G_p} V_p$ のゼロ切断の近傍とかける．ここで $V_p = T_p\mu^{-1}(\xi)/T_p(G \cdot p)$ である．そこで，$\mu^{-1}(\xi)/G$ は局所的には S/G_p となる．ここで S は V_p 内の適当な円盤．よって局所的には $\mu^{-1}(\xi)/G$ は $\mathbb{R}^k$ 内の円盤をある有限群で割ったものとなる．つまり，orbifold となる．

EXAMPLE 9.2.4. S^1 の $\mathbb{C}^n$ への作用 $e^{i\theta}(z_1, z_2) = (e^{ik\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$ を考える（ただし $k \geq 2$ の整数）．さらにモーメント写像として

$$\mu : \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto -\frac{1}{2}(k|z_1|^2 + |z_2|^2) \in \mathbb{R}$$

をとる．（これがモーメント写像となることは，前と同様に証明すればよい）．$\xi < 0$ は regular であり $\mu^{-1}(\xi)$ は 3 次元 ellipsoid である．さらに stabilzer は，$z_2 \neq 0$ のときは $\{1\}$ であり，$z_2 = 0$ のときは $\mathbb{Z}_k$ である．

よって $\mu^{-1}(\xi)/S^1$ は cone head とよばれる orbifold になる．それは cone angle が $2\pi/k$（type k）の特異性がある cone を一つ持つ．

EXAMPLE 9.2.5. S^1 の $\mathbb{C}^2$ への作用として，$e^{i\theta}(z_1, z_2) = (e^{ik\theta}z_1, e^{il\theta}z_2)$ を考える（ここで k, l は互いに素）．このとき $(z_1, 0)$ の stabilizer は $\mathbb{Z}_k$，$(0, z_2)$ の stabilzer は $\mathbb{Z}_l$，$z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ の stabilzer は $\{1\}$ である．$\mu^{-1}(\xi)/S^1$ は football orbifold といい．二つの cone singularity をもつ．一つは type k で，一つは type l である．

より一般に S^1 の $\mathbb{C}^n$ への作用を考えると，いわゆる weighted projective space を得る．

第10章　Moment map 再び

この章では，まずモーメント写像のいくつかの例を与える．またリー群 G がシンプレクティック作用しているときに，それがいつハミルトニアン作用になるか，またハミルトン作用になるなら，それは一意的かについて議論する．実はリー群が半単純ならシンプレクティック作用は必ずハミルトニアン作用になり，一意的である．その次にトーラス作用の場合にモーメント写像による像が凸になることを証明する（これまでの知識を精一杯つかって証明する）．さらに，トーラス作用の特別な場合であるシンプレクティックトーリック多様体を定義する．

10.1　モーメント写像の例

EXERCISE 10.1.1. $(M_1, \omega_1, G, \mu_1)$ と $(M_2, \omega_2, G, \mu_2)$ がハミルトニアン G 空間とする．このとき $\mu : M_1 \times M_2 \to \mathfrak{g}^*$ を

$$\mu(p_1, p_2) = \mu_1(p_1) + \mu_2(p_2)$$

で与えると $(M_1 \times M_2, p_1^*\omega_1 + p_2^*\omega_2)$ に対するモーメント写像である．（この例はすぐに証明できる）．

EXERCISE 10.1.2. $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{C}^n$ を考える．このトーラスを $\mathbb{C}^n$ へ

$$(t_1, \cdots, t_n) \cdot (z_1, \cdots, z_n) = (t_1^{k_1} z_1, \cdots, t_n^{k_n} z_n)$$

として作用させる．このときモーメント写像を

$$\mu(z_1, \cdots, z_n) = -\frac{1}{2}(k_1|z_1|^2, \cdots, k_n|z_n|^2) + \text{const vector } (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n = Lie(\mathbb{T}^n)^*$$

とすれば，ハミルトン作用になる．(reduction したら，一般に orbifold が現れる）．

Proof. まず，G の作用がシンプレクティックであることは $i/2 \sum dz_i \wedge d\bar{z}_i = \sum t_i^{k_i} dz_i \wedge \bar{t}^{k_i} d\bar{z}_i$ であることからわかる．

可換群なので，第二の条件はモーメント写像が $\mathbb{T}^n$ 不変となることであるが，これはあきらかである．そこで $d\mu^X = \iota_{X^*}\omega$ を確かめる．$X = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ とすれば，

$$X^* = \sum ik_i\theta_i z_i\partial/\partial z_i - ik_i\theta_i\bar{z}_i\partial/\partial\bar{z}_i$$

である（これは実ベクトルで $\bar{X}^* = X^*$ である）．$\mu^X = \langle\mu, X\rangle = -\frac{1}{2}\sum\theta_i k_i|z_i|^2 + \sum c_i\theta_i$ であり，これを微分すると

$$d\mu^X = -\frac{1}{2}\sum\theta_i k_i(\bar{z}_i dz_i + z_i d\bar{z}_i)$$

となる．一方で $\omega = i/2\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$ であるので．

$$\iota_{X^*}\omega = -1/2\sum k_i\theta_i(z_i d\bar{z}_i + z_i d\bar{z}_i)$$

となる．よってモーメント写像である．　□

EXERCISE 10.1.3. G の余随伴表現 $G\cdot\xi$ を考える．これはシンプレクティック多様体となり，G の作用はシンプレクティック作用であった．さらに，モーメント写像を $\mathfrak{g}^*$ への埋め込みとする：

$$\mu : G\cdot\xi \ni g\cdot\xi \mapsto g\cdot\xi \in \mathfrak{g}^*$$

このとき，ハミルトニアン作用となる（これは既に証明した）．

EXERCISE 10.1.4. $U(n)$ を $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ に自然に作用させる．このときモーメント写像として

$$\mu(z) = \frac{i}{2}zz^*$$

をとれば，ハミルトニアン G 作用である．ここで $\mathfrak{u}(n)$ と $\mathfrak{u}(n)^*$ を内積 $(A, B) = \mathrm{tr}\,(A^*B)$ で同一視している．

Proof. まず，$(\frac{i}{2}zz^*)^* = -\frac{i}{2}zz^*$ を満たすので，μ の像は $\mathfrak{u}(n)^* = \mathfrak{u}(n)$ に入る．

さて，$U(n)$ の元を実と虚部に分解する．$g = h + ik$．g の作用は $\mathbb{R}^{2n}$ 上では

$$\begin{pmatrix} h & -k \\ k & h \end{pmatrix}$$

となる．これは $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ と見たときのシンプレクティック作用である．実際 $U(n) \subset Sp(2n, \mathbb{R})$ であった．

$X = V + iW \in \mathfrak{u}(n)$ とすれば，$V = -V^t$, $W = W^t$ を満たす．そこで μ^X を求めると

$$\begin{aligned}\mu^X(z) &= \langle \frac{i}{2}zz^*, X\rangle = \frac{i}{2}\mathrm{tr}\,(zz^*X) = \frac{i}{2}z^*Xz \\ &= \frac{i}{2}(x^t - iy^t)(V+iW)(x-iy) = -\frac{1}{2}x^tWx + y^tVx - \frac{1}{2}y^tWy\end{aligned}$$

である．そこでこれを微分すれば

$$\begin{aligned}d\mu^X &= -\frac{1}{2}(dx^tWx + x^tWdx) + dy^tVx + y^tVdx - \frac{1}{2}(dy^tWy + y^tWdy) \\ &= -x^tWdx - x^tVdy + y^tVdx - y^tWdy\end{aligned}$$

となる．一方で X^* は

$$X^* = Vx - Wy + i(Wx + Vy) \in T_x\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$$

であるので $\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$ へ代入すると

$$\iota_{X^*}\omega = dy^tVx - dy^tWy - dx^tWx - dx^tVy = -x^tVdy - y^tWdy - x^tWdx + y^tVdx$$

となるので $d\mu^X = \iota_{X^*}\omega$ を満たす．次に $\mu^X(gz) = \mu^{g^{-1}Xg}(z)$ を確かめる．

$$\mu^X(gz) = \frac{i}{2}(gz)^*Xgz = \frac{i}{2}z^*g^*Xgz = \mu^{g^{-1}Xg}(z)$$

となる．以上から $(\mathbb{C}^n, \omega_0, U(n), \mu)$ はハミルトニアン G 作用である． □

EXERCISE 10.1.5. $U(k)$ の $k\times n$ 行列 $(\mathbb{C}^{k\times n}, \omega_0)$ への作用を考える．$\mathfrak{u}(k)$ と $\mathfrak{u}(k)^*$ は内積により同一視しておく．この作用に関するモーメント写像を

$$\mu(A) = \frac{i}{2}AA^* + \frac{1}{2i}\mathrm{id} \in \mathfrak{u}(k)^* \cong \mathfrak{u}(k)$$

とすればハミルトニアン $U(k)$ 作用である．

Proof. $\mathbb{C}^{k\times n}$ は $\mathbb{C}^k \times \cdots \times \mathbb{C}^k$ とみなす．このとき $\mathbb{C}^k$ へのハミルトニアン G 作用をすでにもとめた．そのときのモーメント写像は

$$\mu_i(z) := \frac{i}{2}zz^* \quad i = 1, \cdots, n$$

であった．$A = (z_1, \cdots, z_n)$ としてあらわせば $AA^* = \sum z_iz_i^*$ である．よって $\mu := \sum \mu_i$ はモーメント写像になる（この subsection の最初の excise から）． □

さらに $\mu^{-1}(0)$ を考えると

$$\mu^{-1}(0) = \{A \in \mathbb{C}^{k\times n} | AA^* = id\}$$

であり，$U(k)$ は自由に作用する．実際，$gA = A$ となら，$g = gAA^* = AA^* = \mathrm{id}$ となる．$\mu^{-1}(0)$ を $U(k)$ の作用で簡約したものは，

$$\mu^{-1}(0)/U(k) = Gr(k, n)$$

である．特に，$k = 1$ の場合には，S^1 の $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ の作用であり，

$$\mu^{-1}(0)/U(1) = Gr(1, n) = \mathbb{C}P^{n-1}$$

となる．

Proof. $\mathbb{C}^n$ 内で k 次元平面をとり，そのエルミート正規直交基底をとって並べれば $\mu^{-1}(0)$ の元 A を得る．さらにこのとり方は $U(k)$ の分だけの曖昧さがある． □

EXERCISE 10.1.6. $U(n)$ を $n \times n$ 複素行列のシンプレクティック空間 $(\mathbb{C}^{n^2}, \omega_0)$ へ

$$A \mapsto gAg^{-1}$$

により作用させる．このときモーメント写像として，

$$\mu(A) = \frac{i}{2}[A, A^*]$$

とすれば，ハミルトニアン $U(n)$ 作用である．

Proof. まず，

$$(\frac{i}{2}(AA^* - A^*A))^* = -\frac{i}{2}(AA^* - A^*A)$$

であるので，$\mu(A) \in \mathfrak{u}(n)^* \cong \mathfrak{u}(n)$ となる．

シンプレクティック形式は $i/2\mathrm{tr}\, dA \wedge dA^*$ とかける．これが随伴作用で不変であることは $\mathrm{tr}\,(dgAg^{-1} \wedge d(gAg^{-1})^*) = \mathrm{tr} dA \wedge dA^*$ からわかる．次に $X = -X^* \in \mathfrak{u}(n)$ とすると，

$$\mu^X(A) = \langle \frac{i}{2}[A, A^*], X\rangle = \frac{i}{2}\mathrm{tr}\,([A, A^*]X)$$

である．これを微分すれば

$$d\mu^X(A) = \frac{i}{2}\mathrm{tr}\,([dA, A^*]X) + \frac{i}{2}\mathrm{tr}\,([A, dA^*]X)$$

となる．一方で $X^* = XA - AX$ であるので

$$
\begin{aligned}
\iota_{X^*}\omega &= i/2\mathrm{tr}\,(XA - AX)dA^* - i/2\mathrm{tr}\,dA(A^*X^* - X^*A^*)\\
&= i/2\mathrm{tr}\,[X, A]dA^* + i/2\mathrm{tr}\,dA[A^*, X]\\
&= i/2\mathrm{tr}\,[X, A]dA^* + i/2\mathrm{tr}\,dA[A^*, X]\\
&= i/2\mathrm{tr}\,X[A, dA^*] + i/2\mathrm{tr}\,[dA, A^*]X
\end{aligned}
$$

よって $\mu^X(A) = \iota_{X^*}\omega$ となる．次に $\mu^X(gAg^{-1}) = \mu^{gXg^{-1}}(A)$ を確かめる．

$$\mu^X(A) = i/2\mathrm{tr}([gAg^{-1}, (gAg^{-1})^*]X) = i/2\mathrm{tr}(g[A, A^*]g^{-1}X) = i/2\mathrm{tr}([A, A^*]g^{-1}Xg)$$

となる．以上からモーメント写像であることがわかる． □

　また，

$$\mu^{-1}(0) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid AA^* = A^*A\}$$

となるので，いわゆる正規行列の全体である．この空間には G は自由に作用しない．例えば，$A = \mathrm{id}$ とすれば，$g\mathrm{id}g^{-1} = \mathrm{id}$ は，任意の $g \in U(n)$ も満たす．また，正規行列であるための必要十分条件はユニタリ行列によって対角化できることであった．この事実を使えば，$\mu^{-1}(0)/G$ がわかる（多様体ではないけど）．

EXERCISE 10.1.7. $(\mathbb{R}^{2n+2}, \omega_0)$ を $(\mathbb{C}^{n+1}, \omega_0)$ とみなして S^1 作用を考える．作用は $(z_k) \mapsto (e^{it}z_k)$．このときモーメント写像として

$$\mu : \mathbb{C}^{n+1} \ni z \mapsto \mu(z) = -\frac{1}{2}|z|^2 + 1/2 \in \mathbb{R}$$

とすれば，ハミルトニアン作用になる．さらに，$\mu^{-1}(0)/S^1 = \mathbb{CP}^n$ で，簡約シンプレクティック形式は Fubini-Study 形式になる．

Proof. $\mu^{-1}(0)/S^1 = \mathbb{CP}^n$ はすでに証明したが，もう一度書けば．

$$
\begin{gathered}
d\mu = -\frac{1}{2}d(\sum r_i^2)\\
X^* = \sum \partial/\partial\theta_i \quad X \text{ は } 1 \in \mathbb{R} = Lie S^1 \text{ のこと}\\
\iota_{X^*}\omega = -\sum r_i dr_i = -\frac{1}{2}\sum dr_i^2
\end{gathered}
$$

であった．また μ は S^1 不変なのでモーメント写像である．

$$\mu^{-1}(0) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} | \sum |z_i|^2 = \sum r_i^2 = 1\} = S^{2n+1}$$

これを S^1 の作用で割ったら $\mathbb{CP}^n$ である．

さて，Fubini-Study 形式は $pr : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ とすれば，

$$pr^*\omega_{FS} = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log|z|^2 = \frac{i}{2}\partial\sum\frac{z_i}{|z|^2}d\bar{z}_i = \frac{i}{2}(\frac{\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i}{|z|^2} - \frac{\sum \bar{z}_i dz_i \wedge \sum z_j d\bar{z}_j}{|z|^4})$$

であった．これを S^{2n+1} へ制限すれば $|z|^2 = 1$ 及び，$\sum z_i d\bar{z}_i = 0 = \sum \bar{z}_i dz_i$ が成立するので $i^*\frac{i}{2}\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$ となる．これはもとのシンプレクティック形式 ω_0 を S^{2n+1} へ制限したものに等しい．これより ω_{red} は Fubini-Study 形式である．□

また，$(\mathbb{C}^{n+1}, \omega_0)$ に，S^1 を

$$(z_1, \cdots, z_{n+1}) \mapsto (t^{-1}z_1, \cdots, t^{-1}z_{n+1})$$

として作用させる．このとき，

$$\mu : \mathbb{C}^{n+1} \ni z \mapsto \mu(z) = \frac{1}{2}|z|^2 \in \mathbb{R}$$

とすれば，モーメント写像になることがわかる．また，$q = 0$ が μ の最小値であり，非退化臨界点である．さて，$\epsilon \in \mathbb{R}$ をとって，$\mu^{-1}(\epsilon)$ を考える．$\mu^{-1}(\epsilon) = S^{n+1}(\epsilon)$ と半径 ϵ の球面であり，S^1 は自由に作用している．この場合には，$pr^*\omega_{FS}$ を $S^{n+1}(\epsilon)$ へ制限すれば，$\epsilon^{-1}i^*\frac{i}{2}\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$ である．よって，$\omega_{red} = \epsilon\omega_{FS}$ となる．

このように，他のレベルでの reduction を考えると，シンプレクティック形式の family を得る．

EXERCISE 10.1.8. $(\mathbb{C}^{n+1}, \omega_0)$ 上で $S^1 \times U(n+1)$ の自然な作用を考える．これはシンプレクティック作用である．そこでモーメント写像を

$$\psi_1 \oplus \psi_2 : \mathbb{C}^{n+1} \ni z \mapsto (-\frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1}{2}, \frac{i}{2}zz^*) \in \mathbb{R} \oplus \mathfrak{u}(n+1) = \mathbb{R}^* \oplus \mathfrak{u}(n+1)^*$$

として定義する．ψ_1 は S^1 に対する，ψ_2 は $U(n+1)$ に対するモーメント写像であったので，$\psi_1 \oplus \psi_2$ がモーメント写像であるための第一条件は満たされる．また，第二条件については，ψ_1 が $U(n+1)$ の作用で不変で，ψ_2 が S^1 の作用で不変でなければならないが，これは満たしている．よって，上のモーメント写像によって，ハミルトニアン G 空間になる．

そこで，$\psi_1^{-1}(0) = S^{2n+1}$ を考える．$\psi_1^{-1}(0)/S^1 = \mathbb{CP}^n$ を得る．$U(n+1)$ と S^1 の作用は可換なので，$(\mathbb{CP}^n, \omega_{red})$ 上の $U(n+1)$ の作用はシンプレクティック作用となる．また S^1 は ψ_2 を不変にするので，$\psi_2 : \psi_1^{-1}(0) \to \mathfrak{u}(k)$ を落として $\mu_2 : \mathbb{CP}^{n+1} \to \mathfrak{u}(n)$ というモーメント写像を得る．

以上から，$(\mathbb{CP}^n, \omega_{FS})$ 上の $U(n+1)$ の自然な作用はハミルトニアン作用であり，モーメント写像は

$$\mathbb{CP}^n \ni \{[z] | |z|^2 = 1\} \mapsto \frac{i}{2}zz^* \in \mathfrak{u}(k)$$

である．もし斉次座標でやる場合には

$$\mathbb{CP}^n \ni [z] \mapsto \frac{i}{2|z|^2} zz^* \in \mathfrak{u}(k)$$

とすればよい．

EXERCISE 10.1.9. $(\mathbb{CP}^n, \omega_{FS})$ 上の $\mathbb{T}^{n+1}$ の次の作用を考える．

$$(t_1, \cdots, t_{n+1})[z_1, \cdots, z_{n+1}] = [t_1^{k_1} z_1, \cdots, t_{n+1}^{k_{n+1}} z_{n+1}]$$

これはシンプレクティック作用であることはすぐにわかる．先ほどと同様に $S^1 \times \mathbb{T}^{n+1}$ の $(\mathbb{C}^{n+1}, \omega_0)$ に対するハミルトン作用を考えれば．モーメント写像として，

$$\mu([z]) = -\frac{1}{2|z|^2}(k_1|z_1|^2, \cdots, k_n|z_n|^2) + \text{const vector}$$

を考えればよい．

10.2　モーメント写像の存在と一意性

10.2.1　ベクトル場のリー環

(M, ω) をシンプレクティック多様体とする．また $v \in \mathfrak{X}(M)$ に対して v **がシンプレクティックとは** $\iota_v\omega$ **が閉．** v **がハミルトニアンとは** $\iota_v\omega$ **が exact であった．**

シンプレクティックベクトル場の全体 $\mathfrak{X}^{symp}(M)$, ハミルトンベクトル場の全体 $\mathfrak{X}^{ham}(M)$ はリー環となる．また $C^\infty(M)$ もポアソン積でリー環になる（$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$）．また $H^1(M, \mathbb{R})$ 及び $\mathbb{R}$ は自明なリー括弧でリー環となる．そこで次の二つの**リー環の完全系列**を得る．

$$0 \to \mathfrak{X}^{ham}(M) \xrightarrow{i} \mathfrak{X}^{symp}(M) \xrightarrow{v \mapsto [\iota_v\omega]} H^1(M, \mathbb{R}) \to 0$$
$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{i} C^\infty(M) \xrightarrow{f \to X_f} \mathfrak{X}^{ham}(M) \to 0$$

特に $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$ **なら** $\mathfrak{X}^{ham}(M) = \mathfrak{X}^{symp}(M)$ **である．**また第二式は中心拡大であることに注意する．

G を連結リー群とし，シンプレクティック作用を $\psi : G \to Symp(M, \omega)$ とする．これから無限小作用を得る．

$$d\psi : \mathfrak{g} \ni X \to X^* \in \mathfrak{X}^{symp}(M)$$

を得る．これは**リー環の反準同形**である．つまり $[a, b]^* = -[a^*, b^*]$ である．

Proof. これは左作用としているからで，主束の場合の基本ベクトル場の場合には右作用なので準同形になることに注意する．よく知られてることだが証明してみる．まず，$(L_g)_* a^* = (\mathrm{Ad}(g)a)^*$ であることを証明する．$((L_g)_* a^*)_x = (L_g)_* a^*_{g^{-1}x}$ である．$a^*_{g^{-1}x}$ は $(\exp ta) \cdot g^{-1} \cdot x$ に対する $t=0$ での微分である．この $(L_g)_*$ による像は $g(\exp ta) \cdot g^{-1} \cdot x$ の $t=0$ での微分である．よって $(\exp t\mathrm{Ad}(g)a) \cdot x$ の $t=0$ での微分となり $(\mathrm{Ad}(g)a)^*_x$ となる．

さてベクトル場のリー環の定義は,

$$[X,Y]_x = \lim_{t\to 0} \frac{Y_x - (\phi_t)_* Y_{\phi_{-t}(x)}}{t}$$

である．ここで $Y_x, (\phi_t)_* Y_{\phi_{-t}(x)} \in T_x M$ であるので極限をとることには意味がある．一方でリー環の積は

$$[a,b] = \lim_{t\to 0} \frac{b - \mathrm{Ad}(\exp -ta)b}{t}$$

である．そこで

$$[a^*, b^*]_x = \lim_{t\to 0} \frac{a^*_x - (\exp ta)_* b^*_{(\exp -ta)x}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a^*_x - (\mathrm{Ad}(\exp ta)b)^*_x}{t} = -[a,b]^*_x$$

となる． □

さてリー群の作用がハミルトニアン作用とは，次の二条件を満たすもの．（ただし G が連結と仮定する）．

1. $d\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^{symp}(M)$ が $d\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^{ham}(M)$ という環準同型に lift.
2. 上の場合に，$C^\infty(M)$ への lift が存在するが（$C^\infty(M) \to \mathfrak{X}^{ham}(M)$ の全射性から），そのような **lift のうち，**$\mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ **がリー環の準同形となるもの**である．

つまり $\mu^* : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ というリー環の準同形で，次を可換にするものが存在すること

$$\begin{array}{ccccc}
C^\infty(M) & \xrightarrow{f\mapsto X_f} & \mathfrak{X}^{ham}(M) & \xrightarrow{i} & \mathfrak{X}^{symp}(M) \\
{\scriptstyle \exists\mu^*}\big\uparrow & & {\scriptstyle \exists}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle d\psi} \\
\mathfrak{g} & = & \mathfrak{g} & = & \mathfrak{g}
\end{array}$$

Proof. 余モーメント写像 $\mu^* : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ が存在したとする．$X \in \mathfrak{g}$ に対して，$\mu^*(X)$ をハミルトニアンとすれば X^* がハミルトンベクトル場であった．よって，$d\psi$ は lift して，

$$d\psi : \mathfrak{g} \ni X \mapsto X^* \in \mathfrak{X}^{ham}(X) \subset \mathfrak{X}^{symp}(M)$$

を得る．さらに，

$$\mu^* : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$$

が $d\psi$ の lift である．μ^* がリー環の準同形であることと，$X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$ から，

$$[X, Y] \mapsto \mu^*([X, Y]) = \{\mu^*(X), \mu^*(Y)\} \mapsto -[X^*, Y^*]$$

となるので，$d\psi$ は環準同型である．逆に，条件を満たせば，ハミルトニアン作用であることは同様にすればよい． □

$d\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^{ham}(M)$ という lift の準同形があるだけではハミルトン作用にはならない．例えば $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$ なら必ず $d\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^{ham}(M)$ が存在するし，$C^\infty(M)$ への lift が可能であるが，これが準同形になるかを確かめる必要がある．それには，リー環のコホモロジーを調べることになる．

10.2.2　リー環のコホモロジー

$\mathfrak{g}$ をリー環とする．そして

$$C^k := \Lambda^k \mathfrak{g}^*$$

とする．このとき線形作用 $\delta : C^k \to C^{k+1}$ を

$$\delta c(X_0, \cdots, X_k) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_k)$$

と定義する．このとき $\delta^2 = 0$ であり，**リー環のコホモロジー群**を得る．つまり

$$H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) := \frac{\ker \delta : C^k \to C^{k+1}}{\mathrm{im}\ \delta : C^{k-1} \to C^k}$$

Remark 10.2.1. これは自明表現のリー環のコホモロジーである．(V, ρ) を $\mathfrak{g}$-module とすれば，一般には $\omega : \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \to V$（交代）の元全体で $C^k(\mathfrak{g}, V)$ という複体を考えて微分を

$$\begin{aligned}\delta c(X_0, \cdots, X_k) = &\sum (-1)^j \rho(X_j) c(X_0, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_k) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_k)\end{aligned}$$

とすればコホモロジーが定まる．

さらに，

Theorem 10.2.1. $\mathfrak{g}$ **をコンパクトリー群** G **のリー環とすると**

$$H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = H^k_{deRham}(G)$$

である．

Proof. $\Lambda^k \mathfrak{g}^*$ は左 G 不変 k-form の全体 $\Omega_L(G)$ と同一視できる．ここで $d : \Omega_L(G) \to \Omega_L(G)$ かつ $d^2 = 0$ であり．$H_L(G)$ を考えることができる．さて，$\iota : \Omega_L^*(G) \to \Omega^*(G)$ という写像を得るが，G がコンパクトより微分形式を積分により平均すれば G 不変微分形式にできる．つまり，$\rho : \Omega^*(G) \to \Omega_L(G)$ を得る．さらに d と可換である．また，$\rho \circ \iota = id$ であるが，$\iota \circ \rho$ は恒等写像とはならないが，ホモトピー作用素を構成することができ，コホモロジーでの同型を与え，$H_L(G) \cong H_{deRham}(G)$ を得る．さて，同型 $\chi : \Omega_L(G) \to \Lambda^k \mathfrak{g}$ を得たが，これは d, δ と可換である（easy）．よって，$H_L(G) \cong H(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ が成立する．(実は，両側 G 不変な形式全体 $\Omega_I(G)$ と $H^*(G) \cong H(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ は同型である）． □

さて，$H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ の意味を考えよう．$C^1 = \mathfrak{g}^*$ であり，$\mathfrak{g}$ 上線形汎関数全体である．$c \in \mathfrak{g}^*$ とすると，定義から $\delta c(X_0, X_1) = -c([X_0, X_1])$ となる．そこで $\mathfrak{g}$ の交換子イデアル $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とすれば，$\delta c = 0$ とは $c \in \mathfrak{g}^*$ が $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 上でゼロとなることである．よって $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の **anihilator** を $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0 \subset \mathfrak{g}^*$ とすれば

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0$$

となる．さて，G がコンパクトと仮定すると，$\mathfrak{g}$ 上に Ad 不変内積 F が存在する．つまり，

$$F(X, [Y, Z]) = F([X, Y], Z)$$

となる内積が存在する．そこで．X が $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の F に対する直交補空間に入ることと $X \in Z(\mathfrak{g})$ であることは同値である．実際，$F(X, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ は，$F([X, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = 0$ と同値なので，F が正定値から $[X, \mathfrak{g}] = 0$ と同値であり，$X \in Z(\mathfrak{g})$ と同値．よって，$F : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ と同一視すれば，

$$F : \mathfrak{g}^* \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0 \cong Z(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$$

となる．つまり，

$$H^1(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Hom}(Z(\mathfrak{g}), \mathbb{R})$$

である．特に，コンパクトリー群 G に対して，$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と $Z(\mathfrak{g}) = 0$ は同値である．

Definition 10.2.1. **コンパクトリー群** G **が semisimple とは** $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ **となることである．よって，コンパクトリー群について次は同値である．**

- $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$
- $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$
- $Z(\mathfrak{g}) = 0$

Remark 10.2.2. コンパクト群のリー環は $Z \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と分解できるのであった．このことからも中心がゼロと同値であることがわかる．

EXAMPLE 10.2.1. $U(n)$ はsemisimpleではない．実際そのリー環を考えると $\mathbb{R}\mathrm{id}$ という 1 次元部分空間があり．これは $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ではあらわせない．もしあらわせたならトレースがゼロになるが $\mathbb{R}\mathrm{id}$ はトレースはゼロでない．(**semisimple ならリー環のトレースがゼロ**)．

$SU(n), SO(n), Sp(n)$ というコンパクト古典群はsemisimpleである．よって $H^1(G, \mathbb{R}) = 0$ である（$H^1(M, \mathbb{Z}) \neq 0$ はありえる）．任意の可換群は semisimple ではない．なぜなら $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ となってしまうからである．例えば S^1 は semisimple ではない．

次に $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ の意味を考える．$c \in C^2$ とすれば

$$\delta c(X_0, X_1, X_2) = -c([X_0, X_1], X_2) + c([X_0, X_2], X_1) - c([X_1, X_2], X_0)$$

である．また $c = \delta b$ とは

$$c(X_0, X_1) = \delta b(X_0, X_1) = -b([X_0, X_1])$$

である．

Theorem 10.2.2. リー群 G がコンパクトかつ *semisimple* であるとする．このとき $H^2 = 0$ である．

（証明は「リー群論」[伊勢・竹内] をみよ）．

Remark 10.2.3. 代数的位相幾何で知らられているように，G がコンパクト連結リー群なら，

$$H^*(G : \mathbb{R}) = \wedge(x_{2p_1+1}, \cdots, x_{2p_r+1}) \quad x_{2p_i+1} \in H^{2p_i+1}(G; \mathbb{R})$$

という同型が成立する（$H^*(G)$ の Hopf 代数構造を使うことによる）．右辺は外積代数であるので，$x_{2p+1} \wedge x_{2p+1} = 0$ であることに注意する．この事実からも，G がコンパクト semi-simple なら $H^2(G; \mathbb{R}) = 0$ がわかる．

10.2.3 モーメント写像の存在

Theorem 10.2.3. シンプレクティック G 作用があるとする．このとき $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$，$H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$ なら，その作用はハミルトニアンになる．

Corollary 10.2.4. G が ***semisimple*** なら，任意のシンプレクティック G 作用はハミルトニアンである．

Proof. $\psi : G \to Symp(M, \omega)$ をシンプレクティック G 作用とする．$H^1 = 0$ から $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が成立する．$X, Y \in \mathfrak{X}^{symp}(M)$ に対して $[X, Y] \in \mathfrak{X}^{ham}(M)$ であったので（定理 7.1.1），シンプレクティックベクトル場はハミルトンベクトル場となる．つまり

$$d\psi : \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \to \mathfrak{X}^{ham}(M)$$

という準同形写像を得る．さらにこの作用がハミルトニアンであるためには $\mu^* : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ で次を可換にするものが存在する必要がある．

$$\begin{array}{ccc}
C^\infty(M) & \xrightarrow{f \mapsto X_f} & \mathfrak{X}^{ham}(M) \subset \mathfrak{X}^{symp}(M) \\
{\scriptstyle \exists\mu^*}\Big\uparrow & & {\scriptstyle d\psi}\Big\uparrow \\
\mathfrak{g} & =\!= & \mathfrak{g}
\end{array}$$

そこで，$\mathfrak{g}$ の基底 X_i に対して，X_i^* は ω を保存するからシンプレクティックベクトル場であり，上で述べたように，ハミルトンベクトル場になる．よって，ある関数 f が存在して，$X_i^* = X_f$ となる．そこで，線形に拡張して $\tau : \mathfrak{g} \ni X \to \tau^X \in C^\infty(M)$ という線形写像を得ることができる（$X_{\tau(X)} = d\psi(X)$）．しかしこれはリー環の準同形とは限らない．

$[X, Y] \in \mathfrak{g}$ を基底であらわせば写像の定義から $\tau^{[X,Y]}$ は $[X, Y]^*$ に対するハミルトン関数である．一方で，τ^X, τ^Y という関数に対するポアソン括弧をとれば $\{\tau^X, \tau^Y\}$ は $-[X^*, Y^*]$ に対するハミルトン関数である．$[X, Y]^* = -[X^*, Y^*]$ であるので，上で作ったハミルトン関数の差は定数であり，

$$c(X, Y) := \tau^{[X,Y]} - \{\tau^X, \tau^Y\}$$

とかける．よって $c \in C^2$ となる．さらにヤコビ律（$[\cdot, \cdot]$ 及び $\{\cdot, \cdot\}$ に対する）から，$\delta c = 0$ であり，$H^2 = 0$ から

$$c(X, Y) = -b([X, Y])$$

とかける $b \in \mathfrak{g}^*$ が存在する．そこで

$$\mu^* : \mathfrak{g} \ni X \mapsto \tau^X + b(X) = \mu^X \in C^\infty(M)$$

とすれば，これはリー環の準同形になる（$b(X)$ は定数である）．実際，

$$\mu^*([X,Y]) = \tau^{[X,Y]} + b([X,Y]) = \{\tau^X, \tau^Y\} = \{\mu^X, \mu^Y\}$$

となる． □

Remark 10.2.4. semisimple でない場合．例えば S^1 シンプレクティック作用がいつハミルトニアンになるかは問題である．この問題に対する部分的解答は [Macduff-Salamon] を参照せよ．

10.2.4　モーメント写像の一意性

G をコンパクトリー群とする．

Theorem 10.2.5. $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$ **とすると，ハミルトニアン** G **作用は存在すれば一意である．**

Proof. μ_1^*, μ_2^* を二つの余モーメント写像とする．

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M) & \xrightarrow{f \mapsto X_f} & \mathfrak{X}^{ham}(M) \subset \mathfrak{X}^{symp}(M) \\ {\scriptstyle \mu_1^*}\uparrow{\scriptstyle \mu_2^*} & & {\scriptstyle d\psi}\uparrow \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{=} & \mathfrak{g} \end{array}$$

$X \in \mathfrak{g}$ に対して，μ_1^X, μ_2^X は両方とも X^* に対するハミルトン関数である．よって $\mu_1^X - \mu_2^X = c(X)$ は局所定数関数である．（M は連結として）$c \in \mathfrak{g}^*$ が定まる．さらに μ_1^*, μ_2^* はリー環の準同形であるので

$$\begin{aligned} c([X,Y]) &= \mu_1^*([X,Y]) - \mu_2^*([X,Y]) = \{\mu_1^*(X).\mu_1^*(Y)\} - \{\mu_2^*(X).\mu_2^*(Y)\} \\ &= \omega(X^*, Y^*) - \omega(X^*, Y^*) = 0 \end{aligned}$$

となる．よって，$\delta c = 0$ である．$H^1 = \{0\}$ であるので，$c = 0$ である． □

Corollary 10.2.6. 一般に，$\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ というモーメント写像があるとする．このとき $c \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0 \subset \mathfrak{g}^*$ を勝手にとれば $\mu + c$ もモーメント写像である．またモーメント写像は $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0$ の部分を除いて一意である．特に G がコンパクトなら，$Z(\mathfrak{g})$ の部分を除いて一意的．

上の証明をみればわかるように，lift は $H^1(\mathfrak{g})$ で分類される．さらにそのリフトが準同形になるための十分条件として $H^2(\mathfrak{g}) = 0$ がある．（より詳しいことは，例えば牛腸「connection 付の hermitian line bundle をめぐって」[牛腸] をみよ）．

Corollary 10.2.7. *G が* ***semisimple*** *ならシンプレクティック作用はハミルトニアン作用となり，モーメント写像は一意である．G が可換群なら，シンプレクティック作用はハミルトニアンでないかもしれない．もしハミルトニアン作用があった場合には，対応するモーメント写像は $c \in \mathfrak{g}^* = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0$ を除いて一意である．*

EXAMPLE 10.2.2. $(\mathbb{T}^2, d\theta_1 \wedge d\theta_2)$ 上で S^1 作用を θ_1 の回転として定義する．これはシンプレクティック作用であるがハミルトニアンではない．

Proof. この場合のハミルトニアンとは，$X^* = \partial/\partial\theta_1$ がハミルトンベクトル場であることである．

$$\iota_{X^*}\omega = d\theta_2$$

となるが，$d\theta_2$ が exact でなければならない．しかし θ_2 に対応する S^1 で積分すれば $\int_{S^1} d\theta_2 = 1$ となり exact とすると矛盾する． □

10.3 $\mathbb{T}^m$ の作用と凸性

10.3.1 凸性定理

以下では $G = \mathbb{T}^m$ の場合のハミルトニアン G 作用を考える．

Theorem 10.3.1 (Atiyah, Guillemin Sternberg)**.** *(M, ω) をコンパクト連結シンプレクティック多様体とする．$\psi : \mathbb{T}^m \to Symp(M, \omega)$ がモーメント写像 $\mu : M \to \mathbb{R}^m$ をもつハミルトン作用であるとする．このとき次が成立する．*

1. μ のレベル集合は連結である．

2. μ の像は凸である．

3. 作用の固定点の集合は連結シンプレクティック部分多様体の有限個の和であり，その各集合 C_j（$j = 1, \cdots, N$）のモーメント写像の像である定数ベクトルを $\mu(C_j) = \eta_j$ とする．このとき像 $\mu(M)$ は $\{\eta_j\}_j$ の凸包（*convex hull*）である．つまり

$$\mu(M) = \{\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \eta_j | \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0\}$$

（これは，各頂点を線分で結んだ多角形の内部と境界をあわせたものである．もちろん，その多角形の内部に，頂点が含まれていてもよい）．

このモーメント写像の像を ***moment polytope*** という．

以下の証明は Atiyah によるもので，m についての帰納法で行う．

- A_m : μ のレベル集合は連結である.（任意の $\mathbb{T}^m$ の作用に対して）.
- B_m : μ の像は凸である（任意の $\mathbb{T}^m$ の作用に対して）.

証明の step は次のように行う．

1. まず A_1 はモース理論を使う．後で見る．
2. $A_{m-1} \Rightarrow A_m$ に対しては，後でみる．
3. B_1 は $\mathbb{R}$ 内での凸性なので，自明．
4. $A_{m-1} \Rightarrow B_m$.

$A_{m-1} \Rightarrow B_m$ を証明する．まず単射な行列 $A \in \mathbb{Z}^{m\times(m-1)}$ を考える．ここで $A : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ であるが，$A \in \mathbb{Z}^{m\times(m-1)}$ より

$$A : \mathbb{T}^{m-1} \ni (x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}) \to (\sum_{j=1}^{m-1} a_{1j}x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{m-1} a_{mj}x_j) \in \mathbb{T}^m$$

となる．そこで

$$\psi_A : \mathbb{T}^{m-1} \ni \theta \mapsto \psi_{A\theta} \in Symp(M, \omega)$$

というシンプレクティック作用を得る．これはモーメント写像 $\mu_A = A^t\mu : M \to \mathbb{R}^{m-1}$ をもつハミルトン $\mathbb{T}^{m-1}$ 作用になる．

Proof. 可換群なのでまず $\mathbb{T}^{m-1}$ 不変であることを確かめる．つまり $\mu_A(\psi_{A\theta}(x)) = \mu_A(x)$ であるが，これはもとの μ が $\mathbb{T}^m$ 不変であるので明らかである．次に $d\mu_A^X = \iota_{X^*}\omega$ を考える．$X \in Lie\mathbb{T}^{m-1}$ であるが，これが引き起こす基本ベクトル場は $AX \in Lie\mathbb{T}^m$ として $(AX)^*$ である．一方 $\mu_A^X = \langle \mu_A, X\rangle = \langle A^t\mu, X\rangle = \langle \mu, AX\rangle$ であるので，もとの μ がモーメント写像であることから μ_A がモーメント写像であることがわかる． □

さて，$p_0 \in \mu_A^{-1}(\xi)$ を勝手にとる．このとき

$$p \in \mu_A^{-1}(\xi) \iff A^t\mu(p) = \xi = A^t\mu(p_0)$$

となるので

$$\mu_A^{-1}(\xi) = \{p \in M | \mu(p) - \mu(p_0) \in \ker A^t\}$$

である．主張「A_{m-1}」が成立しているので，$\mu_A^{-1}(\xi)$ は連結であることがわかる（仮定は勝手な $\mathbb{T}^{m-1}$ 作用に対してレベル集合が連結であった）．よって $\mu_A^{-1}(\xi)$ 内の

点 p_0 と p_1 は道 p_t で μ_A^{-1} 内で結べる．よって $\mu(p_t)-\mu(p_0)$ は $\ker A^t$ 内の道になる．しかし A が単射なので $\ker A^t$ は一次元である．よって $\mu(p_t)$ は $\mu(p_0)$ と $\mu(p_1)$ の線分に像として一致する．よって $\mu(p_0)$ と $\mu(p_1)$ を結ぶ線分は $\mu(M)$ に入る．つまり

$$(1-t)\mu(p_0)+t\mu(p_1)\in\mu(M)\quad 0\le t\le 1$$

である．

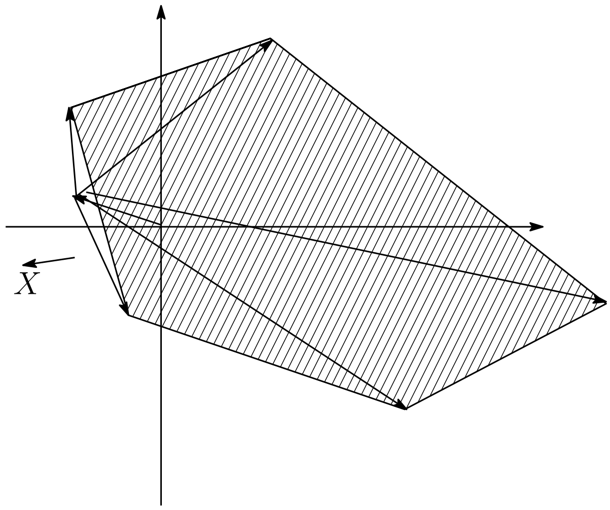
さて $p_0,p_1\in M$ を勝手にとれば，十分近い p_0',p_1' および単射な $A\in\mathbb{Z}^{m\times(m-1)}$ をとって $\mu(p_1')-\mu(p_0')\in\ker A^t$ となるようにできる．(つまり $\mu(p_1')-\mu(p_0')$ はあるベクトルであるが，そのベクトル方向が $\ker A^t$ となるようにとればよい．また方向は一般には無理数係数であるが有理数で近似する．そこで $p_0'\to p_0$, $p_1'\to p_1$ にすればよい）．よって $\mu(M)$ は凸である．また M がコンパクトより $\mu(M)$ は閉である．

定理の３番目の主張を証明する．(もちろん，定理の１，２番目の主張は仮定する）．作用 ψ の固定点を C とする．後で証明するが C は連結なシンプレクティック部分多様体の有限個の和である．$C=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_N$ とする．モーメント写像の equivariant 性からこれらの集合上で定数ベクトルである．つまり $\mu(C_j)=\eta_j\in\mathbb{R}^m$．上で証明したことから $\{\eta_1,\cdots,\eta_N\}$ の凸閉包は $\mu(M)$ に含まれる．そこでこの逆を証明すればよい．$\xi\in\mathbb{R}^m$ として，ξ が $\{\eta_1,\cdots,\eta_N\}$ の凸閉包に含まれないとする．$X\in\mathbb{R}^m$ として，成分が $\mathbb{Q}$ 上独立なもので，

$$\langle\xi,X\rangle>\langle\eta_j,X\rangle\quad\forall j$$

となるものをとる．これは，ξ が $\{\eta_1,\cdots,\eta_N\}$ の凸閉包に含まれないことから，このようなものがとれる．実際，下図のように，ξ が凸閉包の外にあるとする．ξ に近い境界の面に直交するように X をとればよい．あとは，成分が $\mathbb{Q}$ 上独立となるように，ちょっとずらせばよい．

$$\langle\eta_j-\xi,X\rangle<0$$



このとき $\{\exp tX | t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{T}^m$ 内で稠密であるので，X^* の M 上でのゼロ点は，$\mathbb{T}^m$ の作用に対する固定点である．

さて，$\mu^X = \langle \mu, X \rangle$ を考えると $d\mu^X = \iota_{X^*}\omega$ であることから，μ^X が最大となる点（コンパクトより存在）は $\iota_{X^*}\omega = 0$ となる点であり，ω の非退化性から，X^* のゼロ点である．よって，先ほど述べたことから $\mathbb{T}^m$ 作用の固定点である．そこで，C_j のどこかで μ^X は最大値をとることになるので，仮定から

$$\langle \xi, X \rangle > \sup_{p \in M} \langle \mu(p), X \rangle$$

となり $\xi \notin \mu(M)$ である．この対偶をとれば $\mu(M)$ は $\{\eta_1, \cdots, \eta_N\}$ の凸閉包に一致することがわかる．

10.3.2 連結性の証明

ハミルトニアン $\mathbb{T}^m$ の作用 $\psi : \mathbb{T}^m \to Symp(M, \omega)$ を考える．ここで (M, ω) は $2n$ 次元コンパクト連結シンプレクティック多様体とする．またモーメント写像を $\mu : M \to \mathbb{R}^m$ とする（$\mathbb{R}^m$ は $Lie\mathbb{T}^m$ の標準的内積で双対空間と同一視している）．

Lemma 10.3.2. (M, ω) 上には $\mathbb{T}^m$ の作用で不変（$J_{\psi_\theta(p)}(\psi_{\theta *}X_p) = (\psi_{\theta *})_p J_p(X_p)$）な *compatible* 概複素構造がはいる．

Proof. まず，概複素構造は平均化することができないことに注意．$J = \int_{\mathbb{T}^m} \psi_\theta^* J_0 d\theta$ を考えても，$J \in \mathrm{Hom}(TM, TM)$ ではあるが，$J^2 = \mathrm{id}$ とはかぎらない．しかしリーマン計量を一つ固定しておき，それを平均化することはできる $g = \int_{\mathbb{T}^m} \psi_\theta^* g_0 d\theta$ はリーマン計量であり，$g_{\psi_\theta(p)}(\psi_{\theta *}X_p, \psi_{\theta *}Y_p) = g_p(X_p, Y_p)$ を満たす．また ω も $\mathbb{T}^m$ の作用で不変であった．そこで，この g と ω に対して複素構造 J を極分解により

つくればよい．まず，$\omega_p(u,v)=g_p(A_pu,v)$ となる $A_p:T_pM\to T_pM$（$A^*=-A$）を作る．この A は p に対して滑らかとしてよい．そして，$\omega_{\psi_\theta(p)}(\psi_{\theta*}u_p,\psi_{\theta*}v_p)=\omega_p(u,v)=g_p(A_pu,v)=g_{\psi_\theta(p)}(\psi_{\theta*}A_pu_p,\psi_{\theta*}v_p)=g_{\psi_\theta(p)}(A_{\psi_\theta(p)}\psi_{\theta*}u_p,\psi_{\theta*}v_p)$ となるので $(\psi_{\theta*})_pA_p=A_{\psi_\theta(p)}(\psi_{\theta*})_p$ を満たす．そこで $J_p=(\sqrt{A_pA_p^*})^{-1}A_p$ とすれば，

$$\begin{aligned}
J_{\psi_\theta(p)}&=\left(\sqrt{A_{\psi_\theta(p)}A^*_{\psi_\theta(p)}}\right)^{-1}A_{\psi_\theta(p)}\\
&=\left(\sqrt{(\psi_{\theta*})_pA_p(\psi_{\theta*})_p^{-1}((\psi_{\theta*})_p^{-1})^*A_p^*(\psi_{\theta*})_p^*}\right)^{-1}(\psi_{\theta*})_pA_p(\psi_{\theta*})_p^{-1}\\
&=((\psi_{\theta*})_p^*)^{-1}\left(\sqrt{A_pA_p^*}\right)^{-1}A_p(\psi_{\theta*})_p^{-1}\\
&=(\psi_{\theta*})_pJ_p(\psi_{\theta*})_p^{-1}
\end{aligned}$$

となるので，$J_{\psi_\theta(p)}(\psi_{\theta*})_p=(\psi_{\theta*})_pJ_p$ となり，$\mathbb{T}^m$ の作用で不変である． □

Lemma 10.3.3. $G\subset\mathbb{T}^m$ を勝手な部分群とする．この G の固定点，

$$Fix(G)=\cap_{\theta\in G}Fix(\psi_\theta)$$

は M のシンプレクティック部分多様体である．

Proof. $p\in Fix(G)$，$\theta\in G$ に対して，ψ_θ の微分を考える．このとき p は固定点なので

$$d\psi_\theta(p):T_pM\to T_pM$$

を与える．さらに上で構成した概複素構造 J_p と可換である．また上で構成した $\mathbb{T}^m$ 不変な計量に関する測地線を考える．ψ_θ は isometry であるので測地線を測地線にうつす．そこで指数写像を $\exp_p:T_pM\to M$ を考えると，

$$\exp_p(d\psi_\theta(p)v)=\psi_\theta(\exp_p v)$$

を満たす．そこで p の近傍での ψ_θ の固定点は，T_pM 内の $d\psi_\theta(p)$ の固定点に（指数写像により）対応する．以上から

$$T_pFix(G)=\cap_{\theta\in G}\ker(\mathrm{id}-d\psi_\theta(p))$$

となる．さて $d\psi_\theta(p)$ は J_p と可換なので，同時固有分解でき，固有値 1 の固有空間は J_p で不変である．つまり $Fix(G)$ は概複素部分多様体である．よってシンプレクティック部分多様体である（prop 5.2.5）． □

Remark 10.3.1. 上の二つの補題はトーラスでなくても，コンパクト群のシンプレクティック作用に対して成立．

さて，ボットモース関数の復習をする．M をコンパクトリーマン多様体として $f : M \to \mathbb{R}$ **がボットモース関数**とは，f の臨界点のの集合 $Cirt(f) = \{p \in M | df(p) = 0\}$ が M の部分多様体であり，各 $p \in Crit(f)$ に対して，$T_pCrit(f) = \ker \nabla^2 f(p)$ となることである．ここで $\nabla^2 f(p) : T_pM \to T_pM$ はヘシアンから決まる線形写像.

Remark *10.3.2.* リーマン計量があるときヘシアン $H_f : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ を $H_f(X,Y) = XYf - (\nabla_X Y)f$ として定める（torsion ゼロより対称である）．また，$\nabla^2 f$ は

$$g((\nabla^2 f)(X), Y) = XYf - (\nabla_X Y)f$$

により定まるもの．他のリーマン計量によって定めた時には，ヘシアンは臨界点において一致する．実際，$df_p = 0$ となる点においては，$H_f(X,Y) = XYf$ となるからである．また，局所座標系でヘシアンを書けば，T_pM の線形変換となるが，他の座標系をとっても，線形変換は相似なものになる．よって，ヘシアンの固有値，符号数，非退化性などは臨界点において well-defined である．

$T_pCrit(f) = \ker \nabla^2 f(p)$ は**退化している方向が臨界多様体の方向**ということである．それ以外の方向は正または負の固有値をもち，gradient flow が引ける．

f をボットモース関数とすると．$Crit(f)$ は有限個の連結な多様体に分かれる．それを C と書く．$p \in C$ として T_pM は分解する

$$T_pM = T_pC \oplus E_p^+ \oplus E_p^-$$

ここで $E_p^\pm$ は $\nabla^2 f(p)$ の正，負の固有空間である．また連結な臨界多様体 C の指数を $n_C^- = \dim E_p^-$ として定義する（連結成分上一定である）．一方で余指数を $n_C^+ = \dim E_p^+$ として定義.

さて，話を元に戻す.

Lemma 10.3.4. $(M, \omega, \mathbb{T}^m, \mu)$ を考える．$X \in \mathbb{R}^m$ として $\mu^X = \langle \mu, X \rangle : M \to \mathbb{R}$ は**ボットモース関数**であり，臨界多様体は偶数次元で，その指数も偶数である．さらに，

$$Crit(\mu^X) = \cap_{\theta \in \mathbb{T}^X} Fix(\psi_\theta)$$

は**シンプレクティック多様体**となる．ここで $\mathbb{T}^X$ は X が生成する $\mathbb{T}^m$ の部分群の閉包である．

Proof. トーラスは可換群なので μ は $\mathbb{T}^m$ 不変な関数である．つまり $L_{X^*}\mu = \iota_{X^*} d\mu = 0$ である．また $d\mu^X = \iota_{X^*}\omega$ が成立した．

1. まず，$(d\mu^X)_p = \iota_{X_p^*}\omega_p = 0$ となるのは $X_p^* = \frac{d}{dt}(\exp tX)p|_{t=0} = 0$ となる点である．つまり $\exp tX$ に対する不動点である．よって

$$Crit(\mu^X) = \cap_{\theta \in \mathbb{T}^X} Fix(\psi_\theta)$$

が成立する．

2. $X_p^*=0$ となる点 p において $L_{X^*}:T_pM\to T_pM$ を
$$[X^*,Y]_p=\nabla_{X_p^*}Y-\nabla_{Y_p}X^*=-\nabla_{Y_p}X^*$$
で定義することができる．ここで右辺をみれば Y_p の拡張の仕方によらず決まることがわかる．

3. また g,J を ω と可換な概複素構造，リーマン計量とする．このとき $df=g(JX_f,\cdot)$ となる．実際，$Yf=\omega(X_f,Y)=g(JX_f,Y)$ となる．これは X_f に対するハミルトニアン flow が JX_f に対する gradient flow に一致することを述べている．

さて，ヘシアンは
$$\begin{aligned}g((\nabla^2f)(Y),Z)&=H_f(Y,Z)=YZf-\nabla_YZf=Yg(JX_f,Z)-g(JX_f,\nabla_YZ)\\&=g(\nabla_YJX_f,Z)+g(JX_f,\nabla_YZ)-g(JX_f,\nabla_YZ)\\&=g(\nabla_YJX_f,Z)=g((\nabla_YJ)X_f,Z)+g(J(\nabla_YX_f),Z)\end{aligned}$$
となる．よって
$$g((\nabla^2\mu^X)(Y),Z)=g((\nabla_YJ)X^*,Z)+g(J(\nabla_YX^*),Z)$$
となる．これを不動点 p で考えると $X_p^*=0$ なので，
$$g((\nabla^2\mu^X)_p(Y_p),Z_p)=-g((\nabla_{Y_p}X^*),JZ)=g([X^*,Y]_p,JZ)$$
となる．よって X^* が引き起こす $[X^*,\cdot]_p:T_pM\to T_pM$ は，$v_p:=-J_p(\nabla^2\mu^X)_p:T_pM\to T_pM$ に一致する．

トーラス作用で不変な内積と概複素構造をいれておき，測地線座標を使って，$v\in T_pM$ に対して $\exp_p(sv)$ を考える．1 パラーメータ変換群 $\psi_{\exp tX}$ は計量を保存するので，測地線を測地線に写すことから，
$$\psi_{\exp tX}(\exp_p(sv))=\exp_{\psi_{\exp tX}(p)}(s(\psi_{\exp tX})_*v)$$
となる．p が $\psi_{\exp tX}$ の固定点なので，
$$\psi_{\exp tX}(\exp_p(sv))=\exp_p(s(\psi_{\exp tX})_*v)$$
を得る．そこで，v を $(d\psi_{\exp tX})_p=(\psi_{\exp tX})_*$ の固定点とすれば，
$$\psi_{\exp tX}(\exp_p(sv))=\exp_p(sv)$$

となるので，v 方向は $\psi_{\exp tX}$ に対して保存される．つまり，

$$L_{X^*}v = 0$$

を得る．逆に $L_{X^*}v = 0$ なら，v が $(d\psi_{\exp tX})_p$ の固定点である．以上から，$\ker(\nabla^2\mu^X)_p = \ker(-J_p(\nabla^2\mu^X)_p)$ は $(d\psi_{\exp tX})_p$ の固定点に一致する．また，前補題と同様にして，$\psi_{\exp tX}$ の点 p の近傍での固定点は $(d\psi_{\exp tX})_p$ の固定点に対応する．よって，

$$\ker\nabla^2\mu^X(p) = \cap_{\theta\in\mathbb{T}^X}\ker(\mathrm{id} - d\psi_\theta(p)) = T_pFix(\mathbb{T}^X) = T_pCrit(\mu^X)$$

となるのでボットモース関数である．前補題から $Crit(\mu^X) = \cap_{\theta\in\mathbb{T}^X}Fix(\psi_\theta)$ はシンプレクティック多様体である．また $\nabla^2\mu^X(p)$ は J_p と可換であるので，固有空間は J_p 不変であり，概複素構造がはいる．よって固有空間は偶数次元で，モース index も偶数である．実際

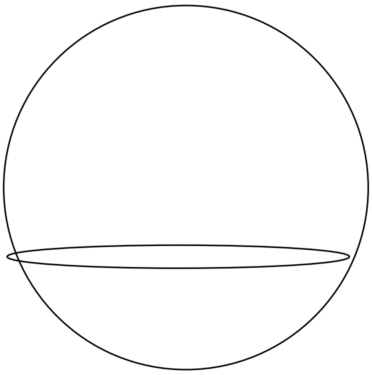
$$\begin{aligned}
&g((\nabla^2\mu^X)_p(J_pY_p), Z_p) = -g((\nabla_{J_pY_p}X^*), J_pZ_p) = -g(J_p\nabla_{Y_p}X^*, J_pZ_p)\\
=&g(\nabla_{Y_p}X^*, J_pJ_pZ_p) = -g((\nabla^2\mu^X)_p(Y_p), J_pZ_p) = g(J_p(\nabla^2\mu^X)_p(Y_p), Z_p)
\end{aligned}$$

□

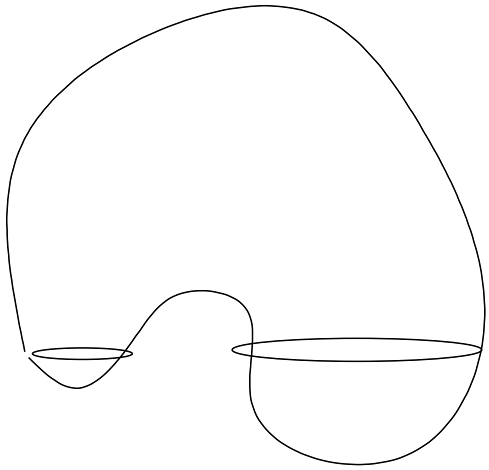
Remark 10.3.3. μ^X が指数，余指数が偶数の Bott-Morse 関数となることがわかったが，さらに，μ^X がモース関数になったとしよう．つまり，指数，余指数が偶数のモース関数である．このとき，これは完全モース関数である．つまりモース関数による Cell 分割を行ったとき，境界作用がすべてゼロになる．特に，k 次の Cell の数が k 次の Betti 数に一致する．

さて，連結性（μ のレベル集合は連結）の証明をしていく．証明はトーラス $\mathbb{T}^m$ の m に関する帰納法でおこなう．

まず $m = 1$ の場合には，モーメント写像は $1 \in \mathbb{R}$ として μ^1 はボットモース関数である．コンパクト多様体上のボットモース関数が臨界多様体上の指数および余指数が 1 でないとする．このときレベルセットは連結となることが知られている．上で述べたように，指数余指数は偶数であるので，1 ではない．よってレベルセットは連結である（証明は後述）．



連結



指数が 1 をもつので連結でない

$m-1$ まで仮定して m の場合に証明する．まず**モーメント写像が既約**であると仮定してよい．ここで $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_m)$ が既約とは $d\mu_1,\cdots,d\mu_m$ が一次独立であることである．($\sum a_i d\mu_i=0$ なら $a_i=0$ ということである．$d\mu_1(x),\cdots,d\mu_m(x)$ が一次独立とは x が regular point であること）．

Proof. μ が既約でないとする．$d\mu_i=\iota_{X_i^*}\omega$ で $\omega:\Omega^1(M)\to\mathfrak{X}(M)$ は同型写像だったので μ が既約でないなら $\{X_i^*\}_i$ は一次独立でないということである．そこで $\sum a_i X_i^*=0$ となる $a=(a_1,\cdots,a_m)\neq 0$ がとれる．$X=\sum a_i X_i\in\mathbb{R}^m$ を考える．$X^*=0$ であるので $d\mu^X=0$ であり，μ^X は定数となる．簡単のため $X_1,\cdots,X_{m-1},X$ が一次独立であるとする（$X_1^*,\cdots,X_{m-1}^*,X^*$ は一次独立でない）．このとき $X_1,\cdots,X_{m-1}$ の作用を考えるとハミルトニアン $\mathbb{T}^{m-1}$ 作用となる．実際，μ が $\mathbb{T}^{m-1}$ の作用で不変で，$d\mu_i=\iota_{X_i^*}\omega$ を満たすからである．よって帰納法の仮定からモーメント写像 $(\mu_1,\cdots,\mu_{m-1})$ のレベル集合は連結である．また μ^X が定数であることから，$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_{m-1},\mu_m)$ のレベル集合が連結となる． □

そこでモーメント写像が既約と仮定する．上の考察からわかるように，任意の $X\in\mathbb{R}^m$ に対して $\mu^X:M\to\mathbb{R}$ は局所定数ではない．$Crit(\mu^X)$ は偶数次元の proper 部分多様体であった（μ^X は局所定数ではないので，臨界多様体の次元も落ちる）．また

$$C:=\cup_{X\neq 0}Crit(\mu^X)=\cup_{0\neq X\in\mathbb{Z}^m}Crit(\mu^X)$$

となる．

Proof. $\cup_{X\neq 0}Crit(\mu^X)\supset\cup_{0\neq X\in\mathbb{Z}^m}Crit\mu^X$ は明らかである．また，$Crit(\mu^X)=\cap_{\theta\in\mathbb{T}^X}Fix(\psi_\theta)$ であった．つまり，$Crit(\mu^X)$ は部分トーラス $\mathbb{T}^X$ の固定点である．$X=\sum a_i X_i$ として，$a_i=p_i/q_i$ と有理数であるとすれば，$(\sum q_i)X\in\mathbb{Z}^n$ となるので，$\cap_{\theta\in\mathbb{T}^X}Fix(\psi_\theta)\subset\cup_{Y\in\mathbb{Z}^n}\cap_{\theta\in\mathbb{T}^Y}Fix(\psi_\theta)$ となる．また，$X=\sum a_i X_i$ の第一

成分が無理数とする．このとき，$\overline{\mathbb{T}^X}$ が大きくなるので，固定点集合は小さくなることになる．よって，$\cap_{\theta\in\mathbb{T}^X} Fix(\psi_\theta) \subset \cup_{Y\in\mathbb{Z}^n} \cap_{\theta\in\mathbb{T}^Y} Fix(\psi_\theta)$ となる．以下同様にして，任意の X に対して，$\cap_{\theta\in\mathbb{T}^X} Fix(\psi_\theta) \subset \cup_{Y\in\mathbb{Z}^n} \cap_{\theta\in\mathbb{T}^Y} Fix(\psi_\theta)$ となることがわかる． □

よって C は proper 部分多様体の可算和である．ベールのカテゴリー定理から $M \setminus C$ は M 内で稠密である．さて，$x \in C$ とは，ある $X \in Lie(\mathbb{T}^n)$ が存在して，$d\mu^X(x) = 0$ である．よって，$x \notin C$ とは，任意の $X \in Lie(\mathbb{T}^n)$ に対して，$d\mu^X \neq 0$ となる．つまり，$x \in M \setminus C$ なら，$\sum a_i d\mu_i(x) \neq 0$（$\forall a = (a_1, \cdots, a_n) \neq 0$）となる．これは，$d\mu_1(x), \cdots, d\mu_m(x)$ が一次独立ということである．つまり，$x \in \mu$ の正則点である．特に，$M \setminus C$ は開集合となる．そこで，μ **の regular 値の集合が** $\mu(M)$ **内で稠密である**ことがわかる．(実際，polytope の内部となる)．

Proof. $\eta = \mu(x) \in \mu(M)$ が regular 値で近似できればよい．x を $x_j \in M \setminus C$ で近似する．このとき $\mu(M)$ は $\mu(x_j)$ の近傍を含む（x_j regular point なので陰関数定理による）．サードの定理から μ の regular 値 $\eta_j \in \mathbb{R}^m$ で $\mu(x_j)$ に十分近いものが存在し $\mu^{-1}(\eta_j) \neq \emptyset$ となる．この η_j で η を近似することができるので regular 値は $\mu(M)$ 内で稠密である．(これは singular 値が $\mu(M)$ 内の regular 値で近似できることを言っている．サードの定理では singular 値が $\mathbb{R}^m$ 内の regular 値で近似できることであった)． □

同様の議論により，$(\eta_1, \cdots, \eta_{m-1})$ が $(\mu_1, \cdots, \mu_{m-1})$ の regular 値となるような η は $\mu(M)$ 内で稠密である．

さて，$(\eta_1, \cdots, \eta_{m-1})$ が $(\mu_1, \cdots, \mu_{m-1})$ の regular 値となるときには $\mu^{-1}(\eta)$ は連結であるということを証明する．まず，regular 値なので

$$Q = \cap_{j=1}^{m-1} \mu_j^{-1}(\eta_j)$$

は次元が $n - (m-1)$ の多様体になる．また帰納法の仮定から連結である．関数

$$\mu_m : Q \to \mathbb{R}$$

を考えると，これは指数，余指数が偶数の臨界多様体をもつボットモース関数である．

Proof. $x \in Q$ とする．$W = \mathrm{span}\{d\mu_1(x), \cdots, d\mu_{m-1}(x)\} \subset T_x^*M$ は regular から $m-1$ 次元であり，T_xQ は $W^\perp$ であり，次元は $n-(m-1)$ である．そこで，点 $x \in Q$ が $\mu_m|_Q$ の臨界点とは $d\mu_m(T_xQ) = 0$ のことであるが $d\mu_m \in W$ であること

を意味する．よって，点 $x \in Q$ が $\mu_m|_Q$ の臨界点であるための必要十分条件は実数 $\theta_1, \cdots, \theta_{m-1}$ が存在して

$$\sum_{j=1}^{m-1} \theta_j d\mu_j(x) + d\mu_m(x) = 0$$

を満たすことである．そこで $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_{m-1}, 1)$ とすれば，x が $\mu^\theta = \langle \mu, \theta \rangle : M \to \mathbb{R}$ の臨界点であることを意味する．μ^θ はボットモース関数であり，指数余指数は偶数である．x を含む臨界多様体 $C \subset M$ を考える．このとき C と Q は横断的に交わる．つまり

$$T_xM = T_xC + T_xQ.$$

これを証明するには $W^\perp + T_xC = T_xM$ の直交補空間をとって $W \cap T_x^*C = \{0\}$ を証明すればよい．$\sum_{j=1}^{m-1} \xi_j (d\mu_j)_x \in W \cap T_x^*C$ として，$\sum \xi_j (d\mu_j)_x(X) = 0$（$\forall X \in T_xC$）がすべての $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{m-1})$ に対して成立するためには，$(d\mu_j)_x$ が T_xC 上で一次独立であることが必要十分である．そこで $(d\mu_j)_x$ が T_xC 上で一次独立であることを証明しよう．まず C はシンプレクティック部分多様体であった．さらに可換群でやっているので μ^θ は μ_j はポアソン可換であるので，μ_j は C を保存する．つまり $X_j = X_{\mu_j}$ は C に接する．また，仮定から $(d\mu_j)_x$ が M 上で一次独立であったので，$(X_j)_x$ は T_xM において一次独立である．よって，C 上でも一次独立である．また C はシンプレクティック部分多様体であるので $\omega|_C : T_xC \to T_x^*C$ は同型を与える．よって $(d\mu_j)_x$ は T_xC 上でも一次独立である．以上で $T_xM = T_xC + T_xQ$ が証明できた．

そこで T_xM 内の T_xC の計量に関する直交補空間 $T_xC^\perp$ は $T_xQ \cap T_xC^\perp$ である．これより，$T_xQ \cap T_xC^\perp$ 上で μ^θ のヘシアンが非退化で，指数，余指数が偶数となる．つまり $C \cap Q$ は $\mu^\theta|_Q$ に対する臨界多様体であり，指数，余指数は偶数である．

$\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_{m-1}, 1)$ であったので，$\mu^\theta = \mu_m + \sum_{j=1}^{m-1} \theta_j \mu_j$ となる．また $Q = \cap_{j=1}^{m-1} \mu_j^{-1}(\eta_j)$ であることから，$\mu_m|_Q = \mu^\theta|_Q - \sum \eta_j \theta_j$ となる．$\sum \eta_j \theta_j$ は定数をずらしただけなので，μ^θ が指数，余指数が偶数のボットモース関数であることから，$\mu_m|_Q$ は指数，余指数が偶数のボットモース関数となる．□

そこで $(\eta_1, \cdots, \eta_{m-1})$ が $(\mu_1, \cdots, \mu_{m-1})$ の regular 値なら，$\mu_m : Q \to \mathbb{R}$ の逆像 $\mu^{-1}(\eta) = Q \cap \mu_m^{-1}(\eta_m)$ はすべての η_m に対して連結である．$(\eta_1, \cdots, \eta_{m-1})$ が $(\mu_1, \cdots, \mu_{m-1})$ の regular 値となる点は $\mu(M)$ 内で稠密であったので，そのような点列で勝手な η を近似する．このとき連続性から $\mu^{-1}(\eta)$ は連結である（下の証明をみよ）．以上で，連結性の証明が完成した．

上の証明で「ボットモース関数で指数，余指数が 1 でないなら，レベル集合が連結である」という事実を使った．これを証明しておく．

Lemma 10.3.5. M をコンパクト連結として $f : M \to \mathbb{R}$ をボットモース関数とする．さらに，指数，余指数が 1 でないとする．このときレベル集合は連結である．

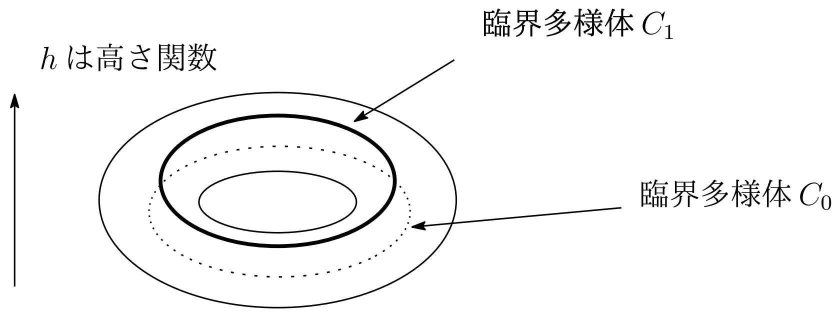
Proof. まず記号の説明．C を連結なある臨界多様体とする．このときボットモース関数の仮定から

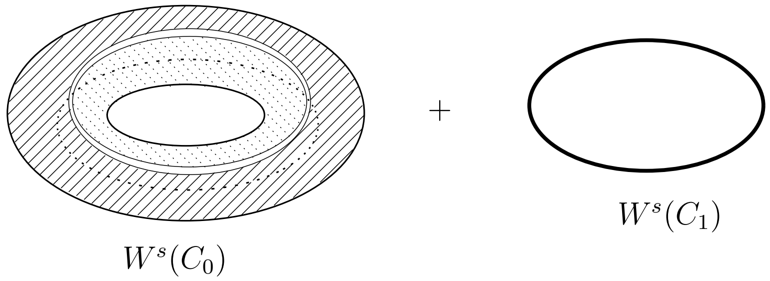
$$T_pM = T_pC \oplus E_p^+ \oplus E_p^-$$

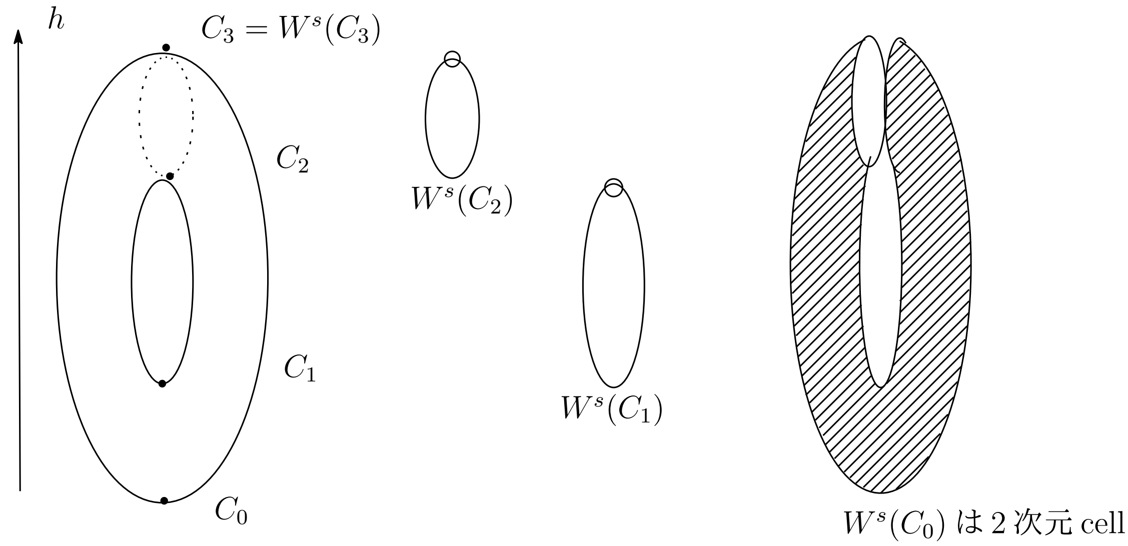
であった．ここで $E_p^\pm$ は $\nabla^2 f$ の正，負の固有空間で $n^+(C) = \dim E^+$ を**余指数**．$n^-(C) = \dim E^-$ を**指数**と呼ぶ．普通のモース理論と同様にして，f の gradient flow の積分曲線を考えたとき $t \to \infty$ で C に入る点（積分曲線の初期点）の集合を安定多様体 $W^s(C)$，$t \to -\infty$ で C に入る点の集合を $W^u(C)$ とする．このとき安定多様体 $W^s(C)$ の次元は $n^+(C) + \dim C = n - n^-(C)$ である．同様に $\dim W^u(C) = n^-(C) + \dim C$ である．このとき M の滑層 $M = \cup_C W^s(C)$（非交和）を得る．普通のモース理論なら，これはセル分割であるが，今の場合に $W^s(C)$ は cell になるとは限らない．

例えば，次のような分解である．最初の図は Bott-Morse 関数である．$W^s(C_0)$ は円環なので cell にはならないが，臨界多様体上の cell 束になっている．そして，$W^s(C_0)$ に $C_1 \times [0, 1]$ をくっつけることにより M が作れる．

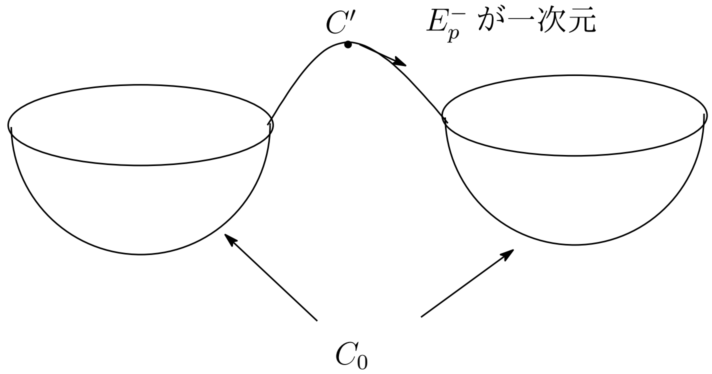
二番目の図は普通のモース関数．







さて，まず指数ゼロの連結臨界多様体が唯一つだけ存在すること（連結であること）を証明する．指数ゼロの臨界多様体 C_0 の連結成分が 2 個とする．$W^s(C_0)$ の C_0 近傍をつなげるには，指数 1 の臨界多様体 C' が必要である．つまり，C' の指数 1 なら，その E_p^- の方向が 1 次元であり，$C' \times [0,1]$ を接着することになり．その接着部分（$C' \times \{0\}$ と $C' \times \{1\}$）は連結ではないので，２個連結成分をつなぐことができる.（下図）.

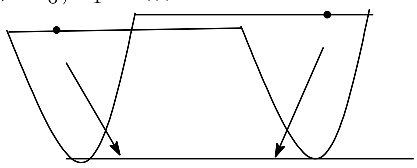


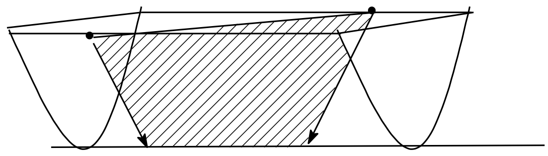
しかし，指数が 2 以上なら接着部分は連結になり，２個の連結成分をつなぐことができない（例えば，$C' \times D^2$ を $C' \times S^1$ を接着部分として貼り付けるが．$C' \times S^1$ は連結である）．つまり，M 自体が連結でなくなってしまうので，これはあり得ない．このように，指数ゼロの臨界多様体 C_0 の連結成分が 2 個であるなら，M が連結から，指数が 1 の臨界多様体が存在しなくてはならない．これは仮定に反するので，指数ゼロの臨界多様体は連結である．

同様にして，余指数がゼロの臨界多様体も連結である．

さて，臨界値を $c_0 < c_1 < \cdots < c_N$ としておく．$C_0 = f^{-1}(c_0)$，$C_N = f^{-1}(c_N)$ は連結であることは証明した．つぎに，$c_0 < c < c_1$ となる $f^{-1}(c)$ が連結である

ことを証明する．$x_0, x_1 \in f^{-1}(c)$ を C_0 内の点に flow で流す．流した 2 点は C_0 内で道で結べる．C_0 に対して，$n^+(C_0) = n - \dim C_0$ であるので 2 以上であるので，この道を flow にそって C_0 から離すことができる．そして，flow で上へ持ち上げれば，x_0, x_1 を結ぶ道になる．よって $f^{-1}(c)$ は連結．

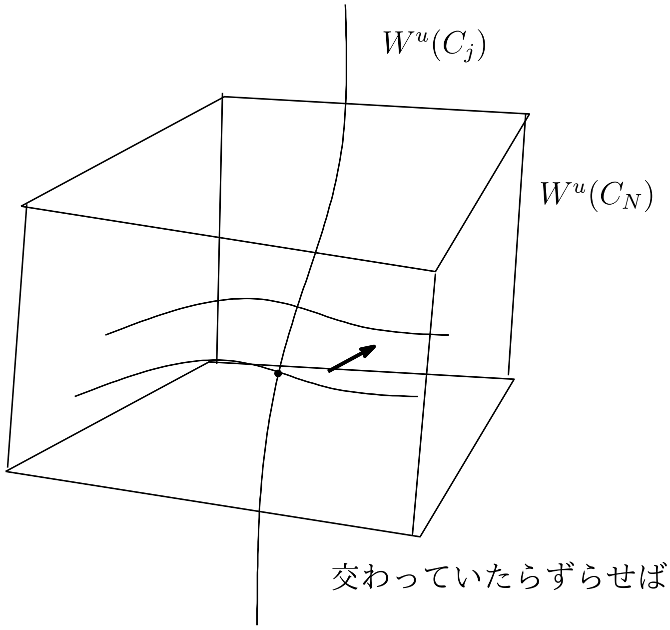




$n^+(C_0) \geq 2$ なら問題ない

$n^+(C_0) = 1$ だと駄目

次にすべての正則値 c に対して $f^{-1}(c)$ が連結であることを証明する．これを帰納法で行う．$c < c_j$（$j < N$）なる正則点に関して $f^{-1}(c)$ は連結であるとする．そこで $c_j + \epsilon$ を考えて $x_0, x_1 \in f^{-1}(c_j + \epsilon)$ とする．これらを $W^s(C_0) \cap f^{-1}(c_j + \epsilon)$ の点へ $f^{-1}(c_j + \epsilon)$ 内で結ぶ（$W^s(C_0)$ は最大 cell みたいなもので dense であるので，これは可能）．それらを flow により $f^{-1}(c_j - \epsilon)$ へ落として，その 2 点を x'_0, x'_1 とする．帰納法の仮定からそれらは道で結べる．いま，その道は $f^{-1}(c_j - \epsilon) \cap W^s(C_0)$ 内の道である．さて，不安定多様体からきまる滑層をいれる $M = \cup W^u(C_j)$．作った道は，レベル集合内にあるので，すべての不安定多様体と直交するように取ることが可能である．また，連結な $W^u(C_N)$（$\dim W^u(C_N) = n$）以外の不安定多様体は余次元は少なくとも 2 であることから．その道を $W^u(C_N) \cap f^{-1}(c_j - \epsilon)$ に含まれるようにできる．そこでこれを flow で持ち上げることができる．さらに，この道を伸ばして x_0, x_1 と結ぶことができる．よって $f^{-1}(c_j + \epsilon)$ は連結である．

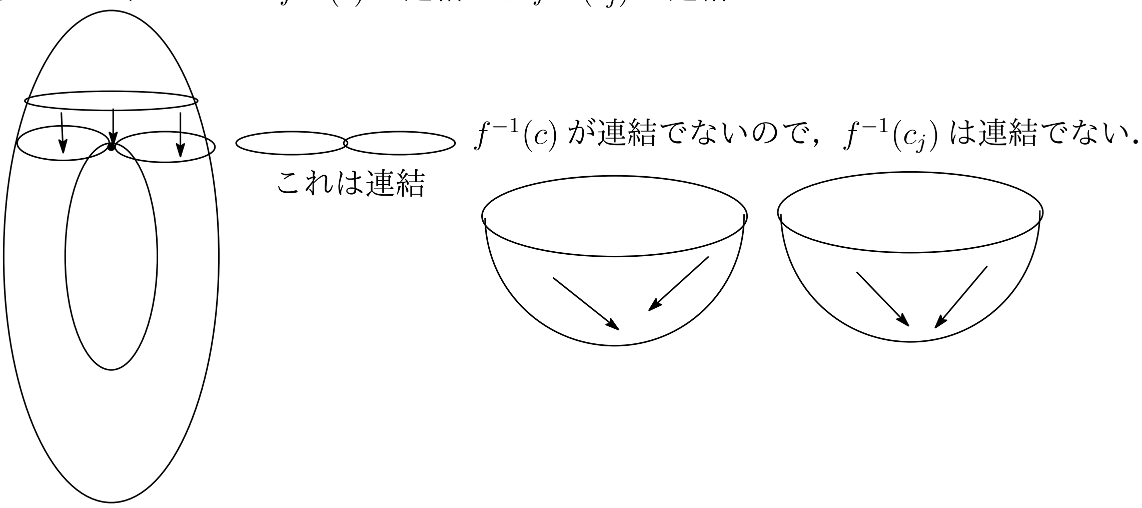


交わっていたらずらせばよい

つぎに臨界値 c_j に対して $f^{-1}(c_j)$ が連結であることを証明する．$0 < j < N$ としてよい．ある正則値で $c > c_j$ となるもので $(c_j, c]$ がすべて正則値となるものをとる．このとき

$$\psi : f^{-1}(c) \to f^{-1}(c_j)$$

を次で定義する．$\phi^t : M \to M$ を negative gradient flow とする．$x \in f^{-1}(c)$ に対して $f(\phi^t(x)) > c_j$（for all $t > 0$）のとき（つまり $x \in W^s(C_j)$ のとき）$\psi(x) := \lim_{t\to\infty} \phi^t(x)$ とする．そうでない場合には x に対してある $t(x) > 0$ で $f(\phi^{t(x)}(x)) = c_j$ となるものが取れる．そこで $\psi(x) := \phi^{t(x)}(x)$ と定義する．この ψ は f がボットモース関数なので全射である．さらに，ψ は連続である（この連続性を証明するには，$y \in C_j$ に入るときが問題である．y に収束する点列 y_j をとって（この y_j は C_J に入るとは限らない），そこから上向に flow line を作る．このとき flow line の列の部分列をとれば，y からの flow line へ収束させることができる．この事実を使えばよい）．よって $f^{-1}(c)$ が連結より $f^{-1}(c_j)$ は連結となる．



□

10.3.3　例

EXAMPLE 10.3.1. S^1 が二次元球面 $(S^2, d\theta \wedge dh)$ に回転で作用している場合．モーメント写像として高さ関数 $\mu = h$ をとる．このときハミルトン作用になることはすぐわかる．そして moment polytope は $[-1, 1]$ である．

次の 2 例は，Excercise 10.1.9 を参照．

EXAMPLE 10.3.2. S^1 が $(\mathbb{CP}^1, \omega_{FS})$ に $[z_0, z_1] \to [z_0, e^{i\theta} z_1]$ で作用しているとする．このときモーメント写像として $\mu([z_0, z_1]) = -1/2\frac{|z_1|^2}{|z|^2}$ をとればハミルトニ

アン作用である．作用の固定点は $[0,1],[1,0]$ であり，moment polytope は閉区間 $[-1/2,0]$ である．

EXAMPLE 10.3.3. $\mathbb{T}^2$ が $\mathbb{CP}^2$ に次で作用しているとする．

$$[z_0,z_1,z_2] \to [z_0, e^{i\theta_1}z_1, e^{i\theta_2}z_2]$$

このときモーメント写像として

$$\mu([z_0,z_1,z_2]) = -\frac{1}{2}(\frac{|z_1|^2}{|z|^2}, \frac{|z_2|^2}{|z|^2})$$

とすればハミルトニアン作用である．このとき固定点を調べると，$[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]$ である．そしてこの像は $(0,0),(-1/2,0),(0,-1/2)$ であるのでこれらが囲む多面体（三角形）が $\mu(M)$ である．

また，多面体 $\mu(M)$ の，頂点の逆像における stablizer $\mathbb{T}^2$ であり（固定点），辺の点の逆像上の stabilizer は S^1 であり，内部の点の逆像の stabilzer は $\{e\}$ である．つまり内部の点の逆像上では自由に作用している．

Remark 10.3.4. 凸性定理はコンパクト群 G の場合に拡張できる．G の極大トーラスを T とし，positive Weyl chamber を $\mathfrak{t}_+$ とする．このとき $\mu(M)$ と $\mathfrak{t}_+$ の交わりは convex polytope となる．

Remark 10.3.5. 前に述べたように $\mathrm{im}\ d\mu_p = \mathfrak{g}_p^0$ であるので，$(\mathrm{im}\ d\mu_p)^0 = \mathfrak{g}_p$ である．またトーラス作用で μ は保存されるのであった．よって moment polytope は逆像の点の stabilizer によって分解される（上の例を参照）．トーラスの 1 パラメータ部分群 S により固定される点全体を $W \subset M$ とする．つまり，W の各点の stabilizer が S を含んでいるとする．このときの像 $\mu(W)$ は，polytope の頂点と頂点を結ぶ hyperplane になる．これを **wall** とよぶ．**このようにトーラス作用の moment polytope は，これら wall により分割される．そして，wall たち以外の点の集合がモーメント写像の正則値の集合である．** wall は polytope の淵にある extreior wall と内部にある interior wall がある．(後で見るシンプレクティックトーリック多様体の場合には exterior wall しかない）．また，より一般に，wall の逆像は．ある 1 パラーメタ部分群の固定点になるとは限らない．example 10.3.4 を見よ．

10.3.4　トーラスの効果的作用

群 G が多様体 M に効果的（effective）に作用してるとは，

$$\cap_{p\in M} G_p = \{e\} \quad G_p = \{g \in G | gp = p\}$$

つまり．$g \neq e$ なら少なくても一点 $p \in M$ を他の点に動かす．言い換えると $\psi : G \to Diff(M)$ が単射．よって $d\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ も単射である（$d\psi$ が単射のときは概効果的という．これは $\ker \psi$ が離散部分群であるときである）．

G がトーラス群 $\mathbb{T}^m$ の場合には，効果的なら可換群なので主軌道の type は (e) であった（example 8.2.11）．よって，次元 m の軌道をもつことになる．また，主軌道の全体は稠密であった．

Corollary 10.3.6. (M, ω) をコンパクトシンプレクティック連結多様体で $\mathbb{T}^m$ がハミルトニアン作用しているとする．さらにこの作用が効果的であるとする．このとき少なくとも $m+1$ 個の固定点（トーラス作用に関する固定点）をもつ．

Proof. $\mathbb{T}^m$ の作用が効果的なので，次元 m の軌道をもち，その軌道上では $G_p = \{e\}$ である．特に $\mathfrak{g} \ni X \to X_p^* \in T_pM$ は単射である．$\{X_i\}_i$ を $\mathbb{R}^m$ の基底として，$(d\mu_i)_p = d\langle \mu, X_i \rangle_p = \iota_{(X_i^*)_p}\omega_p$ となり $\omega_p : T_pM \overset{\cong}{\to} T_p^*M$ なので，$\{(d\mu_i)_p\}_i$ は一次独立である．つまり p でモーメント写像 $\mu : M \to \mathbb{R}^m$ は submersion である．(これは，$\mathrm{im}\, d\mu_p = \mathfrak{g}_p^0$ からもわかる）．よって $\mu(p)$ は $\mu(M)$ の境界ではなく内点である．さらに $\mu(M)$ は非退化 convex polytope である（非退化とは次元が m 次元ということ）．よって $\mathbb{R}^m$ 内の非退化 convex polytope は少なくとも $m+1$ 個の頂点をもつ．それは固定点であった．

□

Theorem 10.3.7. $(M, \omega, \mathbb{T}^m, \mu)$ をハミルトニアン作用とする．$\mathbb{T}^m$ の作用が効果的なら，$\dim M \geq 2m$ である．

Proof. モーメント写像があったとき $d\mu_p : T_pM \to \mathfrak{g}^*$ という写像を得るが，このとき次が成立していた．

$$\ker d\mu_p = (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p}$$

そこで，可換群の作用の場合には μ は軌道上では定数なので $d\mu_p(X_i^*) = 0$ である．つまり，$T_p\mathcal{O} \subset (T_p\mathcal{O})^{\omega}$ が成り立つ．このようにハミルトニアン $\mathbb{T}^m$ 作用があったとき，その軌道は必ず **isotropic submanifold** である（効果的は必要ない）．また，$G_p = \{e\}$ とすれば，$\mathfrak{g}_p = 0$ であり $d\mu_p$ は全射となる．

さて，仮定から作用が効果的とすると次元 m の軌道が存在する．これが isotropic 多様体なので，$\dim \mathcal{O} = m$ とすれば，$m \leq \dim M - m$ が成立するので，$\dim M \geq 2m$ を得る． □

Remark 10.3.6. 上の証明から，次もわかる．(M, ω, G, μ) がハミルトニアン G 空間で，作用が効果的とする．このとき G の軌道がすべて isotropic なら，G は可換群である．

Proof. 仮定から，$\ker d\mu_p = (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p} \supset T_p\mathcal{O}_p$ が成立する．$X_p^*, Y_p^* \in \ker d\mu_p$ となるので，

$$p \mapsto \omega_p(X_p^*, Y_p^*)$$

は恒等的にゼロである．さらに，定理 7.1.1 で見たように，

$$d(\omega(X^*, Y^*)) = \iota_{[X^*,Y^*]}\omega$$

となる．よって，$\iota_{[X^*,Y^*]}\omega = 0$ であるので，$[X^*, Y^*] = -[X, Y]^* = 0$ を得る．さらに作用が効果的なので，$[X, Y] = 0$ となる．よって G は可換群である． □

Definition 10.3.1. **シンプレクティックトーリック多様体**とは，コンパクト連結シンプレクティック多様体 (M, ω) で効果的なハミルトニアントーラス作用で，$\dim \mathbb{T} = 1/2 \dim M$ となるものがあること．

Proposition 10.3.8. $2m$ 次元シンプレクティック多様体上に効果的なハミルトン $\mathbb{T}^m$ の作用があるとき，それはある**可積分系を与える**．

Proof. ハミルトン作用であるので，$\mu^* : \mathfrak{g} \ni X_i \to \mu_i = \langle \mu, X_i \rangle \in C^\infty(M)$ は準同形である．この関数 $\{\mu_i\}_{i=1}^m$ を考えると，可換群なので $\{\mu_i, \mu_j\} = 0$ を与える．つまり m 個の保存量をもつ．$\{d\mu_i = \iota_{X_i^*}\omega\}_i$ を考えると，これらが一次独立であることは前に述べた．また主軌道の全体は稠密なので，ほとんどすべての点で一次独立である． □

EXAMPLE 10.3.4. エルミート行列全体の空間への $U(n)$ の随伴作用

$$\xi \to A\xi A^{-1}$$

を考える．$\mathcal{H}_\lambda$ を固有値が $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$（$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$）のエルミート行列全体とする．これは，余随伴軌道とみなすことができた（歪エルミートとエルミートを $X \to iX$ で同一視している）．そして，モーメント写像として，

$$\mathcal{H}_\lambda \ni X \to X \in i\mathfrak{u}(n)^* = i\mathfrak{u}(n)$$

を考えるとハミルトニアン $U(n)$ 空間である．さらに，$\mathbb{T}^n \subset U(n)$ として，$\mathfrak{t} \to \mathfrak{u}(n)$ の随伴写像は $\mathfrak{u}(n)^* \to \mathfrak{t}^*$ となるが，これは対角成分を取るという操作である．そこで，

$$\mu : \mathcal{H}_\lambda \ni \xi \mapsto diag(\xi) \in \mathbb{R}^n$$

をモーメント写像として $(H_\lambda, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ はハミルトニアン $\mathbb{T}^n$ 空間である．ここで $diag(\xi)$ は ξ の対角成分をとる写像である．

この作用の固定点を調べてみる．簡単のため $n=3$ で考えてみよう．$\xi \in \mathcal{H}_\lambda$ に対して，トーラス作用を考えると．

$$\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{-1} & & \\ & t_2^{-1} & \\ & & t_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & t_1 t_2^{-1} h_{12} & t_1 t_3^{-1} h_{13} \\ t_2 t_1^{-1} h_{21} & h_{22} & t_2 t_3^{-1} h_{23} \\ t_3 t_1^{-1} h_{31} & t_3 t_2^{-1} h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$$

であるので，任意の $t=(t_1,t_2,t_3) \in \mathbb{T}^3$ に対して固定される点は対角行列のみである．そこで，$\mathcal{H}_\lambda$ 内で対角行列となるものは，

$$S = \{(\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, \lambda_{\sigma(3)}) | \sigma \in \mathfrak{S}_3\}$$

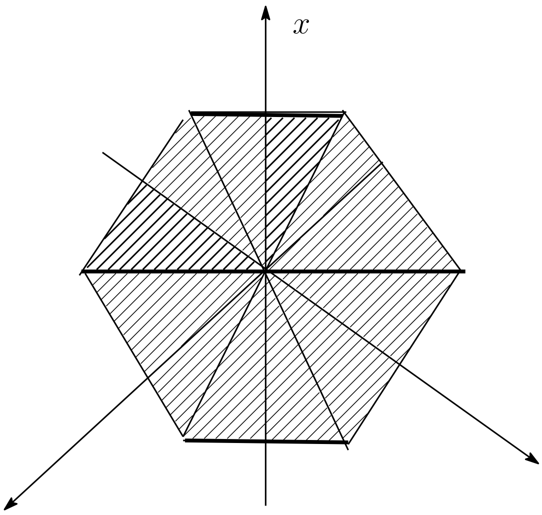
であるので，$\mu(\mathcal{H}_\lambda)$ は S を頂点とする polytope となる．つまり，**固有値 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ をもつエルミート行列の対角成分は S を頂点とする polytope 内**にある．（これは Schur の定理とよばれる古典的な定理である）

また，$h_{11}+h_{22}+h_{33} = \mathrm{tr}\, h = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ は $\mathcal{H}_\lambda$ 上で定数であるので，$\mu(\mathcal{H}_\lambda)$ は $\mathbb{R}^3$ 内の超平面上に乗っている．特に，系 10.3.6 の証明をみればわかるように，$d\mu$ は全射ではないので，$\mathbb{T}^3$ の作用は効果的作用でない．実際，$(t,t,t) \in \mathbb{T}^1 \subset \mathbb{T}^3$ は，$\mathcal{H}_\lambda$ の各点を保存する．効果的作用にするには，$\mathbb{T}^2 = SU(2) \cap \mathbb{T}^3$ を考えればよい．その場合には，$\mathfrak{t}^2 = \mathbb{R}^2$ を平面 $x+y+z = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ とみなすことになる．

1. $\lambda=(1,0,0)$ とすれば，$\mathcal{H}_\lambda = \mathbb{CP}^2$ であるが，モーメント写像による像は，$\mathbb{R}^3$ 内で，$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ が乗っている平面である．

2. $\lambda=(1,0,-1)$ とすれば，$\mathcal{H}_\lambda$ は flag 多様体（複素 $\frac{1}{2}n(n-1)=3$ 次元）であり，その像は，$(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$, $(0,-1,1)$ という頂点が張る $\mathbb{R}^3$ 内の六角形となる．部分群として $(t_1,1,1) \subset \mathbb{T}^3$ を考える．この，部分群の固定点集合は
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$$
となる．この像は，例えば一番目の行列なら，その像は $(0,h_{22},h_{33})$ かつ $0+h_{22}+h_{33}=0$ を満たす．さらに，エルミート行列であることと，固有値が $(1,0,-1)$ であることを考えれば，$h_{22}h_{33}-h_{23}h_{32} = h_{22}h_{33}-|h_{23}|^2 = -1$ を満たす．つまり，
$$h_{22}h_{33}+1 = |h_{23}|^2 \geq 0$$
を満たす．以上から，像は，
$$\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y+z=0, \quad yz+1 \geq 0\}$$

となるので，$(0,1,-1)$ と $(0,-1,1)$ を結ぶ線分である．これが interior wall の一つである．他の固定点集合も同様であり，その像は，頂点を結ぶ（interior）wall になっている．２，３番目の行列の像は exteior wall となることがわかる（下の太線が，部分群 $(t_1,1,1)$ の固定点）



また，

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & -1 \end{pmatrix}$$

の像は，頂点 $(1,0,-1)$ の逆像に入るが固定点ではないことに注意する．

この例は Schur の定理という古典的定理のシンプレクティック幾何による解釈である．次の Toeplitz-Hausdorff の定理も古典的定理であるが，シンプレクティック幾何で解釈可能である（詳しくは [Audin]）

Proposition 10.3.9. $A \in M_n(\mathbb{C})$ として，$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ として，

$$f_A : \mathcal{H}_\lambda \ni X \mapsto \mathrm{tr}\,(AX) \in \mathbb{C}$$

は $\mathbb{C}$ 内で凸集合である

10.3.5　局所凸性定理

EXAMPLE 10.3.5. $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ へトーラス $\mathbb{T}^m$ が線形に作用しているとする．つまり，表現である．トーラスは可換なので同時固有値分解して，

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{n} V_{\lambda^{(k)}}, \quad \lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \cdots, \lambda_m^{(k)}) \in \mathbb{Z}^m$$

と一次元固有空間へ分解する．ここで $V_{\lambda^{(k)}}$ へは，

$$(t_1, \cdots, t_m) \cdot v = t_1^{\lambda_1^{(k)}} \cdots t_m^{\lambda_m^{(k)}} v \quad \forall v \in V_{\lambda^{(k)}}$$

で作用している．

1. 作用が効果的であることは，$m \leq n$ であり，$\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(n)}$ は $\mathbb{Z}^m$ を生成することと同値．

   Proof. 効果的とは $\mathbb{T}^m \to GL(\mathbb{C}^n)$ が単射となることであった．これは，$g \neq e$ の作用が自明なら $g = e$ を意味する．そこで，各 $\lambda^{(k)}$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(k)} s_j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq s_j < 1 \quad (*)$$

   と仮定したとき，$s_j = 0$（ここで $t_j = e^{2\pi s_j}$（$0 \leq s_j < 1$））となることが効果的になるための条件である．つまり．

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)}, & \cdots & \lambda_m^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{(n)} & \cdots & \lambda_m^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n$$

   ならば，$s_1 = \cdots = s_m = 0$ となるための条件を考えればよい．

   上の $(*)$ は，

$$\sum_{j=1}^{m} (\sum_k \alpha_k \lambda_j^{(k)}) s_j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq s_j < 1, \quad \forall \alpha_k \in \mathbb{Z}$$

   と同値である．そこで，もし，$\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(n)}$ が $\mathbb{Z}^m$ を生成するなら，適当に α_k をとれば，$\sum \alpha_k \lambda^{(k)} = (1, 0, \cdots, 0)$ とすることができ，$s_1 = 0$ が分かる．他も同様で，$(s_1, \cdots, s_m) = (0, \cdots, 0)$ が成立する．

   逆を証明する．$\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(n)}$ は $\mathbb{Z}^m$ が $\mathbb{Z}^m$ の真の部分可群を生成するとか仮定して矛盾を導く．基底を取り換えれば，そのような群は

$$q_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus q_n\mathbb{Z}$$

   であり，少なくとも $q_n \neq 1$ としてよい．このとき．$(s_1, \cdots, s_n) = (0, \cdots, 1/q_n)$ の作用を考えると id であり．効果的であることに矛盾する．　□

2. 作用がシンプレクティックとすれば，各固有空間はシンプレクティック部分空間となる．

Proof. $\omega_0 = \frac{i}{2}\sum dz \wedge d\bar{z}$ である．$\mathbb{C}^n$ には自然な複素構造 $J = \sqrt{-1}$ を考えて，$g_0(v, w) = \omega_0(v, Jw)$ とすれば，これはユークリッド内積である．また $g_0(Jv, Jw) = \omega_0(Jv, JJw) = \omega_0(v, Jw) = g_0(v, w)$ であるので，これはエルミート内積である．さて，トーラスの作用は複素線形作用であるので J と可換であり，ω_0 を保存するので，エルミート内積を保存する変換である．言い換えると，$U(n) = SO(2n) \cap GL(n, \mathbb{C})$ であり，ユニタリ変換であり，この内積に関して，各固有空間は直交していることを証明することは容易である．そして，エルミート内積を各固有空間へ制限しても，エルミート内積である．また $J(V_\lambda) = V_\lambda$ も明らかである．よって，ω_0 を制限しても非退化である．□

3. $H^1(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}) = 0$ であるので，シンプレクティック作用はハミルトニアン作用になる．また，可換群の場合には，モーメント写像は定数ベクトルの足し算を除いて唯一つであった．上の作用を考えればわかるように，モーメント写像は

$$\begin{pmatrix} \mu_1(v) \\ \vdots \\ \mu_m(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sum \lambda_1^{(k)} \|v_{(k)}\|^2 \\ \vdots \\ -\frac{1}{2}\sum \lambda_m^{(k)} \|v_{(k)}\|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

となる．ここで，$v = v_{(1)} + \cdots + v_{(n)}$ は weight 分解である．

そこで，シンプレクティック変換を施して（今の場合にはケーラー構造も保存するユニタリ変換でよい），$(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ への線形ハミルトニアン $\mathbb{T}^m$ 作用は，作用が

$$\begin{aligned}(t_1, \cdots, t_m) \cdot (z_1, \cdots, z_n) &= (t_1^{\lambda_1^{(1)}} \cdots t_m^{\lambda_m^{(1)}} z_1, \cdots, t_1^{\lambda_1^{(n)}} \cdots t_m^{\lambda_m^{(n)}} z_n) \\ &= (t^{\lambda^{(1)}} z_1, \cdots, t^{\lambda^{(n)}} z_n)\end{aligned}$$

で，モーメント写像が

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mu_1(v) \\ \vdots \\ \mu_m(v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\{\lambda_1^{(1)}(x_1^2 + y_1^2) + \cdots + \lambda_1^{(n)}(x_n^2 + y_n^2)\} + c_1 \\ \vdots \\ -\frac{1}{2}\{\lambda_m^{(1)}(x_1^2 + y_1^2) + \cdots + \lambda_m^{(n)}(x_n^2 + y_n^2)\} + c_m \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda_m^{(1)} \end{pmatrix} - \cdots - \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2) \begin{pmatrix} \lambda_1^{(n)} \\ \vdots \\ \lambda_m^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるとしてよい．特に，このモーメント写像の像は

$$\mu(\mathbb{C}^n) = \{\sum_{i=1}^n s_i(-\lambda^{(i)}) | s_i \geq 0\} + c \quad \subset \mathbb{R}^m$$

という凸領域になる．

4. $\mathbb{T}^m$ が $\mathbb{C}^n$ へ線形効果的ハミルトニアン作用であるとすれば，モーメント写像は submersion になる．つまり $d\mu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^m$ は全射である．(今まで述べたことから明らかであろう)．

さて，ハミルトニアン G 空間 (M, ω, G, μ) を考える．x を G の固定点とする．M に G 不変計量をいれておき，$\exp_x : V = T_xM \to M$ を指数写像とする．これは G と可換であり，$V = T_xM$ へ G は線形に作用する．このとき，$0 \in V$ の十分小さい G 同変近傍 U から $x \in M$ の G 同変近傍へ exp は微分同相でうつす．さて，V 上で ω_1 を線形シンプレクティック形式とする（つまり ω_x）．また，$\omega_0 := \exp^* \omega$ という（線形とは限らない）シンプレクティック形式を考える．このとき G 同変 Darboux の定理から，$U_0 \subset V$ を十分小さくとれば，G 同変微分同相 $\phi : (U_0, 0) \to (V, 0)$ で $\phi^*\omega_1 = \omega_0$ となるものが存在する．$\mu_0 = \mu \circ \exp$ は ω_0 に対するモーメント写像となる．また，ω_1 及び G の T_xM への線形作用に付随したモーメント写像を μ_1 とする．このとき，$\mu_1 \circ \phi : U_0 \to \mathfrak{g}^*$ と $\mu_0 : U_0 \to \mathfrak{g}^*$ は定数（ベクトル）の差しかない．(同じハミルトニアン作用があった場合，二つのモーメント写像の差は $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0 \subset \mathfrak{g}^*$ であった)．このように，**固定点の近傍では線形ハミルトニアン作用とみなせる．** 特に，

Proposition 10.3.10. $U_1 = \phi(U_0)$ とする．このとき $\mu : U_0 \to \mathfrak{g}^*$ と $\mu_1 : U_1 \to \mathfrak{g}^*$ の像は平行移動の除いて一致する．

さらに，G がトーラスの場合には，先ほどの例と合わせて，つぎの局所凸性定理が成立する．

Theorem 10.3.11 (**局所凸性定理**). ハミルトニアン $\mathbb{T}^m$ 空間 $(M, \omega, \mathbb{T}^m, \mu)$ を考える．このとき，固定点 x の十分小さい近傍 U と $p = \mu(x)$ の十分小さい近傍 U' が存在して，

$$\phi(U) = U' \cap (\{\sum_{i=1}^{n} s_i(-\lambda^{(i)}) | s_i \geq 0\} + p)$$

が成立する．ここで，$\lambda^{(i)}$ は T_xM での線形 *isotropy* 表現に対する固有値（*weight*）である．

別の言い方をすれば次のようになる．

Proposition 10.3.12. ハミルトニアン $\mathbb{T}^m$ 空間 $(M, \omega, \mathbb{T}^m, \mu)$ を考えて，$x \in M$ を固定点とする．このとき，x の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ と，*weight* $\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{Z}^m$ が存在して，

$$\omega|_U = \sum dx_k \wedge dy_k$$

かつ

$$\mu|_U = \mu(x) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 + y_k)^2\lambda^{(k)} \in \mathfrak{t}^* = \mathbb{R}^m$$

となる．つまり，あるダルブー座標をとれば，局所的には，モーメント写像は線形モーメント写像と思える．

10.3.6　Delzant polytopes

シンプレクティックトーリック多様体の場合を考えてみる．つまり，コンパクト連結シンプレクティック多様体 (M,ω) で効果的なハミルトニアントーラス作用で，$\dim \mathbb{T} = 1/2 \dim M = m$ となるとする．Corollay 10.3.6 より，少なくとも $m+1$ の固定点が存在する．その固定点の一つを q とする．上の命題から，

$$\mu|_U = \mu(x) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 + y_k)^2\lambda^{(k)} \in \mathfrak{t}^* = \mathbb{R}^m$$

としてよい．さらに，効果的作用であるので，$\lambda^{(1)},\cdots,\lambda^{(n)}$ は $\mathbb{Z}^m$ を生成することになるが $n=m$ なので $\lambda^{(1)},\cdots,\lambda^{(m)}$ は $\mathbb{Z}^m$ の基底となっている．よって，上の関数表示を見ればわかるように，G の作用に関して，固定点は孤立点であることがわかる．つまり，$m+1$ 個以上の孤立固定点がある．そして，$\mu(M)$ という凸多面体は，固定点の像を結ぶんだ凸多面体であった．その凸多面体の頂点（孤立固定点の像）からは，n 個の辺が出ていて，それらは $\mu(x)+tu_i$（$u_i \in \mathbb{Z}^n$）の形をしており，$u_1,\cdots,u_n$ は $\mathbb{Z}^n$ の基底となるのである．このように，**シンプレクティックトーリック多様体のモーメント写像による像は，特別な Delzant Polytope と呼ばれる**ものになっているのである．実は，逆に Delzant polytope からシンプレクティックトーリック多様体が決まるのである．これについては section sec:12-2 で議論する．

第11章　ゲージ理論とシンプレクティック幾何

この章ではシンプレクティック幾何のゲージ理論への応用についてふれる．すなわち Atitah-Bott 理論である．リーマン面上の接続全体にはシンプレクティック構造がはいり，ゲージ群作用はシンプレクティック作用であり，モーメント写像として曲率をえれべばハミルトニアン作用となる．さらに，シンプレクティック簡約は平坦接続のモジュライ空間（有限次元 orbifold）になる．Atiyah-Bott の論文 [Atiyah-Bott(Yang-Mills)] の導入部分である．また，[Audin] などにも詳しいことが載っている．

11.1　接続

11.1.1　主束上の接続

G をリー群，B を多様体とする．

Definition 11.1.1. P が B 上の**主 G 束**とは

1. G が P に左から**自由に作用**している（この本では左作用).
2. B を作用に関する軌道空間 P/G として，$\pi : P \to B$ を射影とする．このとき**局所自明性**（G の作用も含めて）が成立する．

EXAMPLE 11.1.1. $P = S^3 \subset \mathbb{C}^2$ として

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2)$$

と作用させる．商空間を考えると $S^3/S^1 = S^2$ となり，$P = S^3$, $G = S^1$, $B = S^2$ となる主束が得られる．つまり Hopf fibration.

G の主束への作用の無限小作用を考えると

$$\mathfrak{g} \ni X \to X^* \in \mathfrak{X}(P)$$

と基本ベクトル場を得る．$\mathfrak{g}$ の基底を $X_1, \cdots, X_k$ として，対応するベクトル場を $X_1^*, \cdots, X_k^*$ とすれば，これらは各点 p において一次独立であり，これらから生成される垂直束を $V \subset TP$ とする．またこの束は $\ker d\pi$ である．

Definition 11.1.2. P 上の接続とは，

$$TP = V \oplus H$$

と splitting を与えるものである．ここで H は G 不変な TP の部分束である．これを水平束とよぶ．

11.1.2　接続と曲率

接続の定義を書き換えよう．

Definition 11.1.3. P 上の接続形式とは，P 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-form

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i \otimes X_i \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$$

で次をみたすもの

1. A は G 不変である．ここで作用は $\Omega^1(P)$ 上では P 上の G 作用から，$\mathfrak{g}$ には随伴作用で作用させる．式で書けば，

$$g \cdot A = \sum (g^{-1})^* A_i \otimes \mathrm{Ad}_g(X_i) = \sum A_i \otimes X_i$$

g^* の作用は右作用なので g^{-1} としている．

2. A は垂直的である．つまり $A(X^*) = X$ $(\forall X \in \mathfrak{g})$．

Proof. このように定めれば，

$$H = \ker A = \{v \in TP | \iota_v A = 0\}$$

により水平束が定まる．逆に，H が定まれば上をみたす 1-form で水平ベクトルに対してゼロとなるものがただ一つ定まる □

P に接続が与えられれば，次の分解を得る．

$$T^*P = V^* \oplus H^*, \quad \wedge^2 T^*P = (\wedge^2 V^*) \oplus (V^* \wedge H^*) \oplus (\wedge^2 H^*), \quad \cdots$$

よって

$$\Omega(P) = \Omega^1_v(P) \oplus \Omega^1_h(P), \quad \Omega^2(P) = \Omega^2_v(P) \oplus \Omega^2_{mix}(P) \oplus \Omega^2_h(P), \cdots$$

となる．そこで接続 $A \in \Omega^1_v \otimes \mathfrak{g}$ があれば，その微分を考えると

$$dA \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g} = (\Omega^2_v(P) \oplus \Omega^2_{mix}(P) \oplus \Omega^2_h(P)) \otimes \mathfrak{g}$$

となる．そこで $dA = dA_v + dA_{mix} + dA_h$ と三つに分解できる．このとき $dA_v(X^*, Y^*) = [X, Y]$, $dA_{mix} = 0$ がわかる．

Proof. $(dA)(V, W) = VA(W) - WA(V) - A([V, W])$ であった．また $[X^*, Y^*] = -[X, Y]^*$ となることとあわせれば $dA_v(X^*, Y^*) = [X, Y]$ がわかる．$dA_{mix}(X^*, W) = X^*A(W) - WA(X^*) - A([X^*, W]) = -A([X^*, W])$（$X \in \mathfrak{g}, W \in H$）となるが，$H$ は G 不変であるので $L_{X^*}W \in H$ である．よって，$dA_{mix} = 0$ となる． □

Definition 11.1.4. 接続の曲率とは dA の水平方向成分である．つまり

$$F_A = (dA)_h \in \Omega^2_h(P) \otimes \mathfrak{g}$$

である．また上で述べたこととあわせれば

$$F_A = dA - \frac{1}{2}[A \wedge A]$$

ともかける．また曲率がゼロとは $F_A = 0$ のこと．

Remark 11.1.1. 作用が右の場合には $[X^*, Y^*] = [X, Y]^*$ であり．$dA_v(X^*, Y^*) = -[X, Y]$ となり，$F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]$ となる．

曲率がゼロ（平坦）とは，その定義から水平分布が可積分であるということである．そこで B の単連結近傍をとれば，その上に，積分多様体がつくれる．よって適当なゲージ変換を行えば，単連結近傍上で束を $P = U \times G$ と自明化でき，接続が自明接続となる．以上から $F_A = 0$ なら U 上で g^*A がモーレルカルタン形式の引き戻しとできる．

11.2 接続空間上のシンプレクティック幾何

11.2.1 シンプレクティック形式

P を B 上主 G 束とする．A を接続形式とする．$a \in \Omega^1_h \otimes \mathfrak{g}$ が G 不変であるとすると $A + a$ も接続になる．(もとの A は $A \in \Omega^1_v \otimes \mathfrak{g}$ で G 不変なもの)．よって接続全体の空間 $\mathcal{A}$ は次の線形空間をモデルとするアフィン空間である

$$\mathfrak{a} = (\Omega^1_h \otimes \mathfrak{g})^G$$

（これは $\mathfrak{g}_P := P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ とすれば $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ のことである．$\mathfrak{g}$ に G 不変内積をいれれば，このベクトル束上には自然に内積がはいる）．

B をコンパクト向きつき２次元リーマン多様体として，P を B 上の主 G 束とする．また G はコンパクトまたは半単純とする．このとき Atiyah-Bott は $\mathcal{A}$ が無限次元のシンプレクティック多様体であることを証明した．

$\mathfrak{g}$ の G 不変内積を固定しておく．$\mathcal{A}$ の各点の接ベクトルは $\mathfrak{a}$ に入るとしてよい．$X_1, \cdots, X_k$ を $\mathfrak{g}$ の基底とし，$a, b \in \mathfrak{a} = (\Omega^1_h \otimes \mathfrak{g})^G$ を

$$a = \sum a_i \otimes X_i, \quad b = \sum b_i \otimes X_i$$

とかく．このとき

$$\omega : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \ni (a, b) \mapsto \int_B \sum_{i,j} a_i \wedge b_j \langle X_i, X_j \rangle \in \mathbb{R}$$

として，$\mathcal{A}$ 上のシンプレクティック形式が定義できる．$(\mathcal{A}, \omega)$ はシンプレクティック多様体である．

Proof. 上の定義で，基点 A にはよらないことがわかる．特に，ω は定数であり閉形式である．また明らかに交代形式である．そこで非退化性についてみればよい．$\omega(a, b) = 0$（$\forall b \in \mathfrak{a}$）とすると，$a, b \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ とみなす．例えば局所自明性から，b をある近傍 U 上で $b = b_1 \otimes X_1$ で U の外でゼロとすると $\omega(a, b) = \int_U a_1 \wedge b_1$ であり b_1 は U 上微分形式として任意に動くので a_1 は U 上でゼロとなる．このような操作を繰り返せば B コンパクトから $a = 0$ がわかる． □

11.2.2　ゲージ群の作用

P を B 上主 G 束とする．G の作用と可換な微分同相 $f : P \to P$ は自然に $f_b : B \to B$ という微分同相へおちる．

Definition 11.2.1. $f : P \to P$ 微分同相で G の作用と可換とし $f_b = \mathrm{id} : B \to B$ となるものをゲージ変換とよぶ．またそれらはゲージ群という群 $\mathcal{G}$ をなす．これは $G_P = P \times_{Ad} G$ としたときの $\Gamma(M, G_P)$ のことである．

別の言い方をしてみる．$f : P \to P$ をゲージ変換とすると関数 $\nu_f : P \to G$ で $f(p) = \nu_f(p) \cdot p$ となるものが存在する．これは $\nu_f(gp) = g\nu_f(p)g^{-1}$ を満たす．実際，$g \cdot \nu_f(p)p = g \cdot f(p) = f(gp) = \nu_f(gp)gp$ であるので．（このことから $\Gamma(M, G_P)$ に入ることもわかる．G が可換群なら，この条件は $\nu_f(gp) = \nu_f(p)$ となるので $C^\infty(M, G)$ がゲージ変換である）．また，

$$\nu_{gf}(p)p = (g \circ f)(p) = g(\nu_f(p)p) = \nu_g(\nu_f(p)p)\nu_f(p)p = \nu_f(p)\nu_g(p)p$$

となるので，

$$\nu_{gf}(p) = \nu_f(p)\nu_g(p)$$

となる．

Remark 11.2.1. 右作用で行う場合には，$f(p) = p\nu_f(p)$ として，

$$p\nu_f(p)g = f(p)g = f(pg) = pg\nu_f(pg) \Rightarrow \nu_f(pg) = g^{-1}\nu_f(p)g$$

であり，

$$p\nu_{gf}(p) = (g \circ f)(p) = g(p\nu_f(p)) = p\nu_f(p)\nu_g(p\nu_f(p)) = p\nu_g(p)\nu_f(p)$$

となるので，$\nu_{gf}(p) = \nu_g(p)\nu_f(p)$ となる．

さて，$f \in \mathcal{G}$ とすると，これは P の微分同相で G 不変，$f_b = \mathrm{id}$ であるので接続 $TP = V \oplus H$ を別の接続 $TP = V \oplus H_f$ へと移すので，$\mathcal{A}$ 上に作用する．実際，A という P 上 $\mathfrak{g}$ 値 1-form を引き戻せば f^*A という新しい接続を得る．実際，

Proposition 11.2.1. 接続 A を f でゲージ変換したとき，次が成立．

$$(f^*A)_p = \mathrm{Ad}(\nu_f(p))A_p + (d\nu_f)_p\nu_f^{-1}(p)$$

となる（$\nu_f^{-1}(p)$ は $\nu_f(p) \in G$ の逆元）．ここで，$(d\nu)_p\nu^{-1}(p)$ の意味は，

$$T_pP \ni X \xrightarrow{d\nu_f} (d\nu_f)_p(X) \in T_{f(p)}G \xrightarrow{\nu_f^{-1}(p)} \mathfrak{g}$$

また，曲率は次のように変換される：

$$F_{f^*A} = f^*F_A = \mathrm{Ad}(\mu_f)F_A$$

Proof. まずは，ちゃんと作用となっていることを確かめてみる．

$$\begin{aligned}(gf)^*A =&\mathrm{Ad}(\nu_{gf})A + d(\nu_{gf})\nu_{gf}^{-1} = \mathrm{Ad}(\nu_f\nu_g)A + d(\nu_f\nu_g)\nu_g^{-1}\nu_f^{-1}\\ =&\mathrm{Ad}(\nu_f)\mathrm{Ad}(\nu_g)A + d\nu_f\nu_f^{-1} + \nu_f(d\nu_g\nu_g^{-1})\nu_f^{-1}\\ =&f^*(\mathrm{Ad}(\nu_g)A + d\nu_g\nu_g^{-1}) = f^*g^*A\end{aligned}$$

となっている．さて，$\gamma(t)$ を点 $\gamma(0) = p$，$\gamma'(0) = X_p$ となる接ベクトルとする．

$$\begin{aligned}f_*X_p &= \frac{d}{dt}f(\gamma(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\nu_f(\gamma(t))\gamma(t)|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}\nu_f(\gamma(t))\nu_f(p)^{-1}f(p)|_{t=0} + \frac{d}{dt}\nu_f(p)\gamma(t)|_{t=0}\end{aligned}$$

となる．第一項目は，$\frac{d}{dt}\nu_f(\gamma(t))\nu_f(p)^{-1}|_{t=0} \in \mathfrak{g}$ であり，

$$(d\nu_f)\nu_f^{-1}(p) : T_pP \ni X \mapsto Y = (d\nu_f)_p(X_p)\nu_f(p)^{-1} \in \mathfrak{g}$$

という写像を考えて，それを $f(p)$ で考えている．つまり，$Y^*_{f(p)}$ のことである（基本ベクトル場の定義は $\frac{d}{dt}(\exp tY)p|_{t=0}$ であるが，G 内の曲線 $\exp tY$ は $c'(0) = Y$ となる曲線なら何でもよいので，$\frac{d}{dt}c(t)p|_{t=0} = Y^*_p$ である）．そこで，

$$A_{f(p)}(\frac{d}{dt}\nu_f(\gamma(t))\nu_f(p)^{-1}f(p)|_{t=0}) = (d\nu_f)_p(X_p)\nu_f(p)^{-1}$$

また，第二項目は G 不変性から，

$$A_{f(p)}(\frac{d}{dt}\nu_f(p)\gamma(t)|_{t=0}) = A_{f(p)}((\nu_f)_*X_p) = \mathrm{Ad}(\nu_f(p))A(X_p)$$

となる．以上から，

$$f^*A = \mathrm{Ad}(\nu_f)A_p + (d\nu_f)_p\nu_f^{-1}(p)$$

次に，曲率を考える．ν_f も f で書くことにする．このとき，

$$\begin{aligned}
&d(fAf^{-1} + dff^{-1}) - (fAf^{-1} + dff^{-1}) \wedge (fAf^{-1} + dff^{-1}) \\
=&(df)Af^{-1} + fdAf^{-1} - fAf^{-1}dff^{-1} \\
&- fA \wedge Af^{-1} - dfAf^{-1} - fAf^{-1}dff^{-1} - dff^{-1} \wedge dff^{-1} \\
=&f(F_A)f^{-1}
\end{aligned}$$

□

Remark 11.2.2. これは，通常のものと作用が逆であることに注意する．右作用で行う場合には

$$f^*A = \mathrm{Ad}(f^{-1})A + f^{-1}df, \quad f^*F_A = F_{f^*A} = f^{-1}F_Af$$

という変換則になる．実際，

$$\begin{aligned}
f_*X_p &= \frac{d}{dt}f(\gamma(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(t)\nu_f(\gamma(t))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}f(p)\nu_f(p)^{-1}\nu_f(\gamma(t))|_{t=0} + \frac{d}{dt}\gamma(t)\nu_f(p)|_{t=0}
\end{aligned}$$

となることからわかる．

Lemma 11.2.2. $\mathcal{A}$ へのゲージ群の作用はシンプレクティック作用である．

Proof. ゲージ変換 $f: P \to P$ に対応する関数 $\nu_f: P \to G$ も $f: P \to G$ と書くことにする．引き戻しで定義したので，作用を左作用にするには，$\mathcal{A}$ へのゲージ群の作用は

$$(f, A) \mapsto f \cdot A = (f^{-1})^* A = \mathrm{Ad}(f^{-1})A + df^{-1} f = \mathrm{Ad}(f^{-1})A - f^{-1}df$$

と作用する．$A + ta$ は A を通り接ベクトルが a の直線である．これをゲージ群で移して微分すれば，$(df)_A : T_A\mathcal{A} \to T_{f\cdot A}\mathcal{A}$ がもとまる．

$$\frac{d}{dt}(f^{-1})^*(A + ta) = \frac{d}{dt}(f^{-1}Af + tf^{-1}af - f^{-1}df) = f^{-1}af$$

となる．

$$df_A : T_A\mathcal{A} \ni a \mapsto f^{-1}af \in T_{f\cdot A}\mathcal{A}$$

である．シンプレクティック形式 ω の定義における $\mathfrak{g}$ 上の G 不変内積（随伴作用で不変）を入れているので，上のゲージ変換の作用で ω は不変である． □

さらに**曲率をモーメント写像としてハミルトン作用**になる（後述）．

$$\mu : \mathcal{A} \ni A \mapsto F_A \in (\Omega_h^2(P) \otimes \mathfrak{g})^G$$

がある．特に，$\mu^{-1}(0)$ **は平坦接続の全体であり，**$\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}$ **は平坦接続のゲージ同値類全体**となる．つまり**平坦接続のモジュライ空間**である．さらに，これは**有限次元のシンプレクティック orbifold** となる．

次の subsection で $G = S^1$ の場合に確かめていく．一般の場合もほぼ同様である（後述，詳しくは [深谷] の本など）．主束が自明束の場合には平坦接続のモジュライ空間は $\mathrm{Hom}(\pi_1(B), G)/G$ と同一視できる（ここで G の作用は共役作用からみちびかれるもの）．**とくに，有限次元である．**ただし G **の作用が不動点をもてば特異点**がでる．次元は $(2g-2)\dim G$ である（例えば指数定理を使えばわかる）．ここで g はリーマン面の genus である．

Proposition 11.2.3. **平坦接続のゲージ同値類と** $\mathrm{Hom}(\pi_1(B), G)/G$ **は同一視できる．**

Proof. 平坦接続を考えたとき $\gamma, \gamma' : [a, b] \to B$ を点 p, q を結ぶ曲線とする．このときこれらがホモトピックなら二つの定める平行移動は一致する．つまり p 上のファイバーから q 上のファイバーへの平行移動による同型写像が一致する．実際，$\gamma'^{-1} \circ \gamma$ を考えるとループになる．ホモトピックなので γ, γ' を含む単連結なところで，平坦接続を自明接続にできる．そこでホロノミーを考えると，これは $\mathrm{id} \in G$ である．よって平行移動が一致する．

さて，底空間 B 上のある点 p を固定し，その点のファイバー上の点を基点として，ホロノミー群を考える．上での述べたことから準同形 $\pi_1(B) \to G$ を得る．ゲージ群同値なものを考えると，それは p 上のファイバー上の基点を変えることであるが，これは共役な群になるのであった．

逆に $\tau : \pi_1(B) \to G$ があるとする．このとき B の被覆空間 $\tilde{B}$ を考えると，これは $\pi_1(B)$ を構造群とする主束とみなせる．ここには唯一つの接続が入る．実際 $T_x\tilde{B}$ を水平方向する接続である．もちろん曲率はゼロ．さて $P = \tilde{B} \times_\tau G$ であり，ここに誘導接続をいれれば，曲率はゼロでホロノミー群がもとの準同形 τ を導く． □

EXAMPLE 11.2.1. 直線束の場合を考える．つまり $G = U(1)$ の場合．このとき平坦接続のゲージ同値類は

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(M), U(1))/U(1) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M), U(1)) = H^1(M, U(1)) = H^1(M, \mathbb{R})/H^1(M, \mathbb{Z})$$

となり，トーラスになる．

11.3　リーマン面上の主 $U(1)$ 束

11.3.1　ハミルトニアン作用

コンパクトリーマン面 B 上の S^1 束 P を考える．v を $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ の 1 に対応する P 上基本ベクトル場とする．S^1 が可換なので，P 上の接続形式は，P 上の $\mathbb{R}$ 値微分形式で

$$L_v A = 0, \quad A(v) = 1$$

となるものである．特別な接続 A_0 を固定すれば，他の接続は $A_0 + a$ の形である．ここで $a \in (\Omega^1_h(P))^{U(1)} = \Omega^1(B)$ である．そこでシンプレクティック形式は

$$\omega : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \ni (a, b) \mapsto \int_B a \wedge b \in \mathbb{R}.$$

またゲージ変換群は $\mathcal{G} = Map(B, S^1)$ であり P への作用は

$$\psi : \mathcal{G} \ni h \mapsto \psi_h \in Diff(P), \quad \psi_h(p) = h(\pi(p)) \cdot p$$

である（つまり各ファイバーで点ごとに掛け算する）．またゲージ群のリー環は

$$Lie\mathcal{G} = Map(B, \mathbb{R}) = C^\infty(B)$$

であり，その双対空間は

$$(Lie\mathcal{G})^* = \Omega^2(B)$$

である．ここで pairing は

$$C^\infty(B)\times\Omega^2(B)\ni(h,\beta)\mapsto\int_B h\beta$$

となる（これは非退化であるで互いに双対空間である）．さらにゲージ群の $\mathcal{A}$ への作用は

$$\mathcal{G}\ni h(x)=e^{i\theta(x)}\mapsto(A\mapsto A-\pi^*d\theta)\in Diff(\mathcal{A}).$$

（$h\cdot A=\mathrm{Ad}(h^{-1})A-h^{-1}dh$ で作用させるので，$-h^{-1}dh=-e^{-i\theta}de^{i\theta}=-id\theta$ となる．あとは $\mathfrak{u}(1)\cong\mathbb{R}$ を使うと，上のようになる）よって，ゲージ群の $\mathcal{A}$ への無限小作用は

$$d\psi: Lie\mathcal{G}\ni X\mapsto X^*=-dX\in\mathfrak{X}(\mathcal{A})$$

である．ここで $X\in Lie\mathcal{G}$ は B 上の $\mathbb{R}$ 値関数であったので，それを $X(x)$ とすれば $e^{itX(x)}\in\mathcal{G}$ であり，先ほどみた作用を t について微分すれば $-dX$ となる．ここで d は B 上の微分であり，$dX\in\Omega^1(B)=\mathfrak{a}=T_A\mathcal{A}$ である．

このシンプレクティック作用がハミルトニアン作用であり，モーメント写像が

$$\mu:\mathcal{A}\ni A\mapsto F_A\in\Omega^2(B)=(Lie\mathcal{G})^*$$

であることを確かめよう．

Proof. まず，シンプレクティック多様体 $\mathcal{A}$ へのゲージ群の作用がシンプレクティック作用であることはすでに証明した．今回の場合には

$$(dh)_A: T_A\mathcal{A}\ni a\mapsto a\in T_{h\cdot A}\mathcal{A}$$

であることに注意.

さて，曲率 F_A は，S^1 が可換なので $F_A=dA\in(\Omega_h^2(P))^G=\Omega^2(B)$ である．またゲージ群 $\mathcal{G}$ は S^1 が可換なので可換群となるので，モーメント写像の 2 番目の条件は μ が $\mathcal{G}$ 不変であることをみればよい．$\mathcal{G}$ の $\mathcal{A}$ への作用は $A\mapsto A-\pi^*d\theta$ であった．この微分をとると $F_A=F_{A-\pi^*d\theta}$ であるので，$\mathcal{G}$ 不変である．

そこで $d\mu^X=\iota_{X^*}\omega$（$X\in Lie\mathcal{G}=C^\infty(B)$）を確かめればよい．まず μ^X は $\mu:\mathcal{A}\to\Omega^2(B)=Lie\mathcal{G}^*$ と $X\in Lie\mathcal{G}=C^\infty(B)$ の pairing であるので

$$\mu^X:\mathcal{A}\ni A\mapsto\int_B X\cdot dA\in\mathbb{R}$$

となる．これを微分して $d\mu^X$ を作る際には，$A=A+ta$ として微分すればよいので，

$$d\mu^X:\mathfrak{a}=\Omega^1(B)\ni a\mapsto\int_B X\cdot da\in\mathbb{R}$$

となる．

一方で，$X^* = -dX$ であったので，ストークスの定理を使って

$$\omega(X^*, a) = \int_B X^* \wedge a = -\int_B dX \wedge a = \int_B X da$$

となる．よって μ がモーメント写像であることが証明できた． $\square$

11.3.2　Picard 多様体

上のリーマン面上の主 $U(1)$ 束の平坦接続の空間は，代数幾何での **Jacobi 多様体**である．

まず Picard 多様体について説明しよう．M を複素多様体とする．M 上の正則直線束の同型類を考える．そこで，

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{O}_M^* \to 0$$

という層の完全系列から

$$H^0(M, \mathcal{O}_M^*) \to H^1(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} H^1(M, \mathcal{O}_M) \to H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \to H^2(M, \mathbb{Z})$$

を得る．このとき**正則直線束の同型類は** $H^1(M, \mathcal{O}_M^*)$ **であり，これを Picard 群** $Pic(M)$ **という**．また $H^2(M, \mathbb{Z})$ への写像は第一チャーン類をとる $c_1(L)$ である．さて，**Picard 多様体とは**

$$Pic^0(M) = \{L \in Pic(M) | c_1(L) = 0\}$$

である．完全系列から

$$Pic(M)/Pic^0(M) \to H^2(M, \mathbb{Z})$$

という単射と

$$Pic^0(M) = H^1(M, \mathcal{O}_M)/j(H^1(M, \mathbb{Z}))$$

を得る．

Lemma 11.3.1. M がコンパクトなら j は単射であり，

$$Pic^0(M) = H^1(M, \mathcal{O}_M)/H^1(M, \mathbb{Z})$$

となる．

Proof. 連結準同形 $\delta: H^0(M,\mathcal{O}_M^*) \to H^1(M,\mathbb{Z})$ がゼロになることを証明すればよい．$H^0(M,\mathcal{O}_M^*) = \mathbb{C}^*$ である．$H^0(M,\mathcal{O}_M) = \mathbb{C} \to H^0(M,\mathcal{O}_M^*)$ は全射なので．$\delta = 0$ である． □

さらに M がコンパクトケーラー多様体の場合を考える．このとき

$$H^1(M,\mathcal{O}_M) \cong H^{0,1}(M,\mathbb{C}) = \mathbb{H}^{0,1} = \bar{\mathbb{H}}^{1,0}$$

ここで $\mathbb{H}^{1,0}$ は調和 $(1,0)$ 形式であるがこれは正則 1-from である．さらに $j(H^1(M,\mathbb{Z})) \subset H^1(M,\mathcal{O}_M) \cong \mathbb{H}^{0,1}$ は $\bar{\phi} \in \mathbb{H}^{0,1}$ に対して，

$$\int_\gamma \phi + \bar{\phi} \in \mathbb{Z} \quad \forall \text{ 1-dim cycle } \lambda$$

となるもの全体である．また同型 $r: \mathbb{H}^{0,1} \ni \bar{\phi} \mapsto \phi + \bar{\phi} \in H^1(M,\mathbb{R}) = \mathbb{H}^1$ を考えれば，$r(j(H^1(M,\mathbb{Z})))$ は $H^1(M,\mathbb{R})$ の格子群であり，$b_1 = b_1(M)$ 個の一次独立なベクトルで生成される．以上から

Proposition 11.3.2. **M がコンパクトケーラー多様体なら *Picard* 多様体 $Pic^0(M)$ は複素 $b_1/2$ 次元のトーラスである．**

$$Pic^0(M) = H^1(M,\mathcal{O}_M)/H^1(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{H}^{0,1}/\pi^{0,1}(H^1(M,\mathbb{Z})).$$

さらに

$$Pic(M) \ni L \mapsto c_1(L) \in H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$$

に対して，同型

$$Pic(M)/Pic^0(M) \cong H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$$

を得る（$rank H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$ を *Picard* 数という）．

Proof. M がコンパクトケーラー多様体として L を複素直線束とすればエルミート構造をとれば，$c_1(L) \in H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$ である．逆を証明する．$c \in H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$ とする．完全系列

$$H^1(M,\mathcal{O}_M^*) \to H^2(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{j} H^2(M,\mathcal{O}_M)$$

を考えると $H^2(M,\mathcal{O}_M) \cong H^{0,2}(M,\mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^{0,2}$ である．j は $j: H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^2(M,\mathbb{C}) = \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^{0,2}$ である．よって $j(c) = 0$ であるので $H^1(M,\mathcal{O}_M^*)$ の元をとってこれる． □

リーマン面の場合の Picard 多様体 $Pic^0(M)$ を **Jacobi** 多様体とよぶ．このとき

$$0 \to Pic^0(M) = \mathbb{T}^{2g} \to Pic(M) \to H^2(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \to 0$$

となる．つまりリーマン面上の**正則直線束はそのチャーン類（この場合は次数ともいう）と正則構造のモジュライ** $Pic^0(M)$ **できまる**ことになる．リーマン面の場合にはホモロジーで作った Albanese 多様体（今の場合には $H_{1,0}/\pi_{1,0}(H_1(M,\mathbb{Z}))$ である）と同型になる．対応は非退化写像

$$H^1(M,\mathbb{C}) \times H^1(M,\mathbb{C}) \ni (\omega,\phi) \mapsto \int_M (\omega \wedge \phi) \in \mathbb{C}$$

により H^1 と H_1 を同一視することによる．

以上で Jacobi 多様体の説明を終えるが，Jacobi 多様体に対しては Abel の定理や Jacobi の逆問題などの様々の理論がある．

11.3.3　正則ベクトル束と接続

接続により直線束の正則構造を記述したい．そこで複素多様体上の複素ベクトル束の正則構造に対しての一般論を与える.（主束の G の作用は通常のように右作用で考えることにする）.

$E \to M$ を複素ベクトル束とする（正則構造は入れていない）.

$$L : \Omega^{0,0}(E) \to \Omega^{0,1}(E)$$

が**コーシーリーマン作用素**とは一階微分作用素であり，

$$L(fu) = \bar{\partial} f \otimes u + fLu, \quad \forall f \in C^\infty(M), \quad u \in \Omega^{0,0}(E)$$

を満たすものである．この全体を $\mathbb{CR}(E)$ とする．

また E 上のエルミート計量 h を固定して h を保つ接続全体を $\mathcal{A}_h$ と書く．これは

$$\bar{\partial}_A = \pi^{0,1} \circ \nabla^A : \Omega^{0,0}(E) \to \Omega^{0,1}(E)$$

により**コーシーリーマン作用素を定義する**．よって

$$\mathcal{A}_h \ni A \mapsto \bar{\partial}_A \in \mathbb{CR}(E)$$

という写像を得る．これは**全単射**である．

Proof. 単射性を証明する．$\bar{\partial}_A = \bar{\partial}_B$ とすると，

$$\delta = B - A$$

は E の歪エルミート endomorphism で $\pi^{0,1}(\delta) = \delta^{0,1} = 0$ となるものである．$\pi^{0,1}$ の定義から

$$\delta^{0,1}(X) = \frac{1}{2}(\delta(X) + i\delta(JX)) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

となる．ここで $\delta(X)$ は歪エルミートである．よって $i\delta(JX)$ はエルミートである．そこで，$\delta^{0,1} = 0$ であるので，$\delta(X) = 0$ となる．

次に，全射を証明する．あるエルミート接続 A_0 を固定して対応する CR 作用素を L_0 とする．このとき $L \in \mathbb{CR}(E)$ に対して CR 作用素の定義から

$$\beta = L - L_0 \in \Omega^{0,1}(\mathrm{End}(E))$$

となる．そこで E の歪エルミート endomorphism δ で，$\delta^{0,1} = \beta$ となるものをとれば $A_0 + \delta$ に対する CR 作用素が L になる．そこで

$$\delta(X) = \beta(X) - \beta(X)^*$$

とすればよい．δ は歪エルミートであり，$\delta^{0,1} = \beta$ となる． □

また，接続と同様にして L に対して

$$L : \Omega^{p,a}(E) \ni \alpha \otimes u \mapsto \bar{\partial}\alpha \otimes u + (-1)^{p+q}\alpha \wedge Lu \in \Omega^{p,q+1}(E), \qquad \alpha \in \Omega^{p,q}(M),\ u \in \Omega^{0,0}(E)$$

と拡張しておく．

Definition 11.3.1. 複素ベクトル束 E が正則ベクトル束とは適当な局所自明化 $\Psi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to \mathbb{C}^r$ をとると，推移関数 $g_{\beta\alpha} = \Psi_\beta\Psi_\alpha^{-1} : U_{\alpha\beta} \to GL(r,\mathbb{C})$ 正則関数となるものである．またこれは，E が複素多様体で $\pi : E \to M$ が正則であるということと同値である．

さらに，正則構造が $\Psi = (\Psi_\alpha, g_{\beta\alpha} = \Psi_\beta\Psi_\alpha^{-1})$ と $\Phi = (\Phi_\alpha, h_{\beta\alpha} = \Phi_\beta\Phi_\alpha^{-1})$ が同型とは，正則関数 $T_\alpha : U_\alpha \to GL(r,\mathbb{C})$ で $h_{\beta\alpha} = T_\beta g_{\beta\alpha} T_\alpha^{-1}$ となることである．さらに，**ゲージ同値なものも同型と定義する．E 上の正則構造全体を $\mathbb{HOL}(E)$ と書く．**

EXAMPLE 11.3.1. 正則直線束の同型類は $H^1(M,\mathcal{O}^*)$ の元として定まるのであった．これはゼロでない正則関数の族 $\{g_{\beta\alpha}\}$ で cocycle 条件 $\delta(g) = 0$ を満たすものである．これを与える正則局所自明化 $\{\Psi_\alpha\}_\alpha$ があったとする．つまり $g_{\beta\alpha} = \Psi_\beta\Psi_\alpha^{-1}$ である．C^∞ のゲージ変換をとってくる．これは $f : M \to \mathbb{C}^*$ という滑らかな関数である．$f_\alpha = f|_{U_\alpha}$ として，自明化を $\Phi_\alpha = f_\alpha^{-1}\Psi_\alpha$ と変化させる．f_α は正則関数ではないが，推移関数を考えると $h_{\beta\alpha} = \Phi_\beta\Phi_\alpha^{-1} = f\Psi_\beta\Psi_\alpha^{-1}f^{-1} = g_{\beta\alpha}$ となるので，同じ cocycle を与える．

EXAMPLE 11.3.2. ベクトル束のゲージ変換 $f : E \to E$ を考えると，$E|_{U_\alpha}$ 上の左辺の自明化を Ψ_α，右辺の自明化を Φ_α とし，$h_{\beta\alpha} = \Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}$，$g_{\beta\alpha} = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}$ とする．この自明化に対して，$\{f_\alpha\}_\alpha$ でゲージ変換が与えられとする．つまり，$f_\alpha = \Phi_\alpha \circ f \circ \Psi_\alpha^{-1}$ である．このとき，

$$f_\beta = \Phi_\beta \circ f \circ \Psi_\beta^{-1} = g_{\beta\alpha}\Phi_\alpha \circ f \circ \Psi_\alpha \circ h_{\beta\alpha}^{-1} = g_{\beta\alpha} f_\alpha h_{\beta\alpha}^{-1}$$

となっている．右辺の E に正則ベクトル束の構造があり，$g_{\beta\alpha}$ が正則関数であるとする．しかし，$h_{\beta\alpha}$ は正則でないかもしれない．しかし，自明化を $f_\alpha \Psi_\alpha$ と変化させれば，

$$f_\beta \Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} f_\beta = f_\beta h_{\beta\alpha} f_\alpha^{-1} = g_{\beta\alpha} f_\alpha h_{\beta\alpha}^{-1} h_{\beta\alpha} f_\alpha^{-1} = g_{\beta\alpha}$$

となるので，正則ベクトル束の構造が入ることになる．つまり $f : E \to E$ をベクトル束の同型写像としたとき E に入った正則構造をゲージ変換で引き戻したものも同じ正則構造とみなすわけである．言い換えるとと $\mathbb{HOL}(E)$ **とは** C^∞ **ベクトル束の同型類** $[E]$ **にどのくらい正則ベクトル束構造が入るかのモジュライ**のこと．

一つの正則構造 Ψ をとってくる．このとき U_α 上で正則フレームをとって，$u = \sum f_i u_i^\alpha$ として

$$\bar\partial_\alpha u = \sum (\bar\partial f_i) \otimes u_i^\alpha$$

とすれば，$U_{\alpha\beta}$ 上でも $g_{\beta\alpha}$ が正則であることから $\bar\partial_\beta = \bar\partial_\alpha$ となるので，コーシーリーマン作用素 $\bar\partial_\Psi$ が定まる．さらに，これは $\bar\partial_\Psi \circ \bar\partial_\Psi = 0$ を満たすことが簡単な計算でわかる．

Definition 11.3.2. CR 作用素 L が $L^2 = 0$ を満たすとき**可積分**とよび，その全体を $\mathbb{CR}_i(E)$ と書く．正則構造があれば自然に可積分な CR 作用素を得る．

同値な正則構造 Ψ, Φ があった場合には，これらをうつす変換 $T_\alpha : U_\alpha \to GL(r, \mathbb{C})$ は正則関数であったことから $\bar\partial_\Psi = \bar\partial_\Phi$ を得る．つまり同値な正則構造は同じ CR 作用素を定義する．

またゲージ変換で移した場合を考える．$T_\alpha : U_\alpha \to GL(r, \mathbb{C})$ で $T_\beta = g_{\beta\alpha} T_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1}$ を満たすものであった．このとき，局所自明化は $\Phi_\alpha = T_\alpha^{-1}\Psi_\alpha$ と変化する．ゲージ変換したときの共変微分の関係式は $\nabla^{g^*A} g^* s = g^*(\nabla^A s)$ であった．これと同様にして，

$$\bar\partial_{T\cdot\Phi} = T\bar\partial_\Phi T^{-1}$$

と変化する．よって，$\mathbb{CR}_i(E)$ にゲージ群 $\Gamma(M, P \times_{\mathrm{Ad}} G)$ を上のように共役で作用させれば，

$$\mathbb{HOL}(E) \to \mathbb{CR}_i(E)/\mathcal{G}$$

という well-defined な写像を得る．実はこれは全単射である．

Proposition 11.3.3.

$$\mathbb{HOL}(E) \ni \Psi \mapsto \bar{\partial}_\Psi \in \mathbb{CR}_i(E)/\mathcal{G}$$

は全単射である．

Proof. よく知られているように $L^2 = 0$ となる CR 作用素があったなら，E に $L = \bar{\partial}_\Psi$ となる正則ベクトル束の構造 Ψ が唯一つ入る（ゲージ同値は込めないで）．そこで両方ともゲージ同値で割ればよい．よって全単射である． □

さて，$\mathcal{A}_h$ をエルミート接続の全体としていた．そして

$$\mathcal{A}_h \ni A \mapsto \bar{\partial}_A \in \mathbb{CR}(E)$$

であった．$\mathbb{CR}_i(E)$ の逆像はエルミート接続で，その曲率が $(1,1)$ となるものである．その全体を $\mathcal{A}_h^{1,1}$ とする．

Proof. $A \in \mathcal{A}_h^{1,1}$ とする．このとき $0 = F_A^{0,2} = \bar{\partial}_A^2$ となるので，$\mathbb{CR}_i(E)$ に入る．逆に，$\mathbb{CR}_i(E)$ に入るエルミート接続 A があれば，F_A は歪エルミートであり，$F_A^{0,2} = \bar{\partial}_A^2 = 0$ であることから $F_A^{2,0} = -(F_A^{0,2})^* = 0$ となり $(1,1)$ 部分しかない． □

$\mathcal{A}_h^{1,1}$ にゲージ変換を作用させる．しかし，われわれのゲージ群はユニタリゲージ群とは限っていないことに注意する．そこで次のようにすればよい．上の同一視で $L = \bar{\partial}_A$ として TLT^{-1} がゲージ変換であった．$\beta = TLT^{-1} - L \in \Omega^{0,1}(\mathrm{End}(E))$ とみなして，$\delta(X) = \beta(X) - \beta(X)^*$ として，$T \cdot A = A + \delta$ とすればよい．このとき

$$\bar{\partial}_{T \cdot A} = T\bar{\partial}_A T^{-1}$$

が成立する．

Proof. $\nabla^{TA} - \nabla^A = \delta$ であるので，$\pi^{0,1}$ をかければ，$\bar{\partial}_{T\cdot A} - \bar{\partial}_A = \beta = TLT^{-1} - L$ であるので，$\bar{\partial}_{T\cdot A} = T\bar{\partial}_A T^{-1}$ となる． □

そこで，

Proposition 11.3.4. 次の同一視が成立する．

$$\mathbb{HOL}(E) \cong \mathcal{A}_h^{1,1}(E)/\mathcal{G}.$$

また，可積分な *CR* 作用素 $\bar{\partial}$ は E 上の正則構造 Ψ とエルミート接続 A で $\bar{\partial}_A = \bar{\partial} = \bar{\partial}_\Psi$ となるものをゲージ変換を除いてただ一つ導く．

EXAMPLE 11.3.3. $\mathcal{A}_h^{1,1}$ 上のゲージ変換を直線束の場合に調べてみよう．$f \in C^\infty(M, \mathbb{C}^*)$ とする

$$f\bar{\partial}_A f^{-1} = \bar{\partial}_A - \frac{\bar{\partial} f}{f}$$

となるので，

$$f \cdot A = A - \frac{\bar{\partial} f}{f} + \frac{\partial \bar{f}}{\bar{f}}$$

がゲージ変換の作用である（これを見てもわかるように，通常のゲージ変換とは異なる），

さてリーマン面上の直線束に対してみていく．簡単のため自明束とする（$c_1(L) = 0$）．$L \to B$ をリーマン面 B 上の自明直線束とする．勝手な計量 h を固定しておく．L 上のエルミート接続 A をとると，リーマン面上では $(0,2), (2,0)$ はないので，$A \in \mathcal{A}_h^{1,1}$ に入り，勝手なエルミート接続 A に対して $\bar{\partial} = \bar{\partial}_A$ となる複素構造が必ず入る．つまり $\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_h^{1,1}$ である．このゲージ同値類を調べる．

$$f \cdot A = A - \frac{\bar{\partial} f}{f} + \frac{\partial \bar{f}}{\bar{f}}$$

であった．この曲率を計算すると

$$F_{f \cdot A} = F_A - \partial\bar{\partial} \log |f|^2$$

になる．さて，一方で，自明束なので $[F_A] = 0$ であり，F_A は実 $(1,1)$ 形式なので，global dd^c-lemma より（lemma 6.2.4），ある関数が存在して，$F_A = \partial\bar{\partial}\phi$ となる関数が存在する．そこで．$f = e^{\phi/2}$ とすれば，$F_{f \cdot A} = 0$ とできる．よって A の同値類として平坦接続をとることが可能である（普通の意味でのゲージ同値ではないことに注意）．そこで平坦接続 A に対してその $(0,1)$ 部分をとって $\bar{\partial}_A$ とすれば，正則構造が入る．もちろん平坦接続に（普通の意味で）ゲージ同値なものは同じ正則構造をあたえる．自明束でない場合には L に対して，勝手な正則構造を一つ固定して，自明束 L_0 とテンソル積すればよい．以上の考察から正則構造のモジュライ $Pic^0(M)$ と平坦接続接続のモジュライが対応することがわかった．

Theorem 11.3.5. B をリーマン面として $Jacobi$ 多様体 $Jac(B)$ には次の三つの書き方がある．

1. $Jac(B) = \mathrm{Hom}(\pi_1(B), U(1))/U(1) = \mathrm{Hom}(\pi_1(B), U(1)) = H^1(B, U(1)) = H^1(B, \mathbb{R})/H^1(B, \mathbb{Z}) = U(1)^{2g}$.

2. $Jac(B) = \mu^{-1}(0)/\mathcal{G}$

3. $Jac(B) = Pic^0(M) = \mathbb{H}^{0,1}/\pi^{0,1}(H^1(B,\mathbb{Z}))$（これは B の複素構造を用いている）．

Remark 11.3.1. 上が複素直線束の場合である．リーマン面上の higher rank のベクトル束の場合には，semistable 正則ベクトル束（$+\alpha$）の moduli に対して同様な結果が成立する（Narasimhan-Seshadri の定理）．

Remark 11.3.2. $H_1(B)$ の基底 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{2g}$ で $\sigma_{2j-1}\sigma_{2j} = 1$ で他の intersection がゼロとなるものをとる．これをシンプレクティック基底という．この基底で $U(1)^{2g}$ と同一視すれば，$U(1)^{2g}$ 上の標準的シンプレクティック構造が以前与えた $\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}$ のシンプレクティック構造と一致する．

11.4　主 G 束の場合

11.4.1　ハミルトニアン作用

リーマン面上 B の主 G 束 P を考える（主束の G の作用は通常のように右作用で考えることにする）接続の空間を $\mathcal{A}$ として，接空間を $\mathfrak{a} = (\Omega_h^1 \otimes \mathfrak{g})^G = \Omega^1(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ とする．このとき，$\mathcal{A}$ 上のシンプレクティック形式は

$$\omega(a,b) = \int \langle a \wedge b \rangle$$

であった．またゲージ変換群は $\mathcal{G}$ を P 上 G 値関数で equivariant なものである（$f(pg) = gf(p)g^{-1}$）．さらにゲージ群の作用は

$$f \cdot A \mapsto \mathrm{Ad}(f)A + fdf^{-1} = fAf^{-1} - dff^{-1}$$

である．さらにゲージ群のリー環は P 上 $\mathfrak{g}$ 値関数で equivariant なものである（または $\Gamma(B, P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$）．その双対空間は $\Omega^2(B, P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}) = (\Omega_h^2 \otimes \mathfrak{g})^G$ であり，曲率がいる空間である．ここで pairing は

$$\Gamma(B, P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}) \times \Omega^2(B, P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}) \ni (X, F) \mapsto \int_B \langle X \wedge F \rangle \in \mathbb{R}$$

である（$\langle X \wedge F \rangle = -\mathrm{tr}\, X \wedge F$）．

次に基本ベクトル場を求める．$X(p) : P \to \mathfrak{g}$ として，$\exp tX(p) : P \to G$ をゲージ変換とすると，

$$X_A^* = \frac{d}{dt}\{(\exp tX)A(\exp -tX) - (d\exp tX)(\exp -tX)\} = XA - AX - dX = -D_A X$$

である．

さて，

$$\mu : \mathcal{A} \ni A \mapsto F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A] \in (\Omega_h^2 \otimes \mathfrak{g})^G$$

はゲージ群の作用に対するモーメント写像となる．つまりゲージ群の作用はハミルトニアン作用である．

Proof. まず $F_{f \cdot A} = fF_Af^{-1}$ に注意する．$\mu^X(A) = \langle \mu(A), X \rangle$ は

$$\mu^X(A) = \int \langle X \wedge F_A \rangle$$

として定義される．そこで，ゲージ群の作用を考えると

$$\mu^X(f \cdot A) = \int \langle X \wedge F_{f \cdot A} \rangle = \int \langle X \wedge fF_Af^{-1} \rangle = \int \langle f^{-1}Xf \wedge F_A \rangle = \mu^{\mathrm{Ad}_{f^{-1}}X}(A)$$

これでモーメント写像の 2 番目の条件がわかった．次に $d\mu^X = \iota_{X^*}\omega$ を証明する．まず

$$\iota_{X_A^*}\omega_A(a) = \omega_A(X_A^*, a) = -\int \langle D_AX \wedge a \rangle$$

である．一方で，$(d\mu^X)_A(a)$ を求めるには $A + ta$ を μ^X へ代入して微分すればよい．

$$\begin{aligned} F_{A+ta} &= dA + tda + \frac{1}{2}[(A+ta) \wedge (A+ta)] \\ &= F_A + tda + \frac{t}{2}[A \wedge a] + \frac{t}{2}[a \wedge A] + \frac{t^2}{2}[a \wedge a] \\ &= F_A + tda + t[A \wedge a] + \frac{t^2}{2}[a \wedge a] \end{aligned}$$

これを微分して $t = 0$ とすると

$$\frac{d}{dt}F_{A+ta}|_{t=0} = a + A \wedge a + a \wedge A = D_Aa$$

そこでストークスの定理を使って

$$\frac{d}{dt}\left(\int \langle X \wedge F_{A+ta} \rangle\right)|_{t=0} = \int \langle X \wedge D_Aa \rangle = -\int \langle D_AX \wedge a \rangle$$

以上でモーメント写像であることが証明できた．　□

また次もすぐにわかる

Theorem 11.4.1. $\mu^{-1}(0)/\mathcal{G} = \mathrm{Hom}(\pi_1(B), G)/G$ は（有限次元）シンプレクティック多様体（特異点はあるかもしれない）であり，シンプレクティック構造は次のようになる．

$$T_{[A]}(\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}) = \frac{\ker D_A : \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \to \Omega^2(\mathfrak{g}_P)}{\mathrm{im}\ D_A : \Omega^0(\mathfrak{g}_P) \to \Omega^1(\mathfrak{g}_P)}$$

であり，

$$\omega([V],[W]) = \int \langle V \wedge W \rangle$$

（$\frac{1}{8\pi^2}$ をつけるのがふつう）．

（上の命題で注意すべきは，シンプレクティック構造はリーマン面の複素構造またはリーマン計量を使っていない．また，上の同型から指数定理を使って，次元がわかる）．

Proof. $T_p\mu^{-1}(0) = \ker d\mu_p$ であったので，

$$(d\mu^X)(a) = \int \langle X \wedge D_A a \rangle$$

であったので，

$$\ker d\mu = \ker D_A : \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \to \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$$

となる．また，ゲージ群軌道の接空間は，

$$\{X_A^* = -D_A X \mid X : P \to \mathfrak{g}\} = \mathrm{im}\ D_A : \Omega^0(\mathfrak{g}_P) \to \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$$

となる．ω が well-defined であることはストークスの定理を使えば理解できる． □

次の定理は，複素ゲージ変換を使って証明される（[深谷] をみよ）

Theorem 11.4.2. リーマン面 B 上の複素構造を一つ固定する．このとき $\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}$ は（特異点がなければ）**ケーラー多様体**になる．

Outline of proof. リーマン計量をとればリーマン面なら複素構造がはいる．このときホッジ作用素が定まる．そこで $\mathfrak{a} = \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 上にホッジ作用により概複素構造が入る．$\mathcal{A}$ はアフィン空間なので，このようにきめた概複素構造は複素構造になる．また

$$\omega(a, Ja) = \int \langle a \wedge Ja \rangle \int \langle a \wedge *a \rangle \geq 0$$

であるので，非退化対称形式となりケーラー計量になる．このようにして $\mathcal{A}$ はケーラー多様体になる．(リーマン面のリーマン計量からホッジ作用素は定義してるが，上の場合には共形不変である．よってリーマン面の複素構造から定まるといっていよい）．このケーラー構造を $\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}$ に落とせばよいのであるが，詳しくは深谷賢治の本 [深谷] を参照． □

11.4.2 Chern-Simons

上で述べたシンプレクティック多様体はチャーン・サイモンズ理論と関連がある．それについて述べる（かなりいいかげんに．粗筋のみ．間違った事を述べてる可能性ありなので注意）．

M を向きつき 3 次元多様体として，主 $SU(2)$ 束を考える．これは必ず自明束になることが知られている．P 上の接続全体を $\mathcal{A}_M$ とする．自明接続を基点にとれば，$\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ と同一視できる．自明束なのでゲージ変換は $C^\infty(M, G)$ である．

さて，$A \in \mathcal{A}_M$ に対して，

$$CS(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \mathrm{tr}\,(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

としてこれを **Chern-Simons 汎関数**という．

Proposition 11.4.3. $CS : \mathcal{A}_M \to \mathbb{R}$ の臨界点は平坦接続である．

Proof. $A + ta$ として微分して $t = 0$ とする．

$$CS(A + ta) = CS(A) + \frac{t}{4\pi^2} \int \mathrm{tr}\,(F_A \wedge a) + O(t^2)$$

であるので臨界点は $F_A = 0$ となる平坦接続である． □

次に，$B : \Omega^1(M, \mathfrak{g}) \times \Omega^2(M, \mathfrak{g}) \to \mathbb{R}$ を

$$B(\alpha, \beta) = \int_M \mathrm{tr}\,(\alpha \wedge \beta)$$

とする．これは非退化であり（証明は前と同様），互いに双対空間となる．そこで $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ が接空間であったので $\Omega^2(M, \mathfrak{g})$ は 1-from の空間である．特に F_A は $\mathcal{A}_M$ 上の 1-fromt とみなせる．さらに，先ほどの命題から

$$dCS(A) = \frac{1}{4\pi^2} F_A$$

がわかる．つまり F_A は $\mathcal{A}_M$ 上の完全形式である．

Remark 11.4.1. 上の命題はこの後使わない．Chern-Simons 分配関数 $Z_k(M) = \int_{\mathcal{A}_M/\mathcal{G}} \exp 2\pi\sqrt{-1} k CS(A) DA$ を $k \to \infty$ とした漸近展開において，臨界点である平坦接続の寄与が大きくなる．この事実を用いて Chern-Simons 摂動理論により 3 次元多様体の位相不変量を構成できる．

Remark 11.4.2. Chern-Simons は，4 次元自己双対接続と関係がある．Chern-Simons 汎関数に対して gradient ベクトル場（リーマン計量を $(a,b) = \int_M (a(x), b(x)) vol_M$ でいれると，$\mathrm{grad}_A CS = - * F_A$）の積分曲線 A_t で臨界点（平坦接続）に収束するものと $M \times \mathbb{R}$ 上の反自己双対接続で L^2 有界なものが対応する．普通は M がホモロジー 3 次元球面の場合を考える（他の 3 次元多様体についてはいろいろと工夫をする）．モース指数（上のような積分曲線のモジュライの次元）は反自己双対接続のモジュライの次元として指数定理から計算できる．（求めたいのは $\mathcal{A}_M/\mathcal{G}$ のフレアーホモロジーであるので）ゲージ変換を考慮すると，a, b を臨界点として，その相対指数 $\mu(a,b)$ は，$\mu(g^*a, g'^*b)$ に一致するのは g, g' が同じ連結成分に入る時であり，異なる連結成分に入る場合には，$\mu(a,b)$ は再び指数定理から 8 の倍数だけずれることなる（$\pi_0(\mathcal{G}) = \mathbb{Z}$）．よってフレアーホモロジーは　mod 8 で複体を考えればよい．このようにして，$\mathcal{A}_M/\mathcal{G}$ のフレアーホモロジーが定まる．このホモロジー群を，$M \times \mathbb{R}$ を境界つき 4 次元多様体の cylinder end と思って相対ドナルドソン多項式に適用するのである（つまり，ある意味での位相的場の理論を与える）．このようにして，$\mathcal{A}_M/\mathcal{G}$ 上の Chern-Simons 汎関数に対するフレアーホモロジーと相対ドナルドソン多項式に関連がつく．またホモロジー球面に対する Chern-Simons のフレアーホモロジー群のオイラー数とキャッソン不変量 $C(M)$ の絶対値の 2 倍が等しいことを Taubes がしめした．

さて，ゲージ変換での $CS(A)$ の変化を考察する．

Proposition 11.4.4. ゲージ変換は

$$A \mapsto g^*A = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$$

となるが，このとき

$$CS(g^*A) = CS(A) + \frac{1}{8\pi^2}\int_{\partial M} \mathrm{tr}\,(A \wedge dgg^{-1}) - \int_M g^*\sigma$$

ここで σ は $SU(2)$ の体積要素である．つまり M-C 形式を $\theta = g^{-1}dg$ とすれば

$$\sigma = \frac{1}{24\pi^2}\mathrm{tr}\,(\theta \wedge \theta \wedge \theta)$$

である．

Proof.

$$
\begin{aligned}
&CS(g^*A)\\
&\quad=\frac{1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{tr}\,\{g^{-1}Ag+g^{-1}dg)\wedge d(g^{-1}Ag+g^{-1}dg)+\frac{2}{3}(g^{-1}Ag+g^{-1}dg)^3\}\\
&\quad=\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\,\{AdA+dgg^{-1}dA-3A(dgg^{-1})^2-2A^2dgg^{-1}-(g^{-1}dg)^3\\
&\qquad\quad+\frac{2}{3}(A^3+3A^2dgg^{-1}+3A(dgg^{-1})^2+(g^{-1}dg)^3\}\\
&\quad=CS(A)-\int_M g^*\sigma+\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\,\{dgg^{-1}dA-A(dgg^{-1})^2\}\\
&\quad=CS(A)-\int_M g^*\sigma+\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\,d(A\wedge dgg^{-1})\\
&\quad=CS(A)+\frac{1}{8\pi^2}\int_{\partial M} \mathrm{tr}\,(A\wedge dgg^{-1})-\int_M g^*\sigma
\end{aligned}
$$

□

特に，$\partial M=\emptyset$ のときには

$$CS(g^*A)=CS(A)-\int_M g^*\sigma$$

が成立する．また $\int_M g^*\sigma$ は $g:M\to SU(2)$ の写像度であり，整数である．よって $\exp(2\pi iCS(A))$ を考えると，

$$CS:\mathcal{A}_M/\mathcal{G}\mapsto\mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

となることに注意する．**Witten の主張は，**

$$Z_k(M)=\int_{\mathcal{A}_M/\mathcal{G}}\exp(2\pi\sqrt{-1}kCS(A))DA$$

が M の位相不変量になることである．

$\partial M\neq\emptyset$ のとき $\partial M=B$ とする．$Q=P|_B$ とする．B 上の主 $SU(2)$ 束は自明であり $Q=B\times SU(2)$ である．この接続の全体を $\mathcal{A}_B$ とする．これは $\Omega^1(B,\mathfrak{g})$ と同一視でき，前に述べたようにシンプレクティック形式が

$$\omega(a,b)=-\frac{1}{8\pi^2}\int_B \mathrm{tr}\,a\wedge b$$

で定まる．ここで $a,b\in T_A\mathcal{A}_B=\Omega^1(B,\mathfrak{g})$ である．また．ゲージ群は $\mathcal{G}_B=Map(B,SU(2))$ である．

$\partial M = B$ の場合には $Z_k(M)$ を $\mathcal{A}_B$ 上の関数（直線束の section）とみなす．それは次のようにする．$a \in \mathcal{A}_B$ を固定して $A \in \mathcal{A}_M$ で $A|_B = a$ となるもの全体で積分する．

$$Z_k(M)(a) = \int_{A|_B=a} \exp(2\pi\sqrt{-1}kCS(A))DA$$

こうすれば，$Z_k(M) : \mathcal{A}_B \to \mathbb{C}$ が定まる．さらに，$M = M_1 \cup_B M_2$ として，$\partial M_1 = B = -\partial M_2$ として，

$$Z_k(M) = \int_{A_B} Z_k(M_1)(a)Z_k(M_1)(a)Da$$

となる．これが実は位相的場の理論の公理を（粗い意味で）みたすことになる．そこで **Atiyah による位相的場の理論の公理**を思い出す．

1. コンパクト，境界なし，向きつき d 次元多様体 B に対して，有限次元複素ベクトル空間 Z_B が対応．
2. コンパクト，向きつき $d+1$ 次元多様体 M で $\partial M = B$ に対して，$Z(M) \in Z_B$ が定まる．
3. $Z_{-B} = Z_B^*$
4. $B_1 \cup B_2$ で共通部分がない場合には，$Z_{B_1 \cup B_2} = Z_{B_1} \otimes Z_{B_2}$（よって $\partial M = (-B_1) \cup B_2$ なら，$Z(M) \in \mathrm{Hom}(Z_{B_1}, Z_{B_2})$ である）．
5. $\partial M_1 = (-B_1) \cup B_2, \partial M_2 = (-B_2) \cup B_3$ に対して $Z(M_1 \cup M_2) = Z(M_1)Z(M_2) \in \mathrm{Hom}(Z_{B_1}, Z_{B_3})$ が成立．
6. $Z_\emptyset = \mathbb{C}$
7. I を単位区間とすれば，$Z(B \times I)$ は Z_B の線形変換として恒等写像を与える．

そこで問題は，まず Z_B を作ることとなる．そこで $\mathcal{A}_B$ 上の直線束の切断の空間を考える（もちろんこれでは大きすぎる）．

Proposition 11.4.5. a を B 上の接続とし，h をゲージ変換とする．さらに h の M への拡張を g とかく．このとき

$$c(a,h) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(\int_B \mathrm{tr}\, h^{-1}ah \wedge h^{-1}dh) - \int_M g^*\sigma))$$

とすれば，h の拡張の仕方によらない．さらに，$B = \partial M$ とする．A を M 上の接続，g を M 上のゲージ変換とする．$A|_B = a$ とすると，

$$\exp(2\pi\sqrt{-1}CS(g^*A)) = c(a, g|_B)\exp(2\pi\sqrt{-1}CS(A)).$$

Proof. まず，h の拡張の仕方によらないことをしめす．g を $B = \partial M$ への拡張する．さらに他の拡張 g' を $B = \partial M'$ への拡張とする．M' の向きを逆にして B において M と M' を張り合わせると閉じた 3 次元多様体を得る．さらに g と g' を張り合わせる．このとき $\int_M g^*\sigma - \int_{M'} g'^*\sigma$ は $M \cup M'$ から $SU(2)$ への写像度なので整数である．よって exp に乗せれば $\exp(2\pi\sqrt{-1}\int_M g^*\sigma) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\int_{M'} g'^*\sigma)$ となる．よって拡張の仕方によらない．

もう一つの主張は先ほどの命題から明らか．□

さて，$\mathcal{A}_B$ 上の複素直線束 L_B を構成する．自明な複素直線束 L_B を考え，その上の接続でその曲率がシンプレクティック形式であるものを作る．接続は，$\mathcal{A}_B$ 上の 1-from であり，$T_a\mathcal{A}_B = \Omega^1(B, \mathfrak{g})$ であるのでその双対空間は $\Omega^1(B, \mathfrak{g})$ であるので，それを $a \in \Omega^1(B, \mathfrak{g}) = T_a^*\mathcal{A}_B$ とする．つまり，

$$\mathfrak{B}_a(V) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_B \mathrm{tr}\,(a \wedge V)$$

として，$\mathcal{A}_B \times \mathbb{C}$ 上の接続を定める．このとき $d\mathfrak{B} = \omega$ であることはすぐにわかる．自明束 $\mathcal{A}_B \times \mathbb{C}$ 上に $(a, z) \mapsto (g^*a, c(a, g)z)$ でゲージ群を作用させる．これは接続 $\mathfrak{B}$ を保つ作用である．

先ほどの命題から

$$Z_k(M)(g^*a) = c(a, g)^k Z_k(M)(a)$$

となることがわかるので，$Z_k(M)$ がいる空間は $\mathcal{A}_B$ 上直線束 $L_B^{\otimes k}$ の section の空間で $\mathcal{G}_B$ 不変なものであることがわかる．つまり $\mathcal{A}_B \times_{c^k} \mathbb{C}$ であり $\mathcal{A}_B/\mathcal{G}_B$ 上の直線束の section であることがわかる．また，上で作った接続がゲージ群不変であったので，この直線束にも接続が入る．（B の向きを変えると $c(a, g)^{-k}$ になるので $(L_B^*)^{\otimes k}$ に入ることがわかり，pairing を作れる）．さらに，$\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}_B \subset \mathcal{A}_B/\mathcal{G}_B$ 上の直線束の section の空間を考えて，これがケーラー多様体であったのでケーラー polaization を行う（つまり正則な section の空間を考える．この polarization の際に先ほどの接続を用いる）．この有限次元ヒルベルト空間のことを**共形ブロック**という．これが $Z_k(M)$ のいる空間であり，位相的場の理論での Z_B という線形空間である．閉じた 3 次元多様体の位相不変量 $Z_k(M)$ は，共形ブロックを使って組み合わせ論的に構成することになる（$Z_k(M)$ は経路積分であるので定義できないし，計算できないので，位相的場の理論をみたすものを数学的につくって位相不変量を構成するのである）．共形ブロックは WZW 模型からも構成できることに注意する．

第12章 symplectic toric manifolds

前chapterで，トーラスのハミルトニアン作用の場合には，その像は凸多角形であることを見てみた．ここではその特別な場合である，シンプレクティックトーリック多様体のモーメント写像による像を見てみる．これは，Delzant polytopeといわれる特別なpolytopeであり，すべてのシンプレクティックトーリック多様体とDelzant polytopeは一対一に対応する．この章では，そのDelzant構成法を議論する．

12.1 symplectic toric manifoldの分類

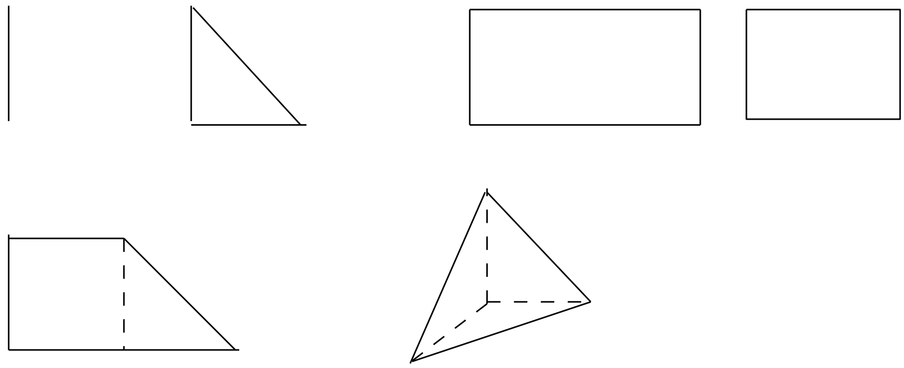
12.1.1 Delzant polytopes

$2n$次元シンプレクティックトーリック多様体とはコンパクト連結シンプレクティック多様体(M^{2n}, ω)で$\mathbb{T}^n$の効果的ハミルトニアン作用があるものである．ここでモーメント写像を$\mu : M \to \mathbb{R}^n$とする．

Definition 12.1.1. Delzant polytope $\Delta \in \mathbb{R}^n$とは次をみたす凸polytopeである．

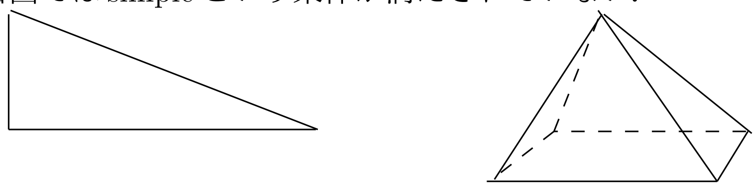
1. simple．各頂点からはn個の辺が出る．
2. rational．頂点pから出る各辺に対して，$u_i \in \mathbb{Z}^n$（$i = 1, \cdots, n$）があって，$p + tu_i$（$t \geq 0$）の形をしている．
3. smooth．各頂点に対して，上の$u_1, \cdots, u_n$は$\mathbb{Z}^n$の基底としてとることができる．

以下がDelazant polytopeの例である．



辺の長さは整数とは限らない．左上の台形の例で言えば，各点 p に対して辺は $p+tu_i$（$u_i \in \mathbb{Z}^n$）の形をしている．つまり，頂点から出る辺の方向ベクトルは，格子 $\mathbb{Z}^n$ 上にあり，$\mathbb{Z}^n$ の基底となる．また適当に大きさを変えても Delzant になる．

下の図の三角形は smoothness が破られるので Delzant polytope ではない．下の右図では simple という条件が満たされていない．



Remark 12.1.1. Newton polytope とは非特異 n 個の polytope のことであるが．この場合には頂点も格子上にある必要がある．しかり Delzant polytope はそのことは仮定しない．

Delzant Polytope を代数的に記述する．**polytope の facet（面）とは** $n-1$ **次元の面**のことである．Δ を n 次元の Delzant polytope として，面の数を d とする．$v \in \mathbb{Z}^n$ が **primitive** とは任意の $u \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}, |k| > 1$ に対して，$v = ku$ と記述されないことである．例えば，$(1,1), (4,3), (1,0)$ は primitive であるが $(2,2), (4,6)$ は primitive でない．

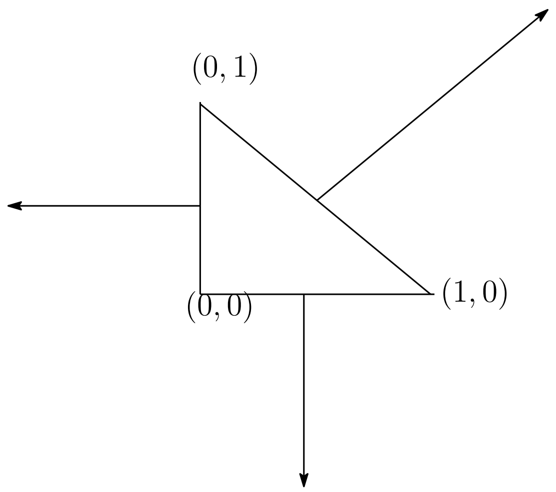
$v_1, \cdots, v_d \in \mathbb{Z}^n$ を面から外向きに面に垂直にでる primitive ベクトルとする．頂点 p を通る面は $u_1, \cdots, \hat{u}_i, \cdots, u_n$ が張る面であるので，垂直なベクトルは，各成分が整数であるようにできる，さらに最大公約数で割ってあげれば primitive ベクトルが各面に対してただ一つ存在する．そこで，Δ に対して，$\lambda_1, \cdots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, i = 1, \cdots, d\} \quad \text{for } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

と書ける．つまり，面が d 個のとき primitive ベクトルが d 個とれ，超平面 $\langle x, v_i \rangle = \lambda_i$ の v_i とは逆側の領域の共通部分が Δ である．

EXAMPLE 12.1.1.

$$\begin{aligned}\Delta &= \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 | \langle x, (-1,0)\rangle \leq 0, \langle x, (0,-1)\rangle \leq 0, \langle x, (1,1)\rangle \leq 1\}\end{aligned}$$



12.1.2 Delzant の定理

Theorem 12.1.1 (Delzant)**.** **シンプレクティックトーリック多様体は** ***Delzant polytope*** **で分類される．** つまり次の一対一対応がある．

$$\textit{symplectic toric manifolds} \ni (M, \omega.\mathbb{T}^n, \mu) \longleftrightarrow \mu(M) \in \textit{Delzant polytope}$$

subsection 10.3.6 で見たように，凸性定理及び局所凸性定理を用いて，シンプレクティックトーリック多様体のモーメント写像による像が Delzant polytope であることを知っている．以下では，この定理の全射性を証明していく．つまり与えられた Δ に対して，シンプレクティックトーリック多様体を構成するのである．

Remark 12.1.2. シンプレクティックトーリック多様体 $(M_i, \omega_i, \mathbb{T}_i, \mu_i)$ ($i = 1, 2$) が同値とは，ある同型 $\lambda : \mathbb{T}_1 \to \mathbb{T}_2$ と λ 同変なシンプレクティック同相 $\phi : M_1 \to M_2$ があって，$\mu_1 = \mu_2 \circ \phi$ となることをいう．上の同型は，この同値類を除いてという意味である．

このノートでは，単射性，つまり二つのシンプレクティックトーリック多様体が，同じ Delzant polytope を与えるとき，それらが同値であるかという問題については触れない．例えば，[Audin] を参照（微分同相となることまでし書いてないので，詳しくは Delzant の論文など）

12.1.3 Delzant の構成法

Δ を n 次元の Deltzant polytope で d 個の面を持つとする．$v_i \in \mathbb{Z}^n$（$i = 1, \cdots, d$）を面に垂直な外向きで素（primitive）なベクトルとする．このとき

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, i = 1, \cdots, d\} \quad \text{for some } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

となる．e_i を $\mathbb{R}^d$ の標準的なベクトルとして，

$$\pi : \mathbb{R}^d \ni e_i \mapsto v_i \in \mathbb{R}^n$$

を線形に拡張して $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ を考える．このとき，これは $\mathbb{Z}^d$ から $\mathbb{Z}^n$ への全射を与える．

Proof. ある頂点 p に対する辺のベクトル $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{Z}^n$ の基底であった．そこで，$\mathbb{Z}$ 線形同型写像 $A : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ で移せば，標準的な基底となる．つまり，$u_1, \cdots, u_n$ を標準的な基底としても一般性を失わない．このとき，$u_1, \cdots, u_n$ をマイナス倍したベクトルが，p を通る n 個の面に対する normal vector であり，primitive なものとなる．よって，$\mathbb{Z}^n$ の基底になる． □

よって，π は次のトーラス間の全射写像を導く．

$$\pi : \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$$

さて，$N := \ker \pi$（$d - n$ 次元トーラス）, $\mathfrak{n} = Lie(N)$, とする．このときトーラスの完全系列

$$0 \to N \xrightarrow{i} \mathbb{T}^d \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^n \to 0$$

があり，さらに次のリー環の完全系列を得る．

$$0 \to \mathfrak{n} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^d \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n \to 0$$

さらにその双対の完全系列を得る

$$0 \to (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^d)^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{n}^* \to 0.$$

さて，$\mathbb{C}^d$ をシンプレクティック形式 $\omega_0 = \frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k$ をもつシンプレクティック多様体として，次のハミルトニアン $\mathbb{T}^d$ 作用を考える．

$$(e^{2\pi i t_1}, \cdots, e^{2\pi i t_d})(z_1, \cdots, z_d) = (e^{2\pi i t_1} z_1, \cdots, e^{2\pi i t_d} z_d)$$

ここでモーメント写像は

$$\phi(z_1, \cdots, z_d) = -\pi(|z_1|^2, \cdots, |z_d|^2) + (\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$$

というものをとる（右辺の定数の部分はモーメント写像としては何でもよかったが，今回は polytope での λ_i を使う．また π は数字のパイ）．このとき部分群 N への制限した作用に対するモーメント写像はなんであろうか？

次の補題は一般論.

Lemma 12.1.2. G をコンパクトリー群として H を G に対する閉部分群とする．このとき埋め込み $i:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ は射影 $i^*:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{h}^*$ を導く．さて (M,ω,G,ϕ) がハミルトニアン G 作用とする．このとき G 作用の H への制限は

$$\mu:=i^*\circ\phi:M\to\mathfrak{h}^*$$

とすればモーメント写像になる.

Proof. $X\in\mathfrak{h}$ として，$\langle i^*\circ\phi,X\rangle=\langle\phi,i(X)\rangle$ となるので，$d\mu^X=d\phi^{i(X)}=\iota_{i(X)^*}\omega$ を満たす．また $\mu\circ\psi_h=\mathrm{Ad}_h^*\circ\mu$ を確かめる.

$$\mu(\psi_h x)=i^*(\phi(\psi_h x))=i^*(\mathrm{Ad}_h^*(\phi(x)))=\mathrm{Ad}_h^*\mu(x).$$

ここで

$$\begin{aligned}&\langle i^*(\mathrm{Ad}_h^*(\phi(x))),X\rangle=\langle\mathrm{Ad}_h^*(\phi(x)),i(X)\rangle\\=&\langle\phi(x),\mathrm{Ad}_{h^{-1}}i(X)\rangle=\langle\phi(x),i(\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))\rangle=\langle\mathrm{Ad}_h^*\mu(x),X\rangle\end{aligned}$$

を用いた．よってモーメント写像である． □

さて，上の補題から，部分トーラス N は $\mathbb{C}^d$ へハミルトニアン作用する．モーメント写像は

$$i^*\circ\phi:\mathbb{C}^d\to\mathfrak{n}^*$$

である．このゼロレベル集合 $Z=(i^*\circ\phi)^{-1}(0)$ を考える．このとき Z はコンパクトであり N は Z に自由に作用している.

Proof. 次の section で証明する． □

N が $Z=\mu^{-1}(0)$ に自由に作用しているなら，$d\mu_p$ は $p\in\mu^{-1}(0)$ に対して全射であり，よって 0 は regular value である．そして，$\mu^{-1}(0)$ は余次元が $\dim N=d-n$ の部分多様体である．つまり Z はコンパクトで次元が

$$\dim_{\mathbb{R}}Z=2d-(d-n)=d+n$$

の $\mathbb{C}^d$ の部分多様体である．さらにその軌道空間 $M_\Delta=Z/N$ はコンパクト多様体であり，次元は

$$\dim M_\Delta=d+n-(d-n)=2n$$

である．また $p : Z \to M_\Delta$ は主 N 束である．

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}^d \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \\ M_\Delta & & \end{array}$$

この図式において Marsden-Weinstein-Moser 定理から，$2n$ 次元 M_Δ 上のシンプレクティック形式 ω_Δ で

$$p^*\omega_\Delta = j^*\omega_0$$

を満たすものが存在する．また，トーラス作用の場合のレベル集合は連結であったので，Z は連結であり，M_Δ も連結である．実はこれが求めるもの（Delzant polytope に対応したシンプレクティックトーリック多様体）である（後述）．

EXAMPLE 12.1.2. $\Delta = [0, a] \subset \mathbb{R}^*$ とする.（1 次元で面が二つである．面は今の場合は頂点である）．v を標準的な基底とする．normal primitv vector は $v_1 = -v, v_2 = v$ である．また Δ は

$$\begin{cases} \langle x, v_1 \rangle \leq 0, & v_1 = -v \\ \langle x, v_2 \rangle \leq a, & v_2 = v \end{cases}$$

となる．また射影は

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{\pi} \mathbb{R} \\ e_1 &\mapsto -v \\ e_2 &\mapsto v \end{aligned}$$

となる．この kernel は $e_1 + e_2$ が張る空間である．つまりトーラスで考えると $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ に diagonal に入るものが部分トーラス N である．リー群，リー環の完全系列は

$$\begin{aligned} 0 \to N \xrightarrow{i} \mathbb{T}^2 \xrightarrow{\pi} S^1 \to 0 \\ 0 \to \mathfrak{n} \xrightarrow{x \to (x,x)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x_1,x_2) \to -x_1 + x_2} \mathbb{R}^1 \to 0 \\ 0 \to \mathbb{R}^* \xrightarrow{x \to (-x,x)} (\mathbb{R}^2)^* \xrightarrow{(x_1,x_2) \to x_1 + x_2} \mathfrak{n}^* \to 0 \end{aligned}$$

さて，N の $\mathbb{C}^2$ への作用は

$$e^{2i\pi t}(z_1, z_2) = (e^{2i\pi t} z_1, e^{2i\pi t} z_2)$$

である．またモーメント写像は

$$i^* \circ \phi(z_1, z_2) = i^*(-\pi(|z_1|^2, |z_2|^2) + (a_1, a_2)) = -\pi(|z_1|^2 + |z_2|^2) + a$$

となる．そこでゼロレベル集合は

$$(i^* \circ \phi)^{-1}(0) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{a}{\pi}\}$$

であり，reduced 空間は射影空間となる．

$$(i^* \circ \phi)^{-1}(0)/S^1 = \mathbb{CP}^1$$

.

12.2 Delzant construction

12.2.1 Zero level

Theorem 12.2.1. ゼロレベルセット $Z = (i^* \circ \phi)^{-1}(0)$ はコンパクトであり，N は Z に自由に作用する．

以下でこの定理を証明する．まず Z の定義を思い出そう．

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, i = 1, \cdots, d\} \quad \text{for some } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

となる．e_i を $\mathbb{R}^d$ の標準的なベクトルとして，

$$\pi : \mathbb{R}^d \ni e_i \mapsto v_i \in \mathbb{R}^n$$

$$0 \to N \xrightarrow{i} \mathbb{T}^d \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^n \to 0$$

$$0 \to \mathfrak{n} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^d \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n \to 0$$

$$0 \to (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^d)^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{n}^* \to 0$$

さらに，$(\mathbb{C}^d, \omega_0)$ 上に $\mathbb{T}^d$ が作用していて，モーメント写像を

$$\phi(z_1, \cdots, z_d) = -\pi(|z_1|^2, \cdots, |z_d|^2) + (\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$$

とする．また．

$$i^* \circ \phi : \mathbb{C}^d \to (\mathbb{R}^d)^* \to \mathfrak{n}^*, \quad Z = (i^* \circ \phi)^{-1}(0)$$

である．

まず $\Delta' \subset (\mathbb{R}^d)^*$ を $\Delta \subset (\mathbb{R}^n)^*$ の π^* による像とする．(π^* は単射なので，$(\mathbb{R}^d)^*$ の n 次元超平面上に Δ を移した Δ' が乗っている）．このとき $\phi(Z) = \Delta'$ を証明する．

Lemma 12.2.2. $y \in (\mathbb{R}^d)^*$ とする．このとき $y \in \Delta' \subset (\mathbb{R}^d)^*$ であるための必要十分条件は $y \in \phi(Z) \subset (\mathbb{R}^d)^*$ である．

Proof. $y \in \phi(Z) \subset (\mathbb{R}^d)^*$ とは，$y \in \phi(\mathbb{C}^d)$ かつ $i^*y = 0$ である．よって

1. $\langle y, e_i \rangle \leq \lambda_i \ i = 1, \cdots d$.（これは ϕ の定義から $y_i = -\pi|z_i|^2 + \lambda_i$ なので $y_i - \lambda_i \leq -\pi|z_i|^2 \leq 0$）.
2. $y = \pi^*(x)$（for $\exists x \in (\mathbb{R}^n)^*$）.（これは完全系列から．さらに π^* は単射なので x は唯一つである）.

そこで，

$$\langle \pi^*(x), e_i \rangle \leq \lambda_i, \ \forall i \iff \langle x, \pi(e_i) \rangle \leq \lambda_i, \ \forall i \iff \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, \ \forall i \iff x \in \Delta$$

よって $y \in \phi(Z) \iff y \in \pi^*(\Delta) = \Delta'$ となる． □

よって，全射写像 $\phi : Z \to \Delta' \subset (\mathbb{R}^d)^*$ を得る．ϕ は proper 写像であり Δ' はコンパクトなので，Z がコンパクトである．

次に，N が Z に自由に作用していることを確かめる．

Z に対する滑層（**strastification**）を定義する．以下の三つは同値な定義である．

- $\Delta' = \pi^*(\Delta)$ 上で strastification を次で定義する：i 番目の層を Δ' の i 次元面の和の閉包として定義．

  この strastification を ϕ により Z へ引き戻すことにより，$Z = \phi^{-1}(\Delta')$ へ strastification を入れる．

- Δ' の $n - r$ 次元の面を F とする．この F は次の r 個の式かつ $y \in \Delta'$ で定義される．

  $$\langle y, e_i \rangle = \lambda_i, \quad i = i_1, \cdots, i_r$$

  また．$I = (i_1, \cdots, i_r)$（$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq d$）に対して F_I と書く．これが上で述べた，Δ' に対する strastification である．

  Z への strastification を考えてみる．$z = (z_1, \cdots, z_d) \in Z \subset \mathbb{C}^d$ に対して

  $$\begin{aligned} z \in \phi^{-1}(F_I) &\iff \phi(z) \in F_I \\ &\iff \langle \phi(z), e_i \rangle = \lambda_i, \ \forall i \in I \\ &\iff -\pi|z_i|^2 + \lambda_i = \lambda_i, \ \forall i \in I \\ &\iff z_i = 0, \ \forall i \in I \end{aligned}$$

  このようにして Z に strastification が入る．

- $\mathbb{T}^d$ は $\mathbb{C}^d$ 上に作用してモーメント写像 ϕ を保存した．よって，$\mathbb{T}^d$ は $Z = \phi^{-1}(\Delta') \subset \mathbb{C}^d$ へ作用する．そこで $\mathbb{T}^d$ の作用による軌道 type で Z に滑層を入れる：$z \in Z$, $\phi(z) \in F_I$ とすると z の stabilizer は

$$\mathbb{T}^d_I = \{(e^{2\pi i t_1}, \cdots, e^{2\pi i t_d}) | e^{2\pi i t_s} = 1 \forall s \notin I\}$$

Proof. $z = (z_1, \cdots, z_d) \in \mathbb{C}^d$ に対する stabilizer は

$$(e^{2\pi i t_1} z_1, \cdots, e^{2\pi i t_d} z_d) = (z_1, \cdots, z_d)$$

であるので $e^{2\pi i t_s} = 1$（whenever $z_s \neq 0$）である．よって第二の滑層の入れ方でみたように，$z \in \phi^{-1}(F_I) \iff z_i = 0 \forall i \in I$ となることからわかる． □

以上三つの strastification が同じものであることは明らかであろう．

さて，N が Z に自由に作用していることを見てみよう．$z \in Z$ の $\mathbb{T}^d$ の stabilizer がもっとも大きい場合を考えよう．それは $\mathbb{T}^d_I$ の $\#I$ がもっとも多い場合であり，$\dim F_I = n - r$（$\#I = r$）であったので $r = n$ のときである．つまり $F_I = \{y\}$ は Δ' の頂点であり，y は

$$\langle y, e_i \rangle = \lambda_i \quad i \in I = \{i_1, \cdots, i_n\}$$

を満たす．

Lemma 12.2.3. $z \in Z$ を $y = \phi(z)$ が Δ' の頂点となるものとする．$\mathbb{T}^d_I$ を z の *stabilizer* とする．このとき $\pi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^n$ は $\mathbb{T}^d_I$ を $\mathbb{T}^n$ に全単射でうつす．

Proof. 添え字を並べ替えて $I = (1, \cdots, n)$ としてよいので，

$$\mathbb{T}^d_I = \{(e^{2\pi i t_1}, \cdots, e^{2\pi i t_n}, 1, \cdots, 1) | t_i \in \mathbb{R}\}$$

とする．よって $y \in F_I$ は $y \in \Delta'$ かつ

$$\langle y, e_i \rangle = \lambda_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

を満たす．π^* は単射であったので Δ の頂点は Δ' の頂点に移る．よって y の π^* による逆像は，Δ のある頂点 x である．この頂点を与える式は

$$\langle y, e_i \rangle = \langle \pi^*(x), e_i \rangle = \langle x, \pi(e_i) \rangle = \langle x, v_i \rangle = \lambda_i \quad i = 1, \cdots, n$$

であるが，x が Delzant polytope の頂点であることから $(v_1, \cdots, v_n)$ は $\mathbb{Z}^n$ の基底となる．つまり，$(\pi(e_1), \cdots, \pi(e_n)) = (v_1, \cdots, v_n)$ は $\mathbb{Z}^n$ の基底となる．よって $\pi : \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$ を $\mathbb{T}^d_I$ へ制限したとき全単射である． □

この補題から「$\mathbb{T}^d$ の Z への作用に対して，点 z における stabilizer でもっとも次元が大きくなるもの」と「$N = \ker \pi$」の交わりは単位元 $\{e\}$ である．言い換えると，完全系列

$$0 \to N \xrightarrow{i} \mathbb{T}^d \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^n \to 0$$

は split する．N の Z への作用を考えたとき，点 z の stablizer は，$\mathbb{T}^d$ の作用に関する stablizer の部分群であるので，上で述べたことは，点 z での N の stablizer は $\{e\}$ であることを意味する．つまり，**N は Z 上に自由に作用する**．上では stabilizer がもっとも大きい場合を証明したが他の場合も同様である（実際，他の J に対して，$J \subset I$ となるとき，$\mathbb{T}^d_J \subset \mathbb{T}^d_I$ に入るので，$\mathbb{T}^d_J \cap N \subset \mathbb{T}^d_I \cap N = \{e\}$ がわかる）．

12.2.2　Delzant 構成の結果

Delzant の構成で，$(M_\Delta = Z/N, \omega_\Delta)$ というコンパクトシンプレクティック $2n$ 次元多様体を構成した．これが実はシンプレクティックトーリック多様体になる．

Proposition 12.2.4. $(M_\Delta = Z/N, \omega_\Delta)$ **はハミルトニアン** $\mathbb{T}^n$ **空間でありモーメント写像** μ **は** $\mu(M_\Delta) = \Delta$ **を満たす．**

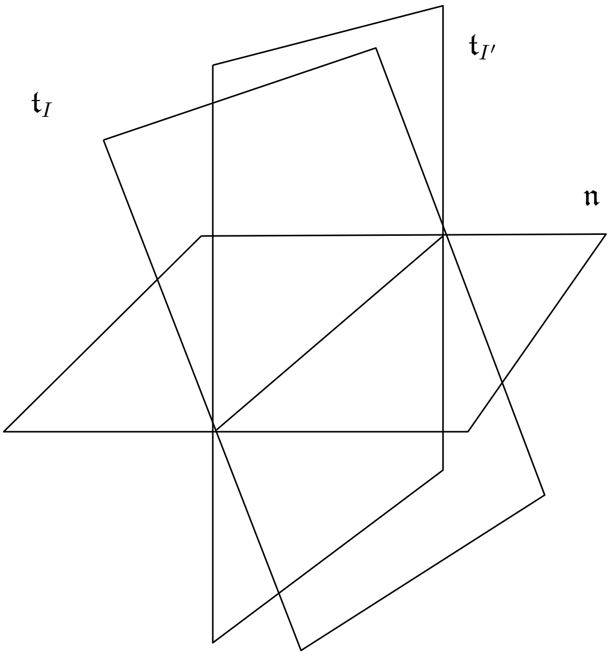
Proof. $z \in Z \subset \mathbb{C}^d$ とする．滑層を入れておいて，$z \in \phi^{-1}(F_I)$ とする．$\mathbb{T}^d$ 作用に対する stabilizer は $\mathbb{T}^d_I$ である，$N \subset \mathbb{T}^d$ の作用が自由であったので，

$$\mathbb{T}^d_I \cap N = \{e\}$$

である．もっとも stabilizer が大きい場合は，F_I が Δ' の頂点になるときで $\mathbb{T}^d_I$ は $\mathbb{T}^d$ の n 次元部分群となる．このとき $\pi|_{\mathbb{T}^d_I} : \mathbb{T}^d_I \to \mathbb{T}^n$ は全単射であったので逆像 $\pi^{-1} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^d_I$ を得る．そこで

$$0 \to N \to \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^n \to 0$$

は分解する．つまり $\mathbb{T}^d = N \times \mathbb{T}^n$ となる．ただし，$\#I = n$ なる I によって，分解の仕方は異なることに注意（下図）．しかし，出来上がったシンプレクティックトーリック多様体は同値なものであり，モーメント写像の像は Δ となる（後で見る例をみればわかる）．



そこで直積群の $(\mathbb{C}^d, \omega_0)$ へのハミルトニアン作用とみなして，モーメント写像

$$\phi : \mathbb{C}^d \to (\mathbb{R}^d)^* = \mathfrak{n}^* \oplus (\mathbb{R}^n)^*$$

を考える（section 9.2.3 の直積群に対するモーメント写像を思い出そう）.

$$pr_1 = i^* : (\mathbb{R}^d)^* \to \mathfrak{n}^*, \quad pr_2 : (\mathbb{R}^d)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$$

として，

$$\phi = (\phi_1, \phi_2) = (pr_1 \circ \phi, pr_2 \circ \phi)$$

とする．ϕ は $\mathbb{T}^d$ 不変であったので，ϕ_1 は $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{T}^d$ の作用で不変であり，ϕ_2 は $N \subset \mathbb{T}^d$ の作用で不変である.

$j : Z = \phi_1^{-1}(0) = (i^* \circ \phi)^{-1}(0) \to \mathbb{C}^d$ を埋め込みとする．また $p : Z \to M_\Delta := Z/N$ とする．N は自由に作用したので，Z/N は多様体であり，シンプレクティック構造 ω_Δ で，Z 上で $p^*\omega_\Delta = j^*\omega$ となるものが存在する．ϕ_1 は $\mathbb{T}^n$ の作用で不変であったので，Z 上に $\mathbb{T}^n$ は作用して，この作用は N の作用と可換であることから，$\mathbb{T}^n$ は M_Δ へ作用する．また $\mathbb{T}^n$ の作用は，ω を保存するので，$\mathbb{T}^n$ は $(M_\Delta, \omega_\Delta)$

へシンプレクティック同相で作用する．

$$\begin{aligned} &Z \xrightarrow{j} \mathbb{C}^d \xrightarrow{\phi} (\mathbb{R}^d)^* \cong \mathfrak{n}^* \oplus (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{i^*} (\mathfrak{n})^* \\ &p \downarrow \\ &M_\Delta = Z/N \\ &Z \xrightarrow{j} \mathbb{C}^d \xrightarrow{\phi} (\mathbb{R}^d)^* \cong \mathfrak{n}^* \oplus (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{pr_2} (\mathbb{R}^n)^* \\ &p \downarrow \\ &M_\Delta = Z/N \end{aligned}$$

また N は ϕ_2 を保存するので，$\phi_2 \circ j : Z \to (\mathbb{R}^n)^*$ も保存する．特に，N 軌道上で定数であるので，

$$\mu : M_\Delta \to (\mathbb{R}^n)^*$$

という写像で $\mu \circ p = \phi_2 \circ j$ を満たす．つまり，$p : Z \to Z/N = M_\Delta$ という主 N 束で考えると $Z \to (\mathbb{R}^n)^*$ という関数で N-equivariant なもの．よって $Z \times_N (\mathbb{R}^n)^* \to M_\Delta$ というベクトル束の切断を与えるが，N 可換なので自明束であり，$M_\Delta \to (\mathbb{R}^n)^*$ という関数を与える．

この μ の像は $\phi_2 \circ j$ の像に一致する（$p : Z \to M_\Delta$）．よって $\phi(Z) = \Delta'$ であり，（split から）$pr_2 \circ \pi^* = \mathrm{id}$ なので

$$\mathrm{im}\, \mu = \phi_2 \circ j(Z) = pr_2 \circ \phi(Z) = pr_2(\Delta') = pr_2 \circ \pi^*(\Delta) = \Delta$$

となる．よって $(M_\Delta, \omega_\Delta, \mu, \mathbb{T}^n)$ はシンプレクティックトーリック多様体であり，そのモーメント写像の像は Δ となる． □

EXAMPLE 12.2.1. わかりずらいので具体例でみてみる．

$$\begin{aligned} \Delta &= \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 | \langle x, (-1,0) \rangle \leq 0, \langle x, (0,-1) \rangle \leq 0, \langle x, (1,1) \rangle \leq 1\} \end{aligned}$$

の場合を考える．$v_1 = (-1,0), v_2 = (0,-1), v_3 = (1,1)$ としておく．このときの π は

$$\pi : \mathbb{R}^3 \ni e_i \to v_i \in \mathbb{R}^2, \quad \pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．そこで，

$$0 \to N \xrightarrow{i} \mathbb{T}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2 \to 0, \quad 0 \to \mathfrak{n} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2 \to 0,$$

は,

$$\begin{aligned}
&\pi : \mathbb{T}^3 \ni [x_1, x_2, x_3] \mapsto [-x_1 + x_3, -x_2 + x_3] \in \mathbb{T}^2,\\
&i : N \ni [t] \mapsto [t, t, t] \in \mathbb{T}^3\\
&\pi : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1 + x_3, -x_2 + x_3) \in \mathbb{R}^2,\\
&i : \mathfrak{n} \cong \mathbb{R}^1 \ni t \mapsto (t, t, t) \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

で与えれる．そして，

$$\pi^* : (\mathbb{R}^2)^* \to (\mathbb{R}^3)^*, \quad \pi^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので，

$$0 \to (\mathbb{R}^2)^* \to (\mathbb{R}^3)^* \to \mathfrak{n} \to 0.$$

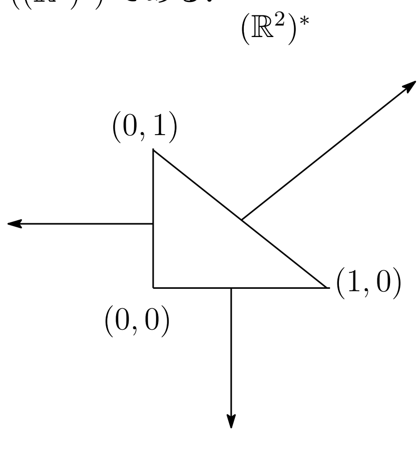
は，

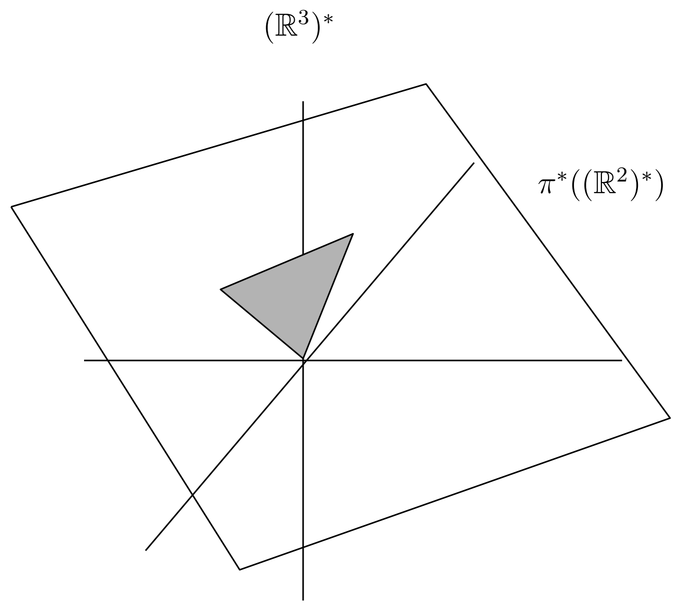
$$\begin{aligned}
&(\mathbb{R}^2)^* \ni (x_1, x_2) \mapsto (-x_1, -x_2, x_1 + x_2) \in (\mathbb{R}^3)^*,\\
&(\mathbb{R}^3)^* \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 \in \mathfrak{n}^*
\end{aligned}$$

この写像により，$\Delta \subset (\mathbb{R}^2)^*$ の頂点は，

$$(0,0) \to (0,0,0), \quad (1,0) \to (-1,0,1), \quad (0,1) \to (0,-1,1)$$

へとうつる．これらが張る三角形が $\Delta' \subset (\mathbb{R}^3)^*$ であり，Δ' が乗っている平面が $\pi^*((\mathbb{R}^2)^*)$ である．





さて，$\mathbb{T}^3$ が $\mathbb{C}^3$ にハミルトニアン作用しているが，モーメント写像は，

$$\phi(z_1, z_2, z_3) = -\pi(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2) + (0,0,1) \in (\mathbb{R}^3)^*$$

である．これを i^* と合成すれば，$i^* \circ \phi : \mathbb{C}^3 \to \mathfrak{n}^*$ は

$$i^* \circ \phi(z_1, z_2, z_3) = -\pi(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) + 1$$

であるので，

$$Z = (i^* \circ \phi)^{-1}(0) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 | |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = \frac{1}{\pi}\}$$

となる．この空間には $N \cong S^1$ が作用する．それには，$i : N \to \mathbb{T}^3$ と合成すればよいので，

$$Z \ni (z_1, z_2, z_3) \mapsto (tz_1, tz_2, tz_3)$$

となる．そして，$Z/N \cong \mathbb{C}P^2$ となる．

$\phi(Z)$ を求めよう．$(x, y, z) = -\pi(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2) + (0,0,1)$ とすれば $\pi(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) = 1$ より，$x + y + z = 0$ を満たす．さらに，$x = -\pi|z_1|^2 \leq 0, y = -\pi|z_2|^2 \leq 0, z = -\pi|z_2|^2 + 1 \leq 1$ となるので，上で与えた Δ' の図に一致する．

Δ' の頂点 $y = (-1, 0, 1)$ を考える．y は

$$\langle y, e_2 \rangle = 0, \quad \langle y, e_3 \rangle = 1, \quad y \in \Delta'$$

を満たす．つまり $F_{23} = \{(-1,0,1)\}$ である．また，対応する Δ の点は $(1,0)$ であり，$\pi(e_2) = v_2 = (0,-1)$, $\pi(e_3) = v_3 = (1,1)$ は $\mathbb{Z}^2$ の基底になっている．

一方，$\phi(z) = y$ となる $z \in Z$ の全体は，

$$\phi^{-1}(-1,0,1) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 | |z_1|^2 = \frac{1}{\pi}, z_2 = 0, z_3 = 0\} \cong S^1$$

である．この $z = (1,0,0) \in \phi^{-1}(-1,0,1)$ の $\mathbb{T}^3$ 作用に関する satbilizer は，

$$\mathbb{T}^2_{23} = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{T}^3 | x_1 = 1\} \cong \mathbb{T}^2$$

となる．特に，

$$\mathbb{T}^2_{23} \ni [1, x_2, x_3] \mapsto [-1 + x_3, -x_2 + x_3] = [x_3, -x_2 + x_3] \in \mathbb{T}^2$$

は全単射である．そこで，

$$\mathbb{T}^2 \ni [y_1, y_2] \mapsto [1, y_1 - y_2, y_1] \in \mathbb{T}^2_{23} \subset \mathbb{T}^3$$

が完全系列

$$0 \to N \to \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^2 \to 0$$

の split を与える．よって，

$$0 \to \mathfrak{n} \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \to 0$$

の split を与える写像は

$$\mathbb{R}^2 \ni (y_1, y_2) \mapsto (0, y_1 - y_2, y_1) \in \mathbb{R}^3$$

である．そして，その双対を考えると，

$$(\mathbb{R}^3)^* \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2 + x_3, -x_2) \in (\mathbb{R}^2)^*$$

となる．

さて，Z/N がハミルトニアン $\mathbb{T}^2_{23}$ 空間となることを見てみよう．$\mathbb{T}^2_{23}$ は Z へ作用する．

$$Z \ni (z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_1, t_2 z_2, t_3 z_3) \in \mathbb{Z}$$

である．これは N の作用と可換であるので（可換群なので当たり前），Z/N へも作用する．実際，

$$\mathbb{C}P^2 = Z/N \ni [z_1, z_2, z_3] \mapsto [z_1, t_2 z_2, t_3 z_3] \in Z/N$$

とすればよく，これはシンプレクティック作用である．さらに，モーメント写像は，

$$\mu : [z_1, z_2, z_3] \mapsto -\pi(|z_2|^2 + |z_3|^2, -|z_2|^2) + (1, 0) \in (\mathbb{R}^2)^*$$

となる．この像は

$$Z = (i^* \circ \phi)^{-1}(0) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 | |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = \frac{1}{\pi}\}$$

からの像を考えればよいので，$p = \pi|z_1|^2, q = \pi|z_2|^2, r = \pi|z_3|^2$ とすれば，

$$p + q + r = 1, \quad 0 \le p, q, r \le 1$$

を満たす．そこで，モーメント写像の像は，

$$x = -q - r + 1, \quad y = q$$

を代入すれば，

$$p = x \quad q = y, \quad r = -x - y + 1$$

であるので，

$$0 \le x, y \le 1. \quad 0 \le -x-y+1 \le 1,$$

を満たす．これは，まさしく Δ に一致する．

また，この例からわかるように，他の $\mathbb{T}^3_I$ を取った場合には，$\mathbb{C}P^2$ への作用の仕方やモーメント写像は異なるが，モーメント写像の像は，やっぱり Δ となることがわかる．言い換えると，同値類を除けば，上の構成で作られた $(M_\Delta, \omega_\Delta)$ は唯一つである．

Remark 12.2.1. Delzant 構成から，トーラス作用は $\mathbb{C}^n$ のケーラー構造を保存している．よって，**シンプレクティックトーリック多様体には，$\mathbb{C}^d$ のケーラー構造から導かれる自然なケーラー構造がはいる**ことがわかる．

Remark 12.2.2. シンプレクティックトーリック orbifold とは，コンパクト連結シンプレクティック orbifold であり，効果的なトーラスのハミルトニアン作用があり，$\dim T = \frac{1}{2} \dim M$ となるものである．この分類は Lerman and Tolman による．Delzant polytope を一般化したものが対応してくる．そこでは，polytope の各面に正整数をラベル付したものであり．また，条件の一つであった smoothness は必要としないものである．

12.2.3　Delzant 構成のアイデア

任意の n 次元 polytope Δ で d 個の面を持つものに対して $\mathbb{R}^d$ は次の意味で universeral である．「Δ の π^* による $\mathbb{R}^d$ への埋め込み Δ' は平行移動すれば．$\mathbb{R}^d_-$（すべての座標が 0 以下）とあるアフィン平面 A との交わりとして得られる」．

Delzant polytope Δ を

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, v_i \rangle \le \lambda_i, i = 1, \cdots, d\}$$

とする．また

$$\pi : \mathbb{R}^d \ni e_i \mapsto v_i \in \mathbb{R}^n \quad \text{(surj)}, \quad \pi^* : (\mathbb{R}^n)^* \to (\mathbb{R}^d)^* \quad \text{(inj)}$$

を得る．さらに

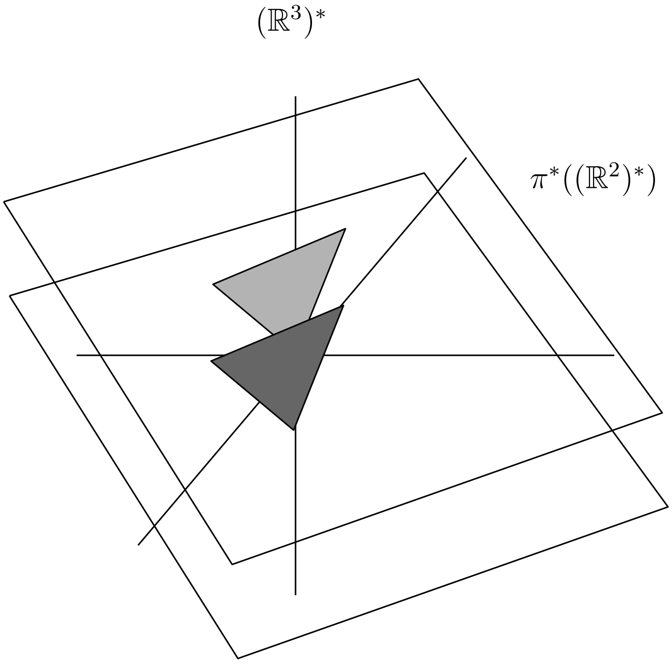
$$\pi^* - \lambda : (\mathbb{R}^n)^* \to (\mathbb{R}^d)^*$$

をアフィン写像とする．この像を A とすれば，これは n 次元アフィン空間である．このとき $(\pi^* - \lambda)(\Delta) = \mathbb{R}^d_- \cap A$ となる．

Proof. $x \in \mathbb{R}^n$ とすると $(\pi^* - \lambda)(x) \in A$ であり，

$$\begin{aligned}(\pi^* - \lambda)(x) \in \mathbb{R}^d_- &\iff \langle \pi^*(x) - \lambda, e_i \rangle \leq 0\ \forall i \\ &\iff \langle x, \pi(e_i) \rangle - \lambda_i \leq 0\ \forall i \\ &\iff \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i\ \forall i \\ &\iff x \in \Delta\end{aligned}$$

となるので. □



そこで，$\Delta \cong \mathbb{R}^d_- \cap A$ となる．$\mathbb{T}^d$ の $\mathbb{C}^d$ へのハミルトン作用を考えたとき，標準的なモーメント写像を考える

$$\phi_s : \mathbb{C}^d \ni (z_1, \cdots, z_d) \mapsto -\pi(|z_1|^2, \cdots, |z_d|^2) \in (\mathbb{R}^d)^*$$

である．この像は $\mathbb{R}^d_-$ となる．(ϕ_s の s は standard のこと)．

このとき次の事実が成立する．

- $\phi_s^{-1}(A) \subset \mathbb{C}^d$ はコンパクト部分多様体である．実際，$z \in \phi_s^{-1}(A)$ とすれば，$\phi_s(z) \in A \cap \mathbb{R}^d_-$ であるので，

$$\phi_s(z) = -\pi(|z_1|^2, \cdots, |z_d|^2) \in (\pi^* - \lambda)(\Delta) = \Delta' - \lambda = \phi(Z) - \lambda = \phi_s(Z)$$

となる．よって，$z \in Z$ を意味する．つまり $\phi_s^{-1}(A) = Z$ であるので，これはコンパクトである．$i : \phi_s^{-1}(A) \mapsto \mathbb{C}^d$ を埋め込みとすれば $i^*\omega_0$ は閉 2-form

であるが一般に退化する．そして，その核は積分分布を与える．その葉層構造を **null foliation** という．(Theorem 10.3.7 で見たように，ハミルトニアントーラス作用の場合には，軌道は必ず isotropic submanifold になる．null 方向が N の軌道方向．つまり積分部分多様体が N の軌道である．そして N は $\phi_s^{-1}(A)$ に自由に作用するので foliation となっている）．

- $i^*\omega_0$ の null folaition は主ファイバー束となる．つまり

$$\begin{array}{ccc} \phi_s^{-1}(A) & \xleftarrow[j]{} & N \\ \big\downarrow{\scriptstyle p} & & \\ M_\Delta = \phi_s^{-1}(A)/N & & \end{array}$$

そこで M_Δ 上で $i^*\omega_0$ を落とせば ω_Δ というシンプレクティック形式を得る．

- $\mathbb{T}^d = N \times \mathbb{T}^n$ の $\phi_s^{-1}(A)$ への作用を考えると（これは効果的ではない），この作用は，モーメント写像で $\phi_s(\phi_s^{-1}(A)) = \mathbb{R}^d_- \cap A \cong \Delta$ となるものをもつ．（ここでのモーメント写像は退化 2 次形式にたいするもの）．そこで，N で割って，$\mathbb{T}^n$ の作用として，$\mu : M_\Delta \to (\mathbb{R}^d)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$ というモーメント写像を得る（ここで，$(\mathbb{R}^d)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$ は $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^d$ から導かれるものである）．

$$\begin{array}{ccccc} \phi_s^{-1}(A) & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}^d & \xrightarrow{\psi_s} & (\mathbb{R}^d)^* \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & & & \big\downarrow{\scriptstyle pr_2} \\ M_\Delta = \phi_s^{-1}(A)/N & \xrightarrow{\mu} & & & (\mathbb{R}^n)^* \end{array}$$

Theorem 12.2.5. $x \in \mathbb{R}^d_- \cap A \cong \Delta$ に対して，$\mu^{-1}(x)$ は *single* $\mathbb{T}^n$ 軌道である．

Proof. $\mathbb{T}^d$ の $\mathbb{C}^d$ の作用でモーメント写像 $\phi_s : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^d$ を考えた．$y \in \phi_s(\mathbb{C}^d)$ に対して $\phi_s^{-1}(y)$ は $\mathbb{T}^d$ 軌道であることを証明する．

$$\phi_s^{-1}(y) = \{(z_1, \cdots, z_d) | -\pi|z_i|^2 = y_i\}$$

である．ここには明らかに $\mathbb{T}^d$ が作用する．適当な i に対して $y_i = 0$ なら部分トーラスとなるが，どちらにしろ推移的に作用している．よって（single）軌道である．

また，

$$y \in \Delta' = \pi^*(\Delta) \iff \phi^{-1}(y) \subset Z = \phi_s^{-1}(A)$$

である.（これはすでに，この section の最初に証明した）．そこで $y = \pi^*(x)$ $(x \in \Delta)$ とすれば，μ の定義から $\mu^{-1}(x) = \phi_s^{-1}(y)/N$ である．$\mathbb{T}^d = N \times \mathbb{T}^n$ であるので $\mu^{-1}(x)$ は $\mathbb{T}^n$ の軌道である．□

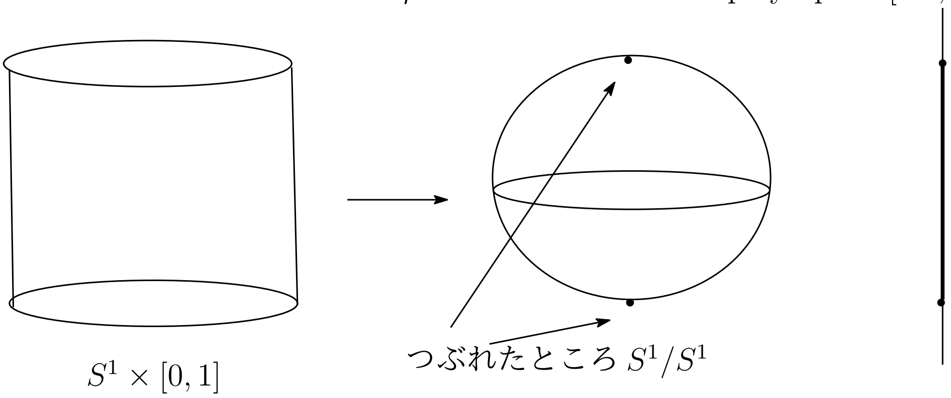
この定理からわかることは，**シンプレクティックトーリック多様体** $(M_\Delta, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ **に対して** μ **の像** Δ **は軌道空間であること**である．つまり $M_\Delta/\mathbb{T}^n \cong \Delta$ となる．もちろん Δ は多様体にはならないが，Δ は corner を持つ多様体である．面 F のすべての点 p 上で $T_p\Delta$ は $\mathbb{R}^n$ 内の F に接する部分空間である．

このことから，$(M_\Delta, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ を次のように視覚化できる．$\mathbb{T}^n \times \Delta$ を考える．p をその内部にあるとする（つまり Δ の端にはこない）．p での接空間 $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ 上で，ω_p を

$$\begin{cases} \omega_p(v,\xi) = -\omega_p(\xi, v) = \xi(v), & v \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in (\mathbb{R}^n)^* \\ \omega_p(v, v') = 0 = \omega_p(\xi, \xi') & v, v' \in \mathbb{R}^n, \quad \xi, \xi' \in (\mathbb{R}^n)^* \end{cases}$$

とすると，これはシンプレクティック形式である（$T^*\mathbb{R}^n$ の標準的シンプレクティック形式）．ω は $\mathbb{T}^n \times \Delta$ の内部で，シンプレクティック形式を定める．corner では $(\mathbb{R}^n)^*$ 内で消える方向があるので，ω は退化する．よって，$\mathbb{R}^n$ の対応する方向を消去する必要がある．そこで $\omega_p(v,\xi) = \xi(v)$ としていたが，面に直交する方向に対する補空間で生成されるトーラス部分群（これが stabiziler に対応）で $\mathbb{T}^n$ を割るのである．また $\mathbb{T}^n$ の $\mathbb{T}^n \times \Delta$ へのハミルトニアン作用は $\mathbb{T}^n$ 部分にのみ作用さる．そして，モーメント写像を Δ 方向へ射影する．これでシンプレクティックトーリック多様体が構成できる．(ちょっと説明がわかりずらいけど，下の例をみれば，意味がわかる)

EXAMPLE 12.2.2. S^1 が二次元球面 $(S^2, d\theta \wedge dh)$ に回転で作用している場合．モーメント写像として高さ関数 $\mu = h$ をとる．moment polytope は $[-1, 1]$ である．



また，$(S^2, ad\theta \wedge dh)$ というシンプレクティック多様体を考えたときはモーメント写像は $2h$ であり，polytope は $[-a, a]$ である．これは $(S^2, d\theta \wedge dh)$ とはシンプレクティック多様体としては異なる．もしシンプレクティック同相が合ったとすると $\phi : S^2 \to S^2$ 微分同相で $\phi^*\omega = a\omega$ であるが，$a\int_{S^2}\omega = \int_{S^2}\phi^*\omega = \int_{\phi(S^2)}\omega = \int_{S^2}\omega$ となって矛盾する．

EXAMPLE 12.2.3. 直角二等辺三角形（right-angled isosceles triangle）Δ を考えて，$\mathbb{T}^2 \times \Delta$ から $\mathbb{CP}^2$ を構成できる．

$\mathbb{T}^2$ が $\mathbb{CP}^2$ のハミルトニアン作用としてして，

$$[z_0, z_1, z_2] \to [z_0, e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2]$$

を考えて（明らかに推移的），このときモーメント写像として

$$\mu([z_0, z_1, z_2]) = -\frac{1}{2}(\frac{|z_1|^2}{|z|^2}, \frac{|z_2|^2}{|z|^2})$$

とすればハミルトニアン作用である．このとき固定点を調べると，$[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]$ である．そしてこの像は $(0,0), (-1/2,0), (0,-1/2)$ であるのでこれらが囲む直角 2 等辺三角形が Δ である．

EXAMPLE 12.2.4. $\mathbb{CP}^3$ に $\mathbb{T}^3$ を

$$(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3})[z_0, z_1, z_2, z_3] = [z_0, e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2, e^{i\theta_3} z_3]$$

と作用させる．この stabilizer を計算する．モーメント写像は

$$\mu([z_0, z_1, z_2, z_3]) = -\frac{1}{2}(\frac{|z_1|^2}{|z|^2}, \frac{|z_2|^2}{|z|^2}, \frac{|z_3|^2}{|z|^2})$$

である．Delzant polytope の頂点に対応するところは不動点であったので，

$$[1,0,0,0], \quad [0,1,0,0], \quad [0,0,1,0], \quad [0,0,0,1]$$

の 4 点である．この像は

$$(0,0,0), \quad (-1/2,0,0), \quad (0,-1/2,0), \quad (0,0.-1/2)$$

である．辺に対応するところは

$$[a,1,0,0], \quad [a,0,1,0], \quad [a,0,0,1], \quad [0,a,1,0], \quad [0,a,0,1], \quad [0,0,a,1]$$

である．例えば，$[a,1,0,0]$ の像は

$$-1/2(\frac{1}{|a|^2+1}, 0, 0)$$

であり，$(0,0,0)$ と $(-1/2,0,0)$ を結ぶ辺である．そこで，

1. stabilizer が $\mathbb{T}^3$ となる点は，4 点で頂点に対応する．

2. stabilizer が $S^2 \subset \mathbb{T}^3$ となるものは，６個ある辺に対応する．

3. stabilizer が S^1 になるものが面に対応．

4. stabilizer が $\{e\}$ になるもの（主軌道である）が内部に対応する．

EXAMPLE 12.2.5. k を自然数として，Hirzebruch 曲面

$$W_k = \{([a,b],[x,y,z]) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2 | a^k y - b^k x = 0\}$$

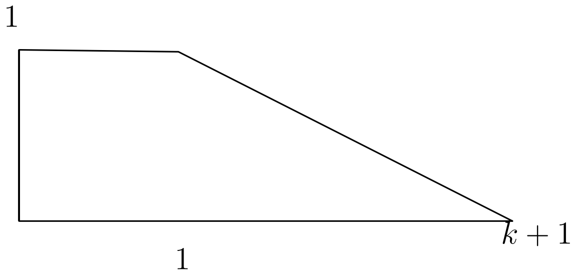
を考える．$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$ にケーラー形式をいれると，W_k は複素部分多様体なので，ケーラーになる．よって，シンプレクティック多様体である．さて，トーラス T^2 の $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$ への作用

$$(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})([a,b],[x,y,z]) = ([e^{i\theta_1}a, b],[e^{ik\theta_1}, y, e^{i\theta_2}z])$$

として定義する．このとき，モーメント写像は

$$\mu([a,b],[x,y,z]) = -\frac{1}{2}(\frac{|a|^2}{|a|^2+|b|^2} + k\frac{|x|^2}{|x|^2+|y|^2+|z|^2}, \frac{|z|^2}{|x|^2+|y|^2+|z|^2}$$

となる．この作用を W_k へ制限することができるが，その時のモーメント写像の像は，次のようになる．



12.3　応用

12.3.1　symplectic toric manifold と Morse 理論

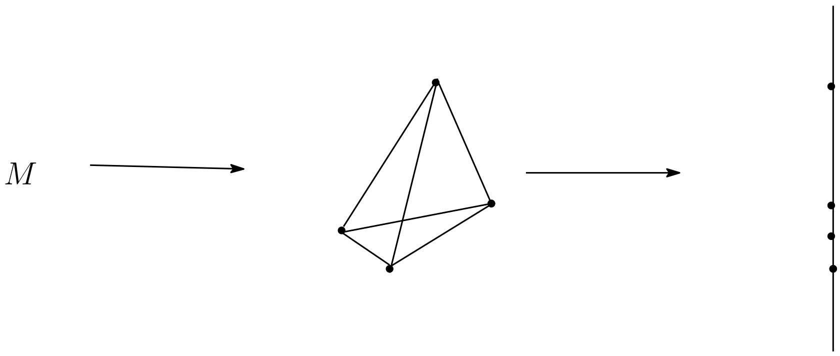
シンプレクティックトーリック多様体 $(M, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ を考える．$X \in \mathfrak{t}^* = \mathbb{R}^n$ で成分が $\mathbb{Q}$ 上独立であるものをとってくる．このとき，次が成立する（２，３番は Delzant polytope の条件からわかる）．

1. X が生成する 1 次元部分群 T^X が $\mathbb{T}^n$ 内で稠密．

2. X は $\Delta = \mu(M)$ の facets と平行でない．

3. Δ の頂点らを X 方向へ射影すると，異なる点に射影される．

さて，$\mu^X = \langle \mu, X \rangle : M \to \mathbb{R}$ とすれば，これは Δ の X 方向への射影である．



また，μ^X は Bott-Morse 関数であり，μ^X の臨界多様体は X が生成する部分群の固定点集合と一致するのであった．今の場合には，X の成分が $\mathbb{Q}$ 上独立 $\mathbb{T}^n$ の固定点であり，臨界点になる．つまり，μ^X はモース関数である．このことは次のようにしても証明できる．まず，μ^X の $\mathbb{T}^n$ 作用の固定点は臨界点である（lemma 10.3.4）．さらに，固定点の近傍 U の同変ダルブー座標を使って，モーメント写像は

$$\mu^X|_U = \langle \mu, X \rangle|_U = \mu^X(p) - \frac{1}{2}\sum \langle \lambda^{(k)}, X \rangle (x_k^2 + y_k)^2$$

となる（命題 10.3.12 をみよ）．X の各成分が $\mathbb{Q}$ 上独立であるので，$\langle \lambda^{(k)}, X \rangle \neq 0$ となるので，臨界点は非退化である．また，指数は偶数であることがわかる．lemma 10.3.4 から従うが，上の局所表示からも，指数は $-\langle \lambda^{(k)}, X \rangle < 0$ となるラベル k の数の 2 倍に一致することがわかる．よって，モース関数である．特に，完全モース関数である．

さらに，上の表示をみればわかるように，$-\lambda^{(k)}$ は $\mu(p)$ からである edge u_k に一致する．つまり，p の指数は，ベクトル X の方向に関して，点 $\mu(p)$ から上向内に伸びる edge の数を二倍したものに等しい（言い換えると X との edge の内積が正となる）．そして，指数が偶数しかないので，完全モース関数であるので，M の **Betti 数は polytope から読み取ることができる**のである．

Remark 12.3.1. 上向きでも，下向きでも，どちらかを採用すればよい．実際，X を $-X$ にすればよいからである（またはポアンカレ双対から）

Theorem 12.3.1. X を成分が $\mathbb{Q}$ 上独立とする．シンプレクティックトーリック多様体 $(M, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ の次元 $2k$ のホモロジー群は，k 個の *edge* が X の射影に関して上向きになるような頂点の数に一致する．また，**奇数次のホモロジー群はすべてゼロである．また，オイラー数は Δ の頂点の数に一致する．**

Remark 12.3.2. 実はコホモロジー環の情報も polytope から引き出せるのであるが，詳しいことは [Audin] や [Guillemin-Sternberg(equiv)] を見よ．オイラー数が頂点の数に一致することは，後で述べる局所化定理で別証明を与える．

12.3.2 シンプレクティックトーリック多様体の blow-up

G をコンパクトリー群として，(M,ω) がハミルトニアン G 空間として，q を G 作用の固定点とする．このとき，同変ダルブー定理から q の周りのダルブー座標 $(z_1,\cdots,z_n)$ がとれて，G 同変なものが存在する．さらに q が固定点であることから，これは G の $\mathbb{C}^n \cong T_qM$ の線形作用としてよいのであった．G がコンパクトであるので，G の作用から導かれる像は $H \subset GL(T_qM)$ は $U(n)$ の部分群の作用としてよい．そこで，$\mathbb{C}^n$ に $H \subset U(n)$ が線形に作用しているときの原点での blow-up を考えてみる．H の作用は線形であるので，

$$\tilde{\mathbb{C}}^n \ni (z,[w]) \mapsto (gz,[gw]) \in \tilde{\mathbb{C}}^n$$

と lift できる．またシンプレクティック形式として $j^*(\omega_0+\epsilon\omega_{FS})$ がとれる．ここで $j:\tilde{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$ である．そこで，

$$\mu(z,[w]) := \mu_1(z)+\epsilon\mu_{FS}(w)$$

とすれば，モーメント写像となることがわかる．ここで，μ_{FS} を定義しておく．$H \subset U(n)$ として，$\mathbb{C}P^n$ のハミルトニアン $U(n)$ 作用のモーメント写像 $\mu_{FS}:\mathbb{C}P^n \to \mathfrak{u}(n)^*$ を考える．具体的には $\frac{i}{2}\frac{zz^*}{|z|^2}$ であった．そして，$\mathfrak{u}(n)^* \to \mathfrak{h}^*$ を使って，ハミルトニアン G 作用とみなし，モーメント写像を同じ記号 μ_{FS} と書く．

Proof. G 同変性は明らかである．また，$d\mu^X = d\mu_1^X + \epsilon d\mu_{FS}^X = \iota_X j^*(\omega_0+\epsilon\omega_{FS})$ となる． □

また，ϵ-blow-up を作る際の，$f_\epsilon(z) = \frac{\sqrt{|z|^2-\epsilon}}{|z|}z$ も $U(n)$ 同変写像である．そこで，$\mathbb{C}^n$ の線形 G ハミルトニアン作用は，自然に $\tilde{\mathbb{C}}^n$ の線形 G ハミルトニアン作用へと拡張させる．

以上から，**(M,ω) がハミルトニアン G 空間の固定点 q での一点 blow-up を考えたとき，$(\tilde{M},\tilde{\omega})$ のハミルトニアン G 作用へと自然に拡張される．**

さて，シンプレクティックトーリックの場合を考えよう．Δ を n 次元の Delzant polytope として，対応するシンプレクティックトーリック多様体を $(M_\Delta,\omega_\Delta,T^n,\mu_\Delta)$ とする．この固定点 q（polytope の頂点に対応）で，blow-up したときに，上で述べたように blow-up した多様体 Δ_ϵ もハミルトニアン T^n 作用があり，もとの作用が

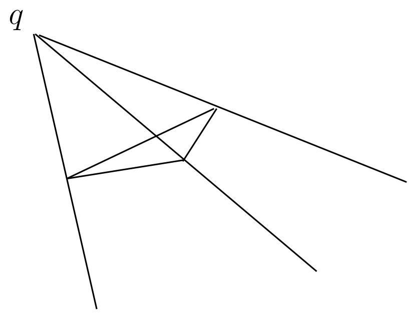
効果的なので，blow-up した多様体にも効果的な作用である．よって，blow-up したものもシンプレクティックトーリック多様体になる．そのとき Delzant polytope がどうなるかを考えたい．Delzant plolytope Δ とシンプレクティックトーリック多様体 M_Δ の対応を考えると，固定点 q に対応した頂点 $p=\mu_\Delta(q)$ の近傍の様子が変化するはずである．実際，次が成立する．

Theorem 12.3.2. $(M_\Delta, \omega_\Delta, T^n, \mu_\Delta)$ の固定点 q における ϵ *blow-up* は，Δ の頂点 $p=\mu_\Delta(q)$ を，n 頂点

$$p+\epsilon u_i, \quad i=1,\cdots,n$$

に取り換えた *Delrzant polytope* Δ_ϵ が対応する．ここで，$u_1,\cdots,u_n$ は頂点 p から内側にでる *primitive vector* である．つまり，頂点 p から出る辺は $p+tu_i$（$t\geq 0$）の形をしている．

　このように，固定点での *blow-up* は，固定点に対応した角を Δ から切り取ったものである．



Proof. cut した polytope が Delzant 条件を満たすことは容易にわかる．また，blow-up は頂点を $(\mathbb{C}P^{n-1}, \epsilon\omega_{FS})$ に変更したものであるので，上の定理のようになることは想像できる．実際に証明してみよう．固定点の近傍を $U\subset\mathbb{C}^n$ とし，blow-up

$$\tilde{U}=\{(z,[w])\in U\times\mathbb{C}P^{n-1} | z=\lambda w\}$$

を考える．トーラス作用の固定点の近傍は，局所凸性定理（theorem 10.3.11）により，μ_Δ は，$u_1,\cdots,u_n$ が存在して，

$$\mu_\Delta=\mu_\Delta(p)+\frac{1}{2}\sum|z_i|^2u_i\in\mathfrak{t}^*=\mathbb{R}^n$$

とかけ，モーメント写像による像は

$$q+\sum s_iu_i \quad s_i\geq 0$$

となるのであった．もちろん，これらの $u_1, \cdots, u_n$ は頂点 q から出る辺に一致している．この作用を blow-up へ拡張したとき，$(\mathbb{C}P^{n-1}, \epsilon\omega_{FS})$ に対しるモーメント写像は，

$$\epsilon\mu_{FS} = \epsilon\frac{1}{2}\sum\frac{|w_i|^2}{|w|^2}u_i$$

となる．そこで，

$$\mu_\Delta + \epsilon\mu_{FS}$$

の像を考えればよい．　□

第13章　同変コホモロジー・局所化・Duistermatt-Heckman Theorem

Duistermatt-Heckman Theorem （DH 定理）とは，トーラスハミルトニアン作用がある場合に，シンプレクティック体積をモーメント写像で移せば，piecewise polynomial 関数（DH 多項式）になることである．一方．局所化定理を使って，モーメント写像の指数関数の積分が，作用の固定点の近傍の情報で書けるという定理も DH 定理という．これらの関係は，DH 多項式のフーリエ変換がモーメント写像の振動積分となるということで繋がっている．また，局所化定理は，モーメント写像の振動積分の漸近展開を考えたとき，exact な展開を与えるということを述べている．この Section の流れは次のよう：

- Section 13.1 では，S^1 作用の場合の DH 定理を述べる．
- Section 13.2 において，トーラス作用の場合の DH 定理を証明する．このために，同変コホモロジーを導入する．同変コホモロジーとは G が作用している多様体のコホモロジーである．同変コホモロジーにおいて重要なカルタン作用素を構成し，同変特性類を導入する．そして，カルタン作用素を使って DH 定理を証明する．
- Section 13.3 では，局所化定理を S^1 作用の場合で固定点が孤立している場合に証明する．局所化定理は留数定理みたいなもので，積分が作用の固定点の近傍の情報のみで書けるという定理である．次に振動積分の停留位相近似の概略を述べて，モーメント写像の場合には局所化定理と合わせることにより，近似の error-term が消えていることを見る（これは驚くべきことである）．局所化定理には Berline-Vergne の方法と Atiyah-Bott の方法があるのだが，この Section 13.3 は Berlne-Vergne の方法である．
- Section 13.4 では，トーラス作用の場合や固定点が孤立してるとは限らない場合について Atiyah-Bott 流に局所化定理を証明する（微分位相幾何的な方

法）．その際，Berezin 積分（フェルミオン）や Mahai-Quillen による普遍トム形式を導入する．ベクトル束のトム形式は，普遍トム形式とカルタン作用素を用いることに作ることができる．そして，トム形式を使って局所化定理を証明する.（別に，ここまで大風呂敷を広げなくても証明できるのであるが，勉強のためです）．

この章に関しては，Guillemin, Sternberg の「supersymmetry and equivariant de Rham theory」[Guillemin-Sternberg(equiv)] や Berline, Getzler, and Vergne「heat kernels and Dirac operators」[Berline-Getzler-Vergne] などを見よ．

13.1 Duistermatt-Heckman Polynomial

(M,ω) をシンプレクティック多様体として $\omega^n/n!$ をシンプレクティック体積要素とする．この体積要素に関する可測集合全体を考える（それらはボレル集合体をなす）．

Definition 13.1.1. M 内の Borel 部分集合 U の **Liouville measure（またはシンプレクティック測度）とは**

$$m_\omega(U) = \int_U \frac{\omega^n}{n!}$$

となるものである．

Remark 13.1.1. Borel 部分集合の集合 $\mathcal{B}$ は，コンパクト部分集合で生成される σ 集合族である．つまり $A, B \in \mathcal{B}$ なら，$A \setminus B \in \mathcal{B}$ となり．$A_i \in \mathcal{B}$ なら $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$ となるもの.（あまり深く考えずに可測な集合と思えばよい．詳しくはルベーグ積分の本など）

G をトーラスとして，(M,ω,G,μ) **をハミルトニアン** $G=\mathbb{T}^k$ **空間とする．またモーメント写像は proper 写像と仮定**する．

Definition 13.1.2. Dusitermatt-Heckman 測度 m_{DH} とは $\mathfrak{g}^*$ 上の測度であり，シンプレクティック測度 m_ω を $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ で push-foward したもの．つまり $\mathfrak{g}^*$ 内の任意の Borel 部分集合 U に対して，

$$m_{DH}(U) = (\mu_* m_\omega)(U) := \int_{\mu^{-1}(U)} \omega^n/n!$$

コンパクトサポートをもつ関数 $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対して，この DH 測度に関して積分を定義する，

$$\int_{\mathfrak{g}^*} h dm_{DH} = \int_M (\mu^* h)\frac{\omega^n}{n!}$$

（μ は porper と仮定していたことに注意）．

$\mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^n$ であるが，ここには標準的なユークリッド測度 m_0 がある．このとき m_{DH} と m_0 の関係は Radon-Nikodyum 微分 dm_{DH}/dm_0 で書かれる．つまり，

$$\int_{\mathfrak{g}^*} hdm_{DH} = \int_{\mathfrak{g}^*} h\frac{dm_{DH}}{dm_0}dm_0$$

をみたすものである.（このあたりも詳しいことはルベーグ積分の本などを参照）.

Theorem 13.1.1 (Duistermatt-Heckmann). *$(M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^k, \mu)$ をハミルトニアン $\mathbb{T}^k$ 作用とする．$\mathbb{R}^k = Lie(\mathbb{T}^k)$ 上の測度である DH 測度 m_{DH} はユークリッド測度 m_0 の picewise 多項式倍である．つまり Radon-Nikodyum 微分*

$$f = \frac{dm_{DH}}{dm_0}$$

が picewise 多項式．より詳しく言えば $U \subset \mathbb{R}^k$ をボレル部分集合とすれば，

$$m_{DH}(U) = \int_U f(x)dx$$

となる．ここで，$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ は μ の regular 値からなる領域で多項式となるものである（これが picewise 多項式の定義．regular 値は $\mu(M)$（polytope）内で dense であった）． **この多項式 f を *Duistermatt-Heckmann* 多項式とよぶ．**

この section では，S^1 の場合に証明する．さらに，section 13.2 においてカルタン作用素を使って一般の場合を証明する．

EXAMPLE 13.1.1. シンプレクティックトーリック多様体 $(M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ があったとき，Duistermatt-Heckmann 多項式は $(2\pi)^n$ である．特に

$$\int_M \omega^n/n! = (2\pi)^n \int_{\Delta=\mu(M)} dx$$

となる．つまり M **のシンプレクティック体積は polytope のユークリッド体積を計算すればよい．** 証明は後述.（$(2\pi)^n$ はトーラスのリー環を $2\pi\mathbb{R}^n$ とするか，$\mathbb{R}^n$ とするかによって，テキストによって異なる）.

EXAMPLE 13.1.2. $(S^2, \omega = d\theta \wedge dh, S^1, \mu = h)$ の場合を考える．この像は $[-1, 1]$ である．$[a, b] \subset [-1, 1]$ のユークリッド測度は $m_0([a, b]) = b - a$ である．一方 Duistermatt-Heckmann 測度は

$$m_{DH}([a, b]) = \int_{\{(\theta,h)\in S^2 | a\leq h\leq b\}} d\theta dh = 2\pi(b - a)$$

となる．つまり

$$m_{DH} = 2\pi m_0$$

が成立している．

13.1.1 簡約空間に対する局所形式

$(M, \omega, G = \mathbb{T}^n, \mu)$ をハミルトニアン G 空間とする．また μ を proper とする．G が $\mu^{-1}(0)$ に自由に作用しているとする（proper から $\mu^{-1}(0)$ はコンパクトである）．このとき $t \in \mathfrak{g}^*$ が 0 に十分近いなら $\mu^{-1}(t)$ 上にも G は自由に作用する（slice 定理などをつかえばよい）．

このとき

$$M_0 = M_{red} = \mu^{-1}(0)/G, \quad M_t = \mu^{-1}(t)/G$$

はシンプレクティック多様体になるが，このときのシンプレクティック形式を ω_0, ω_t とする．これら二つのシンプレクティック多様体はどのような関係にあるだろうか?

簡単のため S^1 の場合に見ていく（一般の場合は同変コホモロジーを導入した後で述べる）．$Z = \mu^{-1}(0)$ として $i : Z \to M$ を埋め込みとする．自由に作用という仮定から主 S^1 束 $Z \to M_0$ を得る．さらに $\alpha \in \Omega^1(Z)$ を接続とする．これは S^1 束の場合なので $L_{X^*}\alpha = 0$, $\iota_{X^*}\alpha = 1$ をみたす．ここで X^* は $1 \in Lie(S^1)$ 対応する基本ベクトル場．さて $Z \times (-\epsilon, \epsilon)$ 上に 2-from を次で定義する．

$$\sigma = \pi^*\omega_0 - d(x\alpha) = \pi^*\omega_0 - dx \wedge \alpha - xd\alpha, \quad x \in (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} = \mathfrak{g}^*$$

Lemma 13.1.2. σ は ϵ が十分小さいとき $Z \times (-\epsilon, \epsilon)$ 上のシンプレクティック形式になる．

Proof. まず明らかに σ は閉形式である．また点 $x = 0$ へ制限すれば

$$\sigma|_{x=0} = \pi^*\omega_0 + \alpha \wedge dx$$

である．簡約定理の証明をみればわかるように Z 上で $i^*\omega = \pi^*\omega_0$ の isotropic 部分空間は軌道方向であった．そこで $i^*\omega(X^*, \cdot) = 0$ となってしまうが，

$$(\alpha \wedge dx)(X^*, \partial_x) = 1$$

であるので σ は $Z \times \{0\}$ の各点において非退化である．ある点で非退化なら，その十分小さい近傍でも非退化であった．Z はコンパクトなので，x を 0 の十分小さい近傍をとれば（ϵ を十分小さくとれば）非退化である． □

S^1 を $Z \times (-\epsilon, \epsilon)$ の第一成分へ作用させるとする．このとき $\pi^*\omega_{red}$ は S^1 不変で $L_X\alpha = 0$ であったので，σ は S^1 不変である．さらに，モーメント写像を

$$x : Z \times (-\epsilon, \epsilon) \ni (z, x) \to x \in (-\epsilon, \epsilon)$$

とすれば，ハミルトニアン作用である．

Proof. まず S^1 不変であることは明らかである．さらに

$$\iota_{X^*}\sigma = -\iota_{X^*}d(x\alpha) = -L_X(x\alpha) + d\iota_X(x\alpha) = -xL_X\alpha + dx = dx$$

であるので，モーメント写像である． □

Lemma 13.1.3. Z の M 内の近傍と上の $Z\times(-\epsilon,\epsilon)$ の間には同変シンプレクティック同相（モーメント写像も込めて）が存在する．

Proof. $Z\times\{0\}$ をシンプレクティック多様体 $Z\times(-\epsilon,\epsilon)$ へ埋め込む．それを $i_0 : Z \mapsto Z\times(-\epsilon,\epsilon)$ とする．これが coistoropic 埋め込みであることを確かめる．$v \in T_pZ^\Omega$ とは $\sigma(v,w)=0$（$\forall w \in T_pZ$）であった．そこで $v = v_0 + b\partial_x \in T_{(p,0)}(Z\times(-\epsilon,\epsilon))$ とすると，$X_p^* \in T_pZ$ であり，

$$\sigma(v_0 + b\partial x, X_p^*) = \omega(v_0, X^*) - b\alpha(X^*) = -b$$

となるので $b=0$ である．よって $v = v_0$ となり $T_pZ^\Omega \subset T_pZ$ が成立する．よって coitoropic 部分多様体である．さらにこの埋め込みは明らかに S^1 同変である．一方 $i : Z \to M$ を自然な埋め込みとする．$Z = \mu^{-1}(0)$ は coistoropic 埋め込みであった．さらに S^1 同変でもある．

　また $i_0^*\sigma = i^*\omega$，$i_0^*x = i^*\mu = 0$ である．このとき coisotropic 埋め込み定理の同変版により，$i_0(Z), i(Z)$ の S^1 同変近傍 U_0, U_1 が存在して，$\phi : U_0 \to U_1$ がシンプレクティック同相で $\phi\circ i_0 = i_1$ かつ $x = \phi^*\mu_1$ となるものが存在する．ここで，必要なら ϵ をさらに小さくとる． □

　そこで，$M_t = \mu^{-1}(t)/S^1$ を調べるには，$Z\times(-\epsilon,\epsilon)$ に対して調べればよい．すなわち

$$x^{-1}(t)/S^1 \quad (t\text{ は十分小さい})$$

を調べればよい．

Proposition 13.1.4. α を $\pi : \mu^{-1}(0) \to M_0 = M_{red} = \mu^{-1}(0)/S^1$ 上の接続として，β をその曲率（M_{red} 上の 2-*form*）とする．このとき ***level*** t での簡約空間 $(M_t = \mu^{-1}(t)/S^1, \omega_t)$ は

$$(M_{red}, \omega_{red} - t\beta)$$

とシンプレクティック同相である．

Proof. (M_t,ω_t) はハミルトン S^1 空間 $(Z\times(-\epsilon,\epsilon),\sigma,S^1,x)$ のレベル t に対する簡約空間とシンプレクティック同相である．次に，$x^{-1}(t) = Z\times\{t\}$ であり S^1 は第一成分にのみ作用する．よって $x^{-1}(t)/S^1$ と $Z/S^1 = M_{red}$ と微分同相である．以

上から M_t と M_{red} は微分同相である．そこでシンプレクティック形式を見てみる．σ の $Z\times\{t\}$ への制限は dx 方向はないので

$$\sigma|_{Z\times\{t\}} = \pi^*\omega_{red} - td\alpha$$

となる．さらに $d\alpha = \pi^*\beta$ であるので，$x^{-1}(t)/S^1$ 上では

$$\omega_{red} - t\beta$$

である． □

上の命題では M_t と M_{red} の同一視は，接続の取り方に依存する．しかし主束 $Z\to M_{red}$ の曲率のコホモロジー類は接続によらないのであった．

Theorem 13.1.5. 上で作った簡約空間の ω_t のコホモロジー類は t に線形に依存している．つまり

$$[\omega_t] = [\omega_{red}] + tc$$

ここで $c = [-\beta] \in H^2_{deRham}(M_{red})$ は主 S^1 束 $\mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/S^1$ の第一チャーン類．

そこで，二つの接続 $\alpha(0), \alpha(1)$ から上の方法で $\omega_t(0), \omega_t(1)$ を作る．このとき $\alpha(1) - \alpha(0) = a \in \Omega^1(M)$ となるので，$\alpha(s) = \alpha(0) + sa$（$0 \le s \le 1$）とすれば

$$\omega_t(s) = \omega_{red} - t(\beta + sda)$$

と書ける．これはシンプレクティック形式で $\omega_t(0)$ と $\omega_t(1)$ を結ぶものであり，さらに

$$[\omega_t(s)] = [\omega_{red}] + tc$$

となるので $\omega_t(s)$ のコホモロジー類は s に依存しない．つまり，異なる接続を取って簡約空間 M_t を作ったとしても，それらイソトピックであることがわかる．よってシンプレクティック同相である.（Z はコンパクトだったので M_t もコンパクトであることに注意）.

Remark 13.1.2. このノートでは S^1 のリー環を $\mathbb{R}$ と同一視している．つまり $t\mapsto e^{2\pi it}$ である．このため $\mathbb{R}$ の生成元は 1 であり，これに対する基本ベクトル場を X^* としている．接続も $\iota_{X^*}\alpha = 1$ となる．曲率は $\beta = d\alpha$ である．

ふつうの書き方では S^1 のリー群とリー環の対応は指数写像をもちいて，$t\mapsto e^t$ とすべきであるので，$\sqrt{-1}\mathbb{R}$ をリー環として，$\exp : \sqrt{-1}\mathbb{R} \ni it \mapsto e^{it} \in U(1)$ となる．そこで，先ほどの生成元 1 は $2\pi\sqrt{-1}$ に対応する．よって，対応するベクトル場を X^* とすれば接続は $\iota_{X^*}A = 2\pi\sqrt{-1}$ となり，曲率は $B = dA$ である．このときの第一チャーン類は $c = [\frac{i}{2\pi}B]$ となる．よってわれわれの記号と対応させるなら $A = 2\pi i\alpha$ であり，$B = 2\pi i\beta$ であるので，$c = [\frac{i}{2\pi}B] = [-\beta]$ となる．

この subsection で述べたことは k 次元トーラス作用の場合でも成立する．これについては同変コホモロジーを導入した後で証明する．また，M_{red} が orbifold の場合でも成立する．0 が μ の正則値なら，$\mu^{-1}(0)$ に G は自由に作用するとは限らないが，局所自由に作用する．そして，$\mu^{-1}(0)/G$ は orbiforld になるのであった．このときにも，$\mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/G$ 上に接続（の一般化）を定義することができ，同様の議論が可能である．

また，可換でないコンパクトリー群の場合には，0 の余随伴軌道は 0 であるが，その近くでは違う軌道が現れるので，成立しない．しかし次のことが成立する．(M, ω, G, μ) をハミルトニアン G 作用とする．また 0 を正則値とする（M_{red} は orbifold かもしれない）．このとき余随伴軌道に関した簡約空間 $\mu_{\mathcal{O}_\lambda}^{-1}(0)/G$ は M_{red} のファイバーを $\mathcal{O}_\lambda$ とするファイバー束になり，$\omega_\lambda = \pi^*\omega_{red} + \Omega_\lambda$ となる．ここで Ω_λ はファイバーである余随伴軌道上の標準的シンプレクティック形式.

13.1.2　シンプレクティック体積の変形．DH 定理の証明

(M, ω, S^1, μ) を $2n$ 次元のハミルトニアン S^1 空間とする．レベル x に対する簡約空間を (M_x, ω_x) とする．ただし x は十分小．このとき上で見たことから，Z の M 内での近傍と $Z \times (-\epsilon, \epsilon)$ がシンプレクティック同相であり，

M_x のシンプレクティック体積を考えると

$$vol(M_x) = \int_{M_x} \frac{\omega_x^{n-1}}{(n-1)!} = \int_{M_{red}} \frac{(\omega_{red} - x\beta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

となる．これは x **に対する次数** $n-1$ **の多項式**である（これが接続のとりかたによらないことは前 subsection で証明した）．さらに，$\iota_X\alpha = 1$ なので

$$f(x) := vol(M_x) = \int_Z \frac{\pi^*(\omega_{red} - x\beta)^{n-1}}{(n-1)!} \wedge \alpha$$

となる（ω_x^{n-1} は偶数次数なので α は前に書いてもかまわない）．このように **DH 多項式は簡約空間** M_x **のシンプレクティック体積**である．

Proof. DH 多項式となることを証明する前に $\iota_X\alpha = 1$ について簡単に説明しておく．これが意味することは fiber 方向には，$\alpha|_{fiber} = \frac{1}{2\pi}d\theta$ と書けることを意味する．よって，ファイバー方向の積分は，

$$\int_{S^1} \alpha = 1$$

となる．section 13.4.3 でみるファイバー積分 π_* で書けば，$\pi_*\alpha = 1$ であり，

$$\int_Z \pi^*\phi \wedge \alpha = \int_{M_{red}} \phi \wedge \pi_*\alpha = \int_{M_{red}} \phi$$

という公式が成立する．

DH 測度を考える．$(-\epsilon, \epsilon)$ 内のコンパクト集合を $U \subset (-\epsilon, \epsilon)$ として，定義から

$$m_{DH}(U) = \int_{\mu^{-1}(U)} \frac{\omega^n}{n!}$$

であった．さらに $(\mu^{-1}((-\epsilon, \epsilon)), \omega)$ は $(Z \times (-\epsilon, \epsilon), \sigma)$ とシンプレクティック同相かつハミルトニアン S^1 空間としても同型であったので，

$$m_{DH}(U) = \int_{Z \times U} \frac{\sigma^n}{n!}$$

となる．$\sigma = \pi^*\omega_{red} - d(x\alpha)$ であったので，

$$\sigma^n = n(\pi^*\omega_{red} - xd\alpha)^{n-1} \wedge \alpha \wedge dx$$

となるので，

$$m_{DH}(U) = \int_U [\int_Z \frac{\pi^*(\omega_{red} - x\beta)^{n-1}}{(n-1)!} \wedge \alpha] \wedge dx = \int_U f(x)dx = \int_U \frac{dm_{DH}}{dm_0} dx$$

となる． □

この議論は x が十分小さい（0 に近い）ときの議論である．他のレベルの場合には μ の正則値に対する近傍なら μ を $\mu' = \mu - \xi$ とずらすことによりまったく同様の議論ができる．ただし正則値なら局所自由で簡約空間は orbifold になる可能性がある．その場合もほぼ同様である（接続に似たものを定義すればよい）．また正則値の逆像は部分多様体になるのであったので，$\mu^{-1}(\xi)$ での積分の公式は同様のことが成立する．今の場合（S^1 作用の場合）には μ による像は作用の固定点の像を結んだ polytope（直線，半直線，線分など）である（もちろん，Delzant polytope とは限らないので，線分の内部に固定点がいつくかあってもよい）．M のコンパクト性を仮定してないので像はコンパクトとは限らない．M をコンパクトとしておけば，すべての正則値に対しいてその近傍で同様の議論を繰り返せば，連続性から $f(x)$ が piece wise 多項式であることがわかる．(臨界値のところで，へんなことがおこる）．また，トーラス作用でも成立するのであるが，そのとき moment polytope は wall により分割されるのであった．そして，分割された内部が正則値であった．piecewise 多項式は，この内部では多項式であり，臨界値である wall 上で連続性が崩れることになる．

以上から，$h \in C^{\infty}_{cpt}(\mathfrak{g}^*)$ とすれば，

$$\int_M \mu^* h \frac{\omega^n}{n!} = \int_{\mathfrak{g}^*} h dm_{DH} = \int_{\mathfrak{g}^*} h(x) f(x) dx$$

がわかった．ここで f は μ の正則値で多項式となる piecewise 多項式．

EXAMPLE 13.1.3. シンプレクティックトーリック多様体 M の場合に，M のシンプレクティック体積と Delzant polytope Δ のユークリッド体積が等しいことを証明しておく．つまり，

$$\int_M \frac{\omega^n}{n!} = (2\pi)^n \int_{\Delta=\mu(M)} dx.$$

シンプレクティックトーリック多様体では，$\mu^{-1}(a)$ は single $\mathbb{T}^n$ 軌道であり，$a \in Int(\Delta)$ なら $\mu^{-1}(a)$ に $\mathbb{T}^n$ は自由に作用していた．よって，$\mu^{-1}(a)/\mathbb{T}^n$ は一点であり，$\mu^{-1}(a)$ の近傍 U は $\mu^{-1}(a) \times \mu(U)$ とシンプレクティック同相としてよい．$\mu^{-1}(a) \to \mu^{-1}(a)/\mathbb{T}^n$ は一点なので自明な $\mathbb{T}^n$ 束であるので，$f(x) = \int_{T^n} \alpha^n = (2\pi)^n$ となる．よって，

$$f(t) = \begin{cases} (2\pi)^n & t \in \Delta \\ 0 & t \notin \Delta \end{cases}$$

とすれば，$dm_{DH} = f(t)dt$ となる．そこで，

$$\int_M \frac{\omega^n}{n!} = (2\pi)^n \int_{\Delta=\mu(M)} dx.$$

が成立する．

注意 : 我々の記号だと $\int_{T^n} \alpha^n = 1$ となるのであるが，これは Remark で述べたように，我々が用いた $\mathfrak{g}$ の生成元 1 は $2\pi\sqrt{-1}$ に対応する．よってリー環 $\mathfrak{g}$ は $(2\pi)^n$ 倍されることになるので，矛盾はない．

次の命題は，局所化定理による DH の公式へとつなぐものである．

Proposition 13.1.6. M をコンパクトとして，$\mathfrak{g}$ 上の関数 $g : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ を

$$g(X) = \int_{m \in M} e^{i\omega} e^{i\mu^X(m)} = \int_M e^{i\mu^X} i^n \frac{\omega^n}{n!}$$

と定義すれば

$$g = i^n \hat{f}, \quad \hat{f} \text{ は } DH \text{ 多項式 } f \text{ のフーリエ変換}$$

（注意．$\int_M e^{i\omega} e^{i\mu^X}$ は積分が寄与する $2n$-*form* の部分のみを積分して，他は無視する）．

Proof. f のフーリエ変換は

$$\hat{f}(X) = \int_{\mathfrak{g}^*} e^{i\langle X,x\rangle} f(x)dx$$

である．そこで，$h(x) = e^{i\langle X,x\rangle}$ とすれば，

$$\begin{aligned} g(X) &= \int_{m\in M} e^{i\omega} e^{i\mu^X(m)} = \int_M \frac{(i\omega)^n}{n!} e^{i\langle X,\mu(m)\rangle} \\ &= \int_M \frac{(i\omega)^n}{n!} (\mu^* h)(m) = \int_{\mathfrak{g}^*} i^n h(t) f(t) dt \\ &= \int_{\mathfrak{g}^*} i^n e^{i\langle X,x\rangle} f(x)dx = i^n \hat{f}(X) \end{aligned}$$

が成立する． □

このように Duistermaat-Heckmann 多項式のフーリエ変換はモーメント写像とシンプレクティック形式で書ける．ただし，上の命題は picewise 多項式であることは使ってない．

上のフーリエ変換は局所化定理によって具体的に求めることができる．それは固定点の近傍の情報のみでかけるのである．よって，そこで得られる公式をフーリエ逆変換すれば，DH 多項式を具体的に書き下すことができる．言い換えば簡約空間 M_t のシンプレクティック体積の変化の様子がわかることになる．

13.2 同変コホモロジー

トーラス $\mathbb{T}^k$ の作用がある場合の Duistermaat-Heckmann 定理を同変コホモロジーを使って証明する．まずは，一般のコンパクト群に対する同変コホモロジーやカルタン作用素を考える．

13.2.1 同変コホモロジー

M を多様体として（連結）コンパクト群 G の作用があるとする．G がコンパクトであるので，M/G はハウスドルフ空間にはなるが，多様体になるとは限らない．G が自由に作用していれば M/G は多様体になる．

G が自由に作用している場合に M の同変コホモロジーを

$$H_G^*(M) := H^*(M/G)$$

で定義する．G が自由に作用していない場合にも同様のことを行いたい．そこで，G が自由に作用していないときには，G が自由に作用する空間 M_G を作る．

Definition 13.2.1. G をリー群とする．主 G 束 $EG \to BG$ が**普遍主 G 束**とは，任意の CW 複体 M に対して「$[M, BG]$（M から BG への写像のホモトピー同値類）」が「M 上の主 G 束の同型類全体」と一対一対応すること：

$$[M, BF] \ni f \mapsto f^*EG \in \{M \text{ 上の主 } G \text{ 束の同型類}\}$$

また，BG を**分類空間**と呼ぶ．

Proposition 13.2.1. 主 G 束 $P \to B$ が普遍主 G 束であるための必要十分条件は $\pi_k(P) = 0$（$k = 0, 1, 2, \cdots$）．

Proposition 13.2.2. **コンパクトリー群 G に対して G が自由に作用する可縮な空間が存在する，つまり普遍主 G 束 $EG \to BG = EG/G$ が存在する．**

Proof. 例えば，$G = U(n)$ の場合には，グラスマン多様体と Stiefel 多様体の無限列を考えることにより構成できる．$O(n)$ なども同様な方法で構成できる．他のコンパクト群については，$G \subset O(n)$ とみなすことで，構成できる．実際，$G \subset O(n)$ は $EO(n)$ に自由に作用しているので，主 G 束 $EO(n) \to EO(n)/G$ を考えると $EO(n)$ は可縮なので，普遍主 G 束になる．また，Milonr によると，G に対して $G*G*\cdots$ と無限の join が EG となる．このように，分類空間の色々な構成方法が知られているが，コンパクト G, H が同型なら BG, BH は（作用も含めて）ホモトピー同値である．その意味で，普遍 G 束は一意的である． □

EXAMPLE 13.2.1. $G = S^1$ のとき $ES^1 = S^\infty$, $BS^1 = \mathbb{CP}^\infty$ である．Hopf-fibration の帰納極限をとることによる．ここで，

$$\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2 \subset \cdots \subset \mathbb{C}P^n \subset \cdots, \quad S^3 \subset S^5 \subset \cdots$$

を考えて．$\mathbb{C}P^\infty = \cup_n \mathbb{C}P(n)$，$S^\infty = \cup_n S^{2n+1}$ としている．次のように，構成してもよい．H を（separable）複素ヒルベルト空間とすれば，単位球面 $S(H)$ は可縮である．そこで，無限次元の Hopf-fibering $S(H) \to P(H)$ を考えると，主 S^1 束の分類空間 $P(H)$ を得る．

コンパクト群 G のコホモロジー環は，奇数次のコホモロジーを生成元とする外積代数であることが知られている．

$$H^*(G:\mathbb{R}) = \wedge(u_1, \cdots, u_r), \quad u_i \in H^{2n_i - 1}$$

さらに，分類空間のコホモロジー環については，次のことが知られている（証明は Serre のスペクトル系列などを利用する）．

Theorem 13.2.3. G をコンパクト連結リー群として，そのコホモロジー環が

$$H^*(G:\mathbb{R}) = \wedge(u_1, \cdots, u_r), \quad u_i \in H^{2n_i-1}$$

とすれば，その分類空間のコホモロジー環は

$$H^*(BG;\mathbb{R}) = \mathbb{R}[v_1, \cdots, v_r] \quad v_i \in H^{2n_i}(BG;\mathbb{Q})$$

となり，多項式環であり $\mathfrak{g}$ **上の** G **不変多項式** $S(\mathfrak{g}^*)^G$ **と同型**である．

Definition 13.2.2. 主 G 束 $P \to M$ が f^*EG と書けたとする．このとき，$P \to M$ の**特性類**とは，$\phi \in H^*(BG;\mathbb{R})$ の引き戻し

$$f^*(\phi) \in H^{2n_i}(M;\mathbb{R})$$

のことである．

さて，話を元に戻して G が M に作用している場合を考える．EG は可縮であるので，$EG \times M$ は M と同じホモトピー型をもつ．よって，M/G の代わりに $(EG \times M)/G$ のコホモロジーを考えるのがよいであろう．

$g \in G$ の作用を

$$g : EG \times M \ni (u, x) \mapsto (u \cdot g, g^{-1}x) \in EG \times M$$

とする（右作用）．このとき

$$M_G := (EG \times M)/G = EG \times_G M$$

とする．自由に作用しているので，位相はかなりよい空間であり，多様体とならないけど代数的位相幾何で扱える空間となる．そこで M の**同変コホモロジー**を

$$H^*_G(M) := H^*(M_G)$$

と定義する．

Remark 13.2.1. $M_G \ni [v, x] \to [x] \in M/G$ を考える．点 $G \cdot x \in M/G$ のファイバーは EG を isotropy 群で割ったものである．そこで M に G が自由に作用すると仮定すれば，isotropy 群はすべて自明なので，M_G はファイバー EG のファイバー束である．EG 可縮なので，$H^*(M_G) = H^*(M/G)$ となり，先ほどの定義と矛盾しない．

また $\pi : M_G \ni [v,x] \to [v] \in BG$ はファイバーが M のファイバー束である．$r \in H^*(BG)$, $\alpha \in H^*_G(M)$ に対して

$$r\alpha = \pi^* r \wedge \alpha$$

とすることで，$H^*_G(M)$ は $H^*(BG)$ 加群となる（分類空間のコホモロジーは G 不変多項式と同型であった）．一方で，一般に $M_G \to M/G$ はファイバー束とはなるとは限らない．一点 $G \cdot x \in M/G$ 上の fiber は EG を x の stabilizer で割ったものである．

EXAMPLE 13.2.2. $M = \{pt\}$ の場合には stabilizer は G 自身である．よって fiber は $EG/G = BG$ であるので．$M_G = BG$ となる，よって

$$H^*_G(M) = H^*(BG).$$

このようにコホモロジー環は M がコンパクトとしても次元が有限でないことがある.（また，明らかに $H^*_G(M) \neq H^*(M/G) = H^*(\{pt\})$）.

EXAMPLE 13.2.3. K を G の閉部分リー群とする．EG が可縮であることから，普遍主 K 束 EK として EG をとることができ，$BK = EG/K = EG \times_K G/K$ が K に対する分類空間となる．そこで，

$$EG \times_K (G/K)$$

であるので，

$$H_G(G/K) = H(BK)$$

このように等質空間 G/K の同変コホモロジーは，K の分類空間のコホモロジーに一致する．

同変コホモロジーに対して，Mayer-Vietoris 系列を得ることができる．$M = U_1 \cup U_2 1$ を二つの G 不変な開集合の和とすれば，

$$\cdots \to H^k_G(M) \to H^k_G(U_1) \oplus H^k_G(U_2) \to H^k_G(U_1 \cap U_2) \to H^{k+1}_G(M) \to \cdots$$

が成立する（証明略），

EXAMPLE 13.2.4. $S^2 = U_+ \cup U_-$ として $U(1)$ が回転で作用しているとする．固定点が北極と南極である．さて，赤道には $U(1)$ は自由に作用するので，その同変コホモロジーは 0 次を除いて消えることになる．また，$U_\pm$ は pole にレトラクトなので，

$$H^2_{U(1)}(S^2) = H^*_{U(1)}(pt) \oplus H^*_{U(1)}(pt) = \mathbb{R}[u_1] \oplus \mathbb{R}[u_2]$$

13.2.2 カルタンモデル

同変コホモロジーを de Rham コホモロジーの言葉で表示したい．つまり G が作用する M に対して，適当な微分複体のコホモロジー環で $H_G^*(M)$ と同型となるものを見つけるのである．これについてはいろいろなモデルがあるが（詳細は [Guillemin-Sternberg(equiv)]），もっとも有用かつ広く知られている**カルタンモデル**について述べる（同型であることの証明は述べない）．論文によっては，位相幾何での同変コホモロジーを考えずに，このカルタンモデルを同変コホモロジーとしているものが多い．

G のリー環を $\mathfrak{g}$ とする．このリー環上の $\mathbb{C}$ 上多項式環を $S(\mathfrak{g}^*)$（対称テンソル積空間）と書く．また M 上の $\mathbb{C}$ 係数微分形式の空間を $\Omega^*(M)$ と書く．このとき

$$\Omega_G^*(M) := (\Omega^*(M) \otimes S(\mathfrak{g}^*))^G$$

を考える．ここで G の作用は $S(\mathfrak{g}^*)$ には余随伴で作用．M への G の作用は微分同相であるので，$g : M \to M$ を G の作用とすれば $a \in \Omega^*(M)$ に対して $(g^{-1})^*a$ として作用させる．

$f \in \Omega_G^*(M)$ を具体的に書いてみる．$\mathfrak{g}$ の基底を $\{X_i\}_i$ として，その双対（または座標関数）を $\{x^i\}_i$ とすると，

$$f = \sum_I x^I \otimes a_I \in S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(M)$$

とすれば $f \in \Omega_G^*(M)$ とは $\sum \mathrm{Ad}_g^*(x)^I \otimes (g^{-1})^* a_I = \sum x^I \otimes a_I$ となるものである．別の見方をすれば $f : \mathfrak{g} \to \Omega^*(M)$ で G 同変で多項式的なものである．つまり $f(\sum \xi^i X_i) = \sum \xi^I a_I$ で，$f(\mathrm{Ad}_g X) = (g^{-1})^* f(X)$ を満たすものである．

この $\Omega_G^*(M)$ に次数を入れる． $f = x^I \otimes a_I$（$|I| = p, a_I \in \Omega^k$）に対して $\deg(f) = k + 2p$ とする．(多項式の方を次数 2 とする気持ちは x^i が $H^*(BG)$ の 2 次コホモロジーに対応しているから)．

そこで $f = \sum x^I \otimes a_I \in \Omega_G^k(M)$，$X = \sum \xi^i X_i$ とすれば，

$$f(X) = f(X)_k + f(X)_{k-2} + \cdots = \sum_{|I|=0} a_0 + \sum_{i=1} \xi^i a_i + \sum_{|I|=2} \xi^I a_I + \cdots \in \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-2}(M) \oplus \cdots$$

と分解できる．一般には，このようなものの線形結合であるので，$f \in \Omega_G^*(X)$ は微分形式の次数により

$$f(X) = f(X)_n + f(X)_{n-1} + f(X)_{n-2} + \cdots + f(X)_0$$

と分解される（一般の元をとっているので X に対して何次式かはわからない）．

次に $\Omega_G(M)$ に微分（**同変外微分**）を

$$(Df)(X) = d(f(X)) - \iota_{X^*}f(X)$$

として入れる．ここで X^* は M 上の $X \in \mathfrak{g}$ から定まる基本ベクトル場であり，D は同変次数を一つ上げる作用素である（第二項は微分形式の次数が 1 下がり，多項式次数が 1（同変次数 2）上がるので）．

Remark 13.2.2. 外微分 d や ι_{X^*}，リー微分 L_{X^*} などは，微分形式にのみ作用している．そこで，$df(X)$ と書いても $(df)(X)$ と書いてもよい．

Proof. $f \in \Omega_G^*(M)$ なら $Df \in \Omega_G^*(M)$ となることを確かめる．G 不変とは $f(\mathrm{Ad}_g X) = (g^{-1})^* f(X)$ を満たすことであった．面倒なのでリー環レベルでみると．G 不変性は

$$f([Y,X]) + L_{Y^*}f(X) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

となる．また Df が不変とは $d(f(\mathrm{Ad}_g X)) - \iota_{(\mathrm{Ad}_g X)^*} f(\mathrm{Ad}_g X) = (g^{-1})^* Df(X)$ である．リー環レベルでみれば

$$df([Y,X]) - \iota_{[Y,X]^*}f(X) - \iota_{X^*}f([Y,X]) = -L_{Y^*}(df(X) - \iota_{X^*}f(X))$$

である．そこで，

$$\begin{aligned}
&df([Y,X]) - \iota_{[Y,X]^*}f(X) - \iota_{X^*}f([Y,X]) \\
=&-dL_{Y^*}f(X) - \iota_{-[Y^*,X^*]}f(X) + \iota_{X^*}L_{Y^*}f(X), \quad (f \text{ が同変なので}) \\
=&-L_{Y^*}df(X) + (L_{Y^*}\iota_{X^*} - \iota_{X^*}L_{Y^*})f(X) + \iota_{X^*}L_{Y^*}f(X) \\
=&-(L_{Y^*}df(X) - L_{Y^*}\iota_{X^*}f(X))
\end{aligned}$$

であるので証明できた．ここで $[Y,X]^* = -[Y^*,X^*]$ を用いた（G の作用は左作用なのでマイナスが付く）．　□

また同変外微分を別の書き方をすれば，

$$D = d - \sum x^i \iota_{X_i^*}$$

である．

Proof. $\alpha = x^I \otimes a_I$ とする．このとき $\alpha(X) = \alpha(\sum \xi^i X_i) = \sum \xi^I \alpha_I$ となるのであった．そして，

$$(D\alpha)(X) = d\alpha(X) - \iota_{X^*}\alpha(X) = \sum \xi^I d\alpha_I - \sum \xi^I \iota_{\sum \xi^i X_i^*}\alpha_I = \sum \xi^I d\alpha_I - \sum_{I,i} \xi^I \xi^i \iota_{X_i^*}\alpha_I$$

となるので，$D = d - \sum x^i \iota_{X_i^*}$ となる．　□

Lemma 13.2.4. $D^2=0$ であるので，$(\Omega_G^*(M),D)$ は微分複体でありコホモロジーが定まる．

Proof.

$$\begin{aligned}&(D^2f)(X)=D(Df)(X)=d(Df(X))-\iota_{X^*}Df(X)\\=&d(d(f(X))-\iota_{X^*}f(X))-\iota_{X^*}(df(X)-\iota_{X^*}f(X))\\=&-(d\iota_{X^*}+\iota_{X^*}d)f(X)\\=&-(L_{X^*}f)(X)=f([X,X])=0\end{aligned}$$

最後の項は f が G 同変であることを用いた． □

Lemma 13.2.5. 微分形式の外積により環構造が入る．そして $D(f\wedge g)=(Df)\wedge g+(-1)^kf\wedge Dg$ となる．ここで $f\in\Omega_G^k(M)$ である．このことからコホモロジーにも積が入る．

Proof. 積構造が入ることは問題ないであろう．また $f\in\Omega_G^k(M)=\sum_{p+2q=k}(\Omega^p(M)\otimes S(\mathfrak{g}^*)^q)^G$ であるので $(-1)^p=(-1)^{p+2q}=(-1)^k$ であることに注意．そこで $d(f(X)\wedge g(X))=df(X)\wedge g(X)+(-1)^pf(X)\wedge dg(X)$ 及び $\iota_{X^*}(f(X)\wedge g(X))=(\iota_{X^*}f(X))\wedge g(X)+(-1)^pf(X)\wedge\iota_{X^*}g(X)$ であることから，$D(f\wedge g)=(Df)\wedge g+(-1)^kf\wedge Dg$ を得る．コホモロジーにも積が入ることは明らかであろう．

□

以上からコホモロジー環 $H^*(\Omega_G^*(M),D)$ が定まる．そして次の定理が成立する．

Theorem 13.2.6 (同変ドラームの定理)**.** $(\Omega_G(M),D)$ から定まるコホモロジーを $H^*(\Omega_G^*(M),D)$ とすると，

$$H^*(\Omega_G^*(M),D)\cong H_G^*(M)=H^*(M_G)$$

という同型が成立する．

証明は Guillemin Sternberg の「supersymmetry and equivariant de Rham theory」[Guillemin-Sternberg(equiv)] などをみよ．なお，G がコンパクトでない場合には定理は成立するとは限らない．

EXAMPLE 13.2.5. M が一点のときを考えると，$H^*(BG)=H_G^*(pt)$ であった．一方カルタンモデルで計算した場合には $\Omega_G^*(pt)=S(\mathfrak{g}^*)^G$ であり，すべての元が $Df=0$ を満たすので，$H^*(\Omega_G^*(pt),D)=S(\mathfrak{g}^*)^G$ となるので，G 不変多項式全体である．特に，$H_G^*(pt)=H^*(\Omega_G^*(pt),D)$．

EXAMPLE 13.2.6. X, Y を G が作用する空間で $\phi : X \to Y$ が G 同変であるとする．このとき，$\phi^* : \Omega_G(Y) \to \Omega_G(X)$ が自然に導かれ，$D\phi^* = \phi^* D$ が成立する．特に，$\phi^* : H_G^*(Y) \to H_G^*(X)$ という環準同形を得る．

Proof. $x^I \otimes a_I \in \Omega_G^*(Y)$ とする．このとき $\phi^*(x^I \otimes a_I) := x^I \otimes \phi^* a_I$ と定義すれば，

$$g\phi^*(x^I \otimes a_I) = \mathrm{Ad}_g^*(x)^I \otimes (g^{-1})^* \phi^*(a_I) = \mathrm{Ad}_g^*(x)^I \otimes \phi^*(g^{-1})^*(a_I) = \phi^* g(x^I \otimes a_I)$$

となるので，$\phi^* : \Omega_G^*(Y) \to \Omega_G^*(X)$ となる．

$X_i \in \mathfrak{g}$ に対するベクトル場を X_i^* とする．つまり

$$(X_i^*)_x := \frac{d}{dt}((\exp tX_i)x)|_{t=0}$$

このとき $\phi : X \to Y$ が G 同変であるので，

$$\phi_*((X_i^*)_x) = \phi(\frac{d}{dt}((\exp tX_i)x))|_{t=0} = \frac{d}{dt}((\exp tX_i)\phi(x)) = (X_i^*)_{\phi(x)}$$

となる．つまり $\phi_*(X_i^*) = X_i^*$ が成立する．左辺の X_i^* は X 上のベクトル場．右辺の X_i^* は Y 上のベクトル場である（いわゆる ϕ 関係である．ϕ が微分同相でなくてもベクトル場が ϕ 関係となる例である）．

さて，同変外微分を $D = d - \sum x^i \iota_{X_i^*}$ と書けば，

$$\begin{aligned} D\phi^*(x^I \otimes a_I) &= x^I \otimes d\phi^*(a_I) - x^i x^I \otimes \iota_{X_i^*}\phi^*(a_I) = x^I \otimes \phi^*(da_I) - x^i x^I \otimes \phi^* \iota_{X_i^*} a_I \\ &= \phi^* D(x^I \otimes a_I) \end{aligned}$$

となるので，$D\phi^* = \phi^* D$ が成立する． □

EXAMPLE 13.2.7. M に G が作用するとして，$(S(\mathfrak{g}^*))^G$ 加群として

$$H_G(M) = (S(\mathfrak{g}^*))^G \otimes H(M)$$

が成立するとき，同変 formal な多様体とよぶ（通常の formal な多様体については位相幾何の本を参照）．つぎの場合には同変 formal となることが知られている．

- $H^q(M) = 0$（q が奇数）
- $H_G(M) \to H(M)$ が全射，
- M が G 同変モース関数で，臨界点は偶数指数のみ．
- M が G ハミルトニアンなシンプレクティック多様体（by Ginzburg and Kirwan）

- G がコンパクト群．H が極大閉部分群のとき G/H は同変 formal.

注意 : 上は加群としての同型が成立するという意味であり，代数同型とは限らない．

次に，同変コホモロジーに関するいくつかの操作を説明する．

まず $f \in \Omega_G^*(M)$ に対して，0 を代入することにより $\Omega^*(M)$ の元を得る．つまり

$$\Omega_G^*(M) \ni f \mapsto f(0) \in \Omega^*(M)^G \subset \Omega^*(M)$$

という写像が定まる．逆に $a \in \Omega^*(M)^G$ に対して，$f(0) = a$ を満たす $f \in \Omega_G^*(M)$ を a の**同変拡張**という．また $(Df)(0) = df(0) - 0 = d(f(0))$ が成立するので，この写像はホモロジー群まで落ちて，

$$H_G^*(M) \ni [f] \mapsto [f(0)] \in H^*(M)$$

が成立する．

Remark 13.2.3. $M_G \to BG$ は M をファイバーとするファイバー束であるが，上の写像は $i : M \to M_G$ から導かれる引き戻しに対応する．

次に $M_G \to BG$ のファイバー積分（push-forward）に対応するものを考える．M をコンパクトとして，ファイバー積分

$$\pi_* : \Omega_G^*(M) \ni f \mapsto \int_M f \in S(\mathfrak{g}^*)^G$$

を得る．この写像の意味を考えよう．$X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$f(X) = f(X)_n + f(X)_{n-1} + f(X)_{n-2} + \cdots + f(X)_0$$

と分解すれば

$$\int_M f(X) = \int_M f(X)_n$$

である．特に，同変次数が一定の場合を考えてみる．例えば $f \in \Omega_G^{n+2}(M)$ とすると，$f(X)_n$ という項があり，X に関する多項式次数は 1（同変次数２）である．また $f \in \Omega_G^{n+1}(M)$ となった場合には，$f(X)_n$ という項は無いので，積分は零とする．$f \in \Omega_G^{n-k}(M)$ の場合にも $f(X)_n$ という項は無いので積分は零.

さらに，fiber 積分は同変コホモロジーの写像に落ちる．つまり

$$\pi_* : H_G^*(M) \ni [f] \mapsto \int_M f \in S(\mathfrak{g}^*)^G$$

を得る．

Proof. f を同変 exact つまり $f = D\alpha$ とする．$\alpha(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha(X)_i$ として．

$$
\begin{aligned}
&D(\alpha(X)) = d(\alpha(X)) - \iota_{X^*}\alpha(X)\\
=&(d\alpha(X)_{n-1} + d\alpha(X)_{n-2} + \cdots) - (\iota_{X^*}\alpha(X)_n + \iota_{X^*}\alpha(X)_{n-1} + \cdots)\\
=&d\alpha(X)_{n-1} + (d\alpha(X)_{n-2} - \iota_{X^*}\alpha(X)_n) + \cdots\\
=&f(X)_n + f(X)_{n-1} + \cdots
\end{aligned}
$$

となるので $f(X)_n = d\alpha(X)_{n-1}$．よって

$$\int_M f(X) = 0$$

となる．つまりファイバー積分は同変コホモロジー類にのみ依存する． □

Remark 13.2.4. 同変ベクトル束の同変特性類を定義することができる（後述）．それをファイバー積分することができる．つまりチャーン数などの同変 version を得るのである．それらは不変多項式 $S(\mathfrak{g}^*)^G$ に値をもつ．

Remark 13.2.5. ストークスの定理の同変 vesion も成立する．G が作用している多様体 M に境界がない場合には，

$$\int_M Df = 0$$

であることは容易に証明できる．M を G 多様体として，境界があるとする．さらに境界は境界に移していて，$G : \partial M \to \partial M$ が局所自由作用とする．このとき

$$\int_M (Df)(X) = \int_{\partial M} f(X)$$

が成立する（後で使用しないので証明は略）．

13.2.3 カルタン作用素

G が M に自由に作用している場合を考える．$M \to M/G$ は主 G 束である．以下では，面倒なので $X \in \mathfrak{g}$ に対する基本ベクトル場も X と書いたりすることもある．

（位相的）同変コホモロジーの場合には，

$$H_G^*(M) = H^*(M/G)$$

となるのであった．これを Cartan モデルの場合に証明したい．その際に現れるカルタン作用はいろんなところで重要な作用素となってくる．

よく知られているように，M/G 上の微分形式は M 上の基本微分形式と対応する．つまり，

$$\Omega^*(M/G) = \Omega^*(M)_{basic}$$

となる．

Definition 13.2.3. 主 G 束 $M \to M/G$ 上の**基本微分形式** $\alpha \in \Omega^*(M)_{basic}$ とは，G 不変かつ水平であるものであるもの．無限小表現すれば，

$$\alpha \in \Omega^*(M)_{basic} \iff L_X\alpha = 0,\ \iota_X\alpha = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

Proposition 13.2.7. 同型 $\Omega^*(M/G) = \Omega^*(M)_{basic}$ が成立する．

Proof. $\pi : M \to M/G$ とする．$\beta \in \Omega^*(M/G)$ に対して，$\pi^*\beta$ を考えると，これは水平かつ G 不変であることがわかるので基本微分形式である．逆に，α を M 上基本微分形式とする．$p \in M$，$\pi(p) = x \in M/G$ としたとき，$(\alpha_{M/G})_x \in \Omega^*(M/G)$ を

$$\alpha_{M/G}(\pi_*X_1, \cdots, \pi_*X_k) = \alpha_p(X_1, \cdots, X_k), \quad X_1, \cdots, X_k \in T_pM$$

とすれば，G 不変かつ水平であることから well-defined に M/G 上の微分形式を与える．また，この対応が全単射となることを証明するのは容易．以上から $\Omega^*(M/G) = \Omega^*(M)_{basic}$ が成立．□

M 上の外微分作用素 d は $d : \Omega^*(M)_{basic} \to \Omega^*(M)_{basic}$ となるので，コホモロジー $H^*(M)_{basic}$ が定まる．また，$\Omega^*(M)_{basic}, H^*(M)_{basic}$ に環構造も自然に入る．

Proof. α を基本微分形式とする．$L_Xd\alpha = dL_X\alpha = 0$, $\iota_Xd\alpha = (L_X - d\iota_X)\alpha = 0$ となるので $d\alpha$ も基本微分形式である．つぎに，α, β を基本微分形式としたとき，$\alpha \wedge \beta$ を考えると，

$$L_X(\alpha\wedge\beta) = L_X\alpha\wedge\beta + \alpha\wedge L_X\beta = 0, \quad \iota_X(\alpha\wedge\beta) = \iota_X\alpha\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge\iota_X\beta = 0$$

となるので，$\alpha\wedge\beta$ も基本微分形式である．よって $\Omega^*(M)_{basic}$ には環構造が入り，$H^*(M)_{basic}$ にも環構造がはいる．□

$\pi^* : \Omega^*(M/G) \to \Omega^*(M)_{basic}$ は外微分や「$\wedge$」と可換であるので，$H^*(M)_{basic} = H^*(M/G)$（環同型）となる．

Proposition 13.2.8. $H^*(M)_{basic} = H^*(M/G)$（環同型）が成立する．

さて，M の G 同変コホモロジーと基本微分形式の関係を見ていこう．まず，

$$\Omega^*(M)_{basic} \subset (\Omega^*(M) \otimes S^0(\mathfrak{g}^*))^G \subset \Omega^*_G(M)$$

であり，$\Omega^*(M)_{basic}$ は $\Omega^*_G(M)$ の部分環である．また，同変外微分 D を $\Omega^*(M)_{basic}$ へ制限すると，$\alpha \in \Omega^*(M)_{basic} \subset (\Omega^*(M) \otimes S^0(\mathfrak{g}^*))^G$ に対して，$\alpha(X) = \alpha$ であるので，

$$(D\alpha)(X) = d\alpha(X) - \iota_X \alpha(X) = d\alpha$$

であるので，普通の外微分になる．よって，**自然な準同形**

$$i_{bas} : H^*(M)_{basic} \to H^*_G(M)$$

を得る．そして，

$$H^*(M/G) \xrightarrow{\pi^*} H^*(M)_{basic} \xrightarrow{i_{bas}} H^*_G(M)$$

を得る．証明すべきことは，これが同型写像であること，つまり i_{bas} が同型であることである．

そこで，$M \to M/G$ 上の**接続 1-form** θ **を一つ固定**する．θ は G 同変かつ垂直的な M 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-form である．$\mathfrak{g}$ の基底を $X_1, \cdots, X_k$ として，

$$\theta = \sum \theta^i \otimes X_i$$

と書ける．$X = \sum x^i X_i \in \mathfrak{g}$ に対して，$\iota_X \theta = \theta(X^*) = \sum x^i X_i$ であるので，

$$\iota_{X_i} \theta^j = \delta_i^j$$

が成立する．また，G 同変性を書けば，

$$\sum (g^{-1})^* \theta^i \otimes \mathrm{Ad}_g X_i = \sum \theta^i \otimes X_i, \text{ or } \sum_i L_X \theta^i \otimes X_i + \theta^i \otimes [X, X_i] = 0$$

となる．

さて，$\Omega_G(M)$ 上に次の作用素を定義する（和の記号は面倒なので書かない）．

$$K := -\theta^r \partial_r, \quad E := x^r \partial_r + \theta^r \iota_{X^r}, \quad R := (d\theta^r)\partial_r$$

ここで，

$$(\partial_r \alpha)(X) = \frac{d}{dt} \alpha(X + tX_r)|_{t=0}$$

であり，多項式に関する微分である．

Remark 13.2.6. 上の作用素 K, E, R はリー環の基底の取り方によらない．

同変外微分は

$$D = d - \sum x^r \iota_{X_r}$$

とかけたので，

$$\begin{aligned}(dK + Kd)\alpha =& - d\theta^r \partial_r \alpha + \theta^r \partial_r d\alpha - \theta \partial_r d\alpha = -R\alpha, \\ (-x^r \iota_r)K\alpha =& x^r \iota_r \theta^s \partial_s \alpha = x^r(\iota_r \theta^s)\partial_s \alpha - x^r \theta^s \iota_r \partial_r \alpha \\ =& x^r \partial_r \alpha - x^r \theta^s \iota_r \partial_r \alpha, \\ K(-x^r \iota_r)\alpha =& (-\theta^s \partial_s)(-x^r \iota_r)\alpha = \theta^r \partial_r \alpha + x^r \theta^s \iota_r \partial_s \alpha.\end{aligned}$$

が成立する（$\iota_{X_r} = \iota_r$ としている）．よって，

$$DK + KD = E - R$$

及び

$$D(E-R) = D(DK+KD) = DKD = (DK+KD)D = (E-R)D$$

を得る．

さて，$x^r \partial_r, \theta^r \iota_r$ は可換であり，$\Omega_G^*(M)$ を $\Omega_G^*(M)$ へ移す．また，$x^r \partial_r$ は**多項式次数**を，$\theta^r \iota_r$ は**垂直方向の微分形式の次数**を数える作用素である．

Proof. $x^r \partial_r$ はオイラー作用素なので，多項式の次数がでるだけである．一方，$\theta_r \iota_r$ は多項式には作用せず，微分形式の方に作用する．さらに，接続の G 同変性から $\theta^r \iota_r : \Omega_G^*(M) \to \Omega_G^*(M)$ となる．実際，$\alpha \in \Omega_G^*(M)$ とすれば，

$$L_X(\theta^r \iota_r \alpha(Y)) = (L_X \theta^r)\iota_r \alpha(Y) + \theta^r \iota_{[X,X_r]}\alpha(Y) - \theta^r \iota_r \alpha([X,Y])$$

となるが，接続の G 同変性

$$\sum_i L_X \theta^r \otimes X_r + \theta^r \otimes [X, X_r] = 0$$

を使えば，

$$L_X(\theta^r \iota_r \alpha(Y)) = -\theta^r \iota_r \alpha([X,Y])$$

が成立するので，$\theta^r \iota_r \alpha \in \Omega_G^*(M)$ となる．

$x^r \partial_r, \theta^r \iota_r$ は可換であることは明らか．

接続が与えられたとき，M の余接束は $T^*M = V^* \oplus H^*$ とベクトル束として分解する．そして $\Lambda^*(M) = \Lambda^*(V^* \oplus H^*)$ となり，この右辺を分解することにより，微分形式の垂直次数，水平次数を導入することが可能である．このとき，$\theta^r \iota_r$ は垂直的微分形式の次数を数える作用であることは明らかであろう． □

そこで，$x^r\partial_r$, $\theta^r\iota_r$ に関して $\Omega_G^*(M)$ を同時固有分解する．

$$\Omega_G^*(M)=\oplus_{p,q}C^{p,q}(M).$$

ここで，p は多項式次数であり，q は垂直方向の微分形式の次数である．言い換えると，$C^{*,q}(M)$ の元は，

$$\theta^{i_1}\cdots\theta^{i_q}\eta \quad \eta\in S(\mathfrak{g}^*)\otimes\Omega_{hor}^*(M)$$

の一次結合である．この $\oplus C^{p,q}$ に filtration を

$$C^p=\oplus_{l\le p}C^{l,*}$$

で導入する．すなわち，C^p は高々 p 次の多項式を意味する．この filtration に関して，

- K は次数を 1 下げる．
- D は次数を 1 上げる．
- E は次数を保存し，$E=(p+q)\mathrm{id}$ on $C^{p,q}$ となる．
- R は次数を下げる（特に，冪零である）．

となる．また，作用素 π を射影

$$\pi:\oplus C^{p,q}\to C^{0,0}=\Omega^*(M)_{hor}^G=\Omega^*(M)_{basic}$$

で定義する．

我々は，$C^{0,0}=\Omega^*(M)_{basic}$ と $\Omega_G^*(M)=\oplus C^{p,q}$ をつなぐホモトピー作用素を構成したい（実は，かなり具体的に構成できる）．

まず，

$$J:=E+\pi-R$$

を考える．$E+\pi$ は可逆であり，R は冪零であるので，J も可逆である．$F:=(E+\pi)^{-1}$ とすれば，

$$J=(I-RF)(E+\pi)$$

となる．そして，

$$\begin{aligned}U &:= J^{-1}=F(I-RF)^{-1}=F(I+RF+(RF)^2+\cdots),\\ Q &:= KU\end{aligned}$$

とする．U は無限和になっているが，R は次数を下げる作用素であるので，各 $\alpha \in \oplus C^{p,q}$ に対して，$U\alpha$ は well-defined となる（つまり U は局所有限な作用素）．

このとき

$$DQ + QD = I - \pi U$$

が成立する．

Proof. $D(E-R) = (E-R)D$ より，

$$DJ - JD = D(E+\pi-R) - (E+\pi-R)D = D\pi - \pi D = [D,\pi]$$

となる．$U = J^{-1}$ を左右からかけて，

$$UD - DU = U[D,\pi]U$$

を得る．さて，$D|_{C^{0,0}} = d$ より，$D \circ \pi : C^{p,q} \to C^{0,0}$ となるので，$[D,\pi] : \oplus C^{p,q} \to C^{0,0}$ となる．また，$U = \mathrm{id}$ on $C^{0,0}$ である．よって，

$$UD - DU = [U,D] = [D,\pi]U$$

となる．また，$DK + KD = E - R$ から $DK + KD = J - \pi$．そして，$K = 0$ on $C^{0,0}$ である．そこで，

$$\begin{aligned} DQ + QD &= DKU + KUD = DKU + KDU + K[D,\pi]U \\ &= (DK + KD)U = (J-\pi)U = JU - \pi U \\ &= I - \pi U \end{aligned}$$

となる． □

さて，$i : C^{0,0} \to \oplus C^{p,q}$ とすれば，$i \circ \pi = \pi$ であるので，

$$DQ + QD = I - i \circ (\pi U)$$

を得る．また，$C^{0,0}$ 上で $U = \mathrm{id}$ であったので，$I = (\pi U) \circ i$ となる．以上から，$i : C^{0,0} \to \Omega_G^*(M)$ と，$\pi U : \Omega_G^*(M) \to C^{0,0}$ はホモトピーで互いに逆作用素になる（Q がホモトピー作用素）．つまり，コホモロジーレベルでは，同型を与えるので，$H^*(M)_{basic} \cong H_G^*(M)$ をえる．以上から，

Proposition 13.2.9. G が M へ自由に作用している場合に，M の（代数的）G 同変コホモロジーと M/G のコホモロジーは環同型である．

$$H^*(M/G) \cong H^*(M)_{basic} \cong H_G^*(M).$$

もう少し詳しく見ていこう．上の πU を**カルタン作用素**とよぶ．$F=(E+\pi)^{-1}$ は次数 (p,q) を保ち，$C^{0,0}$ 上では id である．そこで，

$$\pi U=\pi F(I+RF+(RF)^2+\cdots)=\pi+\pi RF+\pi(RF)^2+\cdots$$

となる．この作用素を曲率を使って具体的に表示したい．接続 θ の曲率

$$\Omega=\sum\Omega^k\otimes X_k=d\theta+\frac{1}{2}[\theta\wedge\theta]$$

を考える．これは $\mathfrak{g}$ 値 2-form であり，G 不変かつ水平的である．リー環の構造方程式を

$$[X_i,X_j]=\sum c_{ij}^kX_k$$

とすれば，曲率 Ω の各成分は

$$\Omega^r=d\theta^r-\frac{1}{2}\sum c_{ij}^r\theta^i\wedge\theta^j$$

となる．そこで，作用素 S,T を

$$S=\Omega^r\partial_r,\quad T=-\frac{1}{2}c_{ij}^r\theta^i\theta^j\partial_r$$

と定義すれば，

$$R=S-T$$

となる．S,T の微分形式次数は 2 であるので，可換である．注意すべきは，

$$S:C^{p,q}\to C^{p-1,q},\quad T:C^{p,q}\to C^{p-1,q+2}$$

となることである．T は垂直微分形式の次数を 2 あげて，S は垂直微分形式の次数を変えない．また π は垂直微分形式を無視する作用素であったので，

$$\pi U=\pi+\pi SF+\pi(SF)^2+\cdots$$

となる．S は全次数 $p+q$ を 1 下げる作用素であり，$F=(E+\pi)^{-1}$ は全次数が $p+q$ のところで，$\frac{1}{p+q}$ として作用する．そこで，$\alpha\in C^{p,q}$ に対して，

$$\begin{aligned}\pi(SF)^l\alpha=&\pi\underbrace{SF\cdots SF}_{l}\alpha=\frac{1}{p+q}\pi\underbrace{SF\cdots SF}_{l-1}S\alpha\\=&\frac{1}{(p+q)(p+q-1)}\pi\underbrace{SF\cdots SF}_{l-2}S^2\alpha\\=&\frac{1}{(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q-(l-1))}\pi S^l\alpha\end{aligned}$$

となる．π は次数零への $C^{0,0}$ への射影であるので，$\alpha \in C^{p,q}$ に対して

$$\pi(SF)^l\alpha = \begin{cases} 0 & p+q-l \neq 0 \\ \frac{1}{l!}\pi S^l\alpha & p+q=l \end{cases}$$

となる．つまり，

$$\pi(SF)^l = \frac{1}{l!}\pi S^l$$

となる．また，S は垂直微分形式の次数を変えない．以上から，

$$\pi U = \pi \exp S = \pi \exp S \circ Hor$$

ここで Hor は水平微分形式への射影である．つまり，α が

$$\alpha = \alpha_{hor} + \sum_{q=1}^{\dim G} \sum_{i_1<\cdots<i_q} \theta^{i_1}\cdots\theta^{i_q}\eta_{i_1\cdots i_q}, \quad \eta_{i_1\cdots i_q} \in S(\mathfrak{g}^*)\otimes\Omega^*(M)_{hor}$$

としたときに，$Hor(\alpha) = \alpha_{hor}$ という作用素である．別の言い方をすれば

$$Hor : \Omega_G^*(M) = \oplus_{p,q}C^{p,q} \mapsto \oplus_p C^{p,0}$$

という射影である．$C^{p,0}$ の元は $x^I \otimes \eta$ の一次結合である．ここで $|I| = p$ であり，η は水平微分形式．そして，

$$\pi S^l(x^I\otimes\omega) = \pi(\Omega^r\partial_r)^l(x^I\otimes\omega) = \begin{cases} 0 & l\neq p \\ \Omega^I\omega & l=p \end{cases}$$

となるので，

$$(\pi\exp S)(x^I\omega) = \Omega^I\omega$$

となる．

以上から，

Theorem 13.2.10 (Cartan)**.** カルタン作用素 $\pi\circ U$ は，

$$Hor : \Omega_G^*(M) = \oplus C^{p,q} \to \oplus C^{p,0} = (S(\mathfrak{g}^*)\otimes\Omega^*(M)_{hor})^G$$

という射影と，

$$x^I\otimes\eta \mapsto \Omega^I\eta$$

という *evaluation* 写像の合成である．つまり，

$$\pi U(\alpha) = (\alpha_{hor})(\Omega)$$

また作り方から $(\alpha_{hor})(\Omega) = (\alpha(\Omega))_{hor}$ である．

コホモロジーレベルで上の定理を見ていこう．α が D 閉形式なら，ホモトピー公式に代入して，

$$DQ\alpha = (DQ + QD)(\alpha) = (I - i \circ (\pi U))\alpha = \alpha - (\alpha_{hor})(\Omega)$$

となるので，

$$[\alpha] = [\alpha_{hor}(\Omega)]$$

となる（$0 = DDQ\alpha = D\alpha - D(\alpha_{hor})(\Omega) = -d(\alpha_{hor}(\Omega))$ から $\alpha_{hor}(\Omega)$ は d 閉形式）．そして，$\alpha_{hor}(\Omega) \in \Omega^*(M)_{basic}$ である．つまり，

$$H_G^*(M) \ni [\alpha] \mapsto [\alpha_{hor}(\Omega)] \in H^*(M)_{basic}$$

が同型対応となる．特に，コホモロジーレベルで，接続 θ の取り方によらないことがわかる．

EXAMPLE 13.2.8 (Chern-Weil の定理)*.* $\alpha \in S(\mathfrak{g}^*)^G \subset \Omega_G^*(M)$ を考える．つまり不変多項式である．これは明らかに D 閉形式である（$H_G^*(M)$ は $S(\mathfrak{g}^*)^G$ 加群であった）．これに対応する $H^*(M)_{basic}$ は，$\alpha(\Omega)$ である．これは M 上の基本閉微分形式であり，M/G 上の閉微分形式に対応する．さて，他の接続 θ' をとった場合に，

$$[\alpha(\Omega')] = [\alpha] = [\alpha(\Omega)]$$

が成立する．つまり，$[\alpha(\Omega)] \in H^*(M)_{basic} = H^*(M/G)$ は接続の取り方に依存しない．よって，Chern-Weil 理論が証明された．また，

$$S(\mathfrak{g}^*)^G \ni \alpha \mapsto \alpha(\Omega) \in H^*(M)_{basic} = H^*(M/G)$$

を **Chern-Weil 写像**とよぶ．

また，$\Omega_G^*(M)$ は $S(\mathfrak{g}^*)^G$ 加群であった．$\Omega_G^*(M)$ への $\alpha \in S(\mathfrak{g}^*)^G$ の作用は，$H^*(M/G)$ において，$\alpha(\Omega)$ の作用となる．

13.2.4 同変特性類

前 subsection を参考にして同変特性類を定義する．証明はほとんど同様であり，外微分 d を同変外微分 D に直すだけである．

K をコンパクトリー群として，主 H 束 $P \to M$ が K 同変主 H 束とする．つまり，$\pi : P \to M$ が K 同変写像であり，K の作用と H の作用が可換とする．各元 $k \in K$ は，微分同相 $k : P \to P$ を与え，H との作用が可換であることから，主 H 束の同型写像を与えることになる．このように，K 同変主 H 束とは，K の作用が

束写像として作用することを意味する．$Y_i \in \mathfrak{k}$ に対して，P 上の基本ベクトル場 $(Y_i^*)_P$ と X 上の基本ベクトル場 $(Y_i^*)_X$ を得るが，これらは π 関係になっている．また，左作用であるので，$[Y_1, Y_2]^* = -[Y_1^*, Y_2^*]$ を満たす．H の作用と可換であることから，$h \in H$ の右作用を $R_h : P \to P$ とすれば，$(R_h)_* Y^* = Y^*$ が成立する．

さて，P への K の作用に注目して

$$\Omega_K^*(P) = (S(\mathfrak{k}^*) \otimes \Omega^*(P))^K$$

を考える．さらに，K と H の作用が可換であることを考慮して，

$$\Omega_K^*(P)_{basic_H} = (S(\mathfrak{k}^*) \otimes \Omega^*(P))_{basic_H}^K = (S(\mathfrak{k}^*) \otimes \Omega^*(P)_{basic_H})^K$$

とする．ここで $\Omega^*(P)_{basic_H}$ は $X \in \mathfrak{h}$ に対して，$L_X\alpha = 0$, $\iota_X\alpha = 0$ を満たすものである．このとき

$$\Omega_K^*(P)_{basic_H} \cong \Omega_K^*(M)$$

Proof. $\pi : P \to M$ とする．$\beta \in \Omega_K^*(M) = (S(\mathfrak{k}^*) \otimes \Omega^*(M))^K \subset S(\mathfrak{k}^*) \otimes \Omega^*(M)$ に対して，$\pi^*\beta$ は H 不変（$L_X\pi^*\beta = 0$）かつ水平（$\iota_X\pi^*\beta = 0$）である．また $\pi : P \to M$ が K 同変であることから，K の作用についても不変である．つまり，$\pi^*\beta(\mathrm{Ad}_k Y) = \pi^*(k^{-1})^*\beta(Y) = (k^{-1})^*\pi^*\beta(Y)$．よって，$\pi^*\beta \in \Omega_K^*(P)_{basic_H}$．あとは同変でない場合と同様． □

また，

$$D_K : \Omega_K^*(P)_{basic_H} \to \Omega_K^*(P)_{basic_H}$$

となる．

Proof. $\alpha \in \Omega_K^*(P)_{basic_H} = (S(\mathfrak{k}^*) \otimes \Omega^*(P)_{basic_H})^K$ とすれば，$\forall X \in \mathfrak{h} = Lie(H)$，$L_X\alpha = 0$, $\iota_X\alpha = 0$ を満たす．また，$Y \in \mathfrak{k}$ として，$\alpha(Y) \in \Omega^*(P)_{basic_H}$ である．

$$D_K\alpha(Y) = d\alpha(Y) - \iota_Y\alpha(Y)$$

であるが，$D_K\alpha(Y) \in \Omega^*(P)_{basic_H}$ を確かめればよい．H と K は可換であるので，$[X, Y] = 0$（$X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{k}$）に注意すれば，

$$\begin{aligned} L_X D_K\alpha(Y) &= L_X d\alpha(Y) - L_X\iota_Y\alpha(Y) = dL_X\alpha(Y) - \iota_{[X,Y]}\alpha(Y) - \iota_Y L_X\alpha(Y) = 0 \\ \iota_X D_K\alpha(Y) &= \iota_X d\alpha(Y) - \iota_X\iota_Y\alpha(Y) = (L_X - d\iota_X)\alpha(Y) + \iota_Y\iota_X\alpha(Y) = 0 \end{aligned}$$

□

そこで，$\pi : P \to M$ が K 同変であることから，D_K と π^* は可換であるので，

$$H_K^*(P)_{basic} \cong H_K^*(M)$$

という環同型を得る．

Proof. D_K と π^* は可換であることを証明しよう．d と π^* が可換であることは明らかである．また $Y \in \mathfrak{k}$ に対して，基本ベクトル場は $\pi_* Y^* = Y^*$ となる．よって，$\pi^* \iota_Y \alpha(Z) = \iota_Y \pi^* \alpha(Z)$ となる．

□

さて，P には $H \times K$ が作用するので，

$$\Omega_{H\times K}(P) = (S(\mathfrak{h}^*) \otimes \Omega_K(P))^H = (S(\mathfrak{k}^*) \otimes S(\mathfrak{h}^*) \otimes \Omega(P))^{H\times K}$$

を考える（最後の等号は H, K が可換なので）．そこで

$$\Omega_K(P)_{basic_H} = (S(\mathfrak{k}^*) \otimes \Omega(P)_{basic_H})^K \subset (S^0(\mathfrak{h}^*) \otimes \Omega_K(P))^H \subset \Omega_{H\times K}(P)$$

とみなしたとき，同変外微分 $D_{H\times K}$ を $\Omega_K(P)_{basic_H}$ へ制限すれば，D_K となる．

Proof. $X \in \mathfrak{h}$ に対して，$\alpha \in \Omega_K(P)_{basic_H} \subset \Omega_{H\times K}(P)$ とみなせば，$\alpha(X) = \alpha$ であり，基本微分形式であることから $\iota_X \alpha = 0$ であるので，

$$(D_{H\times K}\alpha)(X) = D_K\alpha(X) - \iota_X\alpha(X) = D_K\alpha - \iota_X\alpha = D_K\alpha$$

となる.（ちゃんと書けば，

$$D_{H\times K}\alpha(X,Y) = d\alpha(X,Y) - \iota_Y\alpha(X,Y) - \iota_X\alpha(X,Y) = D_K\alpha(X,Y) - \iota_X\alpha(X,Y)$$

である）

□

K をコンパクトという仮定から，平均化することで P 上には必ず K 不変接続が定義できる．P 上 $\mathfrak{h}$ 値の接続形式を $\theta = \sum \theta^i \otimes X_i$ とすれば，$L_Y\theta^i = 0$（$Y \in \mathfrak{k}$）となる接続である．θ を K 不変接続とする．$Y_i, Y_j \in \mathfrak{k}$ として，対応するベクトル場を Y_i^*, Y_j^* とする．このとき.,

$$0 = (L_{Y_i^*}\theta)(Y_j^*) = Y_i^*\theta(Y_j^*) - \theta([Y_i^*, Y_j^*]) = Y_i^*\theta(Y_j^*) + \theta([Y_i, Y_j]^*)$$

となるので，

$$Y_i^*\theta(Y_j^*) = -\theta([Y_i, Y_j]^*)$$

が成立する．また曲率を考えると，

$$d\theta(Y_i^*, Y_j^*) = Y_i^*\theta(Y_j^*) - Y_j^*\theta(Y_i^*) - \theta([Y_i^*, Y_j^*]) = -\theta([Y_i, Y_j]^*)$$

$$[\theta \wedge \theta](Y_i^*, Y_2^*) = 2[\theta(Y_i^*), \theta(Y_j)^*]$$

であるので，

$$F_\theta(Y_i^*, Y_2^*) = -\theta([Y_i, Y_j]^*) + [\theta(Y_i^*), \theta(Y_j^*)]$$

となる．特に，曲率がゼロとなる場合には，

$$\theta : \mathfrak{k} \ni Y_i \mapsto \theta(Y_i^*) \in \mathfrak{h}$$

はリー環の準同型を与える．

さて，カルタン作用素を定義しよう．以下は前 subsection のカルタン作用素の構成と全く同様にすればよい．異なるのは d を D_K に代えることである．$\Omega_{H\times K}(P) = (S(\mathfrak{h}^*) \otimes \Omega_K(P))^H$ 上の作用を

$$K = -\theta^r \partial_r, \quad E = x^r \partial_r + \theta^r \iota_{X^r}, \quad R = (D_K\theta^r)\partial_r$$

とする．（接続が K 不変であること，H と K の作用が可換であることから well-defined である）．

$$\begin{aligned}
(D_K K + K D_K)\alpha(Y) &= -d\theta^r\partial_r\alpha(Y) + \iota_Y\theta^r\partial_r\alpha(Y) - \theta^r\partial_r(d\alpha(Y) - \iota_Y\alpha(Y)) \\
&= -d\theta^r\partial_r\alpha(Y) + \theta^r\partial_r d\alpha(Y) + \theta^r(Y)\partial_r\alpha(Y) \\
&\quad - \theta^r\partial_r\iota_Y\alpha(Y) - \theta^r\partial_r d\alpha(Y) + \theta^r\partial_r\iota_Y\alpha(Y) \\
&= -d\theta^r\partial_r\alpha(Y) + \theta^r(Y)\partial_r\alpha(Y) = -R\alpha(Y)
\end{aligned}$$

となるので $D_K K + K D_K = R$ が成立する．他も同様にすれば，

$$D_{H\times K}K + D_{H\times K}K = E - R$$

となり，

$$D_{H\times K}Q + QD_{H\times K} = I - \pi U$$

を得る．よって，コホモロジーレベルでの同型

$$H^*_{H\times K}(P) = H^*_K(P)_{basic_H} = H^*_K(M)$$

を得る．

カルタン作用素を具体的に表示するには，曲率を**同変曲率**に代える．つまり，

$$\widetilde{\Omega} = (D_K\theta) + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = d\theta - y^a\iota_a\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = \Omega - y^a\theta(Y^a) \qquad (13.2.1)$$

とすれば，カルタン作用素は

$$\Omega^*_{H\times K}(P)\ni\alpha\mapsto\alpha_{hor}(\tilde{\Omega})\in\Omega^*_K(P)_{basic_H}\cong\Omega^*_K(M)$$

となる．

さらに Chern-Weil 理論を考える．同変 K な主 H 束 $P\to M$ を考えたとき，H 不変多項式から M 上の同変 K コホモロジーへの写像，

$$S(\mathfrak{h}^*)^H\ni\alpha\mapsto[\alpha(\tilde{\Omega})]\in H^*_K(P)_{basic_H}\cong H^*_K(M)$$

を**同変 Chern-Weil 写像**とよび．各不変多項式の像を**同変特性類**とよぶ．．多項式変数 x^i を 2-form $\tilde{\Omega}^i$ に代える操作なので，$\tilde{\Omega}^r$ の同変次数は 2 であるので，**Chren-Weil 写像は同変次数を保った写像**である．特に，同変特性類の同変次数は偶数である．そして，通常の意味での特性類（Ω は K 不変であるので，特性類も K 不変）に対して，**同変特性類は同変閉拡張となっている．**

EXAMPLE 13.2.9. K が一点に自明に作用しているとき，同変コホモロジーは自明ではなかった．同様にして $E\to X$ がベクトル束として自明であっても同変特性類は消えないことがある．例えば，G がベクトル空間 E に作用しているとする（つまり表現）．そして一点上の同変ベクトル束 $E\to\{pt\}$ を考える．K 不変内積を入れておき，構造群を $U(n)$ とする．このとき $\phi:K\to U(n)$ という（反）準同形を得る．実際，$(e_1,\cdots,e_n)$ を E のユニタリフレームとすれば，$k\in K$ に対して，

$$(ke_1,\cdots,ke_n)=(e_1,\cdots,e_n)\phi(k)$$

となる $\phi(k)\in U(n)$ が定まる．このとき，

$$(e_1,\cdots,e_n)\phi(k_2)\phi(k_1)=(k_2e_1,\cdots,k_2e_n)\phi(k_1)=(k_1k_2e_1,\cdots,k_1k_2e_n)=(e_1,\cdots,e_n)\phi(k_1k_2)$$

$Y\in\mathfrak{k}$ に対応するベクトル場は，

$$Y_p=\frac{d}{dt}\exp(tY)p|_{t=0}=\frac{d}{dt}p\phi(\exp tY)|_{t=0}$$

となる．また接続 θ は今の場合には $\theta(\frac{d}{dt}p(\exp tX)|_{t=0})=X$ で定まるので，

$$\theta_p(Y_p)=\theta(\frac{d}{dt}p\phi(\exp tY)|_{t=0})=d\phi(Y)$$

となる．このように，$\theta(Y^*)=d\phi(Y)$ となることがわかる．また，

$$\theta([Y_1^*,Y_2^*])=\theta(-[Y_1,Y_2]^*)=-d\phi([Y_1,Y_2])$$

一方，

$$[\theta(Y_1^*), \theta(Y_2^*)] = [d\phi(Y_1), d\phi(Y_2)]$$

であり，$d\phi$ が反準同型であることから，

$$\theta([Y_1^*, Y_2^*]) = [\theta(Y_1^*), \theta(Y_2^*)]$$

となり，曲率がゼロのときに θ が $\mathfrak{k} \to \mathfrak{u}(n)$ が準同型であるということに矛盾していない．

さて，同変 Chren-Weil 写像を考えてみる．$\phi : K \to U(n)$ が反準同型であったので，

$$\psi(k) = \phi(k)^{-1}$$

とすることで $\psi : K \to U(n)$ という準同型を得る．$d\phi = -\phi^{-1}d\phi\phi^{-1}$ であるので，リー環の写像 $d\psi : K \to U(n)$ は $d\psi = -d\phi = -\theta$ となる．

$$\theta(Y_a) = \sum \theta_a^i X_i$$

とすれば，

$$y^a\theta(Y_a) = \sum (y^a\theta_a^i)X_i$$

である．また，$\Omega = \Omega^i X_i$ とする．このとき，Cartan 作用素は $x^i \in \mathfrak{u}(n)^*$ を $\Omega^i - y^a\theta_a^i$ にすればよい．今の場合は曲率ゼロであるので，

$$x^i \mapsto -y^a\theta_a^i = (d\psi)^t(x^i)$$

という写像である．このように，同変 Chern-Weil 写像は，$\psi : K \to U(n)$ から自然に導かれる．つまり $d\psi : \mathfrak{k} \to \mathfrak{u}(n)$ に対する，関数の引き戻し写像

$$S(\mathfrak{u}(n)^*)^{U(n)} \to S(\mathfrak{k}^*)^K = H_K(\mathrm{pt})$$

である（もちろん，可換環の準同型）．そして，$c_i \in S(\mathfrak{u}(n)^*)^{U(n)}$ の像が K 同変特性類となる．

13.2.5 同変コホモロジーとモーメント写像

以上で準備が整ったので，同変コホモロジーをシンプレクティック幾何へ応用しよう．

多様体 M に G が作用しているとする．μ を M 上の $\mathfrak{g}^*$ 値関数で G 同変（$\mu(gp) = \mathrm{Ad}_g^*\mu(p)$）とする．つまり

$$\mu \in (\Omega^0(M) \otimes S^1(\mathfrak{g}^*))^G$$

である．これは $\mu : \mathfrak{g} \to \Omega^0(M)$ と見れることにも注意．また M 上 G 不変 2-form ω は

$$\omega \in (\Omega^2(M) \otimes S^0(\mathfrak{g}^*))^G = \Omega^2(M)^G \otimes \mathbb{C}$$

とみなせる．そこで

$$\tilde{\omega} := \omega + \mu \in \Omega^2_G(M) = (\Omega^2(M) \otimes S^0(\mathfrak{g}^*))^G \oplus (\Omega^0(M) \otimes S^1(\mathfrak{g}^*))^G$$

を考える.（つまり ω の同変拡張）.

Proposition 13.2.11. $D\tilde{\omega} = 0$，つまり $[\tilde{\omega}] \in H^2_G(M)$ であるための必要十分条件は $d\omega = 0$ かつ $\iota_{X^*}\omega = d\mu^X$ である．

特に G がシンプレクティック多様体 (M, ω) へシンプレクティック作用しているときに，M 上の $\mathfrak{g}^*$ 値 G 同変関数 μ がモーメント写像になるための必要十分条件は $D\tilde{\omega} = 0$ である（$\tilde{\omega}$ を同変シンプレクティック形式という）．また，シンプレクティック形式 ω に対して $D\tilde{\omega} = 0$ となるような拡張があれば，モーメント写像が存在することを意味する．

（上の命題の第一の主張は，ω は単なる閉 2-form である．つまり非退化性は仮定してない）．

Proof.

$$\begin{aligned}(D\tilde{\omega})(X) &= d(\tilde{\omega}(X)) - (\iota_{X^*}\tilde{\omega})(X)\\ &= d(\omega + \mu^X) - (\iota_{X^*}\omega)\\ &= d\omega + d\mu^X - \iota_{X^*}\omega\end{aligned}$$

である．シンプレクティック多様体なら $(D\tilde{\omega})(X) = d\mu^X - \iota_{X^*}\omega$ であるので μ がモーメント写像になるためには $D\tilde{\omega} = 0$ が必要十分である．

また $\omega \in \Omega^2_G(M)$ であるが，$D\omega(X) = d\omega - \iota_{X^*}\omega$ であるので，$\Omega^2_G(M)$ 上で D-closed になるように ω 拡張させるには，M 上の $\mathfrak{g}^*$ 値 G 同変関数で $d\mu^X = \iota_{X^*}\omega$ となるものを付け加える必要がある． □

このように G が (M, ω) にシンプレクティックに作用しているとき，シンプレクティック形式 ω の同変閉拡張（$D\tilde{\omega} = 0$）がハミルトニアン G 作用に対応している．

13.2.6 Duistermaat-Heckman の定理

カルタン作用素を使って，Duistermaat-Heckman の定理を証明する．

$(M, \omega, \mathbb{T}^k, \mu)$ をハミルトニアン $\mathbb{T}^k$ 空間とする．さらに，作用が自由であり，μ が proper と仮定する．作用が自由なら $d\mu$ は全射である．つまり $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ は submersion となる．可換群であるので，モーメント写像の $\mathbb{T}^k$ 同変は，$\mathbb{T}^k$ 不変を意味する．よって，

$$\psi : X = M/\mathbb{T}^k \to \mathfrak{t}^*, \quad \mu = \psi \circ \pi$$

という写像を得る．また，レベル $a \in \mathfrak{t}^*$ での逆像を

$$M_a = \mu^{-1}(a) = \pi^{-1}\psi^{-1}(a) \subset M$$

として，

$$X_a = \psi^{-1}(a) \subset X$$

とする．$j_a : X_a \to X$ を埋め込みとすれば，次は可換．

$$\begin{array}{ccccc} M_a & \xrightarrow{i_a} & M & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{g}^* \\ {\scriptstyle \pi_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ X_a & \xrightarrow{j_a} & X & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

ここで，モーメント写像が proper という仮定から M_a はコンパクトであり，X_a もコンパクトとなる．

さて，トーラスの基底を $X_1, \cdots, X_k$ として，$x^1, \cdots, x^k$ をその双対基底とする．$\mu^{X_i} = \mu_i$ とすれば，M の同変シンプレクティック形式は

$$\tilde{\omega} = \omega + \sum \mu_i x^i \in \Omega^2_{\mathbb{T}^k}(M)$$

であり，$D\tilde{\omega} = 0$ をみたす．そこで，カルタン作用素を使って，

$$\Omega^2_{\mathbb{T}^k}(M) \ni \tilde{\omega} \to \nu + \Omega^r \psi_r \in \Omega^2(M/\mathbb{T}^k)$$

という写像を得る．ここで，Ω は M に適当に接続を入れたときの曲率．また，$\psi^{X_i} = \psi_i$ としている．また，ν は X 上の 2-form であり，

$$\pi^*\nu = \omega_{hor}$$

を満たすものである（ω_{hor} は M 上の基本微分形式であるので，上のような $\nu \in \Omega(X)$ は唯一つである）．

さて，シンプレクティック縮約を考えれば，X_a 上にはシンプレクティック形式 ν_a で，$\pi_a^*\nu_a = i_a^*\omega$ を満たすものが唯一つ存在する．また $M_a = \mu^{-1}(a)$ に対して，

$\ker d\mu_p = (T_p(\mathbb{T}^k\cdot p))^{\omega_p}$ が成立していた．そこで，M_a には $\mathbb{T}^k$ が作用するが，$X \in \mathfrak{g}^*$ に対して，

$$\iota_{X^*} i_a^* \omega = 0$$

となる．また $L_X i_a^*\omega = 0$ であるので，$i_a^*\omega$ は主 $\mathbb{T}^k$ 束 $M_a \to X_a = M_a/\mathbb{T}^k$ に対する基本微分形式になる．特に，$i_a^*\omega = i_a^*\omega_{hor}$ をえる．

以上から

$$\pi_a^* j_a^* \nu = i_a^* \pi^* \nu = i_a^* \omega_{hor} = \pi_a^* \nu_a$$

となる．さらに，π_a^* は単射であるので，

$$j_a^* \nu = \nu_a$$

が成立する．

$c = [\nu + \psi_r \Omega^r] \in H^2(M/\mathbb{T}^k)$ とする．これは $[\tilde{\omega}] \in H^2_{\mathbb{T}^k}(M)$ から定まるものである．X_a 上のシンプレクティック形式 ν_a に対して，

$$[\nu_a] = j_a^*[\nu] = j_a^*(c - \psi_r[\Omega^r]) = j_a^*(c - a_r[\Omega^r])$$

を得る．このように，$[\nu_a]$ は a について線形である．

X_a はコンパクト，向き付け可能であったので，$i_a : X_a \to X$ から，

$$[X_a] \in H_{2(n-k)}(X, \mathbb{Z})$$

というホモロジー類が定まる．このホモロジー類は a について滑らかに動くので，$\mathbb{Z}$ 係数で考えているので，a に依存しない．つまり，ある a_0 を固定すれば，

$$[X_a] = [X_{a_0}]$$

が成立する．

X_a のシンプレクティック体積は

$$\frac{1}{(n-k)!}\int_{X_a}[\nu_a]^{n-k} = \frac{1}{(n-k)!}\int_{j_a(X_a)\subset X}(c - a_r[\Omega^r])^{n-k} = \frac{1}{(n-k)!}\int_{X_{a_0}}(c - a_r[\Omega^r])^{n-k}$$

となるので，a の関数として，$n-k$ 次の多項式である．特に，$a_0 = 0$ のときを考えると，

$$[\nu_0] = j_0^*[\nu] = j_0^*(c - [\psi_r \Omega^r]) = j_0^*(c) - [j_0^*(\psi_r \Omega^r)] = j_0^*(c)$$

であるので，

$$\frac{1}{(n-k)!}\int_{X_a}[\nu_a]^{n-k} = \frac{1}{(n-k)!}\int_{X_0}([\nu_0] - a_r[\Omega^r])^{n-k}$$

Theorem 13.2.12 (Duistermatt-Heckman). $(M, \omega, \mathbb{T}^k, \mu)$ をハミルトニアン $\mathbb{T}^k$ 空間とする．さらに，作用が自由であり，μ が *proper* と仮定する．このとき $X_a = \mu^{-1}(a)/\mathbb{T}^k$ のシンプレクティック体積は a の関数として多項式になる．

Remark 13.2.7. 作用が自由でない場合でも，局所自由なら接続が定義できてカルタン作用素が定義できるので，同様の主張が成立する．[Guillemin-Sternberg(equiv)] の page.23 を参照．

以前の形のように書き換えてみよう．$(M, \omega . \mathbb{T}^k, \mu)$ をハミルトニアン $\mathbb{T}^k$ 空間として，$Z := \mu^{-1}(0)$ に $\mathbb{T}^k$ が自由に作用しているとする（0 が正則値とすれば，局所自由となり，$Z/\mathbb{T}^k$ は orbifold）．$l \in \mathfrak{t}^*$ を 0 に十分近いとして，

$$Z_l = \mu^{-1}(l), \quad X_l = Z_l/\mathbb{T}^k$$

とする．このとき X_l は $X := X_0$ と微分同相である．そして，簡約シンプレクティック形式を ω_l, $\omega := \omega_0$ とすれば，上で証明したように

$$[\omega_l] := [\omega] + \sum l^i c_i$$

となる．ここで，$Z \to X$ は主 $\mathbb{T}^k = S^1 \times \cdots \times S^1$ 束であるので，付随した第一チャーン類を $(c_1, \cdots, c_k)$ としている．つまり，先ほどの曲率 Ω^r で表すと，$c_r = [-\Omega^r] = c_r$．

また，X_l のシンプレクティック体積は，

$$v(l) = \int_{X_l} \exp([\omega_l]) = \int_X \exp([\omega] + \sum l^i c_i)$$

となり，最高次が $n-k$ 次となる $l = (l^1, \cdots, l^k)$ の多項式である．l^α（$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$）の係数を求めるには，

$$\begin{gathered}(\frac{\partial^\alpha}{\partial l^\alpha} v)(0) = \frac{1}{m!} \int_X [\omega]^m c_1^{\alpha_1} \cdots c_k^{\alpha_k}, \\ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n - k - m, \quad (0 \leq m \leq n-k)\end{gathered}$$

とすればよい．特に，leading term $v_{top}(l)$ の係数は，

$$(\frac{\partial^\alpha}{\partial l^\alpha} v)(0) = \int_X c_1^{\alpha_1} \cdots c_k^{\alpha_k}, \quad |\alpha| = n - k \tag{13.2.2}$$

となり，$Z \to X$ のチャーン類のみで定まる．場合によっては，この式から X のコホモロジー環の情報を引き出すことができる．実際，$(c_1, \cdots, c_k)$ が X のコホモロジー環を生成するような場合には，上の式から X のコホモロジー環を決定でき

る（例えば，flag 多様体 G/T（T は極大トーラス）の場合や Delzant polyotope の場合である）．

そこで，$(c_1, \cdots, c_k)$ が X のコホモロジー環を生成すると仮定する．つまり，

$$H^*(X) = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]/(relation)$$

となっていると仮定する．例えば，relation の一つとして

$$\sum_\beta a_\beta c^\beta = 0 \quad 0 \leq |\beta| \leq n-k$$

となる関係式があるとする（$|\beta|$ は一定）．ポアンカレ双対定理から，

$$H^p(X) \otimes H^{(n-k)-p}(X) \ni ([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta \in \mathbb{C}$$

は非退化であり，$H^*(X)$ が $c_1, \cdots, c_k$ で生成されることと合わせれば，上の関係式は，

$$\sum_\beta a_\beta c^{\beta+\gamma} = 0, \quad \forall \gamma \text{ such that } |\beta| + |\gamma| = n-k$$

と同値である．そこで，関係式を求めるには，

$$\sum_\beta a_\beta c^{\beta+\gamma} = 0, \quad \forall \gamma \text{ such that } |\beta| + |\gamma| = n-k$$

となる関係式をすべて求めればよい．(13.2.2) から

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial l^\gamma} \sum a_\beta \frac{\partial^\beta v_{top}}{\partial l^\beta}(l) = \sum_\beta a_\beta \frac{\partial^{\beta+\gamma} v_{top}}{\partial l^{\beta+\gamma}}(l) = \sum_\beta a_\beta \frac{\partial^{\beta+\gamma} v}{\partial l^{\beta+\gamma}}(0) = \int_X \sum_\beta a_\beta c^{\beta+\gamma}$$

となるが，右辺がすべての γ（$|\beta| + |\gamma| = n-k$）に対してゼロになるには，

$$\sum a_\beta \frac{\partial^\beta v_{top}}{\partial l^\beta}(l) = 0$$

が必要十分条件である．そこで，

$$Q(x_1, \cdots, x_n) \in ann(v_{top}) \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]$$

を

$$Q(\frac{\partial}{\partial l_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial l_k}) v_{top}(l) = 0$$

として定義する．もちろん，$v_{top}(l)$ が分かれば $ann(v_{top})$ は求めることができる．このように，(13.2.2) から，コホモロジー環の関係式を得ることが出来るわけである．以上から

Theorem 13.2.13. $Z \to X$ のチャーン類を $c_1, \cdots, c_k$ として，これらが $H^*(X,\mathbb{C})$ を生成すると仮定する．このとき，$H^*(X,\mathbb{C})$ は次の環と同型

$$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]/ann(v_{top})$$

ここで，$Q(x_1, \cdots, x_n) \in ann(v_{top}) \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]$ とは，$Q(\frac{\partial}{\partial l_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial l_k})v_{top}(l) = 0$ のこと．

13.3 局所化定理その 1

13.3.1 復習：S^1-equivariant cohomorogy

今まで述べたことの具体例として，S^1 同変コホモロジーについて考える．

M を多様体として S^1 が作用していると考える．またその作用に対するベクトル場を X とする．M 上の S^1 同変微分形式 $\Omega^*_{S^1}(M) = (\Omega(M) \otimes S(\mathfrak{g}^*))^{S^1}$ を考える．S^1 のリー環 $\mathbb{R}$ 上の多項式は x を変数とする多項式環 $\mathbb{C}[x]$ である．そこで $\sum a_I \otimes x^I$ が S^1 不変であるとは

$$\sum (g^{-1})^* a_I \otimes \mathrm{Ad}^*_g(x^I) = \sum (g^{-1})^* a_I \otimes x^I = \sum a_I \otimes x^I$$

であるので．$\Omega^*_{S^1}(M) = \Omega(M)^{S^1} \otimes \mathbb{C}[x]$ となる．ここで $\mathbb{C}[x]$ は $BG = \mathbb{CP}^\infty$ のコホモロジー群 $H^*(\mathbb{CP}^\infty)$ と同型であることに注意（x の次数は 2）．

そこで $\Omega_{S^1}(M) = \Omega^*(M)^{S^1} \otimes \mathbb{C}[x]$ 上に degree を入れる．x の次数を 2 として，微分形式には普通に次数を入れる．そこで次数 p の元 α は

$$\alpha = \sum_{k=0} a_{p-2k} x^k, \quad a_{p-2k} \in \Omega^{p-2k}(M)^{S^1}$$

とかける．また $a_{p-2k} \in \Omega^{p-2k}(M)^{S^1}$ は $L_X a_{p-2k} = 0$ とかける．

さて，$(\Omega_{S^1}(M), \wedge)$ に対して

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg\alpha \deg\beta} \beta \wedge \alpha$$

が成立する．この意味で super 可換環である．

Proof. 一般の元は $a \otimes x^k$ の線形結合である．$\alpha = a \otimes x^k = ax^k$ とする．$\deg a + 2k = \deg\alpha$ であったので

$$\begin{aligned}
&(ax^k) \wedge (bx^l) = (-1)^{\deg a \deg b} (bx^l) \wedge (ax^k) \\
=&(-1)^{(\deg\alpha - 2k)(\deg\beta - 2l)} (bx^l) \wedge (ax^k) \\
=&(-1)^{\deg\alpha \deg\beta} (bx^l) \wedge (ax^k)
\end{aligned}$$

□

この次数付超可換環上に微分作用素を次で定義する

$$D = d - x\iota_X$$

つまり $\alpha = ax^k$ に対して，

$$D\alpha = dax^k - (\iota_X a)x^{k+1}$$

となる．これは次数 1 の super 微分である．つまり次数 1 あげる作用素であり，super ライプニッツ則をみたす（普通の微分形式のライプニッツ則のこと）

$$D(\alpha \wedge \beta) = D\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge D\beta.$$

さらに，$D^2 = 0$ である．

Proof. まず．D が次数を 1 上げる作用素であることは明らか．またライプニッツ則も微分形式の場合のライプニッツ則から明らか．$D^2 = 0$ を証明しよう．$ax^k \in \Omega^*_{S^1}(M)$ なので $L_X a = 0$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
&D^2\alpha = D(dax^k - \iota_X ax^{k+1}) \\
=&\{d(da)x^k - \iota_X dax^{k+1}\} - \{d\iota_X ax^{k+1} - \iota_X \iota_X ax^{k+2}\} \\
=&0 - (\iota_X d + d\iota_X)ax^{k+1} + 0 = -L_X ax^{k+1} = 0
\end{aligned}$$

□

そこで，微分複体を得る

$$0 \to \Omega^0_{S^1}(M) \xrightarrow{D} \Omega^1_{S^1}(M) \xrightarrow{D} \Omega^2_{S^1}(M) \to \cdots$$

（これは無限に続く複体である）．**このコホモロジー** $H^k_{S^1}(M) = \ker D/\mathrm{im}\, D$ **を** M **の** S^1 **同変コホモロジー**という．$\alpha = \sum a_{p-2k}x^k \in \Omega^p_{S^1}(M)$ としたときに $D\alpha = 0$ は

$$0 = \sum_{k=0} da_{p-2k}x^k - \sum_{k=0} \iota_X a_{p-2k}x^{k+1} = \sum_{k=0} (da_{p-2k} - \iota_X a_{p-2k+2})x^k$$

であるので，

$$da_{p-2k} = \iota_X a_{p-2k+2}$$

が成立する．

EXAMPLE 13.3.1. 一点の S^1 同変コホモロジーは明らかに $\mathbb{C}[x]$ である．ここで x の次数は 2 としているので，$H^*_{S^1}(pt) \cong H^*(BG) = H^*(\mathbb{CP}^\infty)$ である．また $\Omega^*_{S^1}(M)$ は $\mathbb{C}[x]$ 加群であるが，

$$D(g(x)\alpha) = da \otimes g(x)f(x) - \iota_X a \otimes xg(x)f(x) = g(x)D\alpha$$

であるので，$H^*_{S^1}(M)$ **も** $\mathbb{C}[x]$ **加群である．**

EXAMPLE 13.3.2. S^1 が M に自由に作用している場合を考える．このとき $\pi : M \to M/S^1$ は主 S^1 束である．$H^*_{S^1}(M) \cong H^*(M/S^1)$ を直接的に証明してみよう．
次の写像を定義する．

$$\pi^* : \Omega^*(M/S^1) \ni a \mapsto \pi^* a \otimes 1 \in \Omega^*(M)_{basic} \otimes \mathbb{C}[x] \subset (\Omega^*(M))^{S^1} \otimes \mathbb{C}[x] = \Omega_{S^1}(M)$$

ここで，basic 微分形式は $\beta \in \Omega^p(M)$ で $L_X \beta = 0$, $\iota_X \beta = 0$ となる．このとき

$$\pi^*(da) = d\pi^* a \otimes 1 = d\pi^* a \otimes 1 - \iota_X \pi^* a \otimes x = D(\pi^* \alpha \otimes 1)$$

となるので，

$$\pi^* : H^*(M/S^1) \ni [a] \mapsto [\pi^* a \otimes 1] \in H^*_{S^1}(M)$$

は well-defined である．この写像の全単射性を証明する．X を S^1 のリー環 $\mathbb{R}$ の 1 に対応する基本ベクトル場とする．$\pi : M \to M/S^1$ は主 S^1 束であるので，M 上接続とは 1-form θ で $L_X \theta = 0$ となり，$\iota_X \theta = \theta(X) = 1$ となるものである．さらにこれらの条件から $\iota_X d\theta = 0$ がわかる．
単射性をみたい．$\pi^* a$ を $p{+}1$-form として，$[\pi^* a \otimes 1] = 0$ とする．つまり $\pi^* a = D\gamma$ とする．このとき

$$\pi^* a = \sum_{k=0} d\gamma_{p-2k} x^k - \sum_{k=1} \iota_X \gamma_{p-2k+2} x^k = d\gamma_p + (d\gamma_{p-2} - \iota_X \gamma_p)x + \cdots$$

となる．左辺は x の多項式がないので，右辺の定数項以外は零である．よって $\pi^* a = d\gamma_p = D(\gamma_p)$（$\gamma \in \Omega^*_{S^1}(M)$）を得るが γ_p は basic になるとは限らない．もう少し詳しくみていく．上の条件から

$$\begin{cases} \pi^* a = d\gamma_p \\ 0 = d\gamma_{p-2} - \iota_X \gamma_p \\ 0 = d\gamma_{p-4} - \iota_X \gamma_{p-2} \\ \cdots \\ \begin{cases} 0 = \iota_X \gamma_0 & \text{p=even} \\ 0 = \iota_X \gamma_1 & \text{p=odd} \end{cases} \end{cases}$$

最後の項は basic である．また $\gamma \in \Omega_{S^1}(M)$ から $L_X \gamma_{p-2k} = 0$ となり，$\iota_X \pi^* a = 0$ から，$\iota_X d\gamma_{p-2k} = 0$ である．そこで接続 θ を用いて，

$$\gamma' = \gamma_p + d(\theta \wedge \gamma_{p-2} + \theta \wedge d\theta \wedge \gamma_{p-4} + \cdots + \theta \wedge (d\theta)^k \wedge \gamma_{p-2k-2} + \cdots)$$

これは $d\gamma' = \pi^* a$，$L_X\gamma' = 0$ をみたす．各項で ι_X をとると，

$$\begin{aligned}
&\iota_X d(\theta \wedge (d\theta)^k \wedge \gamma_{p-2k-2}) \\
=&\iota_X((d\theta)^{k+1} \wedge \gamma_{p-2k-2} - \theta \wedge (d\theta)^k \wedge d\gamma_{p-2k-2}) \\
=&(d\theta)^{k+1} \wedge \iota_X\gamma_{p-2k-2} - (d\theta)^k \wedge d\gamma_{p-2k-2} \\
=&(d\theta)^{k+1} \wedge \iota_X\gamma_{p-2k-2} - (d\theta)^k \wedge \iota_X\gamma_{p-2k}
\end{aligned}$$

であるので，

$$\iota_X\gamma' = \iota_X\gamma_p + (d\theta \wedge \iota_X\gamma_{p-2} - \iota_X\gamma_p) + (d\theta^2 \wedge \iota_X\gamma_{p-4} - d\theta \wedge \iota_X\gamma_{p-2}) + \cdots = 0$$

となる．よって，γ' は basic 微分形式であり $d\gamma' = \pi^* a$ を満たす．以上で単射性が証明できた．

次に全射を証明する．$D(\sum \gamma_{p-2k}x^k) = 0$ なるものをとってくる．このとき

$$\begin{cases}
0 = d\gamma_p \\
0 = d\gamma_{p-2} - \iota_X\gamma_p \\
0 = d\gamma_{p-4} - \iota_X\gamma_{p-2} \\
\cdots \\
\begin{cases} 0 = \iota_X\gamma_0 & \text{p=even} \\ 0 = \iota_X\gamma_1 & \text{p=odd} \end{cases}
\end{cases}$$

をみたす．先ほどと同様の考察により

$$\sum_j \left(\sum_k \theta \wedge d\theta^k \wedge \gamma_{p-2k-2j-2}\right)x^j$$

を考える．これを微分すると

$$\begin{aligned}
&D\left(\sum_j \left(\sum_k \theta \wedge d\theta^k \wedge \gamma_{p-2k-2j-2}\right)x^j\right) \\
=& \sum_{j=0,k=0} (d\theta^{k+1} \wedge \gamma_{p-2k-2j-2} - \theta \wedge d\theta^k \wedge d\gamma_{p-2k-2j-2})x^j \\
&- \sum_{j=0,k=0} (d\theta^k \wedge \gamma_{p-2k-2j-2} - \theta \wedge d\theta^k \wedge \iota_X\gamma_{p-2k-2j-2})x^{j+1} \\
=& \sum_{j=0,k=1} d\theta^k \wedge \gamma_{p-2k-2j}x^j - \sum_{j=0,k=0} \theta \wedge d\theta^k \wedge \iota_X\gamma_{p-2k-2j}x^j \\
&- \sum_{j=1,k=0} d\theta^k \wedge \gamma_{p-2k-2j}x^j + \sum_{j=1,k=0} \theta \wedge d\theta^k \wedge \iota_X\gamma_{p-2k-2j}x^j \\
=&\sum_{k=1} d\theta^k \wedge \gamma_{p-2k} - \sum_{k=0} \theta \wedge d\theta^k \wedge \iota_X\gamma_{p-2k} - \sum_{j=1} \gamma_{p-2j}x^j.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\alpha :=& \sum \gamma_{p-2j}x^j + D(\sum_{j,k} \theta \wedge d\theta^k \wedge \gamma_{p-2k-2j-2})x^j \\ =&\gamma_p + \sum_{k=1} d\theta^k \wedge \gamma_{p-2k} - \sum_{k=0} \theta \wedge d\theta^k \wedge d\gamma_{p-2k-2} \\ =&\gamma_p + d(\sum_{k=0} \theta \wedge d\theta^k \wedge \gamma_{p-2k-2})\end{aligned}$$

すれば，$d\alpha = 0,\ L_X\alpha = 0,\ \iota_X\alpha = 0$ をみたす．そして $[\alpha] = [\sum \gamma_{p-2j}x^j]$ である．よって全射が証明された．

この場合の $H^*_{S^1}(M)$ への多項式作用が $H^*(M/S^1)$ 上でどうなるか見てみよう．M 上の p-form で $L_Xa = 0, \iota_Xa = 0, da = 0$ を満たすものを考える．このとき $x[\pi^*a \otimes 1] = [\pi^*a \otimes x]$ を考える．

$$\pi^*ax + D(\theta \wedge \pi^*a) = d\theta \wedge \pi^*a$$

となる．そこで $d\theta \in H^*(M/S^1)$ であるので，$H^*_{S^1}(M)$ での x の掛け算は $H^*(M/S^1)$ 上では曲率のコホモロジー類 $[F_\theta]$ の掛け算に対応する．またべつの接続を選んだとしてもこれは第一チャーン類の掛け算であるので，コホモロジー類は変わらない．

13.3.2 S^1 作用の局所化定理

M^{2n} をコンパクト向きつき多様体で S^1 作用があるとする．この固定点の集合を M^{S^1} として，孤立しているとする．よって固定点は有限個である．$\alpha \in \Omega^*_{S^1}(M)$ を同変 $2n$ 次閉形式として

$$\alpha = a_{2n} + a_{2n-2}x + \cdots + a_0x^n,$$

する．このとき a_{2n} が $M \setminus M^{S^1}$ で完全形式であることを証明しよう．

まず $D\alpha = 0$ であるので，

$$\begin{cases} 0 = da_{2n} \\ 0 = da_{2n-2} - \iota_X a_n \\ 0 = da_{2n-4} - \iota_X a_{2n-2} \\ \cdots \\ 0 = \iota_X a_0 \end{cases}$$

が成立している．さて，S^1 がコンパクトなので S^1 不変なリーマン計量をとってくる．S^1 の作用に対する基本ベクトル場を X（$1 \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}$ に対応する）とすれば，M^{S^1} 上で，$X = 0$ であるがそれ以外ではゼロでない．そこで $M \setminus M^{S^1}$ 上で 1-form θ を

$$\theta(Y) = \frac{\langle X, Y \rangle}{\langle X, X \rangle}$$

とする．これは S^1 不変な 1-form（$L_X\theta = 0$）であり $\iota_X\theta = 1$ である（これが主 S^1 束 $M \setminus M^{S^1} \to (M \setminus M^{S^1})/S^1$ の接続になるものである．しかし一般に $(M \setminus M^{S^1})/S^1$ は多様体でない．stabilizer は有限群なので orbifold である）．そこで

$$\gamma := a_{2n} + d\sum_{k=0}^{n-1} \theta \wedge d\theta^k \wedge a_{2n-2k-2}$$

を考える．これは $\iota_X\gamma = 0$ をみたす $2n$-form（体積の関数倍）である（前 subsection と同様に直接計算すればよい）．$x \in M \setminus M^{S^1}$ として $X_x \neq 0$ の双対基底 ξ_1 として拡張すれば $\gamma_x = a(x)\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_{2n}$ とかけるが，$\iota_X\gamma_x = 0$ となるには $a(x) = 0$ である．よって $M \setminus M^{S^1}$ 上で $\gamma = 0$ である．つまり

$$a_{2n} = -d\sum_{k=0}^{n-1} \theta \wedge d\theta^k \wedge a_{2n-2k-2}$$

である．よって a_{2n} が $M \setminus M^{S^1}$ で完全形式であることがわかった．

　この a_{2n} の M 上で積分を考える．$M \setminus M^{S^1}$ 上では closed であったので，ストークス公式を使うことができる．

$$\int_M a_{2n} = -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{M-\cup_p B^p_\epsilon} d\sum_{k=0}^{n-1} \theta\wedge d\theta^k \wedge a_{2n-2k-2} = \sum_p \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S^p_\epsilon}\sum_{k=0}^{n-1}\theta\wedge d\theta^k\wedge a_{2n-2k-2}$$

を得る．さらに，固定点 p の座標近傍で，$x = 0$ が p に対応するものをとり，$x \to \epsilon^{1/2}x$ と変換する．$\theta(Y) = \langle X, Y\rangle/\langle X, X\rangle$ はこの変換により変化しない（後であげる式をみればわかる）．$d\theta$ も変化しない．一方で $a_{2n-2k-2}$ を変換したものを $a_{2n-2k-2}(\epsilon)$ とすれば，

$$\int_{S^p_\epsilon}\sum_{k=0}^{n-1}\theta\wedge d\theta^k\wedge a_{2n-2k-2} = \int_{S^p_1}\sum_{k=0}^{n-1}\theta\wedge d\theta^k \wedge a_{2n-2k-2}(\epsilon)$$

となる．a_p は θ とちがい M 全体で定義されているもであり，$a_p(\epsilon)(x, dx) = a_p(\epsilon x, \epsilon dx)$ で，$\epsilon \to 0$ にすれば，a_0 以外はすべてゼロになり，関数 a_0 は $a_0(p)$ となる．よって

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{S^p_1}\sum_{k=0}^{n-1}\theta\wedge d\theta^k\wedge a_{2n-2k-2}(\epsilon) = \int_{S^p_1}\theta\wedge d\theta^{n-1}a_0(p)$$

となる．そこで固定点（孤立していると仮定していた）の近傍で θ の様子を調べる必要がある．

$p \in M^{S^1}$ とする．X を基本ベクトル場とすれば $X_p = 0$ である．このとき $L_X : T_pM \to T_pM$ を次のようにして得ることができる．$v \in T_pM$ として v を拡張して V というベクトル場をつくる．このとき

$$L_X v := [X, V]_p = (\nabla_X v)_p - (\nabla_V X)_p = -\nabla_v X$$

とすればよい（この線形変換は固定点の接空間にのみ定義できる．一般の点の接空間には定義できない）．この線形写像は可逆である．実際 $v \in T_pM$ として $L_X v = 0$ であるとする．S^1 不変なリーマン計量を用いて，測地線 $\exp_p(sv)$ を考える．X は計量を保存するので，1 パラメータ変換群も計量を保存する．よって測地線を測地線へうつす．$\psi_t(\exp_p(sv)) = \exp_{\psi_t(p)}(s(\psi_t)_* v)$ となる．しかし p が固定点なので $\psi_t(p) = p$ であり，$L_X v = 0$ から $(\psi_t)_* v = v$（リー微分の定義に代入すればわかる）であるので，$\exp_p(sv)$ は S^1 の作用で固定される．これは固定点が孤立していることに矛盾する．よって，$L_X : T_pM \to T_pM$ は可逆である．

さて，L_X は S^1 のリー環の作用であり，T_pM に表現していることになる．T_pM の（向きつき）正規直交基底を $\{e_i\}$ として，これを正規直交フレームへ拡張しておく，$L_X g = 0$ であるので

$$0 = \{X(g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)) - g(L_X \tilde{e}_i, \tilde{e}_j) - g(\tilde{e}_i, L_X \tilde{e}_j)\}_p = -g(L_X e_i, e_j) - g(e_i, L_X e_j)$$

つまり L_X は交代行列で可逆である．点 p の直交変換で，正規化することにより，正規直交基底 $\{e_i\}$ で，

$$L_X e_{2i-1} = \lambda_i e_{2i}, \quad L_X e_{2i} = -\lambda_i e_{2i-1}$$

となるものが存在する（このとき M の次元が偶数でなければならないことがわかる．トーラスが作用している多様体において，固定点が孤立しているなら多様体の次元は偶数）また後で $\sqrt{\det L_X} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ を用いるが，$\det L_X$ は基底のより方によらないのであった．その意味で上のリーマン計量はなんでもよい．

さて，上の直交基底に対して

$$T_pM \ni x = \sum x_i e_i \mapsto \exp_p(\sum x_i e_i) \in M$$

という正規座標と考える．X は計量を不変にするので，1 パラメータ変換群 ψ_t に対して，$\psi_t(\exp_p(\sum x_i e_i)) = \exp_p(\sum x_i (\psi_t)_* e_i)$ が成立する．これを引き戻せば

$$\psi_t(x) = \sum x_i (\psi_t)_* (e_i)_p$$

となり，微分すれば，$\sum x_i L_X e_i$ であるので，正規座標で，

$$X_x = \lambda_1(x_2\partial_1 - x_1\partial_2) + \cdots + \lambda_n(x_{2n}\partial_{2n-1} - x_{2n-1}\partial_{2n})$$

とかけることがわかった．さて，$\theta = \frac{\langle X,\cdot\rangle}{\langle X,X\rangle}$ を求めたいが，安易に

$$\langle X, X\rangle = \lambda_1^2(x_1^2 + x_2^2) + \cdots + \lambda_n(x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2)$$

としてしまっては駄目．これは ∂_i が正規直交基底となるのは原点のみであるためである（計量は正規座標をとってもわからないことに注意）．そこで $\frac{\langle X,\cdot\rangle}{\langle X,X\rangle}$ を求めることはあきらめる．われわれが必要とするのは $M \setminus M^{S^1}$ 上で $L_X\theta = 0$, $\iota_X\theta = 1$ となるものである．そこで p の近傍で

$$\theta := \frac{\lambda_1^{-1}(x_2dx_1 - x_1dx_2) + \cdots + \lambda_n^{-1}(x_{2n}dx_{2n-1} - x_{2n-1}dx_{2n})}{\|x\|^2}$$

を考える（global には接続にならないかもしれない）．これが $\iota_X\theta = 1$ をみたすことはあきらか．また $\iota_X(\sum x_i dx_i) = \iota_X(dr^2) = 0$ もすぐにわかる．そこで，

$$d\theta = -2\frac{\lambda_1^{-1}dx_1dx_2 + \cdots + \lambda_n^{-1}dx_{2n-1}dx_{2n}}{\|x\|^2} - 2r^{-2}d(r^2)\theta$$

であるので

$$\iota_X d\theta = 2\frac{\sum x_i dx_i}{|x|^2} - 2r^{-2}d(r^2) = 0$$

となり，

$$L_X\theta = (\iota_X d + d\iota_X)\theta = 0$$

を得る．一の分割において S^1 の積分で平均をとれば，S^1 不変な一の分割をとることができる．そこで，固定点たちを含む近傍では上のものをとり，それ以外では $\theta(Y) = \langle X, Y\rangle/\langle X, X\rangle$ をとり，全体へ拡張する．このとき $L_X\theta = 0$, $\iota_X\theta = 1$ をみたす（ただし，固定点で θ は発散）．この θ を用いれば先ほどと同様の議論ができ，求めるものは $\theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ である．

$$d\theta = -2\frac{\lambda_1^{-1}dx_1dx_2 + \cdots + \lambda_n^{-1}dx_{2n-1}dx_{2n}}{\|x\|^2} - 2r^{-2}d(r^2)\theta =: Fr^{-2} - 2r^{-2}d(r^2)\theta$$

とする．$d(r^2)d(r^2) = 0 = \theta\theta$ であるので，

$$\begin{aligned}
\theta \wedge (d\theta)^{n-1} &= \theta \wedge (r^{-2n+2}F^{n-1} - 2(n-1)r^{-2n}d(r^2)\theta F^{n-2}) \\
&= r^{-2n+2}\theta \wedge F^{n-1} \\
&= (-2)^{n-1}r^{-2n}(\lambda_1^{-1}(x_2dx_1 - x_1dx_2) + \cdots + \lambda_n^{-1}(x_{2n}dx_{2n-1} - x_{2n-1}dx_{2n})) \\
&\quad \wedge (\lambda_1^{-1}dx_1dx_2 + \cdots + \lambda_n^{-1}dx_{2n-1}dx_{2n})^{n-1} \\
&= (-2)^{n-1}r^{-2n}(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{-1}(n-1)!(\sum(-1)^i x_i dx_1dx_2 \cdots \hat{dx_i} \cdots dx_{2n})
\end{aligned}$$

そこで $2n$ 次元の半径 1 の球の体積は $\pi^n/n!$ であるので

$$\int_{S_1}\theta d\theta^{n-1}=\int_{S_1}(-2)^{n-1}(\lambda_1\cdots\lambda_n)^{-1}(n-1)!(\sum(-1)^i x_i dx_1 dx_2\cdots \hat{dx_i}\cdots dx_{2n})$$
$$=\int_{B_1}-(-2)^{n-1}(\lambda_1\cdots\lambda_n)^{-1}(n-1)!2n(dx_1dx_2\cdots\cdots dx_{2n})$$
$$=(-2\pi)^n(\lambda_1\cdots\lambda_n)^{-1}$$

以上から次の定理を得る．

Theorem 13.3.1 (局所化定理)**.** 偶数次元コンパクト向きつき多様体 M 上に S^1 が作用しているとする．また固定点は孤立してるとする．$\sum a_{2n-2k}x^k$ を D-*closed*（同変閉形式）とする．このとき

$$\int_M a_{2n}=(-2\pi)^n\sum_{p\in M^{S^1}}\frac{a_0(p)}{\det^{1/2}(L_X)_p}$$

ここで $L_X:T_pM\to T_pM$ に対して $\det(L_X)_p=\lambda_1^2\cdots\lambda_n^2$ としたとき，$\det^{1/2}(L_X)_p=\lambda_1\cdots\lambda_n$ としている．

さらに $\sum a_{2n-2k}x^k\in\Omega^{2n}_{S^1}(M)$ としたが x^k 倍しても同様であり

$$\int_M a_{2n}x^k=(-2\pi)^n\sum_{p\in M^{S^1}}\frac{a_0(p)x^k}{\det^{1/2}(L_X)_p}$$

が成立する．$\alpha\in\Omega^*_{S^1}(M)$ で $D\alpha=0$ として $Y\in\mathfrak{g}=\mathbb{R}^1$ とすれば（X を基底とすれば $Y=cX$），

$$\int_M\alpha(Y)=(-2\pi)^n\sum_{p\in M^{S^1}}\frac{\alpha(Y)(p)}{\det^{1/2}(L_Y)_p}$$

が成立．ここで $\alpha(Y)(p)$ は関数部分の $p\in M$ での値である．
より一般の命題をのべておく

Theorem 13.3.2 (局所化定理２)**.** G をコンパクトリー群として偶数次元コンパクト向きつき多様体 M に作用しているとする．α を同変閉形式とする．$X\in\mathfrak{g}$ に対して X^* は孤立したゼロ点しかもたないとする．このとき

$$\int_M\alpha(X)=(-2\pi)^n\sum_{p\in Zero(X^*)}\frac{\alpha(X)(p)}{\det^{1/2}(L_X)_p}.$$

ここで右辺の $\alpha(X)(p)$ は $\alpha(X)$ の関数部分の点 $p\in M$ での値である．

Proof. $X \in \mathfrak{g}$ を固定したときの話なので，証明はほぼ同じであるが，もっとエレガントな証明を紹介する．$X \in \mathfrak{g}$ に対して，$D_X = d - \iota_X$ とする（G 同変外微分を使わずに，X が生成するリー部分群に対する同変外微分である）．G 不変計量をとって，

$$\theta(Y) = \langle X, Y \rangle, \quad Y \in \mathfrak{X}(M)$$

という 1-form θ を考える．このとき，計量が G 不変であるので $L_X\theta = 0$ をみたす．また $D_X\theta = d\theta - |X|^2$ となる．よって，X のゼロ点以外のところで，$D_X\theta$ は可逆である．つまり，

$$\frac{1}{d\theta - |X|^2} = -\frac{1}{|X|^2}\frac{1}{(1-\frac{d\theta}{|X|^2})} = -\frac{1}{|X|^2}\left(1 + \frac{d\theta}{|X|^2} + \frac{(d\theta)^2}{|X|^4} + \cdots\right)$$

さて，α が D 閉形式であるの，

$$D\alpha(X) = d\alpha(X) - \iota_X\alpha(X) = D_X\alpha(X) = 0$$

を満たす．また，

$$D_X^2\theta = dd\theta - d\iota_X\theta - \iota_X d\theta + \iota_X\iota_X\theta = -L_X\theta = 0$$

である．そこで，

$$D_X\left(\frac{\theta \wedge \alpha(X)}{D_X\theta}\right) = (D_X\theta)^{-1} \wedge D_X(\theta \wedge \alpha(X)) - \{(D_X\theta)^{-1}D_X^2\theta(D_X\theta)^{-1}\}\theta \wedge \alpha(X) = \alpha(X)$$

となる（ゼロ点以外で）．この式の最高次数の項を取れば，

$$\alpha(X)_{[n]} = d\left(\frac{\theta \wedge \alpha(X)}{D_X\theta}\right)_{[n-1]}$$

となるので，ゼロ点以外のところで $\alpha(X)_{[n]}$ は d 完全形式である．

また，X のゼロ点の近傍で，正規座標を使うと

$$X_x = \lambda_1(x_2\partial_1 - x_1\partial_2) + \cdots + \lambda_n(x_{2n}\partial_{2n-1} - x_{2n-1}\partial_{2n})$$

となるのであった．この座標において，

$$\theta' = \lambda_1^{-1}(x_2dx_1 - x_1dx_2) + \cdots + \lambda_n^{-1}(x_{2n}dx_{2n-1} - x_{2n-1}dx_{2n})$$

とすれば，$\theta'(X) = \|x\|^2$ 及び $L_X\theta' = 0$ を満たし，$D_X = d\theta' - \|x\|^2$ となる．$x = 0$ が X のゼロ点に対応するので，ゼロ点以外では可逆であることには変わりない．そこで，先ほどの $\theta(Y) = \langle X, Y \rangle$ と，この θ' を一の分割を使って張り合わせたも

のを改めて θ としても，$L_X\theta = 0$ は成立しているので，計算は成立することになる（一の分割は G で積分することで，G 不変としてよい）．そこで，ストークスの定理により，

$$\begin{aligned}\int_X \alpha(X) &= -\sum_p \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon^p}\frac{\theta\wedge\alpha(X)}{D_X\theta} = \sum_p \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon^p}\frac{\theta\wedge\alpha(X)}{\|x\|^2 - d\theta} \\ &= \sum_p \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_1^p}\frac{\theta\wedge\alpha_\epsilon(X)}{1-d\theta} = \sum_p \alpha(X)(p)\int_{S_1^p}\theta\wedge(1-d\theta)^{-1} \\ &= \sum_p \alpha(X)(p)\int_{S_1^p}\theta\wedge(d\theta)^{n-1} = \sum_p \alpha(X)(p)\int_{D_1^p}(d\theta)^n\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$d\theta = (\lambda_1\cdots\lambda_n)^{-1}(-2)^n n! dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$

であり，単位球の体積は $\pi^n/n!$ であるので，定理が証明された． □

ベクトル場 X のゼロ点が孤立しないで，ある部分多様体になる場合のバージョンもある．それには，X の法束の同変オイラー類を使って局所化定理を述べることができる．Berline-Vergne の方法でやるなら [Berline-Getzler-Vergne] を参照せよ．後で Atitah-Bott による方法は与える．

13.3.3 振動積分と Duistermaat-Heckman 定理

局所化定理を使った DH 公式を述べる．さらに，振動積分が exact に展開できることを述べる．

(M, ω, G, μ) というハミルトニアン G 空間（M をコンパクト）を考える．このとき次の関数を考える

$$g(X) = \int_{m\in M} e^{i\omega}e^{i\mu^X(m)} = \int_{m\in M} i^n\frac{\omega^n}{n!}e^{i\mu^X(m)}$$

を考える（G がトーラスの場合は DH 多項式のフーリエ変換 $\times i^n$ であった）．$X\in\mathfrak{g}$ として X^* のゼロ点は孤立していると仮定する．

Theorem 13.3.3 (Duistermaat-Heckman). (M, ω, G, μ) というハミルトニアン G 空間（M をコンパクト）を考え，$X\in\mathfrak{g}$ として X^* のゼロ点は孤立していると仮定する．このとき次が成立する．

$$\int_M e^{i\mu^X}\frac{\omega^n}{n!} = (2\pi)^n i^n \sum_{p\in Zero(X^*)}\frac{e^{i\mu^X(p)}}{\det^{1/2}(L_X)_p}$$

Proof. $\tilde{\omega} = \omega + \mu \in (\Omega^2(M) \otimes S^0(\mathfrak{g}^*))^G \oplus (\Omega^0(M) \otimes S^1(\mathfrak{g}^*))^G$ は同変閉形式である．よって

$$e^{i\tilde{\omega}} = e^{i\mu} e^{i\omega}$$

も同変閉形式である（D はライプニッツ則をみたしたことからわかる）．また $X \in \mathfrak{g}$ として，$e^{i\tilde{\omega}}(X) = e^{i\mu^X} e^{i\omega}$ であるので，局所化定理に代入すればよい．よって

$$\int i^n e^{i\mu^X} \frac{\omega^n}{n!} = \int_M e^{i\mu^X} e^{i\omega} = (-2\pi)^n \sum_{p \in Zero(X^*)} \frac{e^{i\mu^X(p)}}{\det^{1/2}(L_X)_p}$$

となる． □

Remark 13.3.1. i 倍は関係ないので，

$$\int_M e^{\mu^X} \frac{\omega^n}{n!} = (2\pi)^n \sum_{p \in Zero(X^*)} \frac{e^{\mu^X(p)}}{\det^{1/2}(L_X)_p}$$

も成立する．

さて，この DH 公式から振動積分の漸近展開が exact に展開できることがわかる．それについて述べる．まず振動積分の説明をする．詳しく説明すると面倒なので，一変数の場合に証明して多変数の場合は概略のみ述べる．([藤原]（多変数），[高崎]（一変数）などを参照）．

まず基本公式は $a < 0 < b$ として

$$\begin{cases} \int_a^b e^{i\lambda x^2} dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \exp \frac{i\pi}{4} \quad (\lambda \to \infty) \\ \int_a^b e^{-i\lambda x^2} dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \exp -\frac{i\pi}{4} \quad (\lambda \to \infty) \end{cases}$$

である．

Proof.

$$\int_a^b e^{i\lambda x^2} dx = \lambda^{-1/2} \int_{\lambda^{1/2}a}^{\lambda^{1/2}b} e^{ix^2} dx = \lambda^{-1/2} \{ \int_0^{\lambda^{1/2}b} + \int_0^{-\lambda^{1/2}a} \} e^{ix^2} dx$$

これを複素積分でかく．e^{iz^2} を扇形 $\{z \in \mathbb{C} | 0 \le \arg z \le \pi/4, |z| \le R\}$ 上で積分する．

$$e^{iz^2} = \begin{cases} e^{ir^2} & dz = dr, \quad 0 \le r \le R, \quad \arg z = 0 \\ e^{iR^2 e^{i\theta}} & dz = iRe^{i\theta} d\theta, \quad r = R, \quad 0 \le \arg z \le \pi/4 \\ e^{ir^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{-r^2} & dz = e^{i\frac{\pi}{4}} dr, \quad 0 \le r \le R, \quad \arg z = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

この扇形で正則であり，複素積分の向きを考えると，

$$\int_0^R e^{ix^2}dx + \int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta = \int_0^R e^{-t^2}e^{\frac{\pi}{4}i}dt$$

となる．さらに

$$|\int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin\theta}Rd\theta \to 0 \quad (R \to \infty)$$

となる．よってガウス積分を使って

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx = e^{i\pi/4}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi/4}$$

がわかる．よって

$$\int_a^b e^{i\lambda x^2}dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{i\pi/4} \quad (\lambda \to \infty)$$

もう一つの式も e^{-iz^2} を下側の扇形 $\{z \in \mathbb{C} | 0 \geq \arg z \geq -\pi/4, |z| \leq R\}$ 上で積分すれば証明できる． □

次に，$[a,b]$ 上で C^2 級の関数 f,g をとってくる．このとき積分

$$\int_a^b e^{i\lambda f(x)}g(x)dx$$

を考える．(この形の積分を**振動成分**という)

1. f が $[a,b]$ において臨界点をもたないとき

$$\int_a^b e^{i\lambda f(x)}g(x)dx = \frac{1}{i\lambda}\{\frac{g(b)}{f'(b)}e^{i\lambda f(b)} - \frac{g(a)}{f'(a)}e^{i\lambda f(a)}\} + O(\frac{1}{\lambda^2}) \quad (\lambda \to \infty)$$

2. f が $[a,b]$ において唯一つの臨界点 c をもち，$f''(c) > 0$ のとき．

$$\int_a^b e^{i\lambda f(x)}g(x)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f''(c)}}g(c)e^{i(\lambda f(c)+\pi/4)} + O(\frac{1}{\lambda}) \quad (\lambda \to \infty)$$

3. f が $[a,b]$ において唯一つの臨界点 c をもち，$f''(c) < 0$ のとき．

$$\int_a^b e^{i\lambda f(x)}g(x)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda f''(c)}}g(c)e^{i(\lambda f(c)-\pi/4)} + O(\frac{1}{\lambda}) \quad (\lambda \to \infty)$$

Proof. まず f が臨界点をもたないときを見てみる．$f'(x) \neq 0$ である．よって

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{i\lambda f(x)} g(x) dx &= \int_a^b (\frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda f(x)})' \frac{g(x)}{f'(x)} dx \\ =& [\frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda f(x)} \frac{g(x)}{f'(x)}]_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b e^{i\lambda f(x)} (\frac{g(x)}{f'(x)})' dx\end{aligned}$$

最後の第2項に対して，同じことを繰り返せば，第二項が $O(\lambda^{-2})$ であることがわかる．

次に $f'(c) = 0$ で $f''(c) > 0$ の場合（極小）．まず，第一の主張から，臨界点を含まない区間上では $O(\lambda^{-1})$ である．そこで c の周りだけ考えればよく，それを再び $[a, b]$ と書いて，$[a, b]$ 上で $f''(x) > 0$ としてよい．まず

$$u = \begin{cases} -\sqrt{f(x) - f(c)} & (a \leq x \leq c) \\ \sqrt{f(x) - f(c)} & (c \leq x \leq b) \end{cases}$$

と変数変換する．（$u = 0$ が $x = c$ に対応している）．

$$\int_a^b e^{i\lambda f(x)} g(x) dx = e^{i\lambda f(c)} \int_\alpha^\beta e^{i\lambda u^2} g(x) \frac{dx}{du} du = e^{i\lambda f(c)} \int_\alpha^\beta e^{i\lambda u^2} \phi(u) du$$

そこで $\phi(u) = g(x)\frac{dx}{du}$ を調べる．

まず $f'(c) = 0, f''(c) > 0$ なので

$$u^2 = f(x) - f(c) = \frac{1}{2} f''(c)(x-c)^2 + o((x-c)^2) = \frac{1}{2} f''(c)(1 + o(1))(x-c)^2$$

から

$$u = \sqrt{f''(c)/2}(1 + o(1))(x - c) \quad (x \to c)$$

となる．これを x で微分すれば

$$du/dx = \sqrt{f''(c)/2} o(x)(x-c) + \sqrt{f''(c)/2}(1 + o(1)) \quad (x \to c)$$

となるので $du/dx(c) = \sqrt{f''(c)/2}$ である．よって $dx/du(0) = \sqrt{2/f''(c)}$ である．よって ϕ は C^2 級で $\phi(0) = g(c)\sqrt{2/f''(c)}$ となる．そこで以前証明したことから

$$\int_\alpha^\beta e^{i\lambda u^2} \phi(0) du = \phi(0)\sqrt{\pi} e^{i\pi/4} \sqrt{\lambda} + O(\lambda^{-1}) \quad (\lambda \to \infty)$$

また

$$
\begin{aligned}
&\int_{\alpha}^{\beta} e^{i\lambda u^2}\phi(u)du - \phi(0)\int_{\alpha}^{\beta} e^{i\lambda u^2}du \\
=&\int_{\alpha}^{\beta} e^{i\lambda u^2} u\frac{\phi(u)-\phi(0)}{u}du \\
=&\int_{\alpha}^{\beta} (\frac{e^{i\lambda u^2}}{2i\lambda})'\frac{\phi(u)-\phi(0)}{u}du \\
=&[\frac{e^{i\lambda u^2}}{2i\lambda}]_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2i\lambda}\int_{\alpha}^{\beta} e^{i\lambda u^2}(\frac{\phi(u)-\phi(0)}{u})'du = O(\lambda^{-1})
\end{aligned}
$$

ここで $\phi(u)$ は C^2 であるので $\frac{\phi(u)-\phi(0)}{u}$ は C^1 級である．実際．$u=0$ のところが問題であるが,

$$
\lim_{u\to 0}(\frac{\phi(u)-\phi(0)}{u})' = \lim_{u\to 0}\frac{\phi'(u)-\frac{\phi(u)-\phi(0)}{u}}{u} = \phi''(0)
$$

となる．

よって

$$
\begin{aligned}
&e^{i\lambda f(c)}\int_{\alpha}^{\beta} e^{i\lambda u^2}\phi(u)du \\
=&e^{i\lambda f(c)}(\phi(0)\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}\sqrt{1/\lambda} + O(\lambda^{-1})) \\
=&e^{i\lambda f(c)}g(c)\sqrt{2\pi/f''(c)}e^{i\pi/4}\sqrt{1/\lambda} + O(\lambda^{-1})
\end{aligned}
$$

□

次に多変数の場合について振動積分の概略を述べる．一変数の場合には，上でみたように

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}\lambda}
$$

が成立した．多変数の場合にまず $Q(x_1,\cdots,x_n)$ を非退化 2 次形式として

$$
\int_{\mathbb{R}^n} e^{iQ(x)}dx_1\cdots dx_n = \sqrt{\frac{\pi^n}{|\det Q|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}Q}
$$

が成立する．また

$$
\int_{\mathbb{R}^n} e^{itQ(x)}dx_1\cdots dx_n = t^{-n/2}\sqrt{\frac{\pi^n}{|\det Q|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}Q}
$$

Proof. Q を対角化するように $x \to Px$ と変数変換する．このとき簡単のため $a_1, \cdots, a_k > 0,\ a_{k+1}, \cdots a_n < 0$ としておく．直交変換であるので $|\det P| = 1$ である．

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} e^{iQ(x)} dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \sum q_i x_i^2} |\det P| dx_1 \cdots dx_n \\ =&\prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{iq_i x_i^2} dx_i = \prod \sqrt{\frac{\pi}{|q_i|}} e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn} q_i} \\ =&\sqrt{\frac{\pi^n}{|\det Q|}} e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn} Q}\end{aligned}$$

□

次に $Q(x)$ を一般の関数 $f(x)$ に置き換える．このとき f の臨界点の近傍でモースの補題を使えば一変数の場合と同様の議論ができることになる．また Q が非退化ということは f の臨界点でのヘッシアンが非退化ということに対応する．そこで，$f(x)$ を臨界点が有限個で，その点でのヘッシアンが非退化であると仮定する（このような f を非退化とよぶ）．M を多様体として，$f(x)$ を非退化な関数とする．また dx を体積要素とする．p を f の臨界点とすれば，$H_p = \nabla_p^2 f$ は T_pM 上の非退化 2 次形式を与える．$T_pM = T_p^+ \oplus T_p^-$ と正の固有空間と負の固有空間に分解する．

$$\sigma(H_p) := \dim T^+ - \dim T^-$$

とする．さらに $\{e_i\}_i$ を T_pM の基底で $\langle dx, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle = 1$ となるものとする．このとき

$$a_p(f, dx) := \sqrt{\frac{1}{\det(H_p(e_i, e_j)_{ij})}}$$

とすれば，次が成立する．

Proposition 13.3.4 (振動積分の停留位相近似). 上の条件のもとで次が成立する．

$$\int_M e^{itf(x)} dx = t^{-n/2} (2\pi)^{n/2} \sum_{p \in M_0} e^{\frac{i\pi}{4}\sigma(H_p)} a_p(f, dx) e^{itf(p)} + O(t^{-n/2-1}) \quad (t \to \infty).$$

さて，これを DH の局所化定理の場合に考えてみる．

Theorem 13.3.5. (M, ω) を $2n$ 次元コンパクトシンプレクティック多様体として f をハミルトン関数．X_f を対応するハミルトンベクトル場とする．さらに X_f で生成される *flow* が周期的で，X_f のゼロ点は離散的と仮定する．このとき $\int_M \exp(itf)\omega^n/n!$ に対する停留位相近似の ***error*** 項は消える．つまり

$$\int_M e^{itf} \frac{\omega^n}{n!} = t^{-n} (2\pi)^n \sum_{p \in Zero(X_f)} e^{\frac{i\pi}{4}\sigma(H_p)} a_p(f, \frac{\omega^n}{n!}) e^{itf(p)}$$

Proof. X_f の flow を ϕ_t とおくと周期的なので $\phi_{t+T}=\phi_t$ となる．そこで

$$S^1 \ni e^{2i\pi t} \to \phi_{tT} \in Symp(M,\omega)$$

とすればこれは S^1 のシンプレクティック作用である．この作用に対して $1 \in Lie(S^1)$ に対する基本ベクトル場は

$$\frac{d}{dt}\phi_{tT}(p) = (T\cdot X_f)_p$$

である．モーメント写像は $\mu = T\cdot f$ とすればよい．実際 $\mu^1 = \langle Tf, 1\rangle = Tf$ であり，

$$d\mu^1 = Tdf = T\iota_{X_f}\omega = \iota_{TX_f}\omega$$

（X_f が f に対するハミルトンベクトル場であることを用いた）．また f は S^1 の作用で不変である（ハミルトニアンはハミルトニアンベクトル場の flow に沿って定数）．よってハミルトニアン S^1 作用であることがわかった．

局所化定理において，$\mu = Tf$, $X = \frac{t}{T}\cdot 1 \in Lie(S^1)$ に対して使用する．$\mu^X = tf$ になり，$X^* = tX_f$ となる．

$$\int_M e^{itf}\frac{\omega^n}{n!} = (2\pi)^n i^n \sum_{p\in M_0}\frac{e^{itf(p)}}{\det^{1/2} L_p(tX_f)} = (\frac{2\pi}{t})^n i^n \sum_{p\in M_0}\frac{e^{itf(p)}}{\det^{1/2} L_p(X_f)}$$

となる（ここで $df = i_{X_f}\omega$，ω 非退化から，f の臨界点は X_f のゼロ点であるので，局所化定理が使えるのである．$L_p(X_f) = (L_{X_f})_p$ としている）

そこで，$L_p(X_f)$ とヘッシアンの関係をみる必要がある．まず，次の公式が成立する．

$$H_p(Y,Z) = -\omega(L_p(X_f)Y, Z)$$

これを証明していこう．まず，$L_Z f = \iota_Z\iota_{X_f}\omega$ であるので

$$\begin{aligned}
&L_Y L_Z f = L_Y\iota_Z\iota_{X_f}\omega\\
=&(\iota_{[Y,Z]} + \iota_Z L_Y)\iota_{X_f}\omega\\
=&-\omega([Y,Z],X_f) + \iota_Z(\iota_{[Y,X_f]} + \iota_{X_f}L_Y)\omega\\
=&-\omega([Y,Z],X_f) + \omega([Y,X_f],Z) + \iota_Z\iota_{X_f}L_Y\omega
\end{aligned}$$

に点 p でかんがえて，$(X_f)_p = 0$ を代入すれば，$-\omega(L_p(X_f)Y,Z)$ となる．そこで ω は非退化であり，$L_p(X_f)$ も可逆であったので，H_p は非退化 2 次形式である．よって f は非退化関数である．つまり停留法の仮定を満たしている（$L_{X_f}\omega = 0$ であるので $\omega(L_p(X_f)Y,Z) = -\omega(Y, L_p(X_f)Z) = \omega(L_p(X_f)Z, Y)$．ヘッシアンが対称であることと矛盾してない）．

そこで証明すべきことは

$$\det{}^{-1/2} L_p(X_f) = i^{-n} e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(H_p)} |\det H_p(e_i, e_j)|^{-1/2}$$

である．

局所化定理で p での向きつき基底 $\{e_i\}_i$ を勝手にとってきて $\det^{1/2} L_p(X_f)$ を定義した．そこで，シンプレクティック基底を取ってくる．シンプレクティック基底は

$$\langle \frac{\omega^n}{n!}, e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots e_{2n} \rangle = 1$$

をみたす．ω に対して compatible で S^1 不変なリーマン計量を持ってくる．つまり $g(u, v) = \omega(u, Jv)$（J は S^1 不変な概複素構造）．このとき $A = L_p(X_f)$ とすれば点 p において

$$g(Av, w) + g(v, Aw) = 0, \quad \omega(Av, w) + \omega(v, Aw) = 0, \quad JA = AJ$$

が成立する．よって A は g に関して交代行列かつ概複素構造と可換である．g からエルミート計量を

$$h(v, w) = g(v, w) + i\omega(v, w)$$

として定義すると，

$$h(Av, w) = g(Av, w) + i\omega(Av, w) = -g(v, Aw) - i\omega(v, Aw) = -h(v, Aw)$$

となるので，A は非退化歪エルミート変換である．よってユニタリ変換 P により対角化でき，固有値は純虚数である．$P^{-1}AP = (i\lambda_1, \cdots, i\lambda_n)$ となる．$P \in U(n) = O(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{R})$ であるから，シンプレクティック基底をシンプレクティック基底に移す．よってシンプレクティック基底で $e_1, \cdots, e_{2n}$ で $Ae_{2i-1} = \lambda_i e_{2i}$, $Ae_{2i} = -\lambda_i e_{2i-1}$ となるものが存在する．よって

$$\begin{aligned} H_p(e_{2i-1}, e_{2j-1}) &= -\Omega(L_p(X)e_{2i-1}, e_{2j-1}) = \lambda_i \delta_{ij} \\ H_p(e_{2i}, e_{2j}) &= -\Omega(L_p(X)e_{2i}, e_{2j}) = \lambda_i \delta_{ij} \\ H_p(e_{2i-1}, e_{2j}) &= 0 \end{aligned}$$

となるので，

$$\sqrt{\frac{1}{|\det H_p(e_i, e_j)|}} = |\lambda_1 \cdots \lambda_n|^{-1}$$

を得る．さらに符号を考える．$\{\lambda_i\}_i$ において，正の固有値の数を k とし，非退化なので負の固有値の数は $n-k$ である．そこで

$$\mathrm{sgn}(H) = 2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{sgn}(\lambda_i) = 2(k - (n-k)) = 2(2k - n)$$

であるので，

$$\exp(\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(H)) = \exp(\frac{i\pi}{2}(2k-n)) = i^k(-i)^{n-k} = i^n(-1)^{n-k}$$

以上から

$$\det{}^{-1/2} L_p(X_f) = (\lambda_1\cdots\lambda_n)^{-1} = |\lambda_1\cdots\lambda_n|^{-1}(-1)^{n-k} = i^{-n}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(H_p)}\sqrt{\frac{1}{|\det H_p(e_i,e_j)|}}$$

が証明できた．

□

13.4　局所化定理その 2

[Guillemin-Sternberg(equiv)] に従って，同変トム形式を使った（Atiyah-Bott 流）局所化定理を述べる．普通のトム形式やオイラー類などについては [Bott-Tu] を参照．

13.4.1　Berezin 積分

フェルミオン積分（または **Berezin 積分**）について述べる．V を d 次元ベクトル空間とする．基底を $\{\psi^1,\cdots,\psi^d\}$ とする．また，

$$vol := \psi^1\wedge\cdots\wedge\psi^d$$

とする．$f\in\Lambda^*(V)$ を odd-変数 ψ の関数とみなして，その積分を

$$\int f(\psi^1,\cdots,\psi^d)d\psi = f_{vol},\quad f=\sum f_I\psi^I \tag{13.4.1}$$

として定義する．つまり，top-term の係数を取り出すことを意味する．odd 変数とは外積代数（フェルミオン）を変数とするものであり，even 変数とは通常の座標（ボゾン）を変数とするものである．これらの用語については super symmetry の本などを参照してほしい．

また $\tau_1,\cdots,\tau_d\in V^*$ を $\psi^1,\cdots,\psi^d$ の双対基底として，$\iota_{\tau_i}:\Lambda^kV\to\Lambda^{k-1}V$ を考えると，

$$\iota_v(f\wedge g) = \iota_v f\wedge g + (-1)^{\deg f} f\wedge\iota_v g$$

であるので，ι_{τ_i} は super な意味で微分である（super ライプニッツ則をみたす）．そこで，

$$\frac{\partial}{\partial\psi^i} := \iota_{\tau_i}$$

書くことにする．$f \in \Lambda^*(V)$ に対して，$\iota_v f$ は次数 d の部分がないので，

$$\int \frac{\partial}{\partial \psi^i} f d\psi = 0$$

を得る．また，(13.4.1) から

$$\int \frac{\partial u}{\partial \psi^i} v d\psi = -(-1)^{\deg u} \int u \frac{\partial v}{\partial \psi^i} d\psi$$

が成立する．

　さて，変数変換

$$\psi^i \mapsto \tilde{\psi} \sum a^i_j \psi^j$$

を考えると，

$$vol \mapsto (\det A) vol$$

となる．よって，

$$\int f(\sum a^1_j \psi^j, \cdots, \sum a^d_j \psi^j) d\psi = \det A \int f(\tilde{\psi}^1, \cdots, \tilde{\psi}^d) d\tilde{\psi}$$

を得る．一方，普通の積分（ボゾン積分）では，変数を線形変換 $y(x) = \sum a^i_j x^j$ としたときに，

$$\int f(y(x)) dx = (\det A)^{-1} \int f(y(x)) |\frac{dy}{dx}| dx = (\det A)^{-1} \int f(y) dy$$

となる．このように**ボソン積分とフェルミオン積分では，（線形）変数変換したとき振る舞いが逆になる．**

EXAMPLE 13.4.1. $d = 2m$ として，$q \in \Lambda^2(V)$ とする．これを odd-変数の関数とみなして，

$$q = q(\psi^1, \cdots, \psi^d) = q_{ij} \psi^i \psi^j, \quad q_{ij} = -q_{ji}$$

を考える．このとき，フェルミオンガウス積分は

$$\int \exp(-\frac{1}{2} q(\psi^1, \cdots, \psi^d)) d\psi = (\det Q)^{1/2}, \quad Q = (q_{ij})$$

となる．特に，$q \in \Lambda^2(V) = \mathfrak{o}(n)$ と見れば，

$$\int \exp(-q/2) d\psi = \mathrm{Pfaff}(q) \tag{13.4.2}$$

となる．

Proof. 向きを保つ直交変換（$\det A = 1$）を行って，

$$Q = \mathrm{diag}\,(\lambda_1 J, \lambda_2 J, \cdots, \lambda_m J), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としてよい．例えば，

$$q_{12}\psi^1\psi^2 + q_{21}\psi^2\psi^2 = 2q_{12}\psi^1\psi^2 = -2\lambda_1\psi^1\psi^2$$

であるので，

$$-q/2 = \lambda_1\psi^1\psi^2 + \lambda_2\psi^3\psi^4 + \cdots + \lambda_m\psi^{2m-1}\psi^{2m}$$

となる．そこで，$\exp(-q/2)$ の top-term（次数 $2m$）は，

$$(-2)^{-m}\frac{1}{m!}q^m = \frac{1}{m!}m!\lambda_1\cdots\lambda_m\psi^1\cdots\psi^2 = \lambda_1\cdots\lambda_m vol$$

となる．よって，

$$\int \exp(-q/2)d\psi = \lambda_1\cdots\lambda_m = (\det Q)^{1/2}$$

となる． □

一方，Bosonic ガウス積分では，$q(x,y) = q_{ij}x^ix^j$（$q_{ij} = q_{ji}$）とすれば，

$$\int_V e^{-q(x,x)/2}dx = (2\pi)^{-m}|\det Q|^{-1/2}$$

となる．

13.4.2 普遍トム形式

d 次元実ベクトル空間 V に向きと内積が入っていた場合には，向きつき正規直交基底を選べば,（向き内積に付随した）フェルミオン積分が唯一つに定まる．

V には $SO(d)$ が作用しているので，$\Omega_{SO(d)}(V)$ という同変微分形式を考えることが可能である．

リー環 $\mathfrak{o}(d) = Lie(SO(d))$ の基底を $\xi_1, \cdots, \xi_n$ とする（$n = d(d-1)/2$）．また ξ に付随した V の交代変換を M_ξ とする．また，ξ_a に付随した変換を略して M_a と書こう．

このとき

$$\sum(M_\xi\psi^i)\psi^i = -\sum\psi^i M_\xi\psi^i$$

となる．実際，$M_\xi = (M^i_j)$ とすれば，

$$\sum (M_\xi \psi^i)\psi^i = \sum (M^i_j \psi^j)\psi^i = -\sum M^j_i \psi^j \psi^i$$
$$= -\sum \psi^j M^j_i \psi^i = -\sum \psi^j (M_\xi \psi^j)$$

となる．

さて，$x^1, \cdots, x^n$ を $\xi_1, \cdots, \xi_n$ の双対基底（$\mathfrak{o}(d)^*$ の基底．または座標）として，$u_1, \cdots, u_d$ を V の $\psi^1, \cdots, \psi^d$ に関する双対基底または座標とする．

このとき，

$$\sigma := -\frac{1}{2}\sum u_i^2 + \sqrt{-1}\psi^j du_j - \frac{1}{2}\sum \psi^k x^a M_a \psi^k \quad \in S(\mathfrak{o}(d)^*) \otimes \Omega^*(V) \otimes \Lambda^* V$$

を考える．ここで，$x^a \in S(\mathfrak{o}(d)^*)$ であり，$\psi^k \in \Lambda^*(V)$（odd 変数またはフェルミオン），$u_i^2, du_j \in \Omega^*(V)$（even 変数またはボソン）である．

Remark 13.4.1. このノートでは，$\Omega^*(V) \otimes \Lambda^*(V)$ において，$du_i \psi^j = -\psi^j du_i$ としておく．つまり $du_i \psi^j = \frac{1}{2}(du_i \otimes \psi^j - \psi^j \otimes du_i)$ の意味である．これが嫌なら $du_i \psi^j = du_i \otimes \psi^j$ として計算してもかまわない．

上の σ を使ってフェルミオン積分

$$\int \exp \sigma d\psi \in S(\mathfrak{o}(d)^*) \otimes \Omega^*(V)$$

を考える．$SO(d)$ を $\Lambda^*(V)$ にも作用させることで，σ は $SO(d)$ 不変であることがわかる．さらに，これをフェルミオン積分した時

$$\int \exp \sigma d\psi \in \Omega^*_{SO(d)}(V) = (S(\mathfrak{o}(d)^*) \otimes \Omega^*(V))^{SO(d)}$$

となる．

Proof. フェルミオン積分で効いてくるのは $\psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^d$ の部分であるが，その項を

$$x^I \otimes a_I \psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^d$$

と書くことにする．σ が $SO(d)$ 不変なので，この項も $SO(d)$ 不変な元である．つまり，

$$(\mathrm{Ad}^*_g x)^I \otimes (g^{-1})^* a_I (g\psi^1) \wedge \cdots \wedge (g\psi^d) = x^I \otimes a_I \psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^d$$

を満たす．ここで $g\psi^1 \wedge \cdots \wedge g\psi^d = \psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^d$ であるので，

$$(\mathrm{Ad}^*_g x)^I \otimes (g^{-1})^* a_I = x^I \otimes a_I$$

が成立する．よって $\int \exp \sigma d\psi \in \Omega_{SO(d)}(V)$ となる．　□

次に，$\int \exp\sigma d\psi$ が D 閉形式であることを見ていこう．いまの設定で，

$$D = d - \sum_a x^a \iota_a$$

である．まず

$$d\sigma = -\sum u_i du_i.$$

また，$\iota_a du_k = L_a u_k$ であり，$SO(d)$ の V への作用は線形作用であった．$M\psi^i = M^i_j\psi^j$ とすれば，u_j への作用はその双対であるので，

$$\begin{aligned}(-x^a\iota_a)\sigma &= (-x^a\iota_a)(\sqrt{-1}\psi^j du_j) = (x^a\iota_a)(\sqrt{-1}du_j\psi^j)\\ &= \sqrt{-1}x^a L_a u_j\psi^j = -\sqrt{-1}x^a(M_a)^k_j u_k\psi^j\\ &= -\sqrt{-1}x^a(M_a\psi^k)u_k\end{aligned}$$

となる．よって，

$$D\sigma = -\sum u_k(du_k + \sqrt{-1}x^a M_a\psi^k)$$

を得る．

一方，

$$\frac{\partial}{\partial\psi^j}(-\frac{1}{2}\sum \psi^k x^a M_a\psi^k) = -x^a M_a\psi^j, \quad \frac{\partial}{\partial\psi^j}(\sqrt{-1}\psi^k du_k) = \sqrt{-1}du_j$$

となるので，

$$\frac{\partial}{\partial\psi^j}\sigma = \sqrt{-1}du_j - x^a M_a\psi^j$$

を得る．そこで，

$$D\sigma = \left(\sum_k \sqrt{-1}u_k\frac{\partial}{\partial\psi^k}\right)\sigma$$

が成立する．

さて，σ は $S(\mathfrak{o}(d)^*)\otimes\Omega(V)\otimes\Lambda(V)$ において次数は偶数であるので，D のライプニッツ束を使って，

$$D(\sigma^k) = k\sigma^{k-1}D\sigma$$

となり，

$$D(\exp\sigma) = (\exp\sigma)D\sigma$$

を得る．$\left(\sum_k \sqrt{-1}u_k\frac{\partial}{\partial\psi^k}\right)$ という微分作用に対しても同様であり，

$$(\sum_k \sqrt{-1}u_k\frac{\partial}{\partial\psi^k})(\exp\sigma) = (\exp\sigma)(\sum_k \sqrt{-1}u_k\frac{\partial}{\partial\psi^k})\sigma$$

を得る．よって，

$$D(\exp\sigma) = (\sum_k \sqrt{-1}u_k \frac{\partial}{\partial\psi^k})\exp\sigma$$

となる．

そこで，

$$D\int \exp\sigma d\psi = \int D(\exp\sigma)d\psi = \sum_k \sqrt{-1}u_k \int \frac{\partial}{\partial\psi^k}(\exp\sigma)d\psi = 0$$

を得る．つまり $\int \exp\sigma d\psi$ は D 閉である．

さて，$\int \exp\sigma d\psi$ の V 上での積分を考える．このとき効いてくるのは $du_1\cdots du_d$ である，

$$\int \exp\sigma d\psi = e^{-\sum u_k^2/2}\int \exp(\sqrt{-1}\psi^k du_k)d\psi + (\text{lower term})$$

となる．そこで，V 上での積分を考えるなら

$$\sqrt{-1}^d \exp(-\frac{1}{2}\sum u_k^2)(-1)^{d(d+1)/2}du_1\cdots du_d$$

を積分すればよいので，

$$(-\sqrt{-1})^d(-1)^{d(d-1)/2}\int_V \exp(-\frac{1}{2}\sum u_k^2)du_1\cdots du_d = (-\sqrt{-1})^d(-1)^{d(d-1)/2}(2\pi)^{d/2} \neq 0$$

となる．

$d = \dim V$ が偶数の場合を考える．

$$j : \{0\} \to V$$

を自然な埋め込み（零切断）とする．これは $SO(d)$ 同変な埋め込みである．また，

$$\nu := \frac{\sqrt{-1}^d}{(-1)^{d(d-1)/2}(2\pi)^{d/2}}\int \exp\sigma d\psi$$

として，$j^*\nu$ を考えると，u_j, du_j は零とみなすことになる．そして，$q = \sum \psi^k x^a M_a \psi^k$ として，(13.4.2) を適用すれば，不変多項式

$$j^*\nu = (2\pi)^{-d/2}\mathrm{Pfaff}(x^a M_a) \in \Omega_{SO}(d)(pt) = S(\mathfrak{o}(d)^*)^{SO(d)}$$

を得る．つまり，$((2\pi)^{d/2}j^*\nu) \in S(\mathfrak{o}(d)^*)^{SO(d)}$ はオイラー類を与える不変多項式である．

以上から次を得る（by Mathai-Quillen）

Theorem 13.4.1 (普遍トム形式). 次を普遍トム形式とよぶ.

$$\nu := \frac{\sqrt{-1}^d}{(-1)^{d(d-1)/2}(2\pi)^{d/2}} \int \exp \sigma d\psi$$

これは，$\nu \in \Omega^*_{SO(d)}(V)$ かつ D 閉である．そして，$\int_V \nu = 1$ を満たす.

また，$d = \dim V$ が偶数のとき $j : \{0\} \to V$ に対して，

$$j^*\nu = (2\pi)^{-d/2} \mathit{Pfaff}(x^a M_a) \in S(\mathfrak{o}(d)^*)^{SO(d)}$$

が成立する．ここで $\mathit{Pfaff}(x^a M_a) \in S(\mathfrak{o}(d)^*)^{SO(d)}$ はオイラー類を与える不変多項式.

上で構成した普遍トム形式は，$u \to \infty$ の時に急減少しているが，コンパクトサポートを持つわけではない．コンパクトサポートを持つようにするには次のようにスケール変換すればよい.

$B = \{(u_1, \cdots, u_d) \in V | \sum u_i^2 \leq 1\} \subset V$ とする．つまり単位開球体である．このとき $SO(d)$ 同変微分同相

$$\rho : B \ni u \mapsto \frac{1}{1 - \|u\|^2} u \in V$$

を考える.

$$\rho^*(e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2}) = e^{-\frac{\|u\|^2}{2(1-\|u\|^2)^2}}$$

であり，$\|u\| \to 1$ のとき急減少している.

そこで $\rho^*\nu$ を考えて，これを B の外で零拡張すれば，コンパクトサポートをもつ ν_0 を得る．また ρ が $SO(d)$ 同変であることから，ν_0 は D 閉である．また，V 上の積分は 1 となる.

後で，この普遍トム形式 ν_0 を使って，同変法束に対するトム形式を構成する.

13.4.3 ファイバー積分

ファイバー束 $\pi : Y \to X$ を考える．$\dim Y = m$, $\dim X = n$ として，$k := m - n \geq 0$ とする（k はファイバーの次元）.

Definition 13.4.1 (ファイバー積分). $\Omega^l(Y)_0$ をコンパクトサポートをもつ微分形式とする．各 $l \geq k$ に対して，

$$\pi_* : \Omega^l(Y)_0 \to \Omega^{l-k}(X)_0$$

という写像で，

$$\int_Y \pi^*\beta \wedge \mu = \int_X \beta \wedge \pi_*\mu, \quad \forall \beta \in \Omega^{m-l}(X)_0$$

となるものが唯一つ存在．この π_* をファイバー積分とよぶ.

存在すれば唯一つであることを証明しておこう．π_*, π'_* で上を満たすものがあるとすると，

$$\int_Y \pi^*\beta \wedge \mu = \int_X \beta \wedge \pi_*\mu = \int_X \beta \wedge \pi'_*\mu$$

となる．つまり

$$\int_X \beta \wedge (\pi_*\mu - \pi'_*\mu) = 0, \quad \beta \in \Omega^{m-l}(X)_0$$

β が任意であることから $(\pi_*\mu - \pi'_*\mu) = 0$ となる．

ファイバー積分の存在は，局所座標で書いて，一の分割で張り合わせればよい．実際，ファイバー束を局所座標で書いて，

$$(x^1, \cdots, x^n, t^1, \cdots, t^k) \in Y$$

として，

$$\mu = f_I(x,t)dx^I \wedge dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^k + \cdots$$

としたときに，

$$\pi_*\mu = \left(\int f_I(x,t)dt^1 \cdots dt^k\right) dx^I$$

とすればよい．

Lemma 13.4.2. ファイバー積分は外微分と可換．つまり，

$$d\pi_* = \pi_* d$$

が成立．特に，

$$\pi_* : H^l(Y)_0 \to H^{l-k}(X)_0$$

は *well-defined* である．

Proof. $\mu \in \Omega^{l-1}(Y)_0$, $\beta \in \Omega^{m-l}(X)_0$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\int_X \beta \wedge \pi_* d\mu =& \int_Y \pi^*\beta \wedge d\mu \\ =& (-1)^{m-l-1} \int_Y \pi^* d\beta \wedge \mu \quad \text{（ストークス）} \\ =& (-1)^{m-l-1} \int_X d\beta \wedge \pi_*\mu = \int_X \beta \wedge d\pi_*\mu\end{aligned}$$

となる．そこで，ファイバー積分の一意性から $d\pi_* = \pi_* d$ がわかる． □

Lemma 13.4.3. $\phi : Y \to Y$, $\psi : X \to X$ を（向きを保つ）微分同相として，$\pi \circ \phi = \psi \circ \pi$ が成立してるとする．このとき．

$$\pi_* \circ \phi^* = \psi^* \circ \pi_*$$

が成立する．($\pi \circ \phi = \psi \circ \pi$ を π 関係とよぶ)．

Proof. 一般に，向きを保つ微分同相 $\phi : X \to X$ に対して，

$$\int_X \phi^* \alpha = \int_{\phi(X)} \alpha = \int_X \alpha$$

が成立する．そこで，

$$\begin{aligned}\int_Y \pi^* \beta \wedge (\phi^{-1})^* \mu &= \int_Y \phi^* \pi^* \beta \wedge \mu = \int_Y \pi^* \psi^* \beta \wedge \mu \\ &= \int_X \psi^* \beta \wedge \pi_* \mu = \int_X \beta \wedge (\psi^{-1})^* \pi_* \mu\end{aligned}$$

となる．よって，ファイバー積分の定義から，

$$\pi_* (\phi^{-1})^* \mu = (\psi^{-1})^* \pi_* \mu$$

が成立する． □

そこで ϕ_t, ψ_t が $\pi \circ \phi_t = \psi_t \circ \pi$ を満たす 1 パラメータ変換群として，対応するベクトル場を V, W とする．このとき

$$d\pi_y (V_y) = W_{\pi(y)}$$

を満たす．つまり π 関係 $d\pi(V) = W$ が成立する．そこで上の補題の無限小版を書けば，π 関係ベクトル場 V on Y, X on W に対して

$$\pi_* \circ L_V = L_W \circ \pi_*$$

が成立する．

Lemma 13.4.4. π 関係ベクトル場 V *on* Y, W *on* X に対して，

$$\pi_* \iota_V = \iota_W \pi_*$$

が成立する．

Proof. $\beta \in \Omega^{m-l+1}(X)_0$ とすれば，

$$\int_X \beta \wedge \pi_*(\iota_V \mu) = \int_Y \pi^*\beta \wedge \iota_V \mu$$

となる．$\pi^*\beta \wedge \mu$ は $m+1$ 形式であるので，$\pi^*\beta \wedge \mu = 0$ である．そこで，

$$\begin{aligned}\int_X \beta \wedge \pi_*(\iota_V \mu) = &\int_Y \pi^*\beta \wedge \iota_V \mu \\ =&(-1)^{m-l}\int_Y \iota_V \pi^*\beta \wedge \mu \\ =&(-1)^{m-l}\int_Y \pi^*\iota_W \beta \wedge \mu \\ =&(-1)^{m-l}\int_X \iota_W \beta \wedge \pi_*\mu \\ =&\int_X \beta \wedge \iota_W \pi_*\mu\end{aligned}$$

となる．最後のところで $\beta \wedge \pi_*\mu = 0$（$n+1$ 形式）を用いた． □

EXAMPLE 13.4.2. $\pi : Y \to X$ が K 同変となる場合を考える．K 同変コホモロジーを考えたとき，

$$\pi_* D = D\pi_*$$

が成立する．ちゃんと書いてみる．$f \in \Omega^*_K(Y)_0$ とする．$f : \mathfrak{k} \ni \xi \mapsto f(\xi) \in \Omega^*(Y)_0$ は K 同変で多項式的なものである．このとき $\pi_*(f)$ を

$$(\pi_* f)(\xi) = \pi_*(f(\xi))$$

として定義すれば，

$$\begin{aligned}(D\pi_* f)(\xi) =&d\pi_* f(\xi) - \iota_\xi(\pi_* f)(\xi) \\ =&\pi_* df(\xi) - (\pi_*\iota_\xi f)(\xi) \\ =&(\pi_* Df)(\xi)\end{aligned}$$

となる．以上から，

$$\pi_* : H^*_K(Y)_0 \to H^*_K(X)_0$$

は well-defined となる．

$\Omega^*(X)_0$ は $\Omega^*(X)$ 加群である．$\pi^* : \Omega^*(Y) \to \Omega^*(X)$ を使えば，$\Omega^*(Y)_0$ が $\Omega^*(X)$ 加群になる．このとき $\pi_* : \Omega^*(Y)_0 \to \Omega^*(X)_0$ は $\Omega^*(X)$ 加群としての準同形になる．つまり，いわゆる射影公式

$$\pi_*(\pi^*\beta \wedge \mu) = \beta \wedge \pi_*\mu \quad \forall \beta \in \Omega^r(X)$$

が成立する．

Proof. $\alpha \in \Omega^{m-r-l}(X)$ とすれば，

$$\begin{aligned}\int_X \alpha \wedge \pi_*(\pi^*\beta \wedge \mu) &= \int_Y (\pi^*\alpha \wedge \pi^*\beta) \wedge \mu \\ &= \int_Y \pi^*(\alpha \wedge \beta) \wedge \mu \\ &= \int_X (\alpha \wedge \beta) \wedge \pi_*\mu \\ &= \int_X \alpha \wedge (\beta \wedge \pi_*\mu)\end{aligned}$$

□

13.4.4 トム形式

位相幾何でのトム形式を復習しておく．X を向きつきコンパクト多様体で，$\pi : E \to X$ を向きつきで rank が d のベクトル束とする．また，$i : X \to E$ を零切断埋め込みとする．このとき ν **がトム形式とは，**$\tau \in H^d_{cv}(E)$ **（ファイバー方向にコンパクトサポートをもつもの）であり，ファイバー積分したときに** $\pi_*\tau = 1$ **となるもの**である．つまり，各ファイバーにおいて $H^d_c(\mathbb{R}^d)$ の生成元を与えるものである．

トム形式の基本的な性質をいくつか述べよう．

ファイバー積分を考えると，

$$\pi_* : H^*_{cv}(E) \to H^{*-d}(X)$$

は同型写像になる．射影公式から

$$\pi_*(\pi^*\alpha \wedge \tau) = \alpha \wedge \pi_*\tau = \alpha$$

となるので，コホモロジーレベルで π_* の逆写像は $F(\cdot) := \pi^*(\cdot) \wedge \tau$ である．ただし，$F \circ \pi_* = \mathrm{id}$ となることはホモトピー公式を使う必要がある（easy．詳細は [Bott-Tu]，[Berline-Getzler-Vergne]）．また，このことから**トム形式は** $H^d_{cv}(E)$ **の元として一意的に定まる．**

Proof. τ' を $\pi_*\tau' = 1$ となるものとする．このとき

$$\pi_*(\pi^*\omega \wedge \tau') = \omega \wedge \pi_*\tau' = \omega$$

が成立する．F と同様にして，$F' = \pi^*(\cdot) \wedge \tau'$ が π_* の逆写像を与えることがわかる．つまり $F = F'$（コホモロジーレベルで）である．そして $\tau' = F'(1) = F(1) = \tau$（in $H^*_{cv}(E)$）を得る． □

また，任意の閉微分形式 $\beta \in \Omega^*(E)$ に対して，

$$\int_E \beta \wedge \tau = \int_X i^*\beta$$

が成立する．これは**零切断 $i(X)$ の E におけるポアンカレ双対がトム形式**であることを意味する．

Proof. X は E の変形レトラクトであり id_E と $i \circ \pi$ はホモトピックである．よって，$[\beta] = [\pi^* i^* \beta]$ となるので，$\beta = \pi^* i^* \beta + d\gamma$ となる．τ がコンパクトサポートをもち閉形式であることから，

$$\begin{aligned}\int_E \beta \wedge \tau &= \int_E \pi^* i^* \beta \wedge \tau + \int_E d\gamma \wedge \tau \\ &= \int_E \pi^* i^* \beta \wedge \tau = \int_X i^* \beta \wedge \pi_* \tau = \int_X i^* \beta\end{aligned}$$

□

Z を向きつき多様体として，$X \to Z$ を埋め込みとする．X の法束 N と管状近傍 U を同一視しておく．$N = U$ のトム形式を零で拡張することにより Z 上の微分形式とみなせる．このとき，上で述べたことから，

$$\int_Z \beta \wedge \tau = \int_X i^*\beta$$

が成立する．つまり**τ は X の Z におけるポアンカレ双対**である．また，このことから X のポアンカレ双対は，サポートが X の管状近傍に入るようにすることが可能．

さて，普遍トム形式を使って，$E \to X$ に対するトム形式を構成し，トム形式の X への引き戻しが E のオイラー形式であることを証明する．これはオイラー形式の一つの定義であるのだが，我々はオイラー形式を不変多項式から定義しているので，それらが一致することを確かめたい．

X を向きつきコンパクト多様体で，$\pi : E \to X$ を向きつきで rank が d のベクトル束とする．E にファイバー内積をいれておき，向きつき正規直交フレームが作る主 $SO(d)$ 束 $P \to X$ を考える．$SO(d)$ の作用は，$\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_d) \in P_x$ としたときに，

$$g \cdot \mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_d) g^{-1}$$

とする（左作用にするために g^{-1} で作用させている）．また，V を $SO(d)$ の自然表現のベクトル空間とする．この作用は $a = (a_1, \cdots, a_d)^t \in V$ に対して，ga とする．このとき $P \times_{SO(d)} V = E$ となるのであった．同値関係は

$$[(x, \mathbf{e}), a] = [g(x, \mathbf{e}), ga] = [(x, \mathbf{e}g^{-1}), ga]$$

として入れている．

さて，$pr_2 : P \times V \to V$ は $SO(d)$ 同変写像であるので，

$$pr_2^* : \Omega^*_{SO(d)}(V) \to \Omega^*_{SO(d)}(P \times V)$$

を得る．V 上でコンパクトサポートをもつ普遍トム形式 ν_0 を考える．$pr_2^*\nu_0 \in \Omega^*_{SO(d)}(P \times V)$ であり D 閉形式である．

また

$$p : P \times V \ni ((x, \mathbf{e}), a) \mapsto (x, a_1e_1 + \cdots + a_de_d) \in E$$

を考える．$g \in SO(d)$ の作用を考えると，

$$g((x, \mathbf{e}), a) = ((x, \mathbf{e}g^{-1}), ga)$$

であるので，

$$p(((x, \mathbf{e}g^{-1}), ga) = (x, (e_1, \cdots, e_d)g^tg \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}) = (x, a_1e_1 + \cdots + a_de_d) = p((x, \mathbf{e}), a)$$

となる．つまり $p : P \times V \to E$ は主 $SO(d)$ 束である．よってカルタン作用素

$$\kappa : \Omega^*_{SO(d)}(P \times V) \to \Omega^*(P \times V)_{basic} \cong \Omega^*(E)$$

を得る．このとき

$$\tau := \kappa(pr_2^*\nu_0)$$

とする．$pr_2^*(\nu_0)$ が D 閉形式であるので，τ は d 閉形式である．この τ が $E \to X$ に対するトム形式となる．以下で，トム形式となることを証明していこう．まず，次は可換である．

$$\begin{CD} P @<{pr_1}<< P \times V @>{pr_2}>> V \\ @V{SO(d)}V{p}V @V{p}V{SO(d)}V \\ X @<{\pi}<< E \end{CD}$$

この図式の局所自明化版は

$$\begin{CD} U \times SO(d) @<{pr_1}<< U \times SO(d) \times V @>{pr_2}>> V \\ @V{SO(d)}V{p}V @V{p}V{SO(d)}V \\ U @<{\pi}<< U \times V \end{CD}$$

となる．ν_0 が V 上でコンパクトサポートを持っていたので，τ がファイバー方向にコンパクトサポートをもつことがわかる．つまり $[\tau] \in H^n_{cv}(E)$ となる．そこで

$\pi_*\tau = 1$ を証明する．一点 $x \in X$ でのファイバー E_x でファイバー積分したとき 1 になることを証明すれば十分である．そこで，$x_0 \in X$, $P_0 = \pi^{-1}(x_0)$, $E_0 = E|_{x_0}$ とする．そして主 $SO(d)$ 束

$$P_0 \to x_0, \quad P_0 \times V \to E_0$$

を考える．このとき，自明な接続を入れておいて，カルタン作用素を

$$\kappa_0 : \Omega^*_{SO(d)}(P_0 \times V) \to \Omega^*(E_0)$$

として，$\tau_0 = \kappa_0(pr_2^* \nu_0)$ とする．主束

$$P_0 \times V \to E_0, \quad (P_0 \cong SO(d), V \cong E_0)$$

において，自明接続を入れているので，曲率は消える．ξ_i を $\mathfrak{o}(d)$ の基底として，x^i を双対基底とする．$\Omega_{SO(d)}(P_0 \times V)$ の元を $\beta = \beta_I x^I$ とかく．カルタン作用素の定義から x^i を曲率形式 μ^i に変えて，水平部分をとればよい．しかし，曲率が零であるので，カルタン作用素は定数項を与える写像

$$\beta = \beta_I x^I \to \beta_0$$

である．よって τ_0 は「ν_0 の x 多項式としての定数項」を拾えばよい．そこで，

$$V = \{p\} \times V \to P_0 \times V \to E_0$$

によって $V \cong E_0$ とみなせば E_0 上でも ν_0 とおもってよく，$\nu_0(x=0)$ を E_0 上で積分すれば 1 となる（κ を制限した κ_0 は自明な接続でないかもしれないが，コホモロジーレベルで考えているので問題はない）．

次に，$i : X \to E$，$j : P \to P \times V$ を零切断埋め込みとすれば，次は主 $SO(d)$ 束としての可換図式である．

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "j"] \arrow[d, "SO(d)"', "p"] & P \times V \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "p"', "SO(d)"] & V \\ X \arrow[r, "i"] & E & \end{tikzcd}$$

よって，可換図式

$$\begin{tikzcd} \Omega^*_{SO(d)}(P) \arrow[d, "\cong"', "\kappa"] & \Omega^*_{SO(d)}(P \times V) \arrow[l, "j^*"'] \arrow[d, "\kappa"', "\cong"] & \Omega^*_{SO(d)}(V) \arrow[l, "pr_2^*"'] \\ \Omega^*(X) & \Omega^*(E) \arrow[l, "i^*"'] & \end{tikzcd}$$

を得る（$P \times V \to E$ の接続から $P \to X$ の接続を導入しておく）．トム形式 τ を零切断で X 上へ引き戻した $i^*\tau \in H^n(X)$ を考える．可換図式から，$i^*\tau = \kappa(j^*(pr_2^*\nu_0))$ となる．$j^*(pr_2^*\nu_0)$ は ν_0 において u_i, du_i を零とみなすものであり，

$$j^*(pr_2^*\nu_0) = (2\pi)^{-d/2}\mathrm{Pfaff}(x^a M_a) \in S(\mathfrak{o}(d)^*) \subset \Omega^*_{SO(d)}(P)$$

となる．つまり主束 $P \to X$ のオイラー類（よって $E \to X$ のオイラー類）を与える不変多項式である．そして，今の場合には，κ は Chren-Weil 写像であるので，$\kappa(j^*(pr_2^*\nu_0))$ はオイラー類となる．

Proposition 13.4.5. $E \to X$ を向きつきベクトル束として τ をトム形式とする．トム形式の $i : X \to E$ の零切断による引き戻しは E のオイラー類を与える．

次の二つの remark は [Bott-Tu] を参照．

Remark 13.4.2. $\pi^* e(E)$ はトム形式にはならない．ただし，$\pi^* e(E) = \tau$（in $H^*(E)$, not in $H^*_{cv}(E)$）はいえる

Remark 13.4.3. $E \to X$ を向きつきベクトル束とする．零切断と横断的な切断を考える．このとき切断の零点集合は X の部分多様体になるが，そのポアンカレ双対がオイラー類 $e(E)$ となる．(特に，接束を考えるとベクトル場の零点と X のオイラー数との関係を与える）．

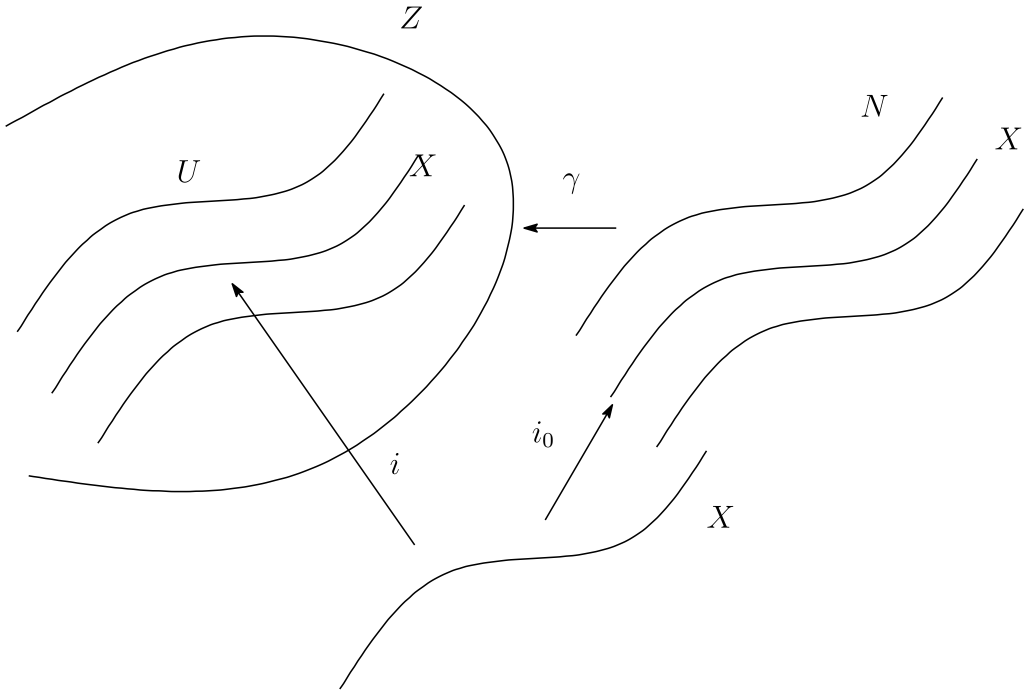
同変コホモロジーやカルタン作用素を使わずに，もう少し直接的にトム形式を構成する方法は [Berline-Getzler-Vergne] を見よ（本質は同じである）．

13.4.5 同変法束と同変トム形式

Z を向きつき d 次元多様体として K が作用しているとする（向きを保って）．X をコンパクト $n = d-k$ 次元向きつき部分多様体として，K の作用で不変（$k(X) = X$ for all $k \in K$）として，$i : X \to Z$ を埋め込みとする．また，$N = NX$ を法束（rank k）とする．このとき，Z, X の向きから N にも向きが入る．また，同変管状近傍定理から，X に対する K 不変な管状近傍 $U \subset Z$ と K 同変微分同相

$$\gamma : N \to U, \quad \gamma \circ i_0 = i$$

が存在する．ここで i_0 は零切断埋め込み．



K をコンパクトとして，N へ K 不変ファイバー内積を入れておく．この内積に関する向きつき正規直交フレームの束（主 $SO(k)$ 束）を $P \to X$ をとする．つまり点 $x \in X$ 上のファイバーは

$$P_x = \{\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_k) | e_i \in N_x,\ (e_i, e_j) = \delta_{ij}\}$$

である．さて，

$$K \times P \ni (g, (x, e)) \mapsto (gx, (ge_1, \cdots, ge_k)) \in P$$

により K の作用を定義する．N の内積が K 不変であるので，この作用は well-defined であり，$P \to X$ は K 同変写像となる．

また，$V = \mathbb{R}^k$ として，$N = P \times_{SO(k)} V$ となる．そこで，

$$P \times V \ni ((x, \mathbf{e}), a) \mapsto (x, a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k) \in N$$

とすれば，これは N 上の主 $SO(k)$ 束であり，$(x, v) \in N$ のファイバーは

$$\{((x, \mathbf{e}), a) | a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k = v\}$$

となる．K の V への作用を自明作用とすれば，射影 $P \times V \to N$ は K 同変である．実際，

$$\pi(g((x, e), a)) = \pi((gx, ge), a) = (gx, a_1 ge_1 + \cdots a_k ge_k) = g(x, a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k)$$

となる．また，$SO(k)$ の作用と K の作用は可換である．よって，K 同変微分同相 $P\times_{SO(k)}V\cong N$ を得る．

そこで，主 $SO(k)$ 束 $P\to X$ 及び主 $SO(k)$ 束 $P\times V\to N$ に K 不変接続を入れて，カルタン作用素

$$\kappa_N:\Omega_{SO(k)\times K}(P\times V)_0\to\Omega_K(N)_0$$
$$\kappa_X:\Omega_{SO(k)\times K}(P)\to\Omega_K(X)$$

を得る．このカルタン作用素により，$D_{SO(k)\times K}$ 閉形式は D_K 閉形式にうつる（section 13.2.4 を参照）．

また $\Omega_{SO(k)\times K}(V)$ を考えると，K は V に自明に作用しているので，

$$\Omega_{SO(k)\times K}(V)_0=\Omega_{SO(k)}(V)_0\otimes S(\mathfrak{k}^*)^K$$

となる．特に，

$$\Omega_{SO(k)}(V)_0\ni\beta\mapsto\beta\otimes 1\in\Omega_{SO(k)}(V)_0\otimes S(\mathfrak{k}^*)^K=\Omega_{SO(k)\times K}(V)_0$$

という埋め込みを得る．

さて，同変トム形式を構成しよう．以前作ったコンパクトサポートを持つ普遍トム形式 ν_0 を考える．$\nu_0\in\Omega_{SO(k)}(V)_0$ で $D_{SO(k)}$ 閉形式である．そこで，

$$\nu_0\otimes 1\in\Omega_{SO(k)\times K}(V)_0$$

とすれば，$D_{SO(k)\times K}$ 閉形式である（K は自明に作用しているので $X_i\in\mathfrak{k}$ に対する基本ベクトル場は零である）．

$$pr_2:P\times V\to V,\quad pr_2^*:\Omega_{SO(k)\times K}(V)_0\to\Omega_{SO(k)\times K}(P\times V)_0$$

（pr_2 は $SO(k)\times K$ 同変写像）として，

$$\tau:=\kappa_N(pr_2^*(\nu_0\otimes 1))\in\Omega_K(N)_0$$

を考える．$pr_2^*(\nu_0\otimes 1)$ は $\Omega_{SO(k)\times K}(P\times V)_0$ の元であり $D_{SO(k)\times K}$ 閉である．よって，τ は $\Omega_K(N)_0$ において D_K 閉形式である．

実は $[\tau]\in H_K(N)_0$ が同変トム形式である（X はコンパクトとしているので，fiber 方向にコンパクトサポートをもつなら，全体でコンパクトサポートをもつ）．

以下で $\pi_*\tau=1$ となることを証明する．これがわかれば τ はトム形式である．

そこで，$\pi_*\tau=1$ となることを証明しよう．$K=\{e\}$ の場合は既に証明した．ここで K 同変版を考える．ξ_i を $\mathfrak{o}(k)$ の基底として，x^i を双対基底とすれば，

$$\nu_0=(\nu_0)_Ix^I$$

とかける．このとき

$$\tau = \kappa_N(pr_2^*(\nu_0 \otimes 1)) = pr_2^*((\nu_0)_I)_{hor}\tilde{\mu}^I$$

となる．ここで $\tilde{\mu}$ は同変曲率形式である（つまり，d の代わりに D_K を使って計算した $SO(k)$ に対する曲率）．さて，同変特性類のところで見たように，

$$\tilde{\mu}^a = \mu^a - \phi^a$$

となる．ここで μ^a は普通の曲率形式であり，$\phi^a \in \mathfrak{k}^* \otimes \Omega^0(P)$（see (13.2.1)）．よって，同変でない場合のトム形式を τ_0 と書けば

$$\tau = \tau_0 + \tau_j \otimes p^j$$

とかける．ここで $\tau_j \in \Omega^{k-2j}(N)_0$，$p_j \in S^j(\mathfrak{k}^*)$．これをファイバー積分した場合には，$\tau_j \otimes p^j$ はファイバーの次元より微分形式の次数が低いので $\pi_*\tau_j \otimes p^j = 0$ となる．よって $\pi_*\tau = 1$ となる．

また，同変トム形式をゼロ切断 $i_0 : X \to N$（または $i : X \to M$）で引き戻したものが N の同変オイラー類である．実際，

$$i_0^*\kappa_N(pr_2^*(\nu_0 \otimes 1)) = \kappa_X(j^*pr_2^*(\nu_0 \otimes 1)))$$

となるが，詳しく見てみる．まず，

$$pr_2^* : \Omega_{SO(k)\times K}(V)_0 \to \Omega_{SO(k)\times K}(P\times V)_0, \quad j^* : \Omega_{SO(k)\times K}(P\times V)_0 \to \Omega_{SO(k)\times K}(P)$$

であったので，

$$(2\pi)^{-k/2}\mathrm{Pfaff}(x^a M_a) = j^*pr_2^*(\nu_0\otimes 1) \in S(\mathfrak{o}(k)^*)^{SO(k)} = S(\mathfrak{o}(k)^*)^{SO(k)\times K} \subset \Omega_{SO(k)\times K}(P)$$

となる．また，κ_X は

$$\kappa_X : \Omega_{SO(k)\times K}(P) \ni \alpha \mapsto \alpha_{hol}(\tilde{\Omega}) \in \Omega_K(P)_{basic} \cong \Omega_K(X)$$

であるが，今の場合には，$(2\pi)^{-k/2}\mathrm{Pfaff}(\tilde{\Omega}^a M_a)$ となり，同変オイラー類 $e(N)$ を与える．

13.4.6　局所化定理へ

G をコンパクトリー群として，d 次元コンパクト向きつけ多様体 M に，向きを保存して作用するとする．X を固定点集合 M^G のある連結成分として，X に向き

が入るとする．$i : X \to M$ を埋め込みとして，$\pi : U \to X$ を同変管状近傍とする．$\tau \in \Omega_G(U)_0$ を同変トム形式とすれば，

$$i^*[\tau] = e(N)$$

となる（N のランクを k とする）．ここで $e(N) \in \Omega^*_G(X)$ は同変オイラー類である．

X は U の（G 作用込で）変形レトラクトなので，任意の D 閉形式 $\mu \in \Omega_G(M)$ の U への制限と $\pi^* i^* \mu$ に対して，$[\mu] = [\pi^* i^* \mu] \in H^*_G(U)$ となる．よって，

$$\int_U \mu \wedge \tau = \int_U \pi^* i^* \mu \wedge \tau = \int_X i^* \mu \wedge \pi_* \tau = \int_X i^* \mu$$

となる（see Example 13.4.2）．また，$\mu \in H^*_G(U)_0$ とすれば，

$$\int_X i^* \mu = \int_U \mu \wedge \tau = \int_U \mu \wedge \pi^* i^* \tau = \int_U \mu \wedge \pi^* e(N)$$

となる．X の余次元が奇数なら $e(N) = 0$ となるので，$\int_X i^* \mu = 0$ となる．そこで，余次元が偶数とする．このとき，上の式を書き換えると

$$\int_X i^* \mu = \int_U \pi^* e(N) \wedge \mu$$

となる．

Remark 13.4.4. $\int_X i^* \mu = \int_U \mu \wedge \tau$ から，通常の場合のように，τ は X のポアンカレ双対であると言う．しかし，G 不変部分多様体に対して，この性質で定まるコホモロジーが生成する $S(\mathfrak{g}^*)$ 加群は，$H_G(M)$ より小さくなるので，双対という言葉は本当はよくない．

X は固定点なので，G は X に自明に作用する．そこで，

$$H^*_G(X) = S(\mathfrak{g}^*)^G \otimes H^*(X)$$

となるので，$rank(N) = k = 2m$ とすれば

$$e(N) = f_m + f_{m-1}\alpha_1 + \cdots + \alpha_m, \quad f_i \in S^i(\mathfrak{g}^*)^G, \quad \alpha_i \in \Omega^{2i}(X)$$

とかける（同変オイラー形式の同変次数は $2m$）．$f_m \neq 0$ と仮定して，

$$e(N) = f_m(1 - \frac{\alpha}{f_m}), \quad \alpha := -(f_{m-1}\alpha_1 + \cdots + \alpha_m) = -e(N) + f_m$$

とかける．両辺で（形式的に）逆を取れば

$$\frac{1}{e(N)} = \frac{1}{f_m}\left(1 + \frac{\alpha}{f_m} + \frac{\alpha^2}{f_m^2} + \cdots + \frac{\alpha^{q-1}}{f_m^{q-1}}\right) \tag{13.4.3}$$

となる．ここで $q-1$ は $\frac{1}{2}\dim X$ 以下の最大の数である（$\alpha_1^{q-1} \in \Omega^{2q-2}(X)$）．この両辺に f_m^q をかけて，

$$\beta(N) := f_m^{q-1} + f_m^{q-2}\alpha + \cdots + \alpha^{q-1} \in \Omega_G^*(X)$$

とする．$D_G e(N) = 0$ であるので，

$$0 = D_G(e(N)) = D_G(f_m - \alpha) = D_G f_m - D_G\alpha = -D_G\alpha$$

つまり $D_G\alpha = 0$ を得る．そしてライプニッツ束から $D_G\beta(N) = 0$ となる．そして，

$$e(N)\beta(N) = f_m^q$$

となる．

よって，

$$\int_X i^*\mu = \int_U \pi^* e(N) \wedge \mu$$

において μ を $\pi^*\beta(N) \wedge \mu$ を置き換えれば，

$$\int_X \beta(N) \wedge i^*\mu = f_m^q \int_U \mu$$

が成立する．このように U 上の任意の D 閉微分形式の積分は X 上の積分となるわけである．

上の式を書き直せば，局所化定理へ繋がる公式

$$\int_U \mu = \int_X \frac{i^*\mu}{e(N)} \tag{13.4.4}$$

を得る．右辺を見ると $1/e(N)$ は (13.4.3) の意味で書いているので，$\int_X \frac{i^*\mu}{e(N)}$ は，

$$\frac{q}{f_m^r}, \quad q \in S(\mathfrak{g}^*)^G$$

と有理式でかけることをがわかる．一方，左辺は $S(\mathfrak{g}^*)^G$ と多項式になるので，かなりの打ち消しあい（約分）が起こっていることになる．

さて，我々は $f_m \neq 0$ を仮定した．これが成立するための条件を考える．$x_0 \in X$ を固定して，$N_0 = N|_{x_0}$ とする，G は M, X の向きを保存したので，N の向きも保存して作用する．G がコンパクトより，G の作用で保存される内積をいれておけば，

$$G \to SO(N_0) = SO(2m)$$

を得る（see Example 13.2.9）．よって，可換環の準同形

$$h : S(\mathfrak{o}(2m)^*)^{SO(2m)} \to S(\mathfrak{g}^*)^G$$

を得る．$j_0 : \{x_0\} \to X$ とすれば，$N_0 = j_0^* N$ であり，

$$f_m = j_0^* e(N) = e(N_0) = (2\pi)^{-m} h(\mathrm{Pfaff})$$

となる．ここで Pfaff はオイラー形式を与える不変多項式である．

さて，G のある極大トーラス T を固定しよう．$g \in G$ に対して，ある $h \in G$ が存在して $h^{-1}gh \in T$ とできるのであった．また不変多項式は随伴作用で不変であるので，不変多項式は $\mathfrak{t}^*$ への制限で完全に決定される．そこで，$h(\mathrm{Pfaff})$ の

$$\lambda : S(\mathfrak{g}^*) \to S(\mathfrak{t}^*)$$

による像を計算しよう．

N_0 へのトーラス作用を考える．これは線形作用であるので weight 分解する．そこで，$N_0 \cong \mathbb{C}^m$ として，作用が

$$(\exp \xi)v = (e^{il_1(\xi)} z_1, \cdots, e^{il_m(\xi)} z_m)$$

となるとしよう．このとき

$$\lambda \circ h(\mathrm{Pfaff}) = l_1 \cdots l_m$$

となる．（これは前 subsetction の $\det^{1/2}(L_X)$ である）

Proof. これはいわゆる分解原理である．$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ の場合には，第一チャーン類とオイラー類は一致した．一般に $E \oplus F$ のオイラー類が $e(E)e(F)$ となるので，$\mathbb{C}^n$ を 1 次元部分空間に分解した場合に上の式が成立する．

または，

$$\mathfrak{u}(1) \ni \sqrt{-1} l_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & l_1 \\ -l_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2)$$

という対応を使えばよい． □

Proposition 13.4.6. **f_m の $\mathfrak{t}$ への制限は多項式 $(2\pi)^{-m} l_1 \cdots l_m$ となる．特に，$f_m \neq 0$ であるための必要十分条件は，トーラス T の N_0 へのイソトロピー表現の *weight* がすべて零でないことである．**

X を固定点の連結成分としたので，X における法束のファイバーへの T のイソトロピー表現はすべて同じである．もちろん，他のトーラス群 T' をとった場合でもトーラス T, T' は共役であるので，同値な表現を与える．つまり $f_m \neq 0$ はトーラスの取り方及び点 $x \in X$ の取り方に依存しない．

また，$f_m \neq 0$ なら，トーラスの N への作用の固定点は零切断である．よって，$f_m \neq 0$ を仮定すると $U^T = X = U^G$ となる．逆に，$U^T = U^G = X$ なら $f_m \neq 0$ が成立する．つまり，$T \subset G$ であるので $X = U^G \subset U^T$ であるが，$U^T = U^G$ となるなら，T のイソトロピー表現に自明表現は存在しないので $f_m \neq 0$ となる．そこで，(13.4.4) を使うなら，**一般性を失うことなくトーラス作用の場合を考えれば十分**である．そしてトーラス作用を考える時には，固定点集合の連結成分 X において，自動的に $f_m \neq 0$ が成立する．

13.4.7　局所化定理

前 subsection の最後で述べたことからトーラス作用の場合を考えることにする．

まず，トーラス作用の場合に，固定点の連結集合の様子を調べよう．M を向きつきコンパクトとしてトーラス T が作用しているとする．コンパクトより軌道のタイプは有限個である．つまり stabilizer のタイプは有限個であり，それを G_i としておく．このとき，有限個の weights $\beta_1, \cdots, \beta_q$ が存在して，$\xi \in \mathfrak{t}$ が $\beta_i(\xi) \neq 0$（$0 \leq \forall i \leq q$）なら $\xi^* \in \mathfrak{X}(M)$ が固定点 M^T 以外ではゼロでないようにできる．

Proof. T の作用の固定点における stabilzer は T そのものである．それ以外の stabilizer G_i は部分トーラスである．そのリー環 $\mathfrak{g}_i$ は，weights $\alpha_1^{(i)}, \cdots, \alpha_k^{(i)}$ を使って，

$$\mathfrak{g}_i := \{\eta \in \mathfrak{t} | \alpha_j^{(i)}(\eta) = 0,\ 1 \leq j \leq k\}$$

という形で定義される．stabilzer は有限個であったので，有限個の weights $\{\alpha_{j_i}^{(i)}\}$ が定まる．これを改めて β_j と書こう．$\xi \notin \mathfrak{g}_i$（$\forall i$）は $\beta_j(\xi) \neq 0$（$\forall j$）と同値である．

$\beta_j(\xi) \neq 0$ となる ξ を選んでおく．$\xi^*(p) = 0$ なら，ξ は p の stablizer G_p に入ることを意味するが，これは条件からありえないので，$\xi^*(p) = 0$ なら $p \in M^T$ となる．　□

そこで，$\xi \in \mathfrak{t}$ を上の条件を満たすようにとり，さらに有理数係数となるようにとれば ξ は $S^1 \subset T$ を生成する（有理数係数なので稠密にはならない）．そして，上で述べたことから，$M^T = M^{S^1}$ となることがわかる．

$\mathfrak{t}$ の部分集合

$$\{\xi \in \mathfrak{t} | \beta_i(\xi) \neq 0\}$$

の連結成分を作用領域とよぶ．この作用領域から有理係数となる $\xi \in \mathfrak{t}$ を取っておけば，上で述べたように $M^T = M^{S^1}$ となる．$p \in M^{S^1}$ の法空間 N_p に S^1 が作用するので，この S^1 の N_p への線形 isotropy 表現を考える．$v \in N_p$ で S^1 の作用で不変なものがあると，その方向にも固定点があることになる矛盾してしまう．つまり S^1 の N_p への作用に不変なものはないので，S^1 の N_p への作用は可逆である．また $S^1 = SO(2)$ の表現が可逆なので，N_p は偶数次元であり，向き付け可能である（この向きの入れ方は作用領域内では変化しないが，別の作用領域から ξ をとった場合には変化する）．よって固定点集合の連結成分にも向きが入る．

Proposition 13.4.7. トーラスが作用している向きつきコンパクト多様体 M を考える．このとき固定点集合 M^T の各連結成分の余次元は偶数次元であり，ある作用領域を固定すれば向きが入る．

局所化定理を述べよう．まず $G = S^1$ の場合を述べる．

Theorem 13.4.8. M を d 次元向きつきコンパクト多様体として，S^1 が作用しているとする．その固定点集合の各連結成分を X とする（添え字はつけない）．$\mu \in \Omega^k_{S^1}(M)$（$k \geq d$）を D 閉形式とする．このとき

$$\int_M \mu = \sum_X \int_X \frac{i_X^* \mu}{e(NX)}$$

が成立する．ここで X は固定点の連結成分．$i_X : X \to M$ は埋め込みであり，NX は法束，$e(NX)$ はその同変オイラー類である．

Proof. $U = M \setminus M^{S^1}$ とする．S^1 は一次元であるので U へは局所自由で作用する．よって，自由な場合と同様にして，$H^k_{S^1}(U) = H^k(U/S^1)$ が成立する．特に，$\dim U/S^1 = d - 1$ であるので，$H^k_{S^1}(U) = 0$（$k \geq d$）となる．そこで $\mu = D\nu$ on U となる $\nu \in \Omega^{k-1}_{S^1}(U)$ が存在する（U/S^1 は orbifold なので，今までの知識だと，ちょっと納得できないけど，以前と同様にして接続を作ってやれば，$\mu = D\nu$ は問題ないであろう）．各 X の管状近傍を U_X として $\rho_X \in C^\infty(U_X)$ を X の近傍で恒等的に 1 となる S^1 不変関数とする．そして，

$$\nu' = \nu - \sum \rho_X \nu$$

とする．これは X の近傍で零となる．それ以外では ν となる．よって，

$$\mu = D\nu' + \sum \mu_X$$

とかける．ここで $\mu_X \in \Omega^k_{S^1}(U_X)_0$ は X の近傍で $\mu_X = \mu$ を満たすものである．また $D\mu = 0$ であるので，$D\mu_X = 0$ となる．

そこで，

$$\int_M \mu = \int_M D\nu' + \int_M \sum_X \mu_X = \sum_X \int_M \mu_X$$

となるので，(13.4.4) から

$$\int_M \mu_X = \int_X \frac{i_X^* \mu}{e(NX)}$$

となる． □

次にトーラス作用の場合を考える．$\xi \in \mathfrak{t}$ を有理数係数として作用領域からとり，それが生成する S^1 群を $K \subset T$ とする．このとき $M^T = M^{S^1}$ が成立するのであった．$K \subset T$ から，自然な写像

$$H_T(M) \to H_{S^1}(M)$$

を得る．詳しく言えば，同変微分形式 $\mu \in \Omega_T(M)$ を

$$\mu : \mathfrak{t} \to \Omega(M)$$

とみなした時に，$\mathfrak{k} = \mathbb{R}$ へ制限することにより，

$$\mu|_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \to \Omega(M)$$

を得る．つまり $\mu(\xi)$ のことである．もちろん D_T 閉形式は D_K 閉形式になる．そこで S^1 の場合の局所化定理が使えるので，トーラス作用の場合の局所化定理

$$\int_M \mu(\xi) = \sum \int_X \frac{i_X^* \mu(\xi)}{e(NX)(\xi)}$$

が成立する．さらに，有理係数な $\xi \in \mathfrak{t}$ の全体は $\mathfrak{t}$ 内で稠密である．また，上の式の左辺は ξ の多項式であり，右辺は有理関数である．よって，$\beta_i(\xi) \neq 0$ 以外で $\xi \in \mathfrak{t}$ に対する有理関数の等式となる．

M^T が孤立点の場合を考えよう．つまり有限集合の場合である．$p \in M^T$ に対して，T の T_pM へのイソトロピー表現の weights を $\alpha_{1,p}, \cdots, \alpha_{m,p}$ とすれば，オイラー類は $\xi \in \mathfrak{t}$ として，

$$e_p(\xi) = (2\pi)^{-m} \prod_{i=1}^{m} \alpha_{i,p}(\xi)$$

となる．よって，

$$\int_M \mu(\xi) = (2\pi)^m \sum_{p \in M^T} \frac{i_p^* \mu(\xi)}{\prod \alpha_{i,p}(\xi)} = (2\pi)^m \sum_{p \in M^T} \frac{\mu_0(\xi)(p)}{\prod \alpha_{i,p}(\xi)}$$

となる（for all $\xi \in \mathfrak{t}$ such that $\alpha_{i,p}(\xi) \neq 0$ for all $p \in M^T$ and $i = 1, \cdots, m$）．ここで，$\mu_0(\xi)$ は $\mu(\xi)$ の関数部分である．このように，同変閉形式の積分は，固定点の情報だけで書けてしまう

応用としては次のような場合である．**コンパクト向き付き多様体にトーラスが作用して，固定点は孤立**しているとする．この多様体上で，微分形式の積分を考える．もし，その**微分形式が同変閉拡張をもつなら，積分は固定点の情報で書ける**のである．G 同変の場合にも，極大トーラスに制限して考えればよいのであった．小さなトーラスでも可能であるが，トーラスのサイズが大きいほど，固定点の数は少なくてすむので，極大トーラスで行えば，より計算が簡単になる．また，微分形式が同変閉拡張をもつかが問題になるが，幾何学での応用を考えると，例えば，G 同変なベクトル束 $E \to M$ に対して通常の特性類は同変閉拡張をもつのであった．また，すべての微分形式が同変閉拡張をもつ多様体が同変 formal な多様体であり，それについてはすでにいくつかの例を挙げた（証明はしてないが）．

最後に DH 定理を述べておこう．

EXAMPLE 13.4.3 (Duistermaat-Heckmann の定理). (M, ω) をコンパクトシンプレクティック多様体とする．さらにハミルトニアン T 空間としておこう．モーメント写像 μ に対して，$\tilde{\omega} = \omega + \mu$ は同変閉形式となるのであった．そこで，

$$\exp \tilde{\omega}$$

へ局所化定理を適用すれば，

$$\int_M e^{\langle \mu, \xi \rangle} \frac{\omega^n}{n!} = (2\pi)^n \sum \frac{e^{\langle \mu(p), \xi \rangle}}{\prod \alpha_{i,p}(\xi)}$$

を得る．(for all $\xi \in \mathfrak{t}$ such that $\alpha_{i,p}(\xi) \neq 0$ forall $p \in M^T$ and $i = 1, \cdots, n$)

次の例のように，トーラス作用がある場合には特性類に対して，面白い記述ができることになる．

EXAMPLE 13.4.4. M をコンパクト向き付き多様体として，$e(M)$ をオイラー数とする．M にトーラスが作用して，その固定点集合の各連結成分を X とする．このとき，

$$e(M) = \sum_X e(X)$$

となる．特に，M に S^1 が作用しており，固定点がすべて孤立している場合には，オイラー数は固定点の数に一致する．

Proof. M の同変オイラー類を $E(M)$ とすれば，$i^*(TM) = TX \oplus NX$ であり，X 上で，$i_X^* E(TM) = E(TX) \oplus E(NX)$ となる．よって，

$$\int_M E(M)(\xi) = \sum_X \int \frac{i_X^* E(M)(\xi)}{E(NX)(\xi)} = \sum_X \int E(X)(\xi)$$

となる．そこで $\xi \to 0$ とすればよい． □

例えば，シンプレクティックトーリック多様体のオイラー数を考えてみる．固定点は Delzant Polytope の頂点の数に一致した．よって，オイラー数は Delzant Polytope の頂点の数に一致する（これは，すでに Morse 理論のところで別証明を与えている）

終わりに：参考文献に関して

このノートの元本は [Cannas] です．シンプレクティック幾何の初歩を理解としたいと思って読み始めました．非常にいい本だと思います．シンプレクティック幾何は幅広いので，話題が途中で終わってしまっているところもあったので，いくつかのことを（自分の興味にそって）他の本（[Audin],[Guillemin-Sternberg(equiv)] 等）を参照にしながら付け加えました．特に，群作用がある場合の話しは大幅に付け加えてあります．ただしシンプレクティックトポロジーについてはまったく触れていません．シンプレクティック幾何の本といば [Arnold], [Macduff-Salamon], [Guillemin-Sternberg(symp)] などがシンプレクティック幾何の初歩としての名著だそうです．[Macduff-Salamon] はいろいろと参考にしました．これはシンプレクティックトポロジーのための第一歩だそうです．[Arnold] は自分にとっては正直よみずらいです（これは記述や言葉の問題だと思います．ちょっと古典的な記述なので）．[Guillemin-Sternberg(symp)] は最近手に入れたばかりなので，あまり参考にはしていませんが，名著ということで挙げておきました．

日本語の本としては [泉屋・石川], [伊藤], [深谷] などがあります．[伊藤] はシンプレクティック幾何の初歩や動機（ハミルトン力学）を学ぶ本として，すぐれてると思います．Arnold の本の前にこれを読むことをお勧めします．[泉屋・石川] のシンプレクティック幾何と接触幾何のところもきれいにまとまっていると思います（ただし，目標は特異点論です）．[深谷] はシンプレクティック幾何の最先端を見るのに役立ちます（これをよんでいるとシンプレクティック幾何の奥深さがわかります）．最先端をみるという意味では [Eliashberg. Eds], [Freed. Eds] などもよいかと思います（基本的なことから最先端のことまで，いろいろと書いてある）．

[松島], [佐竹], [松本] は学部生のための本ですが，このノートを作る際，結構使用しましたので載せておきました（たんに自分が昔勉強したことを忘れてるってことです）．

個人的な動機としては，このノートに書いてあることの，その先を理解したかったのですけど（幾何学的量子化，Orbit method，フーリエ積分作用素など），その手前で力尽きました.（しかしフーリエ積分作用素は，いまや古典だからなあ）．

[Cannas] は reference のところが完全にずれているので注意してください．

「シンプレクティック幾何はとても面白い．しかし，幅広すぎるし，奥が深すぎ

る．話題をいくつかに限定しないとやっていけない」ってのが正直な感想.

最後に，このノートは間違いが多いし，たまにいい加減に書いてます．それは勘違いや自分の勉強不足，理解不足によるものです．間違ってると思ったところは読者自身で調べて訂正してください.

関連図書

[Arnold] V. Arnold, Mathematical method of classical mechanics, Graduate Texts in Math, 60. Springer 1978.（訳：古典力学の数学的方法 岩波）.

[Atiyah] M. F. Atiyah, Convexity and commuting Hamiltonians, Bulletin of the London Mathemaitcal society 14. 1-15

[Atiyah-Bott(moment)] M. F. Atiyah and R. Bott , The moment map and equivariant cohomology, Topology 23 (1984) 1-28.

[Atiyah-Bott(Yang-Mills)] M. F. Atiyah and R. Bott, The Yang-Mills equations over Riemann sufaces, Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, 308. 523-615.

[Audin] M. Audin, The topology of Torus actions on symplectic manifolds, Progress in Math. 93. Birkhäuser.

[Bott-Tu] R. Bott and L.W. Tu *Differential Forms in Algebraic Geometry*, GTM 82, Springer.

[Berline-Getzler-Vergne] N. Berline, E. Getzler and E Vergne, Heat kernels and Dirac operators, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. 298 Springer. 1996.

[Cannas] Cannas de Silva, *Lectures on symplectic geometry,* Lecture Notes in Math. 1764, Springer. 2001

[Duistermaat] J.J. Duistermaat, The heat kernel Lefschetz fixed point formula for the Spic-c Dirac operator, Progress in Nonlinear Differential equations and their Applications, 18. Bikrhäuser. 1996.

[Eliashberg. Eds] Y. Eliashberg and Y. Traynor. Eds., symplectic geometry and topology, IAS/Park city mathematical series 7. AMS. 1999.

[Freed. Eds] D. Freed adn K. Uhlenbeck. Eds., geometry and quantum Filed theory, IAS/Park city mathematical series 1. AMS. 1995.

[Guillemin] V. Guillemin Moment maps and combinatorial invariants of hamiltonian T^n-spaces, Prog. in Math., 122, Birkhauser 1994.

[Guillemin-Sternberg(asy)] V. Guillemin and S. Strenberg, Geomtric Asymptotics, Math. Surveys and Monographs 14 AMS. 1997.

[Guillemin-Sternberg(symp)] V. Guillemin and S. Strenberg, Symplectic techniques in Physics, second ed Cambrige 1999.

[Guillemin-Sternberg(equiv)] V. Guillemin and S. Strenberg, Supersymmetry and Equiavariant de Rahm theory, with Cartan's two papers Mathematics Past and Present. Springer-Verlag. 1999.

[Lerman] E. Lerman Symplectic cuts, Mathematical Research Letters **2**, 247-258, 1995

[Macduff-Salamon] D. Macduff and D. Salamon, Introduciton to symplectic topology, Oxford Mathematical Monographs. Oxford. 1995

[Marsden-Ratiu] J. Marsden and T. Ratiu, Introduction to mecahnics and symmetry, Texts in Applied Mathematics, 17, Springer, 2003.

[Nicolaescu] L. Nicolasecu, Notes on Seiberg-Witten thoery, graduat studies in Mathematics volume 28. AMS. 2000

[伊勢・竹内] 伊勢幹夫 竹内勝, リー群論, 岩波講座「基礎数学」(復刻版). 岩波書店. 1992

[泉屋・石川] 泉屋周一，石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版 1998

[伊藤] 伊藤秀一, 常微分方程式と解析力学, 共立講座「２１世紀の数学」１１. 共立出版. 1998

[河野] 河野俊丈, 場の理論とトポロジー, 岩波講座 「現代数学の展開」２２. 岩波書店. 1998

[小林] 小林昭七, 複素幾何１，２, 岩波講座 「現代数学の基礎」２９. ３０. 岩波書店. 1997

[牛腸] 牛腸 徹, connection 付きの hermitian line bundle をめぐって survey in geometry .

[高崎] 高崎金久, 可積分系の世界 共立出版．2001.

[高橋] 高橋陽一郎, 実関数と Fourier 解析 2 岩波講座「現代数学の基礎」２. 岩波書店．1998

[深谷] 深谷賢治, シンプレクティック幾何学, 岩波講座 「現代数学の展開」２１．岩波書店．1999

[藤原] 藤原大輔, 線形偏微分方程式論における漸近的方法 1 , 岩波講座 「基礎数学」解析学 (II) viii. 岩波書店．1976.

[三松] 三松佳彦, ３次元接触構造のトポロジー, 数学メモアール 1 日本数学会 2001.

[松島] 松島与三, 多様体入門, 数学選書５．裳華房.

[佐竹] 佐竹一郎, 線形代数学 数学選書１．裳華房.

[松本] 松本幸夫, 多様体の基礎, 基礎数学５．東大出版.

索 引