ミニツイスター理論と球面上の測地線

早稲田大学 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
5123A068　吉岡 哲弘
指導教員　本間 泰史　教授

2025 年 1 月 29 日

序

人類が宇宙への進出を果たした 1960 年代, ペンローズ (R. Penrose) は時空の幾何学への新たなアプローチとしてツイスター理論のアイデアを導入した ([59]). ペンローズは当初, ツイスター理論が重力の量子化へのブレイクスルーをもたらすことを期待していたが, 重力の量子化に明快な説明を与える新たな物理学の理論となることはなかった.

しかし 1970 年代, ツイスター理論の潮流はペンローズの期待とはやや異なる形で, 微分幾何や代数幾何, 表現論, 可積分系といった数学の領域にも波及し大きな寄与をもたらすこととなった. とくに 1970 年代の後半にはアティヤ (M. F. Atiyah), ヒッチン (N. J. Hitchin), シンガー (I. M. Singer) らによって, 実 4 次元の自己双対共形多様体とそれに随伴する 3 次元複素多様体との間の対応が明らかにされ, ツイスター理論にリーマン幾何学の立場からの数学的な基礎付けが与えられた ([5]).

そして 1980 年代, ヒッチンはこの結果を自己双対共形構造以外の対象に拡張するという問題意識の下, ミニツイスター空間と呼ばれる 2 次元複素多様体を導入し, 3 次元複素多様体上のアインシュタイン・ワイル構造との対応を明らかにした ([33]). ヒッチンの切り拓いたミニツイスターのフロンティアではその後, 代数幾何によるアプローチが盛んに試みられ, 現在に至るまで多くのミニツイスター対応の具体例が構成されている.

本稿ではその具体例の中でも古くからよく知られている, リーマン球面の接束と 3 次元複素ミンコフスキー空間の対応, および 2 つのリーマン球面の直積空間と 3 次元複素双曲空間の対応を取り扱う. とくに後者の対応については, 3 次元複素双曲空間に実構造を与えた場合のミニツイスター対応 (3 次元双曲空間上のミニツイスター対応) から, ツイスター対応に類似した形で 2 次元球面と 2 次元球面上の測地線の空間の対応が自然に現れる. 本稿ではこの球面と球面上の測地線の空間の間の対応を単に球面上のツイスター対応と呼ぶことにするが, 本稿ではこの球面上のツイスター対応が 3 次元双曲空間上のミニツイスター対応と整合性を持つこと, すなわち, 以下の図式においてミニツイスター対応を経由した場合の対応が球面上のツイスター対応と一致することを示す.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{H}_3 \arrow[r, leftrightarrow, dashed, "\text{ミニツイスター対応}"] \arrow[d, twoheadrightarrow] & \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \arrow[d, twoheadrightarrow] \\
S^2 \arrow[r, leftrightarrow, dashed, "\text{ツイスター対応}"] & S^2 \text{ 上の測地線の空間}
\end{tikzcd}
$$

また, 本稿の構成は主に 4 つのセクションからなる. 第 1 節ではツイスター理論の記述に用いられるスピノール算法や複素ミンコフスキー空間上の幾何構造などを扱う. そして, 第 2 節では複素多様体の変形理論を用いたツイスター理論の一般論とその具体例として平坦時空上のツイスター対応を扱う. 第 3 節では第 2 節の内容を踏まえ, ミニツイスター理論の一般論, その具体例として平坦時空上のミニツイスター対応, 双曲空間上のミニツイスター対応を扱い, 第 4 節で本稿の主題である球面上のツイスター対応と双曲空間上のミニツイスター対応の関係を扱うことにする.

目次

1　複素時空とスピノール算法

特殊相対論の舞台として知られるミンコフスキー空間は, ツイスター理論の最初期のモデルに用いられる最も基本的な空間であり, 複素化して様々にリアルスライスを取ることで多様な幾何学が現れる. 加えて, 複素化したミンコフスキー空間上の変換群を考えることにより, スピノールの概念が自然に導かれる. このスピノールがツイスター理論を構築する基本単位となる. 本節では, ツイスター理論を扱うための準備として複素ミンコフスキー空間やスピノールに関する諸定義, 複素ミンコフスキー空間上の計量構造や変換群, 実構造などについて扱う. なお, 本節は [2], [70], [102], [106] 等を参考に構成した.

1.1　ミンコフスキー空間の複素化

ミンコフスキー空間を複素化した空間は, 物理的な対象としての空間というよりはむしろ, 幾何学的な対応を記述する上で自然に現れる空間であり, 以下のように通常のミンコフスキー空間の定義を複素数に拡張した形で与えられる.

定義 1.1. (複素ミンコフスキー空間)

$\mathbb{C}^n$ と計量 $g\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$;

$$g(x,y) = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - \cdots - x^ny^n$$

の組 $(\mathbb{C}^n, g)$ を n 次元**複素ミンコフスキー空間** (complexified n-dimensional Minkowski space), あるいは**複素時空** (complexified space-time) と呼び, $\mathbb{CM}_n$ と表す. とくに, $\mathbb{CM}_n$ の計量 g を**複素ミンコフスキー計量** (complexified Minkowski metric) と呼ぶ.

なお, $n=4$ の場合には単に $\mathbb{CM}$ と表すことにする.

ミンコフスキー空間の中には計量 g に関するノルムが 0 となるような特殊なベクトルが存在しており, 相対論的にはこれらのベクトルを接ベクトルに持つようなミンコフスキー空間の直線は, 光線や質量を持たない粒子の運動の軌跡として解釈される. このような特殊なベクトルは $\mathbb{CM}_n$ 内にも存在しており, 複素時空上の幾何学を扱う

上でも非常に重要な役割を果たす.

定義 1.2. (ヌル)

$\mathbb{CM}_n$ のベクトル x が**ヌル** (null) であるとは, $\mathbb{CM}_n$ の計量 g について

$$g(x,x)=0$$

となることをいい, $\mathbb{CM}_n$ の部分空間 S が**ヌル** (null) であるとは, S がヌルベクトルを含むことをいう. また, $\mathbb{CM}_n$ 内のヌルベクトルの集合

$$\{\, x \in \mathbb{CM}_n \mid g(x,x)=0 \,\}$$

を**光円錐** (light cone) と呼ぶ.

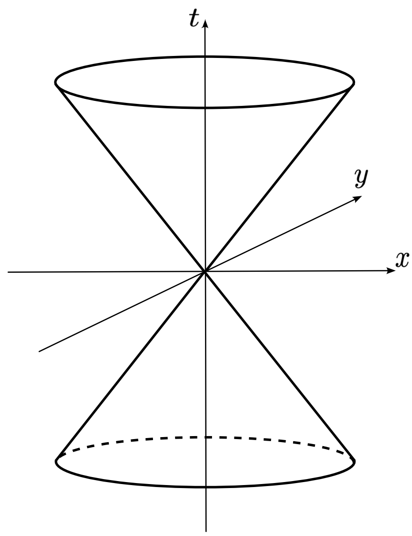


図 1　3 次元ミンコフスキー空間の光円錐

$\mathbb{CM}$ に同型な空間の座標を用いて, ヌルベクトルの特徴付けを行う. $\mathbb{CM}$ と複素係数 2×2 行列全体のなす空間 $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ の間の同型写像 $\iota\colon \mathbb{CM} \to \mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ を次で与

える:

$$\iota(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} x^a \sigma_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}.$$

ただし, σ_a は Pauli 行列である:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

このとき, ι の与え方から直ちに次がしたがう.

命題 1.3.

$\mathbb{CM}$ の計量 g と $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ の行列式について次が成り立つ:

$$g(x,x) = 2\det(\iota(x)).$$

次に, $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ と $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ の間の同型写像 $\iota' \colon \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ を以下のように与える:

$$\iota'(x^{AB} e_A \otimes e_B) = \begin{pmatrix} x^{00} & x^{01} \\ x^{10} & x^{11} \end{pmatrix}.$$

ただし, 添字の A, B は 0 と 1 の値を取るものとし, e_0, e_1 は $\mathbb{C}^2$ の標準的な直交基底とする:

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

この ι' の定め方と命題 1.3 から, ヌルベクトルの特徴付けを得る.

命題 1.4.

0 でない $x \in \mathbb{CM}$ について, 以下は同値である:

(1) x がヌルベクトルである,

(2) $\det(\iota(x)) = 0$,

(3) $\mathrm{rank}(\iota(x)) = 1$,

(4) ある $\xi, \eta \in \mathbb{C}^2$ を用いて, $\iota(x) = \xi \cdot {}^{\mathrm{t}}\eta = \iota'(\xi \otimes \eta)$ と表せる.

1.2 スピノール

ツイスター理論を記述する上で非常に有用なツールであるスピノールは, 言うなればば “ベクトルの平方根” のようなものである. ここまで $\mathbb{CM}$ や $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ の同型対応を主に取り扱ってきたが, ここではその同型対応と $\mathbb{CM}$ 上の直交群の表現を通じてスピノールの導入を行うことにする.

はじめに $\mathbb{CM}$ 上の計量 g と向きを保つ線形変換全体のなす群

$$\mathrm{SO}(4,\mathbb{C}) = \left\{ H \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{C}) \,\middle|\, {}^{\mathrm{t}}H \cdot H = \mathrm{I}_4,\ \det(H) = 1 \right\}$$

の二重被覆を考える. 写像 $\alpha\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ を

$$\alpha(\pm 1) = (\pm \mathrm{I}_2, \pm \mathrm{I}_2),$$

$\beta\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(4,\mathbb{C})$ を

$$\beta(P,\ Q)\, x = \iota^{-1}(P \cdot \iota(x) \cdot Q^{-1})\ (x \in \mathbb{CM})$$

によって定めると, α は単射, β は全射である. とくに

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{\ \beta\ } \mathrm{SO}(4,\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

は完全列であるから

$$\mathrm{SO}(4,\mathbb{C}) \cong (\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))/\mathbb{Z}_2$$

を得る.

次に, $\mathbb{C}^2$ への $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 作用を考える. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 表現には自然表現と双対表現の 2 種類が考えられる:

$$\begin{aligned} &\textbf{自然表現} \quad \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^2\ ;\ \xi \longmapsto P\xi, \\ &\textbf{双対表現} \quad \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^2\ ;\ \eta \longmapsto {}^{\mathrm{t}}Q^{-1}\eta. \end{aligned}$$

この自然表現の表現空間を $V_L\ (= \mathbb{C}^2)$, その双対表現の表現空間を $V_R\ (= \mathbb{C}^2)$ と表す. これを組み合わせて $V_L \otimes V_R\ (= \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ への $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 作用を

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \curvearrowright V_L \otimes V_R\ ;\ \xi \otimes \eta \longmapsto (P\xi) \otimes ({}^{\mathrm{t}}Q^{-1}\eta)$$

によって定めると, この作用は $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ への $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 作用

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \curvearrowright \mathrm{M}(2,\mathbb{C})\ ;\ X \longmapsto P\cdot X\cdot Q^{-1}$$

に一致する. 実際,

$$\begin{aligned}\iota'((P\xi)\otimes({}^{\mathrm{t}}Q^{-1}\eta)) &= (P\xi)\cdot{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}Q^{-1}\eta) = (P\xi)\cdot({}^{\mathrm{t}}\eta Q^{-1}) \\ &= P\cdot(\xi\cdot{}^{\mathrm{t}}\eta)\cdot Q^{-1} = P\cdot\iota'(\xi\otimes\eta)\cdot Q^{-1}\end{aligned}$$

である. これを踏まえ, スピノールを以下のように定義する.

定義 1.5. (スピノール)

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 自然表現の表現空間 V_L を**左巻きスピノール空間** (left-handed spinor space), その双対表現の表現空間 V_R を**右巻きスピノール空間** (right-handed spinor space) といい, まとめて**スピノール空間** (spinor space) と呼ぶ. とくに, V_L の各元を**左巻きスピノール** (left-handed spinor), V_R の各元を**右巻きスピノール** (right-handed spinor) といい, こちらもまとめて単に**スピノール** (spinor) と呼ぶ.

ファン・デル・ヴェルデン表示

スピノールの計算には**ファン・デル・ヴェルデン表示** (Van der Waerden notation) と呼ばれる独自の添字記法が用いられる. この添字記法では, 左巻きスピノールの成分の添字を $0, 1$, 右巻きスピノールの成分の添字を $\dot{0}, \dot{1}$ と表示して, 左巻き, 右巻きを区別する:

$$\xi = \xi^A e_A = \begin{pmatrix}\xi^0\\ \xi^1\end{pmatrix} \in V_L,$$
$$\eta = \eta^{\dot{A}} e_{\dot{A}} = \begin{pmatrix}\eta^{\dot{0}}\\ \eta^{\dot{1}}\end{pmatrix} \in V_R.$$

ただし, $e_{\dot{0}} = e_0$, $e_{\dot{1}} = e_1$ である. これに対応して, V_L, V_R 上の線形変換の添字は以下のように与えられる:

$$\Lambda\xi = \begin{pmatrix}\Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1\\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^0\\ \xi^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Lambda^0{}_A\xi^A\\ \Lambda^1{}_A\xi^A\end{pmatrix},$$

$$\Lambda'\eta = \begin{pmatrix} {\Lambda'}^{\dot{0}}{}_{\dot{0}} & {\Lambda'}^{\dot{0}}{}_{\dot{1}} \\ {\Lambda'}^{\dot{1}}{}_{\dot{0}} & {\Lambda'}^{\dot{1}}{}_{\dot{1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^{\dot{0}} \\ \eta^{\dot{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\Lambda'}^{\dot{0}}{}_{\dot{A}}\eta^{\dot{A}} \\ {\Lambda'}^{\dot{1}}{}_{\dot{A}}\eta^{\dot{A}} \end{pmatrix}.$$

また, スピノール空間にはそれぞれ双対空間 V_L^*, V_R^* が考えられるが, この V_L^*, V_R^* の元は次のように添字を下に付けて表す:

$$\zeta = \zeta_A e^A = \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} \in V_L^*,$$

$$\varsigma = \varsigma_{\dot{A}} e^{\dot{A}} = \begin{pmatrix} \varsigma_{\dot{0}} \\ \varsigma_{\dot{1}} \end{pmatrix} \in V_R^*.$$

ただし, $e^0 = e^{\dot{0}} = e_0$, $e^1 = e^{\dot{1}} = e_1$ である. これに対応して, V_L^*, V_R^* 上の線形変換の添字は以下のように与えられる:

$$\widetilde{\Lambda}\zeta = \begin{pmatrix} \widetilde{\Lambda}_0{}^0 & \widetilde{\Lambda}_0{}^1 \\ \widetilde{\Lambda}_1{}^0 & \widetilde{\Lambda}_1{}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\Lambda}_0{}^A\zeta_A \\ \widetilde{\Lambda}_1{}^A\zeta_A \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\Lambda}'\varsigma = \begin{pmatrix} \widetilde{\Lambda}'_{\dot{0}}{}^{\dot{0}} & \widetilde{\Lambda}'_{\dot{0}}{}^{\dot{1}} \\ \widetilde{\Lambda}'_{\dot{1}}{}^{\dot{0}} & \widetilde{\Lambda}'_{\dot{1}}{}^{\dot{1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_{\dot{0}} \\ \varsigma_{\dot{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\Lambda}'_{\dot{0}}{}^{\dot{A}}\varsigma_{\dot{A}} \\ \widetilde{\Lambda}'_{\dot{1}}{}^{\dot{A}}\varsigma_{\dot{A}} \end{pmatrix}.$$

さらに, スピノール空間を組み合わせてスピノール空間のテンソル積

$$T_n^m(V_L) \otimes T_l^k(V_R) = V_L \otimes \cdots \otimes V_L \otimes V_L^* \otimes \cdots \otimes V_L^* \otimes V_R \otimes \cdots \otimes V_R \otimes V_R^* \otimes \cdots \otimes V_R^*$$

を考えることができるが, この空間の元の添字は次のように与えられる:

$$\phi = \phi^{A_1 \cdots A_m \dot{A}_1 \cdots \dot{A}_k}_{B_1 \cdots B_n \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_l} e^{B_1 \cdots B_n \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_l}_{A_1 \cdots A_m \dot{A}_1 \cdots \dot{A}_k}.$$

ただし $e^{B_1 \cdots B_n \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_l}_{A_1 \cdots A_m \dot{A}_1 \cdots \dot{A}_k}$ は $T_n^m(V_L) \otimes T_l^k(V_R)$ の基底である:

$$e^{B_1 \cdots B_n \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_l}_{A_1 \cdots A_m \dot{A}_1 \cdots \dot{A}_k} = e_{A_1} \otimes \cdots \otimes e_{A_m} \otimes e^{B_1} \otimes \cdots \otimes e^{B_n} \otimes e_{\dot{A}_1} \otimes \cdots \otimes e_{\dot{A}_k} \otimes e^{\dot{B}_1} \otimes \cdots \otimes e^{\dot{B}_l}.$$

とくに $\mathrm{M}(2,\mathbb{C}) = \iota'(V_L \otimes V_R)$ の座標は, この表示を用いて

$$\begin{pmatrix} x^{0\dot{0}} & x^{0\dot{1}} \\ x^{1\dot{0}} & x^{1\dot{1}} \end{pmatrix}$$

と表される.

スピノールの複素共役

スピノールの複素共役を, 各成分の複素共役を取り, 左巻きと右巻きを入れ替える操作として定義する:

$$\overline{\cdot}\colon V_L \to V_R\ ;\ \xi = \begin{pmatrix}\xi^0\\ \xi^1\end{pmatrix} \mapsto \overline{\xi} = \begin{pmatrix}\overline{\xi}^{\dot{0}}\\ \overline{\xi}^{\dot{1}}\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\overline{\xi^0}\\ \overline{\xi^1}\end{pmatrix},$$

$$\overline{\cdot}\colon V_R \to V_L\ ;\ \eta = \begin{pmatrix}\eta^{\dot{0}}\\ \eta^{\dot{1}}\end{pmatrix} \mapsto \overline{\eta} = \begin{pmatrix}\overline{\eta}^{0}\\ \overline{\eta}^{1}\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\overline{\eta^{\dot{0}}}\\ \overline{\eta^{\dot{1}}}\end{pmatrix}.$$

V_L^*, V_R^* についても同様である:

$$\overline{\cdot}\colon V_L^* \to V_R^*\ ;\ \zeta = \begin{pmatrix}\zeta_0\\ \zeta_1\end{pmatrix} \mapsto \overline{\zeta} = \begin{pmatrix}\overline{\zeta}_{\dot{0}}\\ \overline{\zeta}_{\dot{1}}\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\overline{\zeta_0}\\ \overline{\zeta_1}\end{pmatrix},$$

$$\overline{\cdot}\colon V_R^* \to V_L^*\ ;\ \varsigma = \begin{pmatrix}\varsigma_{\dot{0}}\\ \varsigma_{\dot{1}}\end{pmatrix} \mapsto \overline{\varsigma} = \begin{pmatrix}\overline{\varsigma}_{0}\\ \overline{\varsigma}_{1}\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\overline{\varsigma_{\dot{0}}}\\ \overline{\varsigma_{\dot{1}}}\end{pmatrix}.$$

また, $T_n^m(V_L)\otimes T_l^k(V_R)$ の複素共役についても同様に左巻きと右巻きを入れ替える操作として定める:

$$\overline{\cdot}\colon T_n^m(V_L)\otimes T_l^k(V_R) \to T_n^m(V_R)\otimes T_l^k(V_L)\ ;$$
$$\phi = \phi^{A_1\cdots A_m\dot{A}_1\cdots\dot{A}_k}_{B_1\cdots B_n\dot{B}_1\cdots\dot{B}_l}\, e^{B_1\cdots B_n\dot{B}_1\cdots\dot{B}_l}_{A_1\cdots A_m\dot{A}_1\cdots\dot{A}_k} \mapsto \overline{\phi} = \overline{\phi}^{\dot{A}_1\cdots\dot{A}_m A_1\cdots A_k}_{\dot{B}_1\cdots\dot{B}_n B_1\cdots B_l}\, e^{\dot{B}_1\cdots\dot{B}_n B_1\cdots B_l}_{\dot{A}_1\cdots\dot{A}_m A_1\cdots A_k}$$

ただし, 各係数は

$$\overline{\phi}^{\dot{A}_1\cdots\dot{A}_m A_1\cdots A_k}_{\dot{B}_1\cdots\dot{B}_n B_1\cdots B_l} = \overline{\phi^{A_1\cdots A_m\dot{A}_1\cdots\dot{A}_k}_{B_1\cdots B_n\dot{B}_1\cdots\dot{B}_l}}$$

である.

添字の上げ下げ

ベクトルの添字の上げ下げは計量テンソルとの縮約を取って双対ベクトルに変換する同型対応であるが, スピノールの添字の上げ下げはレヴィ・チヴィタ記号との縮約を取って双対スピノールに変換する同型対応である. すなわち, スピノールの添字を下げる操作は

$$\flat_L\colon V_L \to V_L^*\ ;\ \begin{pmatrix}\xi^0\\ \xi^1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\xi^A\varepsilon_{A0}\\ \xi^A\varepsilon_{A1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\xi^1\\ \xi^0\end{pmatrix},$$

$$\flat_R\colon V_R \to V_R^*\,;\ \begin{pmatrix}\eta^{\dot{0}}\\ \eta^{\dot{1}}\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\eta_{\dot{0}}\\ \eta_{\dot{1}}\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\eta^{\dot{A}}\varepsilon_{\dot{A}\dot{0}}\\ \eta^{\dot{A}}\varepsilon_{\dot{A}\dot{1}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\eta^{\dot{1}}\\ \eta^{\dot{0}}\end{pmatrix},$$

スピノールの添字を上げる操作は

$$\sharp_L\colon V_L^* \to V_L\,;\ \begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\xi^0\\ \xi^1\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\varepsilon^{0A}\xi_A\\ \varepsilon^{1A}\xi_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ -\xi_0\end{pmatrix},$$
$$\sharp_R\colon V_R^* \to V_R\,;\ \begin{pmatrix}\eta_{\dot{0}}\\ \eta_{\dot{1}}\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\eta^{\dot{0}}\\ \eta^{\dot{1}}\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\varepsilon^{\dot{0}\dot{A}}\eta_{\dot{A}}\\ \varepsilon^{\dot{1}\dot{A}}\eta_{\dot{A}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_{\dot{1}}\\ -\eta_{\dot{0}}\end{pmatrix}$$

によって与えられる. ただし, ε は 2 次元のレヴィ・チヴィタ記号である:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix}\varepsilon_{00} & \varepsilon_{01}\\ \varepsilon_{10} & \varepsilon_{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon_{\dot{0}\dot{0}} & \varepsilon_{\dot{0}\dot{1}}\\ \varepsilon_{\dot{1}\dot{0}} & \varepsilon_{\dot{1}\dot{1}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon^{00} & \varepsilon^{01}\\ \varepsilon^{10} & \varepsilon^{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon^{\dot{0}\dot{0}} & \varepsilon^{\dot{0}\dot{1}}\\ \varepsilon^{\dot{1}\dot{0}} & \varepsilon^{\dot{1}\dot{1}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

なお, 0 でない 2 つのスピノール

$$\begin{pmatrix}\xi^0\\ \xi^1\end{pmatrix} \in V_L,\ \begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{pmatrix} \in V_L^*$$

は $\mathbb{C}^2$ のベクトルとしては異なるベクトルであるが, 共に ξ と表し, 成分表示の添字の位置によってその 2 つを区別することにする. ドット付きの場合についても同様である.

スピノールの内積

左巻きスピノール, 右巻きスピノールの内積をそれぞれ以下で定める:

$$\langle \xi, \zeta \rangle := \xi_A \zeta^A = \varepsilon_{AB}\xi^A\zeta^B = \varepsilon^{AB}\xi_A\zeta_B,$$
$$[\eta, \varsigma] := \eta_{\dot{A}}\varsigma^{\dot{A}} = \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\eta^{\dot{A}}\varsigma^{\dot{B}} = \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}}\eta_{\dot{A}}\varsigma_{\dot{B}}.$$

命題 1.6.

スピノールの内積について以下が成り立つ:

(1) スピノールの内積は反対称である:

$$\langle \xi, \zeta \rangle = -\langle \zeta, \xi \rangle,\ [\eta, \varsigma] = -[\varsigma, \eta],$$

(2) スピノールの内積は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 不変である:

$$\langle \Lambda\xi, \Lambda\zeta\rangle = \langle \xi, \zeta\rangle,\ [\Lambda\eta, \Lambda\varsigma] = [\eta, \varsigma]\ (\Lambda \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})),$$

(3) $\mathbb{CM}$ の任意のヌルベクトルどうしの内積は, スピノールの内積の積に分解できる:

$$g(x,y) = \langle \xi, \zeta\rangle \cdot [\eta, \varsigma].$$

ただし, $\iota(x) = \iota'(\xi \otimes \eta)$, $\iota(y) = \iota'(\zeta \otimes \varsigma)$ である.

証明 (1), (2) については右巻きの場合も同様に計算できるから左巻きの場合のみ示す.

(1) レヴィ・チヴィタ記号は添字の入れ替えで正負が入れ替わるから

$$\langle \xi, \zeta\rangle = \varepsilon_{AB}\xi^A\zeta^B = -\varepsilon_{BA}\xi^A\zeta^B = -\langle \zeta, \xi\rangle$$

である. したがって内積は反対称である.

(2) 任意の $\Lambda \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ について

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda\xi, \Lambda\zeta\rangle &= \varepsilon_{AB}\Lambda^A{}_C\xi^C\Lambda^B{}_D\zeta^D \\
&= \Lambda^0{}_C\xi^C\Lambda^1{}_D\zeta^D - \Lambda^1{}_C\xi^C\Lambda^0{}_D\zeta^D \\
&= (\Lambda^0{}_C\Lambda^1{}_D - \Lambda^1{}_C\Lambda^0{}_D)\xi^C\zeta^D \\
&= (\Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_1 - \Lambda^1{}_0\Lambda^0{}_1)\xi^0\zeta^1 + (\Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0 - \Lambda^1{}_1\Lambda^0{}_0)\xi^1\zeta^0 \\
&= \xi^0\zeta^1 - \xi^1\zeta^0 \\
&= \varepsilon_{AB}\xi^A\zeta^B = \langle \xi, \zeta\rangle
\end{aligned}$$

である. したがって内積は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 不変である.

(3) $\iota(x) = \iota'(\xi \otimes \eta)$, $\iota(y) = \iota'(\zeta \otimes \varsigma)$ より

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^0\eta^{\dot{0}} & \xi^0\eta^{\dot{1}} \\ \xi^1\eta^{\dot{0}} & \xi^1\eta^{\dot{1}} \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} y^0 + y^3 & y^1 - iy^2 \\ y^1 + iy^2 & y^0 - y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^0\varsigma^{\dot{0}} & \zeta^0\varsigma^{\dot{1}} \\ \zeta^1\varsigma^{\dot{0}} & \zeta^1\varsigma^{\dot{1}} \end{pmatrix}$$

であるから

$$\langle \xi, \zeta\rangle \cdot [\eta, \varsigma] = (\xi^0\zeta^1 - \xi^1\zeta^0)\left(\eta^{\dot{0}}\varsigma^{\dot{1}} - \eta^{\dot{1}}\varsigma^{\dot{0}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \xi^0\eta^{\dot 0}\zeta^1\varsigma^{\dot 1} - \xi^0\eta^{\dot 1}\zeta^1\varsigma^{\dot 0} - \xi^1\eta^{\dot 0}\zeta^0\varsigma^{\dot 1} + \xi^1\eta^{\dot 1}\zeta^0\varsigma^{\dot 0} \\
&= \frac{1}{2}(x^0+x^3)(y^0-y^3) - \frac{1}{2}(x^1-ix^2)(y^1+iy^2) \\
&\quad -\frac{1}{2}(x^1+ix^2)(y^1-iy^2) + \frac{1}{2}(x^0-x^3)(y^0+y^3) \\
&= x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 = g(x,y)
\end{aligned}
$$

である. □

命題 1.6 の (3) の証明と同様の手順により次の関係式を得る.

命題 1.7.

$\mathbb{CM}$ の計量 g に関して以下が成り立つ:

$$
g(x,y) = g_{ab}x^a y^b = \varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot A\dot B}x^{A\dot A}y^{B\dot B}.
$$

1.3 リアルスライス

$\mathbb{CM}$ の定め方から, 座標 (x^0, x^1, x^2, x^3) を実数に制限することで 4 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{M}$ を $\mathbb{CM}$ 内に実現することができるが, 空間の "切り方" を上手く変えることによってユークリッド空間 $\mathbb{E}^4$ やニュートラル計量空間 $\mathbb{R}^{2,2}$ の構造も $\mathbb{CM}$ 内で実現することができる. ここでは複素ベクトル空間上の実構造の定義を与え, 具体的に実構造を構成することで実際に $\mathbb{M}$ や $\mathbb{E}^4$ が得られることを見ていく.

定義 1.8. (実構造)

複素ベクトル空間 V 上の**実構造** (real structure) とは, 以下の条件を満たすような写像 $\sigma\colon V \to V$ をいう:

(1) σ は**反線形写像** (antilinear map) である:

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y), \\
&(ii) \quad \sigma(\lambda x) = \overline{\lambda}\sigma(x) \ (\lambda \in \mathbb{C}),
\end{aligned}
$$

(2) σ は**対合写像** (involution) である:

$$
\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_V.
$$

また, σ に関する V 内の不動点全体のなす空間

$$V^{\sigma} := \{\, x \in V \mid \sigma(x) = x \,\}$$

を, σ による V のリアルスライス (real slice) と呼ぶ.

例 1.9. (ミンコフスキー空間 $\mathbb{M}$)

$\mathbb{CM}$ の実構造 σ を

$$\sigma(x) = \overline{x}$$

によって与えると, この σ によるリアルスライスは集合として

$$\mathbb{CM}^{\sigma} = \{\, x \in \mathbb{CM} \mid \overline{x} = x \,\} = \{\, x \in \mathbb{CM} \mid \mathfrak{Im}(x) = 0 \,\} = \mathbb{R}^4$$

である. $\mathbb{CM}$ の座標を実部と虚部に分けて $x = u_x + iv_x$ と表すと, 計量 g の $\mathbb{CM}^{\sigma}$ への制限は

$$g(x,y) = u_x^0 u_y^0 - u_x^1 u_y^1 - u_x^2 u_y^2 - u_x^3 u_y^3$$

となり, ミンコフスキー計量の符号と一致する. すなわち, σ による $\mathbb{CM}$ のリアルスライスは $\mathbb{M}$ となる.

また, ι を用いて $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ の座標で記述すれば

$$\iota(\sigma(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \overline{x^0} + \overline{x^3} & \overline{x^1} - i\overline{x^2} \\ \overline{x^1} + i\overline{x^2} & \overline{x^0} - \overline{x^3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} {}^{\mathrm{t}}\!\begin{pmatrix} \overline{x^0 + x^3} & \overline{x^1 - ix^2} \\ \overline{x^1 + ix^2} & \overline{x^0 - x^3} \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}\overline{\iota(x)}$$

であるから, $\sigma' \colon \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ を

$$\sigma'(X) = \sigma' \begin{pmatrix} x^{0\dot{0}} & x^{0\dot{1}} \\ x^{1\dot{0}} & x^{1\dot{1}} \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}\!\begin{pmatrix} \overline{x^{0\dot{0}}} & \overline{x^{0\dot{1}}} \\ \overline{x^{1\dot{0}}} & \overline{x^{1\dot{1}}} \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}\overline{X}$$

で定めれば, σ' は $\iota \circ \sigma = \sigma' \circ \iota$ を満たすような $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ 上の実構造となる. この σ' による $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ のリアルスライスは

$$\mathrm{M}(2,\mathbb{C})^{\sigma'} = \left\{\, X \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; {}^{\mathrm{t}}\overline{X} = X \,\right\}$$

であり, これはエルミート行列全体のなす空間である.

例 1.10. (ユークリッド空間 $\mathbb{E}^4$)

$\mathbb{CM}$ の実構造 σ を

$$\sigma\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{x^0}\\-\overline{x^1}\\-\overline{x^2}\\-\overline{x^3}\end{pmatrix}$$

によって与えると, この σ によるリアルスライスは集合として

$$\mathbb{CM}^\sigma=\left\{\, x\in\mathbb{CM}\;\middle|\; \mathfrak{Im}(x^0)=0,\ \mathfrak{Re}(x^1)=\mathfrak{Re}(x^2)=\mathfrak{Re}(x^3)=0\,\right\}$$

である. $\mathbb{CM}$ の座標を実部と虚部に分けて $x=u_x+iv_x$ と表すと, 計量 g の $\mathbb{CM}^\sigma$ への制限は

$$g(x,y)=u_x^0u_y^0+v_x^1v_y^1+v_x^2v_y^2+v_x^3v_y^3$$

となり, ユークリッド計量の符号と一致する. すなわち, σ による $\mathbb{CM}$ のリアルスライスは $\mathbb{E}^4$ となる.

また, ι を用いて $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ の座標で記述すれば

$$\iota(\sigma(x))=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\overline{x^0}-\overline{x^3} & -\overline{x^1}+i\overline{x^2}\\ -\overline{x^1}-i\overline{x^2} & \overline{x^0}+\overline{x^3}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\overline{x^0-x^3} & \overline{-x^1-ix^2}\\ \overline{-x^1+ix^2} & \overline{x^0+x^3}\end{pmatrix}$$

であるから, $\sigma'\colon \mathrm{M}(2,\mathbb{C})\to\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ を

$$\sigma'(X)=\sigma'\begin{pmatrix}x^{0\dot{0}} & x^{0\dot{1}}\\ x^{1\dot{0}} & x^{1\dot{1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{x^{1\dot{1}}} & -\overline{x^{1\dot{0}}}\\ -\overline{x^{0\dot{1}}} & \overline{x^{0\dot{0}}}\end{pmatrix}=\varepsilon\overline{X}\varepsilon^{-1}$$

で定めれば, σ' は $\iota\circ\sigma=\sigma'\circ\iota$ を満たすような $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ 上の実構造となる. この σ' による $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ のリアルスライスは

$$\mathrm{M}(2,\mathbb{C})^{\sigma'}=\left\{\, X\in\mathrm{M}(2,\mathbb{C})\;\middle|\;\varepsilon\overline{X}\varepsilon^{-1}=X\,\right\}$$

である.

例 1.11. (ニュートラル計量空間 $\mathbb{R}^{2,2}$)

$\mathbb{CM}$ の実構造 σ を

$$\sigma\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{x^0}\\\overline{x^1}\\-\overline{x^2}\\\overline{x^3}\end{pmatrix}$$

によって与えると, この σ によるリアルスライスは集合として

$$\mathbb{CM}^\sigma = \left\{\, x \in \mathbb{CM} \;\middle|\; \mathfrak{Im}(x^0) = \mathfrak{Im}(x^1) = \mathfrak{Im}(x^3) = 0,\ \mathfrak{Re}(x^2) = 0 \,\right\}$$

である. $\mathbb{CM}$ の座標を実部と虚部に分けて $x = u_x + iv_x$ と表すと, 計量 g の $\mathbb{CM}^\sigma$ への制限は

$$g(x,y) = u_x^0 u_y^0 - u_x^1 u_y^1 + v_x^2 v_y^2 - u_x^3 u_y^3$$

となり, ニュートラル計量の符号と一致する. すなわち, σ による $\mathbb{CM}$ のリアルスライスは $\mathbb{R}^{2,2}$ となる.

また, ι を用いて $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ の座標で記述すれば

$$\iota(\sigma(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \overline{x^0} + \overline{x^3} & \overline{x^1} + i\overline{x^2} \\ \overline{x^1} - i\overline{x^2} & \overline{x^0} - \overline{x^3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \overline{x^0 + x^3} & \overline{x^1 - ix^2} \\ \overline{x^1 + ix^2} & \overline{x^0 - x^3} \end{pmatrix} = \overline{\iota(x)}$$

であるから, $\sigma' \colon \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ を

$$\sigma'(X) = \sigma'\begin{pmatrix} x^{0\dot{0}} & x^{0\dot{1}} \\ x^{1\dot{0}} & x^{1\dot{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x^{0\dot{0}}} & \overline{x^{0\dot{1}}} \\ \overline{x^{1\dot{0}}} & \overline{x^{1\dot{1}}} \end{pmatrix} = \overline{X}$$

で定めれば, σ' は $\iota \circ \sigma = \sigma' \circ \iota$ を満たすような $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ 上の実構造となる. この σ' による $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ のリアルスライスは

$$\mathrm{M}(2,\mathbb{C})^{\sigma'} = \left\{\, X \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; \overline{X} = X \,\right\} = \mathrm{M}(2,\mathbb{R})$$

である.

以降の議論においては, $\mathbb{CM}$, $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$, $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ を同一視して $\iota(x)$, $(\iota'^{-1} \circ \iota)(x)$ を単に x と表し, $\mathbb{CM}$ の計量 g に関する内積を

$$x \cdot y := g(x,y) = g_{ab} x^a y^b = \varepsilon_{AB} \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} x^{A\dot{A}} y^{B\dot{B}}$$

と表すことにする.

2　ツイスター理論

ペンローズによるツイスター理論は, 時空の 1 点を通る光線の集合が球面と同一視できるという幾何学的なアイデアと, ミンコフスキー空間上の微分方程式の研究にその端を発しており, ペンローズの創始以降, 重力理論やゲージ理論といった分野に大きな寄与をもたらしてきた. 本節では, ツイスター空間と呼ばれる複素多様体と物理的な対象である時空との間の幾何学的な対応の記述を目的として, 前半に複素多様体の変形理論を用いたツイスター理論の一般論を扱い, 後半で具体例として平坦時空上のツイスター理論を扱うことにする. なお, 2.1 節は [62], [106] 等を, 2.2 節および 2.3 節は [2], [71], [91], [102] 等を参考に構成した.

2.1　複素多様体上のツイスター理論

ツイスター理論の黎明期においてペンローズが導入したのは, 時空内の一点を通る光線を記述するための複素射影空間であり, これが最初期のツイスター空間であった. ツイスター空間の定義はその後, ツイスター理論の曲がった時空上への拡張に伴い, 代数幾何や複素幾何の言葉で記述されるようになった. 現在に至るまでツイスター空間の導入にはいくつかの方法が考えられてきたが, ここでは時空とは独立に以下のような定義を与える.

定義 2.1. (ツイスター空間)

$\mathcal{T}$ を 3 次元複素多様体, C を $\mathcal{T}$ の 1 次元複素部分多様体とする. $\mathcal{T}$ と C が以下の条件を満たすとき, $\mathcal{T}$ を**ツイスター空間** (twistor space), C を**ツイスター直線** (twistor line), あるいは**非線形重力子** (nonlinear graviton) といい, ツイスター空間の各元を**ツイスター** (twistor) という:

(1)　C は $\mathcal{T}$ の非特異有理曲線 (リーマン球面の正則埋め込み) である:

$$C \cong \mathbb{CP}^1,$$

(2)　C の法束が $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ である.

ただし, $\mathcal{O}(n)$ は $\mathbb{CP}^1$ 上の正則直線束である.

複素多様体上のツイスター理論を構築する上でキーとなるのは, ツイスター空間内におけるツイスター直線の変形である. 複素多様体の変形理論により, ツイスター直線の変形のパラメータの空間は 4 次元となることが保証されるが, その際, 以下で定義される複素解析族が, ツイスター空間と変形のパラメータの空間との間の橋渡しをする.

定義 2.2. (複素解析族)

複素多様体 $\mathcal{Z}$ の**複素解析族** (complex analytic family) とは, 以下の条件を満たすような複素部分多様体の族 $\{Y_x\}_{x\in\mathcal{X}}$, あるいは $\mathcal{Y} = \{(x,z)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Z} \mid z\in Y_x\}$ をいう:

(1) パラメータの空間 $\mathcal{X}$ は連結な複素多様体である,

(2) 各 $x\in\mathcal{X}$ について, Y_x は $\mathcal{Z}$ のコンパクト複素部分多様体である,

(3) $\mathcal{Y}$ は $\mathcal{X}\times\mathcal{Z}$ の複素部分多様体である,

(4) 各 $y\in\{x\}\times Y_x$ について以下が成り立つ:

$$T_y\mathcal{Y}\cap T_y(\{x\}\times\mathcal{Z}) = T_y(\{x\}\times Y_x).$$

とくに, Y を $\mathcal{Z}$ のコンパクト複素部分多様体とするとき, Y を含むような複素解析族 $\{Y_x\}_{x\in\mathcal{X}}$ を $\mathcal{Z}$ における Y の**変形** (deformation) という.

このコンパクト複素部分多様体の変形に関しては変形理論の次の結果が知られており, これがツイスター空間から時空を生成する際の理論的な後ろ盾となる.

定理 2.3. (小平 [42])

$\mathcal{Z}$ を複素多様体, Y を $\mathcal{Z}$ のコンパクト複素部分多様体, N を Y の法束とする. このとき $H^1(Y,N)\cong 0$ ならば, Y のある変形 $\{Y_x\}_{x\in\mathcal{X}}$ が存在して, 任意の $x\in\mathcal{X}$ に対し

$$T_x\mathcal{X}\cong H^0(Y_x,N_x)$$

が成り立つ. ただし, N_x は Y_x の法束である.

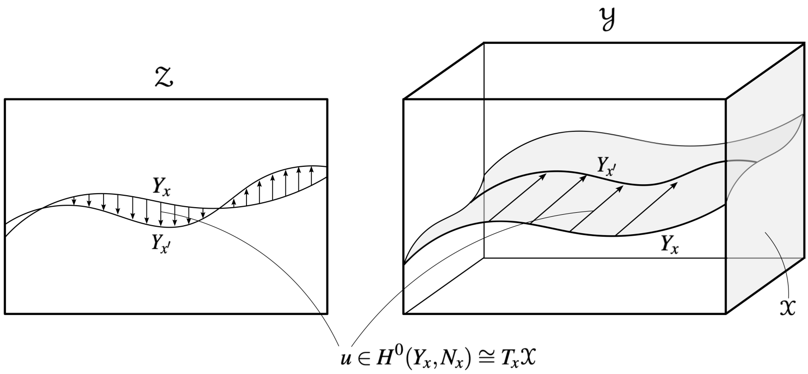


図 2　コンパクト複素部分多様体の変形と複素解析族

この小平の定理をツイスター空間の状況に適用する. $\mathcal{Z}$ としてツイスター空間 $\mathcal{T}$ を取り, Y としてツイスター直線 C を取る. 一般に

$$H^1(Y,N) \cong H^1(C, \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)) \cong 0$$

であるから, ある複素解析族 $\mathcal{F} = \{\, (x,z) \in \mathcal{M} \times \mathcal{T} \mid z \in C_x \,\}$ が存在して, 各 $x \in \mathcal{M}$ で

$$T_x\mathcal{M} \cong H^0(Y_x, N_x) \cong H^0(C_x, \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)) \cong \mathbb{C}^4$$

となる. したがって $\mathcal{M}$ は 4 次元複素多様体である. このとき, $\mathcal{M}$, $\mathcal{T}$ への射影

$$\mu \colon \mathcal{F} \to \mathcal{M}\ ;\ (x,z) \mapsto x,$$
$$\nu \colon \mathcal{F} \to \mathcal{T}\ ;\ (x,z) \mapsto z$$

から次のダブルファイブレーションを得る:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \mathcal{M} & & \mathcal{T} \end{tikzcd}$$

この構成方法から, 任意の $x \in \mathcal{M}$ について

$$\nu(\mu^{-1}(x)) = C_x \cong \mathbb{CP}^1$$

である.

定義 2.4. (複素共形構造)

複素多様体 M 上の正則な非退化 2 階共変対称テンソルを M 上の**複素計量** (complex metric) といい, M 上の複素計量のスケーリングに関する同値類

$$[g] = \{\, \varphi \cdot g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M) \mid \varphi \in \mathcal{H}(M),\ \varphi \neq 0 \,\}$$

を M 上の**複素共形構造** (complex conformal structure), あるいは単に**共形構造** (conformal structure) という. ただし, $\mathcal{H}(M)$ は M 上の正則関数全体のなす空間であり, $\varphi \neq 0$ は任意の $x \in M$ に対して $\varphi(x) \neq 0$ となることを意味するものとする.

また, $[g]$ に関するワイルテンソル W が, ホッジ作用素 $*$ について

$$*W = W$$

を満たすとき, 共形構造 $[g]$ は**自己双対** (self-dual) であるという.

ツイスター直線の法束が $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ であることを利用して $\mathcal{M}$ 上の共形構造を構成する. x を $\mathcal{M}$ の任意の点とし, x に対するツイスター直線 $C_x \cong \mathbb{CP}^1$ の斉次座標を $z = [z_0, z_1]$ とする. $\mathcal{O}(1)$ の正則切断は z_0, z_1 の 1 次式で表されるから, 点 x における任意の接ベクトル $u \in T_x\mathcal{M} \cong H^0(C_x, \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1))$ は, 2 つの 1 次式の組

$$(az_0 + bz_1, cz_0 + dz_1)$$

として表される. とくにこの各係数 a, b, c, d は $T_x\mathcal{M} \cong \mathbb{C}^4$ の座標を与える.

定義 2.5. (α 曲面)

ダブルファイブレーションにおいて点 $z \in \mathcal{T}$ に対応する $\mathcal{M}$ の曲面

$$\mathcal{A}_z := \mu(\nu^{-1}(z)) \subset \mathcal{M}$$

を z に対応する $\mathcal{M}$ の **α 曲面** (α-surface) という.

各 $z \in C_x$ に対し, α 曲面 $\mathcal{A}_z$ は点 x を含むから, $\mathcal{M}$ の接ベクトル $u \in T_x\mathcal{M}$ が $T_x\mathcal{A}_z$ に含まれるとき, $\mathcal{T}$ における u 方向への C_x の変形は z を固定する.

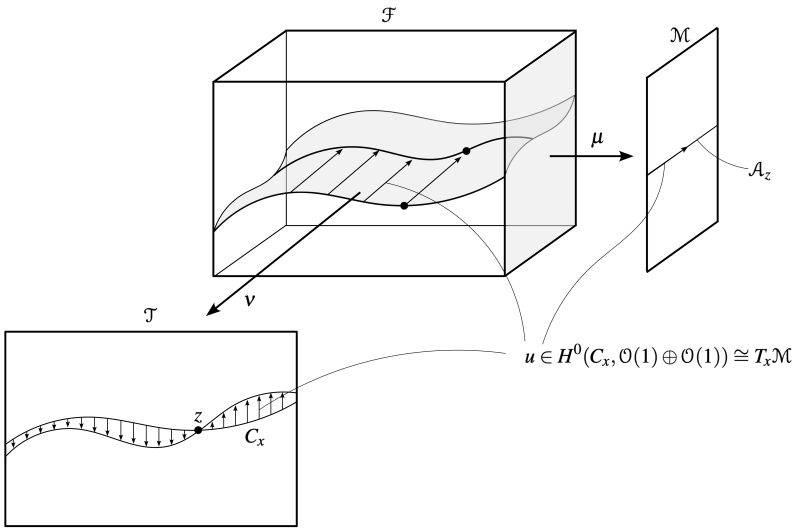


図 3　ダブルファイブレーション

したがって $\mathcal{M}$ の接ベクトルについて次の同値な条件を得る.

命題 2.6.

x を $\mathcal{M}$ の点, $z = [z_0, z_1]$ を C_x の点とし, u を x における接ベクトルとする:

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (az_0 + bz_1, cz_0 + dz_1) \in T_x\mathcal{M} \cong H^0(C_x, \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)).$$

このとき u に関して以下は同値である:

(1)　u が z に対応する α 曲面 $\mathcal{A}_z$ の接ベクトルとなる:

$$u \in T_x\mathcal{A}_z \subset T_x\mathcal{M},$$

(2)　z が 2 つの 1 次式 $az_0 + bz_1, cz_0 + dz_1$ の共通零点となる:

$$az_0 + bz_1 = cz_0 + dz_1 = 0,$$

(3)　u の行列式が 0 となる:

$$\det(u) = ad - bc = 0.$$

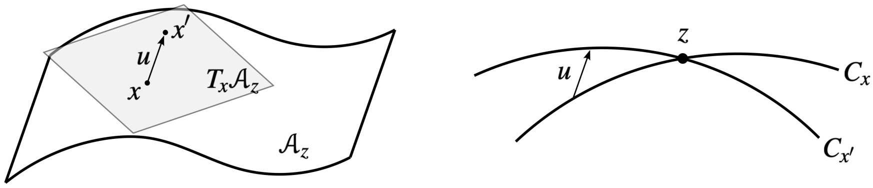


図 4　1 点を固定するツイスター直線の変形は α 曲面の接ベクトルに対応する

これを踏まえ, $\mathcal{M}$ 上の 2 次形式 h を

$$h(u) = ad - bc$$

で定めると, h から $\mathcal{M}$ 上の複素計量 g が

$$g(u,u') = h(u+u') - h(u) - h(u')$$

と定まるが, この定め方から計量 g は, 各 $z \in C_x$ に対応する α 曲面 $\mathcal{A}_z$ の接平面 $T_x\mathcal{A}_z$ をヌル平面とするような複素計量になっている. なお, $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ の正則切断 $(az_0 + bz_1, cz_0 + dz_1)$ の表示には定数倍の自由度があるため, 計量 g の定め方には関数倍の自由度が残る. したがって $\mathcal{M}$ には共形構造 $[g]$ が一意に定まることになる.

定義 2.7. (α 平面)

$[\eta] \in \mathbb{P}(V_R) = \mathbb{CP}^1$ に対して, $\mathbb{CM}$ の 2 次元部分空間

$$\mathcal{A}_{[\eta]} := \{\, \xi \otimes \eta \in \mathbb{CM} \mid \xi \in V_L \,\} \cong \mathbb{C}^2$$

を $[\eta]$ の **α 平面** (α-plane) という.

$\mathcal{M}$ の接空間と $\mathbb{CM}$ を適当に同一視することによって, α 曲面の接平面は α 平面と同一視できる. $\mathcal{M}$ については可積分性に関する以下の結果が知られており, ツイスター空間の構造は $\mathcal{M}$ の自己双対共形構造を与えることが分かる.

定理 2.8. (ペンローズ [62])

4 次元複素共形多様体 $(\mathcal{M},[g])$ について以下は同値である:

(1) $[g]$ が自己双対である,

(2) $\mathcal{M}$ の接空間の任意の α 平面 $\mathcal{A}$ に対し, $\mathcal{A}$ を接平面に持つような α 曲面が存在する.

以上までの内容から, ツイスター空間 $\mathcal{T}$ と複素多様体 $\mathcal{M}$ の対応は次のようにまとめることができる.

定理 2.9. (ツイスター対応)

ツイスター空間 $\mathcal{T}$ と複素多様体 $\mathcal{M}$ の間のダブルファイブレーション

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \mathcal{M} & & \mathcal{T} \end{tikzcd}$$

に関して, 各幾何構造は以下のように対応する:

自己双対共形多様体			ツイスター空間	
	$(\mathcal{M},[g])$	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{T}$	
点	x		C_x	ツイスター直線
α 曲面	$\mathcal{A}_z$		z	点
接空間	$T_x\mathcal{M}$		$H^0(C_x,N_x)$	法束の正則切断

2.2 複素ミンコフスキー空間上のツイスター理論

ツイスター対応の具体例として最もよく知られているのは, 複素時空 $\mathbb{CM}$ と 3 次元複素射影空間 $\mathbb{CP}^3$ の対応である. ここでは 2.1 節の流れに則して, 射影空間内のツイスター直線の変形から複素時空を構成し, その対応を見ていくことにする.

はじめにベクトル空間 $\mathbb{T}$ を, スピノール空間 V_L と V_R^* の直和として定める:

$$\mathbb{T} = V_L \oplus V_R^* \cong \mathbb{C}^4.$$

$\widetilde{\mathbb{PT}} = \mathbb{CP}^3$ を $\mathbb{T}$ の射影化とし, ツイスター空間 $\mathcal{T}$ として $\widetilde{\mathbb{PT}}$ 内の以下の開集合を取る:

$$\mathbb{PT} := \left\{ z = \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \in \widetilde{\mathbb{PT}} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^1.$$

$\mathbb{PT}$ は 2 つの開集合

$$\mathcal{U}_+ = \left\{ z \in \widetilde{\mathbb{PT}} \;\middle|\; \pi_{\dot{1}} \neq 0 \right\},\ \mathcal{U}_- = \left\{ z \in \widetilde{\mathbb{PT}} \;\middle|\; \pi_{\dot{0}} \neq 0 \right\}$$

でカバーでき, $\mathcal{U}_+$ 上の座標は

$$\omega_+^0 = \frac{\omega^0}{\pi_{\dot{1}}},\ \omega_+^1 = \frac{\omega^1}{\pi_{\dot{1}}},\ \pi_+ = \frac{\pi_{\dot{0}}}{\pi_{\dot{1}}},$$

$\mathcal{U}_-$ 上の座標は

$$\omega_-^0 = \frac{\omega^0}{\pi_{\dot{0}}},\ \omega_-^1 = \frac{\omega^1}{\pi_{\dot{0}}},\ \pi_- = \frac{\pi_{\dot{1}}}{\pi_{\dot{0}}}$$

で与えられる. 共通部分 $\mathcal{U}_+ \cap \mathcal{U}_-$ における座標変換は

$$\omega_+^0 = \pi_+ \omega_-^0,\ \omega_+^1 = \pi_+ \omega_-^1,\ \pi_+ = \frac{1}{\pi_-}$$

であるから, $\mathbb{PT} = \mathcal{U}_+ \cup \mathcal{U}_-$ は $\mathbb{CP}^1$ 上の階数 2 の正則ベクトル束 $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ の全空間に一致する. したがって, 変形の基準となるツイスター直線として

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \in \widetilde{\mathbb{PT}} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{CP}^1$$

を取ると, C の法束は $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ であるから, C の変形は複素時空 $\mathbb{CM}$ の座標を用いて

$$C_x = \left\{ \begin{bmatrix} x^{0\dot{A}} \pi_{\dot{A}} \\ x^{1\dot{A}} \pi_{\dot{A}} \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \in \widetilde{\mathbb{PT}} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{CP}^1$$

と表示することができ, 複素解析族 $\mathcal{F}$ は

$$\mathcal{F} = \{\, (x,z) \in \mathbb{CM} \times \mathbb{PT} \mid z \in C_x \,\} \cong \mathbb{CM} \times \mathbb{CP}^1$$

と与えられる. これにより次のダブルファイブレーションを得る:

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{F} \cong \mathbb{CM} \times \mathbb{CP}^1 \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\
\mathcal{M} = \mathbb{CM} & & \mathcal{T} = \mathbb{PT}
\end{tikzcd}
$$

命題 2.10.

$\mathbb{CM}$ 上の異なる 2 点 x, y に関して以下は同値である:

(1) x, y に対応するツイスター直線 C_x, C_y が交点を持つ,

(2) x と y の差 $(x-y)$ がヌルである.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2)

C_x と C_y の交点を

$$
z = \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \in C_x \cap C_y
$$

とすると, z は関係式

$$
\omega^A = x^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}} = y^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}}
$$

を満たすから, $(x^{A\dot{A}} - y^{A\dot{A}})\pi_{\dot{A}} = 0$ である. π の直交補空間は 1 次元であるから, $(x-y)$ はある $\xi^0, \xi^1 \in \mathbb{C}$ を用いて

$$
x^{A\dot{A}} - y^{A\dot{A}} = \xi^A \pi^{\dot{A}}
$$

と表せる. よって $(x-y)$ はヌルベクトルである.

(2) $\Rightarrow$ (1)

x と y の差 $(x-y)$ がヌルであるとすると, $(x-y)$ はある $\xi \in V_L, \pi \in V_R$ を用いて

$$
x^{A\dot{A}} - y^{A\dot{A}} = \xi^A \pi^{\dot{A}}
$$

と表される. $\pi_{\dot{A}}$ との縮約を取ると, スピノールの内積の反対称性より

$$
(x^{A\dot{A}} - y^{A\dot{A}})\pi_{\dot{A}} = \xi^A \pi^{\dot{A}} \pi_{\dot{A}} = 0
$$

となる. したがって

$$x^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}} = y^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}}$$

であるから, $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ である. □

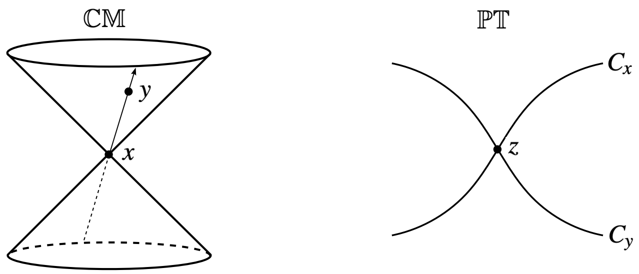


図 5　ℂ𝕄 と ℙ𝕋 のツイスター対応

命題 2.10 より, 固定した $x_0 \in \mathbb{CM}$ に対応するツイスター直線 C_{x_0} 上に任意の点 z を取ると, z を通るようなツイスター直線の族は, 任意のパラメータ ξ^0, ξ^1 を用いて

$$x^{A\dot{A}} = x_0^{A\dot{A}} + \xi^A \pi^{\dot{A}}$$

と表示される. したがって, z を通るようなツイスター直線の全体は α 平面

$$\mathcal{A}_{[\pi]} = \{\, \xi \otimes \pi \in \mathbb{CM} \mid \xi \in V_L \,\} \cong \mathbb{C}^2$$

を x_0 方向に平行移動させた空間に対応する.

以上までの内容から, ツイスター空間 ℙ𝕋 と複素時空 ℂ𝕄 の対応は次のようにまとめることができる.

定理 2.11. (ツイスター対応)

ツイスター空間 ℙ𝕋 と複素時空 ℂ𝕄 の間のダブルファイブレーション

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \cong \mathbb{CM} \times \mathbb{CP}^1 \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \mathcal{M} = \mathbb{CM} & & \mathcal{T} = \mathbb{PT} \end{tikzcd}$$

に関して, 各幾何構造は以下のように対応する:

複素ミンコフスキー空間				ツイスター空間
	$\mathbb{CM}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{PT}$	
点	x		C_x	ツイスター直線
α 平面	$\mathcal{A}_{[\pi]}$		z	点

2.3 ミンコフスキー空間上のツイスター理論

ミンコフスキー空間 $\mathbb{M}$ 上のツイスター理論は, $\mathbb{PT}$ 内のヌルツイスターと呼ばれるツイスターと $\mathbb{M}$ 内のヌル直線との対応を与える最も古典的なツイスター理論である. ここでは $\mathbb{CM}$ のリアルスライスとしてミンコフスキー空間 $\mathbb{M}$ を取り, 複素時空の実構造をダブルファイブレーション経由でツイスター空間に誘導することによって, 複素時空上のツイスター理論の枠組みの中で $\mathbb{M}$ 上のツイスター理論を実現することにする.

なお, 以降の議論において複素解析族を用いたダブルファイブレーションの表示はやや冗長であるから, 以下のように対応を簡略化することにする:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{CM}\times\mathbb{CP}^1 \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \mathbb{CM} & & \mathbb{PT} \end{tikzcd}$$

$$\mu(x,[\pi]) = x,\ \nu(x,[\pi]) = \begin{bmatrix} x^{0\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ x^{1\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix}.$$

1.3 節で扱ったように, $\mathbb{CM}$ 内のリアルスライスとして得られる $\mathbb{M}$ はエルミート行列全体のなす空間であったから, $\mathbb{M}$ の各点 x は

$$\overline{x}^{\dot{A}A} = x^{A\dot{A}}$$

という条件を満たす. したがって, 任意に $[\pi]\in\mathbb{P}(V_R^*) = \mathbb{CP}^1$ を取って, 複素時空上のツイスター対応を与える関係式

$$\omega^A = x^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}}$$

の両辺に $\overline{\pi}_A$ を縮約させると

$$\omega^A\overline{\pi}_A = x^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}}\overline{\pi}_A = \overline{x}^{\dot{A}A}\pi_{\dot{A}}\overline{\pi}_A = \overline{\omega}^{\dot{A}}\pi_{\dot{A}},$$

すなわち

$$\langle\omega,\overline{\pi}\rangle = [\overline{\omega},\pi]$$

という条件を得る.

定義 2.12. (ヌルツイスター空間)

ツイスター空間 $\mathbb{PT}$ 内の空間

$$\mathbb{PN} := \left\{ \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{PT} \,\middle|\, \langle\omega,\overline{\pi}\rangle = [\overline{\omega},\pi] \right\}$$

を**ヌルツイスター空間** (null twistor space) といい, ヌルツイスター空間の各元を**ヌルツイスター** (null twistor) という.

ヌルツイスター空間の導入方法から直ちに, $\nu(\mu^{-1}(\mathbb{M}))$ が $\mathbb{PN}$ に含まれることが分かるが, 以下の命題から $\mathbb{PN}$ は $\mathbb{M}$ と完全に対応する空間であることが分かる.

命題 2.13.

ミンコフスキー空間 $\mathbb{M}$ とヌルツイスター空間 $\mathbb{PN}$ について以下が成り立つ:

$$\nu(\mu^{-1}(\mathbb{M})) = \mathbb{PN}.$$

とくに, 任意のヌルツイスター $z \in \mathbb{PN}$ は, ある $x_0 \in \mathbb{M}$ に対応するツイスター直線 C_{x_0} に含まれる.

証明　$\mathbb{PN} \subset \nu(\mu^{-1}(\mathbb{M}))$ を示す. 任意にヌルツイスター

$$z = \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{PN}$$

を取ると, z は条件

$$\omega^A \overline{\pi}_A = \overline{\omega}^{\dot{A}} \pi_{\dot{A}}$$

を満たす. この条件は $\omega^A \overline{\pi}_A$ の虚部が 0 であることを意味するから, $\omega^A \overline{\pi}_A$ はある実数 λ を用いて

$$\omega^A \overline{\pi}_A = \overline{\omega}^{\dot{A}} \pi_{\dot{A}} = \lambda$$

と表すことができる. この λ を用いて $\mathbb{M}$ の点 x_0 を

$$x_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \omega^0 \overline{\omega}^{\dot{0}} & \omega^0 \overline{\omega}^{\dot{1}} \\ \omega^1 \overline{\omega}^{\dot{0}} & \omega^1 \overline{\omega}^{\dot{1}} \end{pmatrix} & (\lambda \neq 0) \\ \dfrac{1}{|\pi_{\dot{0}}|^2} \begin{pmatrix} \omega^0 \overline{\pi}_0 + \overline{\omega}^{\dot{0}} \pi_{\dot{0}} + |\pi_{\dot{1}}|^2 c & \overline{\omega}^{\dot{1}} \pi_{\dot{0}} - \overline{\pi}_1 \pi_{\dot{0}} c \\ \omega^1 \overline{\pi}_0 - \pi_{\dot{1}} \overline{\pi}_0 c & |\pi_{\dot{0}}|^2 c \end{pmatrix} & (\lambda = 0,\ \pi_{\dot{0}} \neq 0) \\ \dfrac{1}{|\pi_{\dot{1}}|^2} \begin{pmatrix} |\pi_{\dot{1}}|^2 c & \omega^0 \overline{\pi}_1 - \pi_{\dot{0}} \overline{\pi}_1 c \\ \overline{\omega}^{\dot{0}} \pi_{\dot{1}} - \overline{\pi}_0 \pi_{\dot{1}} c & \omega^1 \overline{\pi}_1 + \overline{\omega}^{\dot{1}} \pi_{\dot{1}} + |\pi_{\dot{0}}|^2 c \end{pmatrix} & (\lambda = 0,\ \pi_{\dot{1}} \neq 0) \end{cases}$$

で定める. ただし, c は任意の実数定数である. x_0 は関係式

$$\omega^A = x_0^{A\dot{A}} \pi_{\dot{A}}$$

を満たすから, ヌルツイスター z は x_0 に対応するツイスター直線 C_{x_0} に含まれる. したがって $\mathbb{PN} \subset \nu(\mu^{-1}(\mathbb{M}))$ である. □

命題 2.13 で構成した x_0 は, ヌルツイスター $z \in \mathbb{PN}$ に対応する α 平面と $\mathbb{M}$ の共通部分

$$\Gamma_z := \mu(\nu^{-1}(z)) \cap \mathbb{M}$$

が $\mathbb{M}$ のヌル直線であることを示す際にも用いられる.

命題 2.14.

$\mathbb{PN}$ の各点は $\mathbb{M}$ 内のヌル直線と一対一に対応する. すなわち, 以下が成り立つ:

(1) 任意のヌルツイスター $z \in \mathbb{PN}$ に対し, Γ_z はヌル直線である,

(2) 任意のヌルツイスター $z, z' \in \mathbb{PN}$ に対し, $\Gamma_z = \Gamma_{z'}$ であるとすると, $z = z'$ である,

(3) $\mathbb{M}$ の任意のヌル直線 Γ に対し, あるヌルツイスター $z \in \mathbb{PN}$ が存在して $\Gamma = \Gamma_z$ となる.

証明

(1) 任意のヌルツイスター

$$z = \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{PN}$$

に対応する $\mathbb{CM}$ の α 平面は, 命題 2.13 で構成した $x_0 \in \mathbb{M}$ とパラメータ ξ によって

$$x^{A\dot{A}} = x_0^{A\dot{A}} + \xi^A \pi^{\dot{A}}$$

と表すことができる. とくに $\xi^A \pi^{\dot{A}}$ の部分は $\mathbb{M}$ との共通部分において, 実数パラメータ r を用いて $r\,\overline{\pi}^A \pi^{\dot{A}}$ と表されるから, Γ_z は

$$x^{A\dot{A}} = x_0^{A\dot{A}} + r\,\overline{\pi}^A \pi^{\dot{A}}$$

と表すことができる. したがって, Γ_z はヌル直線である.

(2) z と z' を $\mathbb{PN}$ の任意の点とし, $\Gamma_z = \Gamma_{z'}$ とする. このとき, ヌル直線 $\Gamma_z = \Gamma_{z'}$ 上の任意の点 x は

$$x^{A\dot{A}} = x_0^{A\dot{A}} + r\,\overline{\pi}^A \pi^{\dot{A}} = x'^{A\dot{A}}_0 + r'\,\overline{\pi'}^A \pi'^{\dot{A}}$$

と 2 通りに書き表すことができるが, 2 つのヌル直線の接ベクトルは同一方向でなければならないから, π' は π の複素定数倍である:

$$\pi' = c\pi.$$

したがって

$$x'^{A\dot{A}}_0 = x_0^{A\dot{A}} + (r - r'|c|^2)\overline{\pi}^A \pi^{\dot{A}}$$

であるから, $\pi^{\dot{A}} \pi_{\dot{A}} = 0$ より

$$z' = \begin{bmatrix} x'^{0\dot{A}}_0 \pi'_{\dot{A}} \\ x'^{1\dot{A}}_0 \pi'_{\dot{A}} \\ \pi'_{\dot{0}} \\ \pi'_{\dot{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ x_0^{0\dot{A}} + (r - r'|c|^2)\overline{\pi}^0 \pi^{\dot{A}} \right\} c\pi_{\dot{A}} \\ \left\{ x_0^{1\dot{A}} + (r - r'|c|^2)\overline{\pi}^1 \pi^{\dot{A}} \right\} c\pi_{\dot{A}} \\ c\pi_{\dot{0}} \\ c\pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c x_0^{0\dot{A}} \pi_{\dot{A}} \\ c x_0^{1\dot{A}} \pi_{\dot{A}} \\ c\pi_{\dot{0}} \\ c\pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} = z$$

を得る.

(3) Γ を $\mathbb{M}$ の任意のヌル直線とする. Γ の接ベクトルは $\mathbb{M}$ のヌルベクトルであるから, Γ の任意の点 x は, あるスピノール $\pi \in V_R$ と Γ 上のある点 x_0, および実数パラメータ r を用いて

$$x^{A\dot{A}} = x_0^{A\dot{A}} + r\,\overline{\pi}^{A}\pi^{\dot{A}}$$

と表すことができる. このとき $z \in \mathbb{PN}$ を, π と x_0 を用いて

$$z = \begin{bmatrix} x_0^{0\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ x_0^{1\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix}$$

と定めると, z は C_{x_0} に含まれるから $\Gamma_z = \Gamma$ である. □

命題 2.13 と命題 2.14 より, $\mathbb{CM}$ と $\mathbb{PT}$ の間のダブルファイブレーションを $\mathbb{M}$ と $\mathbb{PN}$ へ制限することで, $\mathbb{M}$ と $\mathbb{PN}$ の間のツイスター対応を得る.

定理 2.15. (ツイスター対応)

ヌルツイスター空間 $\mathbb{PN}$ とミンコフスキー空間 $\mathbb{M}$ の間のダブルファイブレーション

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{M}\times\mathbb{CP}^1 \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \mathbb{M} & & \mathbb{PN} \end{tikzcd}$$

に関して, 各幾何構造は以下のように対応する:

ミンコフスキー空間			ヌルツイスター空間	
$\mathbb{M}$		$\longleftrightarrow$	$\mathbb{PN}$	
点	x		C_x	ツイスター直線
ヌル直線	Γ_z		z	点

3 ミニツイスター理論

ヒッチンによって導入されたミニツイスター理論は, ミニツイスター空間と呼ばれる 2 次元複素多様体と, 3 次元複素多様体上のアインシュタイン・ワイル構造と呼ばれる幾何構造との間に局所的な対応を与えるものであり, 近年の研究においては代数幾何や可積分系との関連が盛んに調べられている. ツイスター対応同様, アインシュタイン・ワイル空間はミニツイスター直線の空間であり, 逆にミニツイスター空間はアインシュタイン・ワイル空間のヌル曲面をパラメトライズする空間となっている. 本節では 2 節と同様の流れで, 前半に複素多様体の変形理論を用いたミニツイスター理論の一般論を扱い, 後半で具体例として平坦時空上のミニツイスター理論, および 3 次元双曲空間上のミニツイスター理論を扱うことにする. なお, 3.1 節は [33], [39] 等を, 3.2 節は [3], [15], [29] 等を, 3.3 節は [10], [13] 等を参考に構成した.

3.1 複素多様体上のミニツイスター理論

はじめに, 共形キリングベクトル場によるツイスター対応のリダクションを考えることでミニツイスターの概念が自然に導かれることを見ていく. $\mathcal{T}$ をツイスター空間, $(\mathcal{M},[g])$ を $\mathcal{T}$ に対応する自己双対共形多様体とし, $K\in\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ を $\mathcal{M}$ 上の共形キリングベクトル場とする:

$$\mathcal{L}_K g_{ab}=\nabla_a K_b+\nabla_b K_a=\frac{1}{2}(\nabla_c K^c)g_{ab}.$$

この K のフローは α 曲面を α 曲面に移すから, それに対応してツイスター直線をツイスター直線に移すような $\mathcal{T}$ 上の正則ベクトル場 V が定まる. そこで, C を $\mathcal{T}$ のツイスター直線とし, V は C 上で消えないとすると, V は C の法束 $\widetilde{N}$ の自明な部分直線束 $\mathcal{V}\subset\widetilde{N}$ を定める. したがって

$$\widetilde{N}/\mathcal{V}\cong(\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}(1))/\mathcal{V}\cong\mathcal{O}(2)$$

であるから, $\mathcal{T}/V$ において C の法束は $\mathcal{O}(2)$ となる. すなわち, ツイスター空間 $\mathcal{T}$ をベクトル場 V の積分曲線で割ることで, 法束が $\mathcal{O}(2)$ となるような非特異有理曲線を持つ 2 次元複素多様体が現れる.

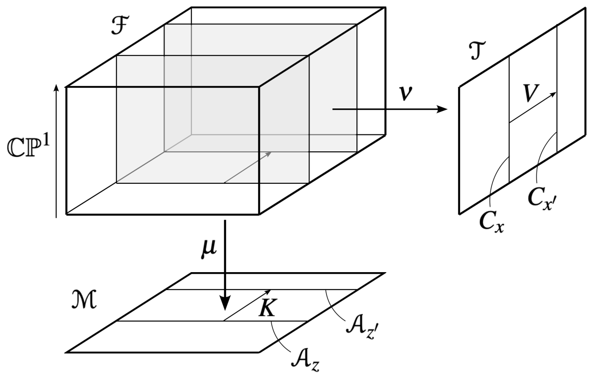


図 6　$\mathcal{M}$ 上の共形キリングベクトル場に対応して $\mathcal{T}$ 上にベクトル場が定まる

定義 3.1. (ミニツイスター空間)

$\mathcal{MT}$ を 2 次元複素多様体, C を $\mathcal{MT}$ の 1 次元複素部分多様体とする. $\mathcal{MT}$ と C が以下の条件を満たすとき, $\mathcal{MT}$ を**ミニツイスター空間** (minitwistor space), C を**ミニツイスター直線** (minitwistor line) といい, ミニツイスター空間の各元を**ミニツイスター** (minitwistor) という:

(1)　C は $\mathcal{MT}$ の非特異有理曲線 (リーマン球面の正則埋め込み) である:

$$C \cong \mathbb{CP}^1,$$

(2)　C の法束が $\mathcal{O}(2) = \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1)$ である.

定理 2.3 をミニツイスター空間の状況に適用する. $\mathcal{Z}$ としてミニツイスター空間 $\mathcal{MT}$ を取り, Y としてミニツイスター直線 C を取る. 一般に

$$H^1(Y,N) \cong H^1(C,\mathcal{O}(2)) \cong 0$$

であるから, ある複素解析族 $\mathcal{Y} = \{\, (x,z) \in \mathcal{W} \times \mathcal{MT} \mid z \in C_x \,\}$ が存在して, 各 $x \in \mathcal{W}$ で

$$T_x\mathcal{W} \cong H^0(Y_x,N_x) \cong H^0(C_x,\mathcal{O}(2)) \cong \mathbb{C}^3$$

となる. したがって $\mathcal{W}$ は 3 次元複素多様体である. このとき, $\mathcal{W}$, $\mathcal{MT}$ への射影

$$\mu\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{W}\,;\ (x,z) \mapsto x,$$

$$\nu\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{MT}\ ;\ (x,z) \mapsto z$$

から次のダブルファイブレーションを得る:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{Y} \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\
\mathcal{W} & & \mathcal{MT}
\end{tikzcd}$$

この構成方法から, 任意の $x \in \mathcal{W}$ について

$$\nu(\mu^{-1}(x)) = C_x \cong \mathbb{CP}^1$$

である.

次に, ミニツイスター直線の法束が $\mathcal{O}(2)$ であることを利用して $\mathcal{W}$ 上の共形構造を構成する. x を $\mathcal{W}$ の任意の点とし, x に対するミニツイスター直線 $C_x \cong \mathbb{CP}^1$ の斉次座標を $z = [z_0, z_1]$ とする. $\mathcal{O}(2)$ の正則切断は z_0, z_1 の 2 次式で表されるから, 点 x における任意の接ベクトル $u \in T_x\mathcal{W} \cong H^0(C_x, \mathcal{O}(2))$ は

$$az_0^2 + 2bz_0z_1 + cz_1^2$$

と表される. とくにこの各係数 a, b, c は $T_x\mathcal{W} \cong \mathbb{C}^3$ の座標を与える.

各 $z \in C_x$ に対し, $\mathcal{W}$ の曲面

$$\mathcal{S}_z := \mu(\nu^{-1}(z)) \subset \mathcal{W}$$

は点 x を含むから, $\mathcal{W}$ の接ベクトル $u \in T_x\mathcal{W}$ が $T_x\mathcal{S}_z$ に含まれるとき, $\mathcal{MT}$ における u 方向への C_x の変形は z を固定する. この u 方向への変形は通常, 固定点を 2 つ持つが, z が 2 次方程式

$$az_0^2 + 2bz_0z_1 + cz_1^2 = 0$$

の重解となる場合, その 2 つの固定点は一致する. したがって, $\mathcal{S}_z$ の接ベクトルについて次の同値な条件を得る.

命題 3.2.

x を $\mathcal{W}$ の点, $z = [z_0, z_1]$ を C_x の点とし, u を x における $\mathcal{S}_z$ の接ベクトルと

する:
$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = az_0^2 + 2bz_0z_1 + cz_1^2 \in T_x\mathcal{S}_z.$$
このとき u に関して以下は同値である:

(1) u による C_x の変形が z のみを固定する. すなわち, z が次の 2 次方程式の重解となる:
$$az_0^2 + 2bz_0z_1 + cz_1^2 = 0,$$

(2) u の行列式が 0 となる:
$$\det(u) = ac - b^2 = 0.$$

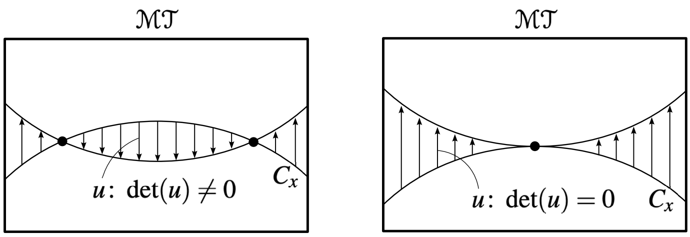


図 7　ミニツイスター直線の変形

これを踏まえ, $\mathcal{W}$ 上の 2 次形式 h を
$$h(u) = ac - b^2$$
で定めると, h から $\mathcal{W}$ 上の複素計量 g が
$$g(u,u') = h(u+u') - h(u) - h(u')$$
と定まるが, この定め方から計量 g は, 各 $z \in C_x$ に対応する曲面 $\mathcal{S}_z$ の接平面 $T_x\mathcal{S}_z$ をヌル平面とするような複素計量になっている. なお, $\mathcal{O}(2)$ の正則切断 $az_0^2 + 2bz_0z_1 + cz_1^2$ の表示には定数倍の自由度があるため, 計量 g の定め方には関数倍の自由度が残る. したがって $\mathcal{W}$ には共形構造 $[g]$ が一意に定まることになる.

定義 3.3. (アインシュタイン・ワイル空間)

$(W,[g])$ を n 次元複素共形多様体, D を W 上の捩れなしアフィン接続, ${R^D}_{ij}$ を D に関するリッチテンソルとする. このとき, 以下を満たすような W を n 次元**アインシュタイン・ワイル空間** (n-dimensional Einstein-Weyl space) という:

(1) W 上のある 1-形式 $\omega \in \Omega^1(W)$ が存在して次を満たす:

$$Dg = \omega \otimes g.$$

ただし, ω はリスケーリング

$$g \longmapsto \Omega^2 g$$

の下で次の変換則を満たすとする:

$$\omega_i \longmapsto \omega_i + 2\partial_i \log \Omega,$$

(2) W 上のある関数 Λ が存在して次を満たす:

$${R^D}_{(ij)} = \Lambda g_{ij}.$$

3 次元の場合のアインシュタイン・ワイル構造に関しては, ミニツイスター空間 $\mathcal{MT}$ とそれに対応する $\mathcal{W}$ の間で以下の結果が知られており, ミニツイスター空間の構造は $\mathcal{W}$ 上のアインシュタイン・ワイル構造を与えることが分かる.

定理 3.4. (ヒッチン [33])

$\mathcal{MT}$ をミニツイスター空間とし, $\mathcal{W}$ をミニツイスター直線のパラメータ空間とする. このとき, 以下の条件を満たすような $\mathcal{W}$ 上のアインシュタイン・ワイル構造が一意に存在する:

(1) $\mathcal{W}$ のヌルでない測地線 Γ に対し, ミニツイスター直線の族 $\{C_x\}_{x\in\Gamma}$ は $\mathcal{MT}$ 上のある 2 点を通るようなミニツイスター直線の族となる,

(2) $\mathcal{W}$ のヌル測地線 Γ に対し, ミニツイスター直線の族 $\{C_x\}_{x\in\Gamma}$ は $\mathcal{MT}$ 上

のある 1 点を通るようなミニツイスター直線の族となる.

以上のことから, ミニツイスター空間 $\mathcal{MT}$ とアインシュタイン・ワイル空間 $\mathcal{W}$ の対応は以下のようにまとめることができる.

定理 3.5. (ミニツイスター対応)

ミニツイスター空間 $\mathcal{MT}$ と複素多様体 $\mathcal{W}$ の間のダブルファイブレーション

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Y} \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \mathcal{W} & & \mathcal{MT} \end{tikzcd}$$

に関して, 各幾何構造は以下のように対応する:

アインシュタイン・ワイル空間	$(\mathcal{W},[g])$	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{MT}$	ミニツイスター空間
点	x		C_x	ミニツイスター直線
ヌル曲面	$\mathcal{S}_z$		z	点
接空間	$T_x\mathcal{W}$		$H^0(C_x,N_x)$	法束の正則切断

3.2　複素ミンコフスキー空間上のミニツイスター理論

ミニツイスター空間のよく知られている具体例には, リーマン球面の接束の全空間と 2 つのリーマン球面の直積空間の 2 つがある. ここでは $\mathbb{PT}$ と $\mathbb{CM}$ のツイスター対応のリダクションとして, リーマン球面の接束と 3 次元複素ミンコフスキー空間の間のミニツイスター対応を構成し, 後半でそのリアルスライスとして 3 次元ユークリッド空間を取った場合を扱うことにする.

$\mathbb{CM}$ の座標を

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}^{0\dot{0}} & \widetilde{x}^{0\dot{1}} \\ \widetilde{x}^{1\dot{0}} & \widetilde{x}^{1\dot{1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{pmatrix}$$

とし, τ を x^2 座標方向のベクトルとする:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau^{0\dot{0}} & \tau^{0\dot{1}} \\ \tau^{1\dot{0}} & \tau^{1\dot{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\widetilde{x}$ は τ を用いて

$$\widetilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 \\ x^1 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} + \frac{ix^2}{\sqrt{2}} \tau$$

と分離できるから, τ 方向を同一視することによって, $\mathbb{CM}_3$ の座標は

$$x = \begin{pmatrix} x^{\dot{0}\dot{0}} & x^{\dot{0}\dot{1}} \\ x^{\dot{1}\dot{0}} & x^{\dot{1}\dot{1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 \\ x^1 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

と与えられる. スピノールとして表示すれば

$$x^{\dot{A}\dot{B}} = \varepsilon_{AB} \widetilde{x}^{A\dot{A}} \tau^{B\dot{B}} - \frac{ix^2}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} = \varepsilon_{AB} \widetilde{x}^{A(\dot{A}} \tau^{B\dot{B})} = \widetilde{x}_A{}^{(\dot{A}} \tau^{A\dot{B})}$$

である. $\mathbb{CM}_3$ の計量 g については 4 次元の場合同様, 行列式で与えることができる:

$$\det(x) = \frac{1}{2}\{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^3)^2\}.$$

とくに, 座標 $x^{\dot{A}\dot{B}}$ は対称であるから, 次の同値な条件を得る.

命題 3.6.

0 でない $x \in \mathbb{CM}_3$ について, 以下は同値である:

(1) x がヌルベクトルである,

(2) $\det(x) = 0$,

(3) ある $\pi \in V_R$ を用いて $x = \pi \otimes \pi$ と表せる.

τ 方向の任意の平行移動

$$\widetilde{x}^{A\dot{A}} \longmapsto \widetilde{x}^{A\dot{A}} + \lambda \tau^{A\dot{A}} \ (\lambda \in \mathbb{C})$$

は $\mathbb{PT}$ 上の変換

$$\begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \omega^0 + \lambda \tau^{0\dot{A}} \pi_{\dot{A}} \\ \omega^1 + \lambda \tau^{1\dot{A}} \pi_{\dot{A}} \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^0 - \lambda \pi_{\dot{1}} \\ \omega^1 + \lambda \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix}$$

に対応する. したがって, $\mathbb{PT}$ から得られるミニツイスター空間 $\mathbb{MT}$ は, $\mathbb{PT}$ をこの変換による軌跡で割った空間として与えられる. とくに λ として

$$\lambda = \frac{\omega^0}{\pi_{\dot{1}}}$$

を取れば, 開集合 $\mathcal{U}_+$ において

$$\begin{bmatrix} \omega^0 - \lambda \pi_{\dot{1}} \\ \omega^1 + \lambda \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega^0}{\pi_{\dot{1}}} - \lambda \\ \frac{\omega^1}{\pi_{\dot{1}}} + \lambda \frac{\pi_{\dot{0}}}{\pi_{\dot{1}}} \\ \frac{\pi_{\dot{0}}}{\pi_{\dot{1}}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega^0 \pi_{\dot{0}} + \omega^1 \pi_{\dot{1}}}{(\pi_{\dot{1}})^2} \\ \frac{\pi_{\dot{0}}}{\pi_{\dot{1}}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表される. 一方で λ として

$$\lambda = -\frac{\omega^1}{\pi_{\dot{0}}}$$

を取れば, $\mathcal{U}_-$ において

$$\begin{bmatrix} \omega^0 - \lambda \pi_{\dot{1}} \\ \omega^1 + \lambda \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega^0}{\pi_{\dot{0}}} - \lambda \frac{\pi_{\dot{1}}}{\pi_{\dot{0}}} \\ \frac{\omega^1}{\pi_{\dot{0}}} + \lambda \\ 1 \\ \frac{\pi_{\dot{1}}}{\pi_{\dot{0}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega^0 \pi_{\dot{0}} + \omega^1 \pi_{\dot{1}}}{(\pi_{\dot{0}})^2} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\pi_{\dot{1}}}{\pi_{\dot{0}}} \end{bmatrix}$$

と表される. そこで, ω_+, ω_- を

$$\omega_+ = \frac{\omega^0 \pi_{\dot{0}} + \omega^1 \pi_{\dot{1}}}{(\pi_{\dot{1}})^2}, \ \omega_- = \frac{\omega^0 \pi_{\dot{0}} + \omega^1 \pi_{\dot{1}}}{(\pi_{\dot{0}})^2}$$

で定めると, ω_+ と ω_- は

$$\omega_+ = \left(\frac{\pi_{\dot{0}}}{\pi_{\dot{1}}} \right)^2 \omega_- = (\pi_+)^2 \omega_-$$

を満たす. したがって, τ に対応する変換によって与えられるミニツイスター空間 $\mathbb{MT}$ は正則ベクトル束 $\mathcal{O}(2)$ の全空間, すなわち $\mathbb{CP}^1$ の接束の全空間である:

$$\mathbb{MT} = T\mathbb{CP}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} \omega \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \oplus V_R^* \ \middle| \ \begin{pmatrix} \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Big/ \sim,$$

$$\begin{pmatrix}\omega\\ \pi_{\dot{0}}\\ \pi_{\dot{1}}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}c^2\omega\\ c\pi_{\dot{0}}\\ c\pi_{\dot{1}}\end{pmatrix}\ (c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}).$$

とくに, $\mathbb{MT}$ の各点は $\mathbb{PT}$ から

$$\begin{bmatrix}\omega^0\\ \omega^1\\ \pi_{\dot{0}}\\ \pi_{\dot{1}}\end{bmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix}\omega\\ \pi_{\dot{0}}\\ \pi_{\dot{1}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega^0\pi_{\dot{0}}+\omega^1\pi_{\dot{1}}\\ \pi_{\dot{0}}\\ \pi_{\dot{1}}\end{bmatrix}$$

と与えられる. ツイスター対応の関係式より, ミニツイスター対応の関係式は

$$\begin{aligned}\omega=\omega^0\pi_{\dot{0}}+\omega^1\pi_{\dot{1}}&=\widetilde{x}^{0\dot{A}}\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{0}}+\widetilde{x}^{1\dot{A}}\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{1}}\\ &=\left(\pi_{\dot{0}},\pi_{\dot{1}}\right)\begin{pmatrix}\widetilde{x}^{0\dot{0}}&\widetilde{x}^{0\dot{1}}\\ \widetilde{x}^{1\dot{0}}&\widetilde{x}^{1\dot{1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_{\dot{0}}\\ \pi_{\dot{1}}\end{pmatrix}\\ &=\left(\pi_{\dot{0}},\pi_{\dot{1}}\right)\left\{\begin{pmatrix}x^{\dot{0}\dot{0}}&x^{\dot{0}\dot{1}}\\ x^{\dot{1}\dot{0}}&x^{\dot{1}\dot{1}}\end{pmatrix}+\frac{ix^2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-1\\ 1&0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\pi_{\dot{0}}\\ \pi_{\dot{1}}\end{pmatrix}\\ &=\left(\pi_{\dot{0}},\pi_{\dot{1}}\right)\begin{pmatrix}x^{\dot{0}\dot{0}}&x^{\dot{0}\dot{1}}\\ x^{\dot{1}\dot{0}}&x^{\dot{1}\dot{1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_{\dot{0}}\\ \pi_{\dot{1}}\end{pmatrix}=x^{\dot{A}\dot{B}}\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}}\end{aligned}$$

となるから, $\mathbb{CM}_3$ と $\mathbb{MT}$ の間のダブルファイブレーションは次のように与えられる:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{CM}_3\times\mathbb{CP}^1 \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \mathbb{CM}_3=\mathbb{CM}/\tau & & \mathbb{MT}=T\mathbb{CP}^1\end{tikzcd}$$

$$\mu(x,[\pi])=x,\ \nu(x,[\pi])=\begin{bmatrix}x^{\dot{A}\dot{B}}\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}}\\ \pi_{\dot{0}}\\ \pi_{\dot{1}}\end{bmatrix}.$$

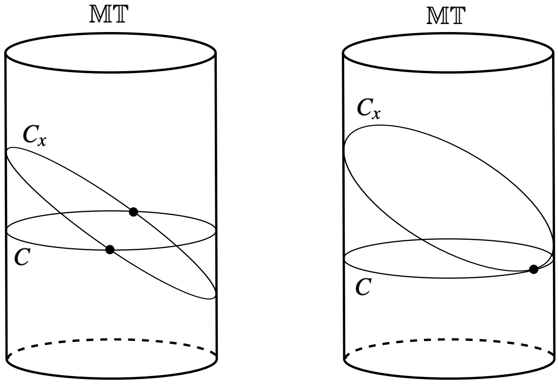


図 8　$\mathbb{MT}$ 上のミニツイスター直線の変形

命題 3.7.

$\mathbb{CM}_3$ 上の異なる 2 点 x, y に関して以下は同値である:

(1)　x, y に対応するミニツイスター直線 C_x, C_y がある 1 点で接する,

(2)　x と y の差 $(x-y)$ がヌルである.

証明　(1) $\Rightarrow$ (2)

C_x と C_y の接点を

$$z = \begin{bmatrix} \omega \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \in C_x \cap C_y$$

とすると, z は関係式

$$\omega = x^{\dot{A}\dot{B}} \pi_{\dot{A}} \pi_{\dot{B}} = y^{\dot{A}\dot{B}} \pi_{\dot{A}} \pi_{\dot{B}}$$

を満たすから, $(x^{\dot{A}\dot{B}} - y^{\dot{A}\dot{B}})\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}} = 0$ である. とくにいま, C_x と C_y は 1 点で接するから判別式は

$$(x^{\dot{0}\dot{0}} - y^{\dot{0}\dot{0}})(x^{\dot{1}\dot{1}} - y^{\dot{1}\dot{1}}) - (x^{\dot{0}\dot{1}} - y^{\dot{0}\dot{1}})^2 = \det(x-y) = 0$$

である. したがって $(x-y)$ はヌルベクトルである.

(2) $\Rightarrow$ (1)

x と y の差 $(x-y)$ がヌルであるとすると, $(x-y)$ はある $\pi \in V_R$ を用いて

$$x^{\dot{A}\dot{B}} - y^{\dot{A}\dot{B}} = \pi^{\dot{A}}\pi^{\dot{B}}$$

と表される. $\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}}$ との縮約を取ると, $\pi^{\dot{A}}\pi_{\dot{A}} = 0$ より

$$(x^{\dot{A}\dot{B}} - y^{\dot{A}\dot{B}})\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}} = \pi^{\dot{A}}\pi^{\dot{B}}\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}} = 0$$

となる. したがって

$$x^{\dot{A}\dot{B}}\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}} = y^{\dot{A}\dot{B}}\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}}$$

であるから, $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ である.

また, C_x と C_y が 2 点で交わるとすると π とは別に

$$(x^{\dot{A}\dot{B}} - y^{\dot{A}\dot{B}})\pi'_{\dot{A}}\pi'_{\dot{B}} = \pi^{\dot{A}}\pi^{\dot{B}}\pi'_{\dot{A}}\pi'_{\dot{B}} = 0$$

を満たすような π' が存在することになるが, $\pi^{\dot{A}}\pi'_{\dot{A}} = 0$ より $\pi'_{\dot{A}}$ は $\pi_{\dot{A}}$ の複素数倍となるから

$$\begin{bmatrix} x^{\dot{A}\dot{B}}\pi'_{\dot{A}}\pi'_{\dot{B}} \\ \pi'_{\dot{0}} \\ \pi'_{\dot{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{\dot{A}\dot{B}}\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}} \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y^{\dot{A}\dot{B}}\pi'_{\dot{A}}\pi'_{\dot{B}} \\ \pi'_{\dot{0}} \\ \pi'_{\dot{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{\dot{A}\dot{B}}\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}} \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix}$$

である. したがって, C_x と C_y は 1 点で接する. □

ミニツイスター直線 C_{x_0} 上の任意の点 z に対し, 関係式 $\omega = x^{\dot{A}\dot{B}}\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}}$ を満たすような $x \in \mathbb{CM}_3$ は, $n^{\dot{A}\dot{B}}\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}} = 0$ を満たす $n \in \mathbb{CM}_3$ を用いて

$$x^{\dot{A}\dot{B}} = x_0^{\dot{A}\dot{B}} + n^{\dot{A}\dot{B}}$$

と表示できる. とくに, $\mathbb{CM}_3$ における $\pi \otimes \pi$ の直交補空間は 2 次元であるから, n は任意の複素数パラメータ λ, λ' を用いて

$$n^{\dot{A}\dot{B}} = \lambda\pi^{\dot{A}}\pi^{\dot{B}} + \lambda'\kappa^{\dot{A}\dot{B}}$$

と分解できる. ただし, κ は $\pi \otimes \pi$ に垂直な x^1-x^3 平面上のベクトルである:

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa^{\dot{0}\dot{0}} & \kappa^{\dot{0}\dot{1}} \\ \kappa^{\dot{1}\dot{0}} & \kappa^{\dot{1}\dot{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi^{\dot{0}}\pi^{\dot{1}} & (\pi^{\dot{0}})^2 - (\pi^{\dot{1}})^2 \\ (\pi^{\dot{0}})^2 - (\pi^{\dot{1}})^2 & 2\pi^{\dot{0}}\pi^{\dot{1}} \end{pmatrix}.$$

したがって, 関係式 $\omega = x^{\dot{A}\dot{B}}\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}}$ を満たすような x は

$$x^{\dot{A}\dot{B}} = x_0^{\dot{A}\dot{B}} + \lambda\pi^{\dot{A}}\pi^{\dot{B}} + \lambda'\kappa^{\dot{A}\dot{B}}$$

と表せる. また, このような x は任意のパラメータ $\xi^{\dot{0}}, \xi^{\dot{1}}$ を用いて

$$x^{\dot{A}\dot{B}} = x_0^{\dot{A}\dot{B}} + \xi^{(\dot{A}}\pi^{\dot{B})}$$

と表示することもできるから, z を通るようなミニツイスター直線の全体はヌル平面

$$\mathcal{S}_{[\pi]} := \{\, \xi\otimes\pi + \pi\otimes\xi \in \mathbb{CM}_3 \mid \xi \in V_R \,\} \cong \mathbb{C}^2$$

を x_0 方向に平行移動させた空間に対応する.

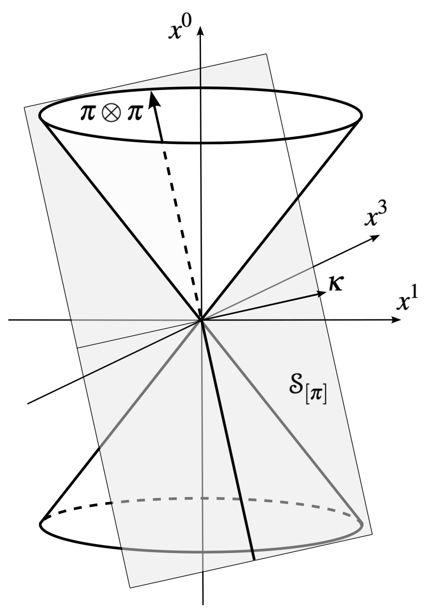


図 9　ヌル平面 $\mathcal{S}_{[\pi]}$ は $\pi\otimes\pi$ 方向にのみヌルである

以上までの内容から, ミニツイスター空間 $\mathbb{MT}$ と 3 次元複素ミンコフスキー空間 $\mathbb{CM}_3$ の対応は次のようにまとめることができる.

定理 3.8. (ミニツイスター対応)

ミニツイスター空間 $\mathbb{MT}$ と 3 次元複素ミンコフスキー空間 $\mathbb{CM}_3$ の間のダブルファイブレーション

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{CM}_3 \times \mathbb{CP}^1 \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \mathbb{CM}_3 & & \mathbb{MT} \end{tikzcd}$$

に関して, 各幾何構造は以下のように対応する:

3 次元複素ミンコフスキー空間				ミニツイスター空間
	$\mathbb{CM}_3$	$\longleftrightarrow$		$\mathbb{MT} = T\mathbb{CP}^1$
点	x		C_x	ミニツイスター直線
ヌル平面	$\mathcal{S}_{[\pi]}$		z	点

次に, $\mathbb{CM}_3$ のリアルスライスを取った場合の対応を考える. $\mathbb{CM}_3$ 上の実構造 $\sigma\colon \mathbb{CM}_3 \to \mathbb{CM}_3$ を

$$\sigma(x) = \sigma\begin{pmatrix} x^{\dot{0}\dot{0}} & x^{\dot{0}\dot{1}} \\ x^{\dot{1}\dot{0}} & x^{\dot{1}\dot{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x^{\dot{1}\dot{1}}} & -\overline{x^{\dot{0}\dot{1}}} \\ -\overline{x^{\dot{1}\dot{0}}} & \overline{x^{\dot{0}\dot{0}}} \end{pmatrix} = \varepsilon\bar{x}\varepsilon^{-1}$$

で定めると, σ による $\mathbb{CM}_3$ のリアルスライスは 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ である.

$\mathbb{MT}$ に任意の点

$$z = \begin{bmatrix} \omega \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{MT}$$

を取り, $x_0 \in \mathbb{E}^3$ を次で定める:

$$x_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2|\pi|^2\alpha}\begin{pmatrix} 2(\omega\overline{\pi}_0\overline{\pi}_1 + \overline{\omega}\pi_{\dot 0}\pi_{\dot 1}) & \omega\overline{\pi}^{2+} - \overline{\omega}\pi^{2+} \\ \omega\overline{\pi}^{2+} - \overline{\omega}\pi^{2+} & 2(\omega\overline{\pi}_0\overline{\pi}_1 + \overline{\omega}\pi_{\dot 0}\pi_{\dot 1}) \end{pmatrix} & (\alpha \neq 0) \\ \dfrac{1}{2\pi^{2-}\overline{\pi}^{2-}}\begin{pmatrix} 2\omega\overline{\pi}^{2-} & -\Upsilon(\omega\overline{\pi}^{2-} + \overline{\omega}\pi^{2-}) \\ -\Upsilon(\omega\overline{\pi}^{2-} + \overline{\omega}\pi^{2-}) & 2\overline{\omega}\pi^{2-} \end{pmatrix} & (\alpha = 0) \\ \dfrac{1}{2|\pi|^2\beta}\begin{pmatrix} -2(\omega\overline{\pi}_0\overline{\pi}_1 + \overline{\omega}\pi_{\dot 0}\pi_{\dot 1}) & \omega\overline{\pi}^{2-} + \overline{\omega}\pi^{2-} \\ \omega\overline{\pi}^{2-} + \overline{\omega}\pi^{2-} & 2(\omega\overline{\pi}_0\overline{\pi}_1 + \overline{\omega}\pi_{\dot 0}\pi_{\dot 1}) \end{pmatrix} & (\beta \neq 0) \\ \dfrac{1}{2\pi^{2+}\overline{\pi}^{2+}}\begin{pmatrix} 2\omega\overline{\pi}^{2+} & \Upsilon(\omega\overline{\pi}^{2+} - \overline{\omega}\pi^{2+}) \\ \Upsilon(\omega\overline{\pi}^{2+} - \overline{\omega}\pi^{2+}) & 2\overline{\omega}\pi^{2+} \end{pmatrix} & (\beta = 0). \end{cases}$$

ただし

$$\begin{gathered} |\pi|^2 = |\pi_{\dot 0}|^2 + |\pi_{\dot 1}|^2, \\ \pi^{2+} = (\pi_{\dot 0})^2 + (\pi_{\dot 1})^2,\ \overline{\pi}^{2+} = (\overline{\pi}_0)^2 + (\overline{\pi}_1)^2, \\ \pi^{2-} = (\pi_{\dot 0})^2 - (\pi_{\dot 1})^2,\ \overline{\pi}^{2-} = (\overline{\pi}_0)^2 - (\overline{\pi}_1)^2, \\ \alpha = \overline{\pi}_0\pi_{\dot 1} + \overline{\pi}_1\pi_{\dot 0},\ \beta = \overline{\pi}_0\pi_{\dot 1} - \overline{\pi}_1\pi_{\dot 0}, \\ \Upsilon = \begin{cases} \dfrac{\pi_{\dot 0}}{\pi_{\dot 1}} & (\pi_{\dot 1} \neq 0) \\ \dfrac{\pi_{\dot 1}}{\pi_{\dot 0}} & (\pi_{\dot 0} \neq 0) \end{cases} \end{gathered}$$

である. この x_0 は関係式 $\omega = x_0^{\dot A\dot B}\pi_{\dot A}\pi_{\dot B}$ を満たすから, $\mathbb{MT}$ の各点は必ずある $x_0 \in \mathbb{E}^3$ に対応するミニツイスター直線 C_{x_0} に含まれることが分かる. したがって, $\mathbb{CM}_3$ と $\mathbb{MT}$ のダブルファイブレーションにおいて $\mathbb{CM}_3$ を $\mathbb{E}^3$ に制限することによって, $\mathbb{E}^3$ と $\mathbb{MT}$ の間のダブルファイブレーションが得られる:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{E}^3 \times \mathbb{CP}^1 & \\ {}^{\mu}\swarrow & & \searrow^{\nu} \\ \mathbb{E}^3 & & \mathbb{MT} \end{array}$$

とくに, $\mathbb{MT}$ の任意の点 z に対応するヌル平面と $\mathbb{E}^3$ の共通部分

$$\ell_z := \mu(\nu^{-1}(z)) \cap \mathbb{E}^3$$

は, $\mathbb{CP}^1$ 上の各点を対蹠点へ移す操作

$$\widehat{\ }: \mathbb{P}(V_R) \to \mathbb{P}(V_R)\ ;\ \begin{bmatrix} \pi^{\dot 0} \\ \pi^{\dot 1} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \widehat{\pi}^{\dot 0} \\ \widehat{\pi}^{\dot 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{\pi}^1 \\ \overline{\pi}^0 \end{bmatrix}$$

を用いて

$$x^{\dot{A}\dot{B}} = x_0^{\dot{A}\dot{B}} + ir\widehat{\pi}^{(\dot{A}}\pi^{\dot{B})} \ (r \in \mathbb{R})$$

と表せるから, ℓ_z は $\mathbb{E}^3$ 内の直線である. したがって, $\mathbb{MT}$ は $\mathbb{E}^3$ の直線をパラメトライズする空間となっている. 実際, $\mathbb{E}^3$ 内の任意の直線 ℓ は, ℓ の進行方向の単位接ベクトル $\boldsymbol{v}$ と, ℓ 上の原点に最も近い点 p によって指定できるから, $\mathbb{CP}^1$ と S^2 の適当な同一視により

$$\mathbb{MT} = TS^2 = \left\{ (p, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^3 \times S^2 \;\middle|\; p \cdot \boldsymbol{v} = 0 \right\}$$

は $\mathbb{E}^3$ 内の直線全体のなす空間そのものであることが分かる.

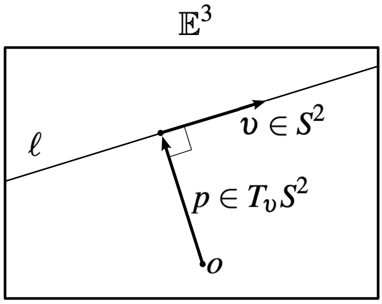


図 10　3 次元ユークリッド空間上の直線

定理 3.9. (ミニツイスター対応)

ミニツイスター空間 $\mathbb{MT}$ と 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ の間のダブルファイブレーション

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{E}^3 \times \mathbb{CP}^1 \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \mathbb{E}^3 & & \mathbb{MT} \end{tikzcd}$$

に関して, 各幾何構造は以下のように対応する:

3 次元ユークリッド空間			ミニツイスター空間	
	$\mathbb{E}^3$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{MT} = T\mathbb{CP}^1$	
点	x		C_x	ミニツイスター直線
直線	ℓ_z		z	点

3.3 複素双曲空間上のミニツイスター理論

ミニツイスター対応の 2 つ目の具体例は, 3 次元複素双曲空間と 2 つのリーマン球面の直積空間の対応である. 3.2 節同様, $\mathbb{CM}$ と $\mathbb{PT}$ のツイスター対応のリダクションとしてミニツイスター対応を構成し, 後半でリアルスライスを取った場合の対応も扱うことにする.

はじめに, $\mathbb{CP}^3$ を $\mathbb{CM}$ の射影化

$$\mathbb{CP}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{CM}) = \left\{ \begin{pmatrix} x^{0\dot{0}} & x^{0\dot{1}} \\ x^{1\dot{0}} & x^{1\dot{1}} \end{pmatrix} \in \mathbb{CM} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x^{0\dot{0}} & x^{0\dot{1}} \\ x^{1\dot{0}} & x^{1\dot{1}} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Big/ \sim \,,$$

$$\begin{pmatrix} x^{0\dot{0}} & x^{0\dot{1}} \\ x^{1\dot{0}} & x^{1\dot{1}} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda x^{0\dot{0}} & \lambda x^{0\dot{1}} \\ \lambda x^{1\dot{0}} & \lambda x^{1\dot{1}} \end{pmatrix} \; (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

とみなし, $\mathbb{CP}^3$ 内の空間 Q を以下で定める:

$$\mathrm{Q} := \left\{ [x] \in \mathbb{CP}^3 \;\middle|\; \det(x) = 0 \right\}.$$

そして, $\mathbb{CP}^3$ から Q を除いた部分を

$$\mathbb{CH}_3 := \mathbb{CP}^3 \setminus \mathrm{Q} = \left\{ [x] \in \mathbb{CP}^3 \;\middle|\; \det(x) \neq 0 \right\}$$

とおく.

定義 3.10. (複素双曲空間)

$\mathbb{CP}^3$ 内の $\mathbb{CH}_3$ を, 3 次元複素双曲空間 (3-dimensional complex hyperbolic space) という. ただし, $\mathbb{CH}_3$ には $\mathbb{CM}$ から誘導される複素双曲計量が定まっているものとする.

$\mathbb{CM}$ 上の任意のスカラー変換

$$x \longmapsto \lambda x$$

は, $\mathbb{PT}$ 上の変換

$$\begin{bmatrix} x^{0\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ x^{1\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \lambda x^{0\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ \lambda x^{1\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix}$$

に対応するから, この変換によって $\mathbb{PT}$ から得られるミニツイスター空間は

$$\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 = \mathbb{P}(V_L) \times \mathbb{P}(V_R^*)$$

である. とくに, $\rho\colon \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^3$ を

$$\rho\left(\begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \omega^0\pi^{\dot{0}} & \omega^0\pi^{\dot{1}} \\ \omega^1\pi^{\dot{0}} & \omega^1\pi^{\dot{1}} \end{bmatrix}$$

によって与えると, ρ は $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ の埋め込みであり, その像は Q に一致する. したがって, $\mathbb{CM}$ 上のスカラー変換から $\mathbb{CH}_3$ と $\mathrm{Q} \cong \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ の間のダブルファイブレーションを得る:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{CH}_3 \times \mathbb{CP}^1 \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\
\mathbb{CH}_3 = \mathbb{CP}^3 \setminus \mathrm{Q} & & \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \cong \mathrm{Q}
\end{tikzcd}$$

$$\mu(x, [\pi]) = x,\ \nu(x, [\pi]) = \left(\begin{bmatrix} x^{0\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ x^{1\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \right).$$

命題 **3.11.**

$\mathbb{CH}_3$ 上の異なる 2 点 $[x], [y]$ に関して以下は同値である:

(1) $[x], [y]$ に対応するミニツイスター直線 $C_{[x]}, C_{[y]}$ がある 1 点で接する,

(2) x と y の内積について次が成り立つ:

$$(x \cdot y)^2 = (x \cdot x)(y \cdot y).$$

証明 $(1) \Rightarrow (2)$

$C_{[x]}$ と $C_{[y]}$ の接点を

$$z = \left(\begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \right) \in C_{[x]} \cap C_{[y]}$$

とすると, z は関係式

$$\begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{0\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ x^{1\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{0\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ y^{1\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \end{bmatrix}$$

を満たすから, ω は 0 でない複素数 λ, λ' を用いて

$$\omega^A = \lambda x^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}} = \lambda' y^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}}$$

と表される. $\omega^A\omega_A$ を計算すると

$$\omega^A\omega_A = \lambda\lambda'(\varepsilon_{AB}x^{A\dot{A}}y^{B\dot{B}})\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}}$$

となるが, $\omega^A\omega_A = 0$ であるから

$$(\varepsilon_{AB}x^{A\dot{A}}y^{B\dot{B}})\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}} = 0$$

である. とくにいま, $C_{[x]}$ と $C_{[y]}$ は 1 点で接するから, π に関するこの 2 次方程式は解をただ一つ持つ. したがって, 判別式は

$$(\varepsilon_{AB}x^{A\dot{0}}y^{B\dot{1}} + \varepsilon_{AB}x^{A\dot{1}}y^{B\dot{0}})^2 - 4(\varepsilon_{AB}x^{A\dot{0}}y^{B\dot{0}})(\varepsilon_{AB}x^{A\dot{1}}y^{B\dot{1}}) = (x \cdot y)^2 - (x \cdot x)(y \cdot y) = 0$$

であるから, (2) の主張を得る:

$$(x \cdot y)^2 = (x \cdot x)(y \cdot y).$$

$(2) \Rightarrow (1)$

$(x \cdot y)^2 = (x \cdot x)(y \cdot y)$ であるとすると, 2 次方程式

$$(\varepsilon_{AB}x^{A\dot{A}}y^{B\dot{B}})\pi_{\dot{A}}\pi_{\dot{B}} = \varepsilon_{AB}(x^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}})(y^{B\dot{B}}\pi_{\dot{B}}) = 0$$

の解 π は一意に定まり, $x^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}}$ は $y^{B\dot{B}}\pi_{\dot{B}}$ の複素定数倍となる. したがって

$$\begin{bmatrix} x^{0\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ x^{1\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{0\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ y^{1\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \end{bmatrix}$$

である. □

ミニツイスター直線 $C_{[x]}, C_{[y]}$ の交点を

$$z = \left(\begin{bmatrix} x^{0\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ x^{1\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} y^{0\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \\ y^{1\dot{A}}\pi_{\dot{A}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \right) \in C_{[x]} \cap C_{[y]}$$

とすると, 0 でない複素数 λ を用いて

$$x^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}} = \lambda y^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}}$$

と表せるから, $[x]$ と $[y]$ の関係はある $\xi \in V_L$ を用いて

$$x^{A\dot{A}} = \lambda y^{A\dot{A}} + \xi^A \pi^{\dot{A}}$$

と与えられる.

したがって, ミニツイスター直線 $C_{[x_0]}$ 上の任意の点 z に対応するヌル曲面 $\mathbb{S}_z$ は

$$\mathbb{S}_z = \{\, [x_0 + \xi \otimes \pi] \in \mathbb{CH}_3 \mid \xi \in V_L \,\}$$

と表される.

定理 3.12. (ミニツイスター対応)

ミニツイスター空間 Q と 3 次元複素双曲空間 $\mathbb{CH}_3$ の間のダブルファイブレーション

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{CH}_3 \times \mathbb{CP}^1 \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \mathbb{CH}_3 & & \mathrm{Q} \end{tikzcd}$$

に関して, 各幾何構造は以下のように対応する:

3 次元複素双曲空間				ミニツイスター空間
$\mathbb{CH}_3$		$\longleftrightarrow$		Q
点	$[x]$		$C_{[x]}$	ミニツイスター直線
ヌル曲面	$\mathbb{S}_z$		z	点

次に, $\mathbb{CH}_3$ のリアルスライスを取った場合の対応を考える. $\mathbb{CH}_3$ 上の実構造 $\sigma\colon \mathbb{CH}_3 \to \mathbb{CH}_3$ を

$$\sigma([x]) = \sigma\left(\begin{bmatrix} x^{0\dot{0}} & x^{0\dot{1}} \\ x^{1\dot{0}} & x^{1\dot{1}} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \overline{x}^{\dot{0}0} & \overline{x}^{\dot{1}0} \\ \overline{x}^{\dot{0}1} & \overline{x}^{\dot{1}1} \end{bmatrix} = [{}^{\mathrm{t}}\overline{x}]$$

で定めると, σ による $\mathbb{CH}_3$ のリアルスライスはミンコフスキー空間の光円錐を除いて射影化した空間 $\mathbb{P}(\mathbb{M}\setminus \mathrm{Q})$ であり, この空間の対角成分の符号が一致する部分を

$$\mathbb{H}_3 := \left\{ \begin{bmatrix} x^{0\dot{0}} & x^{0\dot{1}} \\ x^{1\dot{0}} & x^{1\dot{1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{P}(\mathbb{M}\setminus \mathrm{Q}) \;\middle|\; x^{0\dot{0}}, x^{1\dot{1}} \neq 0,\ \frac{x^{1\dot{1}}}{x^{0\dot{0}}} > 0 \right\}$$

と表すことにする. この空間は以下の埋め込みにより 3 次元双曲空間の上半モデル $\mathbb{H}_+$ と同一視できる:

$$i_{\mathbb{H}_3}\colon \mathbb{H}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z > 0 \right\} \to \mathbb{H}_3\ ;\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & x - iy \\ x + iy & x^2 + y^2 + z^2 \end{bmatrix}.$$

さらに, 上半モデル $\mathbb{H}_+$ と単位円板モデル $\mathbb{D}_3$ の対応は

$$\phi\colon \mathbb{H}_+ \to \mathbb{D}_3\ ;\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2 + (z+1)^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix},$$

$$\phi^{-1}\colon \mathbb{D}_3 \to \mathbb{H}_+\ ;\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2 + (1 - u_3)^2} \begin{pmatrix} 2u_1 \\ 2u_2 \\ 1 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 \end{pmatrix}$$

によって与えられるから, $\mathbb{H}_3$ と $\mathbb{D}_3$ は

$$i_{\mathbb{D}_3}\colon \mathbb{D}_3 \to \mathbb{H}_3\ ;$$
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} u_1^2 + u_2^2 + (1 - u_3)^2 & 2(u_1 - iu_2) \\ 2(u_1 + iu_2) & u_1^2 + u_2^2 + (1 + u_3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|u|^2+1}{2} - u_3 & u_1 - iu_2 \\ u_1 + iu_2 & \frac{|u|^2+1}{2} + u_3 \end{bmatrix}$$

と対応する.

また, $\mathbb{CP}^1$ の $\mathbb{CP}^3$ への埋め込みをスピノールの種類ごとに

$$\rho_L\colon \mathbb{P}(V_L) \to \mathbb{CP}^3\ ;\ \begin{bmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \xi^0 \overline{\xi}^{\dot{0}} & \xi^0 \overline{\xi}^{\dot{1}} \\ \xi^1 \overline{\xi}^{\dot{0}} & \xi^1 \overline{\xi}^{\dot{1}} \end{bmatrix},$$

$$\rho_R\colon \mathbb{P}(V_R) \to \mathbb{CP}^3\,;\ \begin{bmatrix}\eta^{\dot 0}\\ \eta^{\dot 1}\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}\overline{\eta}^0\eta^{\dot 0} & \overline{\eta}^0\eta^{\dot 1}\\ \overline{\eta}^1\eta^{\dot 0} & \overline{\eta}^1\eta^{\dot 1}\end{bmatrix},$$

$$\rho_L^*\colon \mathbb{P}(V_L^*) \to \mathbb{CP}^3\,;\ \begin{bmatrix}\zeta_0\\ \zeta_1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}\zeta^0\overline{\zeta}^{\dot 0} & \zeta^0\overline{\zeta}^{\dot 1}\\ \zeta^1\overline{\zeta}^{\dot 0} & \zeta^1\overline{\zeta}^{\dot 1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\zeta_1\overline{\zeta}_{\dot 1} & -\zeta_1\overline{\zeta}_{\dot 0}\\ -\zeta_0\overline{\zeta}_{\dot 1} & \zeta_0\overline{\zeta}_{\dot 0}\end{bmatrix},$$

$$\rho_R^*\colon \mathbb{P}(V_R^*) \to \mathbb{CP}^3\,;\ \begin{bmatrix}\varsigma_{\dot 0}\\ \varsigma_{\dot 1}\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}\overline{\varsigma}^0\varsigma^{\dot 0} & \overline{\varsigma}^0\varsigma^{\dot 1}\\ \overline{\varsigma}^1\varsigma^{\dot 0} & \overline{\varsigma}^1\varsigma^{\dot 1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{\varsigma}_1\varsigma_{\dot 1} & -\overline{\varsigma}_1\varsigma_{\dot 0}\\ -\overline{\varsigma}_0\varsigma_{\dot 1} & \overline{\varsigma}_0\varsigma_{\dot 0}\end{bmatrix}$$

で定めると, 2 つの点

$$\begin{bmatrix}\pi_{\dot 0}\\ \pi_{\dot 1}\end{bmatrix} \in \mathbb{P}(V_R^*),\ \begin{bmatrix}\overline{\pi}^0\\ \overline{\pi}^1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{\pi_{\dot 1}}\\ -\overline{\pi_{\dot 0}}\end{bmatrix} \in \mathbb{P}(V_L)$$

は $\mathbb{CP}^3$ の同じ点に対応する:

$$\rho_R^*\left(\begin{bmatrix}\pi_{\dot 0}\\ \pi_{\dot 1}\end{bmatrix}\right) = \rho_L\left(\begin{bmatrix}\overline{\pi}^0\\ \overline{\pi}^1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\overline{\pi}^0\pi^{\dot 0} & \overline{\pi}^0\pi^{\dot 1}\\ \overline{\pi}^1\pi^{\dot 0} & \overline{\pi}^1\pi^{\dot 1}\end{bmatrix}.$$

したがって, $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$ の部分集合

$$\widetilde{\Delta} := \left\{\left(\begin{bmatrix}\omega^0\\ \omega^1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\pi_{\dot 0}\\ \pi_{\dot 1}\end{bmatrix}\right) \in \mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1 \;\middle|\; [\overline{\omega},\pi] = \overline{\omega}^{\dot A}\pi_{\dot A} = 0\right\}$$

は実質的に $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$ の対角集合とみなすことができる. 実際, $\overline{\omega}^{\dot A}\pi_{\dot A} = 0$ より ω^A は π^A の複素数倍であるから, $\widetilde{\Delta}$ の各点は

$$\left(\begin{bmatrix}\omega^0\\ \omega^1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\pi_{\dot 0}\\ \pi_{\dot 1}\end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix}\overline{\pi}^0\\ \overline{\pi}^1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\pi_{\dot 0}\\ \pi_{\dot 1}\end{bmatrix}\right)$$

と表される. 以降の議論においては, ミニツイスター空間として $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$ から $\widetilde{\Delta}$ を除いた空間

$$\widetilde{\mathrm{Q}} := (\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1)\setminus\widetilde{\Delta} \cong \mathrm{Q}\setminus\mathbb{CP}^1$$

を考えることにする.

$\widetilde{\mathrm{Q}}$ 上の各点

$$z = \left(\begin{bmatrix}\omega^0\\ \omega^1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\pi_{\dot 0}\\ \pi_{\dot 1}\end{bmatrix}\right) \in \widetilde{\mathrm{Q}}$$

に対して, $[x] \in \mathbb{H}_3$ を任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ を用いて

$$x^{A\dot A} = \omega^A\overline{\omega}^{\dot A} + \lambda\overline{\pi}^A\pi^{\dot A}$$

と与えると, この $[x]$ は $[\omega]=[x\pi]$ を満たすから, $\nu\colon \mathbb{CH}_3\times\mathbb{CP}^1\to \mathrm{Q}$ を $\mathbb{H}_3\times\mathbb{CP}^1$ と $\widetilde{\mathrm{Q}}$ に制限しても ν は全射である. したがって, $\mathbb{H}_3$ と $\widetilde{\mathrm{Q}}$ の間のダブルファイブレーションを得る:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{H}_3\times\mathbb{CP}^1 \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \mathbb{H}_3 & & \widetilde{\mathrm{Q}} \end{tikzcd}$$

とくに, $\widetilde{\mathrm{Q}}$ の各点 z に対応する $\mathbb{CH}_3$ のヌル曲面 $\mathbb{S}_z$ と $\mathbb{H}_3$ の共通部分 Γ_z は

$$x^{A\dot{A}}=\omega^A\overline{\omega}^{\dot{A}}+\lambda\overline{\pi}^A\pi^{\dot{A}},$$

あるいは任意の $t\in\mathbb{R}$ を用いて

$$x^{A\dot{A}}=e^t\omega^A\overline{\omega}^{\dot{A}}+e^{-t}\overline{\pi}^A\pi^{\dot{A}}$$

と表される曲線である. この曲線 Γ_z は $\partial\mathbb{H}_3\cong\mathbb{CP}^1$ 上の $[\omega]$ と $[\pi]$ を結ぶような $\mathbb{H}_3$ 上の測地線である.

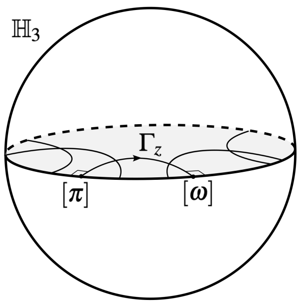


図 11　境界上の 2 点を結ぶ 3 次元双曲空間上の測地線

命題 3.13.

任意の $[x]\in\mathbb{H}_3$ に対し, $C_{[x]}$ 上の各 $z=([\omega],[\pi])$ に対応する測地線

$$\Gamma_z\colon\ \omega^A\overline{\omega}^{\dot{A}}+\lambda\overline{\pi}^A\pi^{\dot{A}}\ (\lambda\in\mathbb{R})$$

は, $\lambda=\det(x)$ のとき $[x]$ を通る.

証明　$[x]$ を $\mathbb{H}_3$ 上の任意の点とし, $z = ([\omega], [\pi])$ を $C_{[x]}$ 上の任意の点とする. z に対応する $\mathbb{H}_3$ 上の測地線 Γ_z のパラメータ λ として

$$\lambda = \det(x) = x^{0\dot{0}}x^{1\dot{1}} - x^{0\dot{1}}x^{1\dot{0}}$$

を取り, x がエルミート行列であることを用いて各成分ごとに具体的に計算すると

$$\begin{aligned}\omega^A\overline{\omega}^{\dot{A}} + \lambda\overline{\pi}^A\pi^{\dot{A}} &= (x^{A\dot{B}}\pi_{\dot{B}})(\overline{x}^{\dot{A}B}\overline{\pi}_B) + \det(x)\overline{\pi}^A\pi^{\dot{A}} \\ &= (x^{0\dot{0}}\overline{\pi}^1\pi^{\dot{1}} - x^{0\dot{1}}\overline{\pi}^1\pi^{\dot{0}} - x^{1\dot{0}}\overline{\pi}^0\pi^{\dot{1}} + x^{1\dot{1}}\overline{\pi}^0\pi^{\dot{0}})x^{A\dot{A}} \\ &= (x\cdot(\overline{\pi}\otimes\pi))x^{A\dot{A}}\end{aligned}$$

となる. したがって, $[\omega\otimes\overline{\omega} + \lambda(\overline{\pi}\otimes\pi)] = [x]$ である. □

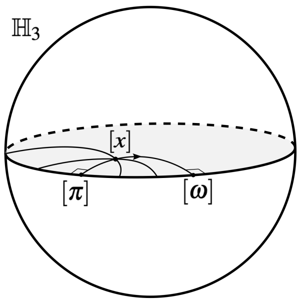


図 12　点 $[x]$ を通る 3 次元双曲空間上の測地線

定理 3.14. (ミニツイスター対応)

ミニツイスター空間 $\widetilde{\mathrm{Q}}$ と 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}_3$ の間のダブルファイブレーション

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{H}_3 \times \mathbb{CP}^1 & \\ \swarrow^{\mu} & & \searrow^{\nu} \\ \mathbb{H}_3 & & \widetilde{\mathrm{Q}} \end{array}$$

に関して, 各幾何構造は以下のように対応する:

3 次元双曲空間				ミニツイスター空間
$\mathbb{H}_3$		$\longleftrightarrow$		$\widetilde{\mathrm{Q}}$
点	$[x]$		$C_{[x]}$	ミニツイスター直線
測地線	Γ_z		z	点

4　球面上の測地線とミニツイスター対応

2 節で扱った 4 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{M}$ 上のツイスター対応は, ヌルツイスター空間と呼ばれる $\mathbb{M}$ 上のヌル測地線全体からなる空間との対応を与えるものであった. 加えて, 前節で扱った 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ 上のミニツイスター対応は $\mathbb{E}^3$ 上の直線全体からなる空間 $T\mathbb{CP}^1$ との対応, 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}_3$ 上のミニツイスター対応は $\mathbb{H}_3$ 上の測地線全体からなる空間 $\widetilde{\mathrm{Q}}$ との対応であった. このようなツイスター対応は, 多様体とそれに対応する測地線の空間を用意すれば, $\mathbb{M}$ や $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{H}_3$ 以外の対象, 例えば $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面 S^2 に対しても同じように考えられると予想できる. 実際, このアイデアは少なくとも S^2 に対しては上手くいく. そこで本節では, 前半に球面と球面上の測地線 (大円) の空間との対応を扱い, 後半でこの対応が $\mathbb{H}_3$ 上のミニツイスター対応から自然に現れることを見ていくことにする.

4.1　球面上のツイスター対応

S^2 上の向き付けられた測地線 C は, C の進行方向に対して右ねじ方向を向いている S^2 上のベクトル (赤道に対する北極方向のベクトル) と一対一に対応するから, S^2 上の測地線の空間は実質的に S^2 とみなすことができる.

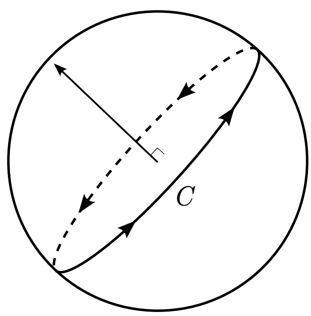


図 13　球面上の測地線とそれに垂直なベクトル

そこで, 通常の球面としての S^2 と大円の空間としての S^2 との対応を, ツイスター

対応を真似て以下のようなダブルファイブレーションの形で与えることにする:

$$\begin{tikzcd} & S^2 \times S_0^1 \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ S^2 & & S^2 \end{tikzcd}$$

ただし, S_0^1 は $\mathbb{R}^3$ の x-z 平面に埋め込んだ単位円周

$$S_0^1 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v_1^2 + v_3^2 = 1 \right\} \cong S^1$$

とし, μ, ν は以下で与えるものとする:

$$\mu(u, v) = u,$$

$$\nu(u, v) = R(u)v = \begin{cases} \begin{pmatrix} u_2 + \frac{u_3^2}{1+u_2} & u_1 & -\frac{u_1 u_3}{1+u_2} \\ -u_1 & u_2 & -u_3 \\ -\frac{u_1 u_3}{1+u_2} & u_3 & u_2 + \frac{u_1^2}{1+u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} & (u_2 \neq -1) \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} & (u_2 = -1). \end{cases}$$

この写像 ν は回転 $R(u)$ によって S_0^1 を u に垂直な平面に埋め込むような操作である.

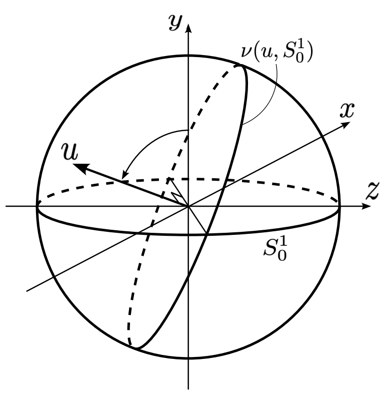


図 14　ν は S_0^1 を u に垂直な平面に埋め込む

したがって, 図式左側の S^2 の各点 u に対し $\nu(\mu^{-1}(u))$ は u に垂直な S^1 となる. この u に垂直な大円を C_u と表す. 逆に, w を図式右側の S^2 上の任意の点とすると

$$\nu^{-1}(w) = \left\{ (u, \upsilon) \in S^2 \times S^1_0 \;\middle|\; u \cdot w = 0,\ \upsilon = R(u)^{-1} w \right\}$$

であるから, $\mu(\nu^{-1}(w))$ は w に垂直な大円 C_w である.

定理 4.1. (点と大円の双対性)

S^2 と S^2 の間のダブルファイブレーション

$$\begin{tikzcd} & S^2 \times S^1_0 \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ S^2 & & S^2 \end{tikzcd}$$

に関して, 各幾何構造は以下のように対応する:

2 次元球面			2 次元球面	
S^2		$\longleftrightarrow$	S^2	
点	u		C_u	大円
大円	C_w		w	点

なお, S^1_0 は補助的に導入した x-z 平面上の単位円周であり, S^2 上の点と大円の対応は S^1_0 の取り方に依らない.

4.2 ミニツイスター対応のリダクション

3 次元双曲空間 $\mathbb{H}_3$ から中心を除いた空間を

$$\mathbb{H}_3' := \left\{ [x] \in \mathbb{H}_3 \;\middle|\; [x] \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

とする. これに対応して, ミニツイスター空間 $\widetilde{\mathrm{Q}} = (\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1) \setminus \widetilde{\Delta}$ から対角集合

$$\Delta = \left\{ \left(\begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \right) \in \widetilde{\mathrm{Q}} \;\middle|\; \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix} \right\}$$

を除いた空間を

$$\widetilde{\mathrm{Q}}' := \widetilde{\mathrm{Q}} \setminus \Delta$$

とする. ただし, ここで $\widetilde{\mathrm{Q}}$ から除いた Δ の各点は, $\mathbb{H}_3$ 上の中心を通るような直線に対応している. 実際, $\mathbb{CP}^1$ と S^2 の対応はスピノールの種類ごとに

$$\mathrm{o}_L \colon \mathbb{P}(V_L) \to S^2 \,;\ \begin{bmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{|\xi^0|^2 + |\xi^1|^2} \begin{pmatrix} \xi^0 \overline{\xi}^{\dot{1}} + \xi^1 \overline{\xi}^{\dot{0}} \\ i\left(\xi^0 \overline{\xi}^{\dot{1}} - \xi^1 \overline{\xi}^{\dot{0}}\right) \\ -|\xi^0|^2 + |\xi^1|^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{o}_R \colon \mathbb{P}(V_R) \to S^2 \,;\ \begin{bmatrix} \eta^{\dot{0}} \\ \eta^{\dot{1}} \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{|\eta^{\dot{0}}|^2 + |\eta^{\dot{1}}|^2} \begin{pmatrix} \overline{\eta}^0 \eta^{\dot{1}} + \overline{\eta}^1 \eta^{\dot{0}} \\ i\left(\overline{\eta}^0 \eta^{\dot{1}} - \overline{\eta}^1 \eta^{\dot{0}}\right) \\ -|\eta^{\dot{0}}|^2 + |\eta^{\dot{1}}|^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{o}_L^* \colon \mathbb{P}(V_L^*) \to S^2 \,;\ \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{|\zeta^0|^2 + |\zeta^1|^2} \begin{pmatrix} \zeta^0 \overline{\zeta}^{\dot{1}} + \zeta^1 \overline{\zeta}^{\dot{0}} \\ i\left(\zeta^0 \overline{\zeta}^{\dot{1}} - \zeta^1 \overline{\zeta}^{\dot{0}}\right) \\ -|\zeta^0|^2 + |\zeta^1|^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{o}_R^* \colon \mathbb{P}(V_R^*) \to S^2 \,;\ \begin{bmatrix} \varsigma_{\dot{0}} \\ \varsigma_{\dot{1}} \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{|\varsigma^{\dot{0}}|^2 + |\varsigma^{\dot{1}}|^2} \begin{pmatrix} \overline{\varsigma}^0 \varsigma^{\dot{1}} + \overline{\varsigma}^1 \varsigma^{\dot{0}} \\ i\left(\overline{\varsigma}^0 \varsigma^{\dot{1}} - \overline{\varsigma}^1 \varsigma^{\dot{0}}\right) \\ -|\varsigma^{\dot{0}}|^2 + |\varsigma^{\dot{1}}|^2 \end{pmatrix}$$

で与えられるから

$$\mathrm{o}_L\left(\begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{o}_L\left(\begin{bmatrix} \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix}\right) = -\mathrm{o}_R^*\left(\begin{bmatrix} \pi_{\dot{0}} \\ \pi_{\dot{1}} \end{bmatrix}\right)$$

より, Δ の各点は対蹠点どうしのペアである. したがって, $\widetilde{\mathrm{Q}}'$ の各点は S^2 上の対蹠点どうしでない異なる 2 点に対応する. とくに, S^2 上の対蹠点どうしでない異なる 2 点は S^2 上の大円を指定するから, $\widetilde{\mathrm{Q}}'$ から S^2 に対して次の写像が自然に定まる:

$$\Lambda \colon \widetilde{\mathrm{Q}}' \to S^2 \,;\ ([\omega],[\pi]) \mapsto \frac{\mathrm{o}_R^*([\pi]) \times \mathrm{o}_L([\omega])}{|\mathrm{o}_R^*([\pi]) \times \mathrm{o}_L([\omega])|}.$$

ただし, 右辺の “$\times$” は $\mathbb{R}^3$ の外積であり, Λ は $[\pi]$ と $[\omega]$ に垂直な北極方向のベクトルを対応させる写像となっている. したがって, Λ は S^2 上の測地線の空間への全射となる.

一方, $\mathbb{H}_3$ の境界が S^2 であることに着目して, 写像 $\partial\colon \mathbb{H}_3' \to S^2$ を

$$\partial(u) = \frac{u}{|u|},$$

あるいは行列表示で

$$\partial\left(\begin{bmatrix} \frac{|u|^2+1}{2} - u_3 & u_1 - iu_2 \\ u_1 + iu_2 & \frac{|u|^2+1}{2} + u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{u_3}{|u|} & \frac{u_1}{|u|} - i\frac{u_2}{|u|} \\ \frac{u_1}{|u|} + i\frac{u_2}{|u|} & 1 + \frac{u_3}{|u|} \end{bmatrix}$$

と定める. この写像は $\mathbb{H}_3$ の中心点からの射影によって各点を境界へうつす操作である. この写像を, S^2 の測地線の空間に対応する S^2 への写像だとみなすと以下の図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{H}_3' \times \mathbb{CP}^1 \arrow[dl, "\widetilde{\mu}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\nu}"] & \\
\mathbb{H}_3' \arrow[d, "\partial"'] & & \widetilde{\mathbb{Q}}' \arrow[d, "\Lambda"] \\
S^2 \arrow[rr, leftrightarrow, dashed, "\text{点と大円の双対対応}"] & & S^2
\end{tikzcd}$$

定理 4.2.

3 次元双曲空間上のミニツイスター対応は球面上の点と大円の双対性を与える. すなわち, 上の図式に関して以下が成り立つ:

(1) 左下の S^2 上の任意の点 u に対して次が成り立つ:

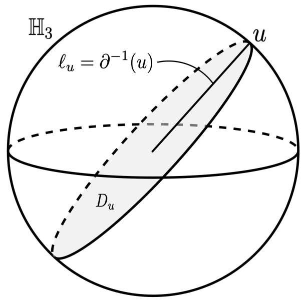
$$\Lambda(\widetilde{\nu}(\widetilde{\mu}^{-1}(\partial^{-1}(u)))) = C_u,$$

(2) 右下の S^2 上の任意の点 w に対して次が成り立つ:

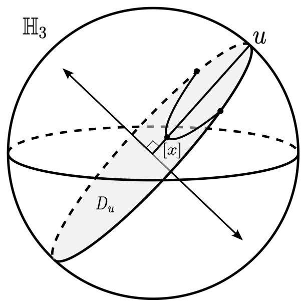
$$\partial(\widetilde{\mu}(\widetilde{\nu}^{-1}(\Lambda^{-1}(w)))) = C_w.$$

証明 図を用いながら証明を行う.

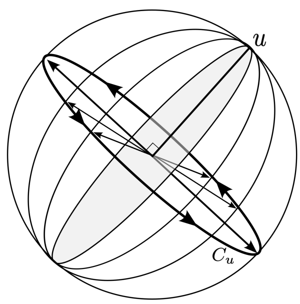
(1)　u を S^2 上の任意の点とすると, ∂ の定め方から, $\partial^{-1}(u)$ は $\mathbb{H}_3$ の中心点と u を結ぶ線分となる. この線分を ℓ_u と表す.



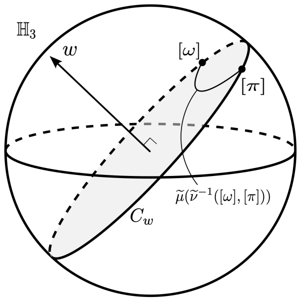
この線分 ℓ_u を含むような $\mathbb{H}_3$ の切断面の 1 つを D_u とすると, D_u の境界 ∂D_u 上の対蹠点でない任意の 2 点の外積は D_u に垂直となる.



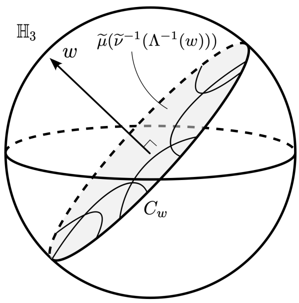
したがって, ℓ_u 上の任意の $[x]$ に対して $\Lambda(\widetilde{\nu}(\widetilde{\mu}^{-1}([x])))$ は u に垂直な大円 C_u となるから, $\Lambda(\widetilde{\nu}(\widetilde{\mu}^{-1}(\partial^{-1}(u)))) = C_u$ である.



(2)　w を S^2 上の任意の点とすると, Λ の定め方から, $\Lambda^{-1}(w)$ の各点は w に垂直な大円 C_w 上の対蹠点どうしでない任意の 2 点のペアとなる.



したがって, $\Lambda^{-1}(w)$ 上の各点 $([\boldsymbol{\omega}],[\boldsymbol{\pi}])$ はミニツイスター対応によって, 大円 C_w で切った $\mathbb{H}_3'$ の切断面上の $[\boldsymbol{\omega}]$ と $[\boldsymbol{\pi}]$ を結ぶ測地線に対応するから, $\widetilde{\mu}(\widetilde{\nu}^{-1}(\Lambda^{-1}(w)))$ は大円 C_w で切った $\mathbb{H}_3'$ の切断面そのものになる.



∂ は $\mathbb{H}_3$ の中心点から境界への射影であるから, $\partial(\widetilde{\mu}(\widetilde{\nu}^{-1}(\Lambda^{-1}(w)))) = C_w$ である. □

参考文献

[1] T. Adamo. Twistor actions for gauge theory and gravity, 2012.

[2] T. Adamo. Lectures on twistor theory. In *Proceedings of Science*, Vol. 323, 2017.

[3] T. Adamo, D. Skinner, and J. Williams. Minitwistors and 3d Yang-Mills-Higgs theory. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 59, No. 12, 2018.

[4] Y. S. O. M. Ahmed. Twistor space and its application, 2017.

[5] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, and I. M. Singer. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 362, No. 1711, pp. 425–461, 1978.

[6] M. Atiyah, M. Dunajski, and L. J. Mason. Twistor theory at fifty: from contour integrals to twistor strings. *Proceedings of the Royal Society. A, Mathematical, physical, and engineering sciences*, Vol. 473, No. 2206, pp. 20170530–20170530, 2017.

[7] J. Bain. Spacetime structuralism. In *Philosophy and Foundations of Physics*, Vol. 1, pp. 37–65. Elsevier Science & Technology, 2006.

[8] P. Baird. An introduction to twistors.

[9] P. Bandyopadhyay. *Geometry, Topology and Quantization*. Mathematics and Its Applications; 386. Springer Science+Business Media, B.V., Dordrecht, 1st edition, 1996.

[10] C. Beetar, M. C. González, S. Jaitly, and T. Keseman. Double copy in AdS3 from minitwistor space, 2025.

[11] A. Borówka. Twistor construction of asymptotically hyperbolic Einstein-Weyl spaces. *Differential Geometry and Its Applications*, Vol. 35, pp. 224–241, 2014.

[12] W. Bu. Twistor theory and its applications in asymptotically flat spacetimes, 2024.

[13] W. Bu and S. Seet. Celestial holography and AdS_3/CFT_2 from a scaling reduction of twistor space. *The Journal of High Energy Physics*, Vol. 2023, No. 12, pp. 168–, 2023.

[14] E. Chacón, S. Nagy, and C. D. White. Alternative formulations of the twistor double copy. *The Journal of High Energy Physics*, Vol. 2022, No. 3, pp. 180–28,

2022.

[15] D. Chiou, O. J. Ganor, Y. P. Hong, B. S. Kim, and I. Mitra. Massless and massive three-dimensional super Yang-Mills theory and mini-twistor string theory. *Physical Review D*, Vol. 71, No. 12, 2005.

[16] M. Dunajski. The nonlinear graviton as an integrable system, 1998.

[17] M. Dunajski. Oriented straight lines and twistor correspondence. *Geometriae Dedicata*, Vol. 112, No. 1, pp. 239–247, 2005.

[18] M. Dunajski. Twistor theory and differential equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 42, No. 40, p. 404004, 2009.

[19] M. Dunajski. *Solitons, Instantons, and Twistors*. Oxford Mathematics. Oxford University Press, Oxford, 2010.

[20] M. Dunajski and J Gundry. Non-relativistic twistor theory and Newton-Cartan geometry. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 342, No. 3, pp. 1043–1074, 2016.

[21] M. Dunajski, L. J. Mason, and K. P. Tod. Einstein-Weyl geometry, the dKP equation and twistor theory. *Journal of Geometry and Physics*, Vol. 37, No. 1-2, pp. 63–93, 2001.

[22] M. Dunajski and S. West. Anti-self-dual conformal structures in neutral signature, 2010.

[23] M. G. Eastwood. Twistor theory (the Penrose transform). In *Complex Analysis*, Vol. 950 of *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 1–11. Springer Berlin, Heidelberg, Germany, 1982.

[24] G. Esposito. *Complex General Relativity*. Fundamental Theories of Physics; v. 69. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[25] K. Farnsworth, M. L. Graesser, and G. Herczeg. Twistor space origins of the Newman-Penrose map. *SciPost Physics*, Vol. 13, No. 4, pp. 099–, 2022.

[26] E. J. Flaherty. Twistor theory and heaven. In *Hermitian and Kählerian Geometry in Relativity*, Lecture Notes in Physics, pp. 292–344. Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[27] J. Frauendiener and R. Penrose. Twistors and general relativity. In *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond*, pp. 479–505. Springer Berlin Heidelberg, 2001.

[28] N. Georgiou and B. Guilfoyle. On the space of oriented geodesics of hyperbolic 3-space. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, Vol. 40, No. 4, pp. 1183–1219, 2010.

[29] M. C. González, W. T. Emond, N. Moynihan, J. Rumbutis, and C. D. White. Mini-twistors and the Cotton double copy. *The Journal of High Energy Physics*, Vol. 2023, No. 3, pp. 177–37, 2023.

[30] R. O. Hansen and E. T. Newman. A complex Minkowski space approach to twistors. *General Relativity and Gravitation*, Vol. 6, No. 4, pp. 361–385, 1975.

[31] J. Harris. *Algebraic Geometry: A First Course*. Graduate Texts in Mathematics; 133. Springer-Verlag, New York, 1992.

[32] Y. Herfray. New avenues for Einstein's gravity: from Penrose's twistors to Hitchin's three-forms, 2018.

[33] N. J. Hitchin. Complex manifolds and Einstein's equations. In *Twistor Geometry and Non-Linear Systems*, pp. 73–99. Springer Berlin Heidelberg, 1982.

[34] N. J. Hitchin. Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations. *Journal of Differential Geometry*, Vol. 42, No. 1, pp. 30–112, 1995.

[35] S. A. Huggett and K. P. Tod. *An Introduction to Twistor Theory*. London Mathematical Society Student Texts; 4. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1994.

[36] E. Hughes. Twistor transform, 2013.

[37] L. P. Hughston. Aspects of the geometry of twistor space. In *Twistors and Particles*, Lecture Notes in Physics, pp. 5–15. Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[38] W. Jiang. Aspects of Yang-Mills theory in twistor space, 2008.

[39] P. E. Jones and K. P. Tod. Minitwistor spaces and Einstein-Weyl spaces. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 2, No. 4, pp. 565–577, 1985.

[40] M. Kalafat. Self-dual metrics on 4-manifolds, 2007.

[41] F. S. Klotz. Twistors and the conformal group. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 15, No. 12, pp. 2242–2247, 1974.

[42] K. Kodaira. A theorem of completeness of characteristic systems for analytic families of compact submanifolds of complex manifolds. *The Annals of Mathematics*, Vol. 75, No. 1, pp. 146–, 1962.

[43] C. LeBrun. Geometry of twistor spaces, 2004.

[44] C. LeBrun. Twistors, self-duality, and spin^c structures. *Symmetry, Integrability and Geometry, Methods and Applications*, 2021.

[45] C. LeBrun and L. J. Mason. Nonlinear gravitons, null geodesics, and holomorphic disks, 2005.

[46] Y. I. Manin. *Gauge Field Theory and Complex Geometry*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften: A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, 289. Springer, Berlin, 2nd edition, 1997.

[47] L. J. Mason and L. P. Hughston. *Further Advances in Twistor Theory, Volume I: Penrose Transform and Its Applications*. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific & Technical, 1990.

[48] L. J. Mason, L. P. Hughston, and P. Z. Kobak. *Further Advances in Twistor Theory, Volume II: Integrable Systems, Conformal Geometry and Gravitation*. Pitman Research Notes in Mathematics Series. CRC Press, 1995.

[49] L. J. Mason, P. Z. Kobak, L. Hughston, and K. Pulverer. *Further Advances in Twistor Theory, Volume III: Curved Twistor Spaces*. Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics Series. CRC Press, 2001.

[50] L. J. Mason and N. M. J. Woodhouse. *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory*. London Mathematical Society Monographs, New Series 15. Clarendon Press, Oxford, 1996.

[51] N. Metzner. Twistor theory of higher-dimensional black holes, 2012.

[52] T. Moy. An introduction to the penrose transform: the cohomological viewpoint.

[53] M. K. Murray. Twistor theory. *Geometric Approaches to Differential Equations*, Vol. 15, p. 201, 2000.

[54] F. Nakata. A construction of Einstein-Weyl spaces via LeBrun-Mason type twistor correspondence. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 289, No. 2, pp. 663–699, 2009.

[55] E. T. Newman, J. R. Porter, and K. P. Tod. Twistor surfaces and right-flat spaces. *General Relativity and Gravitation*, Vol. 9, No. 12, pp. 1129–1142, 1978.

[56] R. Penrose. Chameleon twistor theory: a geometric programme for describing the physical world.

[57] R. Penrose. A spinor approach to general relativity. *Annals of Physics*, Vol. 10, No. 2, pp. 171–201, 1960.

[58] R. Penrose. Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behaviour. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 284, No. 1397, pp. 159–203, 1965.

[59] R. Penrose. Twistor algebra. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 8, No. 2, pp. 345–366, 1967.

[60] R. Penrose. Twistor quantisation and curved space-time. *International Journal of Theoretical Physics*, Vol. 1, No. 1, pp. 61–99, 1968.

[61] R. Penrose. Solutions of the zero-rest-mass equations. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 10, No. 1, pp. 38–39, 1969.

[62] R. Penrose. Nonlinear gravitons and curved twistor theory. *General Relativity and Gravitation*, Vol. 7, No. 1, pp. 31–52, 1976.

[63] R. Penrose. A brief outline of twistor theory. In *Cosmology and Gravitation*, NATO Advanced Study Institutes Series, pp. 287–316. Springer, United States, 1980.

[64] R. Penrose. Null hypersurface initial data for classical fields of arbitrary spin and for general relativity. *General Relativity and Gravitation*, Vol. 12, No. 3, pp. 225–264, 1980.

[65] R. Penrose. Some remarks on twistor theory. In *On Einstein's Path*, pp. 353–366. Springer New York, 1999.

[66] R. Penrose. Twistor theory and the Einstein vacuum. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 16, No. 12 A, pp. A113–A130, 1999.

[67] R. Penrose. Twistor theory as an approach to fundamental physics. In *Foundations of Mathematics and Physics One Century After Hilbert*, pp. 253–285. Springer International Publishing AG, Switzerland, 2018.

[68] R. Penrose. *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe.* Knopf Doubleday Publishing Group, New York, 2021.

[69] R. Penrose and M. A. H. MacCallum. Twistor theory: An approach to the quantisation of fields and space-time. *Physics Reports*, Vol. 6, No. 4, pp. 241–315, 1973.

[70] R. Penrose and W. Rindler. *Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1984.

[71] R. Penrose and W. Rindler. *Spinors and Space-Time: Volume 2, Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1986.

[72] Z. Perjés. Twistor theory. In *Quantum Gravity*, pp. 503–525. Springer, United States, 1984.

[73] P. Plansangkate. Compactified twistor fibration and topology of Ward unitons. *Journal of Geometry and Physics*, Vol. 104, pp. 1–18, 2016.

[74] A. D. Popov and C. Saemann. On supertwistors, the Penrose-Ward transform and $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills theory, 2006.

[75] J. G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics; 149. Springer Science+Business Media, LLC, New York, 1st edition, 1994.

[76] C. Ross. Notes on monopoles, mini twistors and spectral curves, 2018.

[77] C. Saemann. Aspects of twistor geometry and supersymmetric field theories within superstring theory, 2006.

[78] S. Salamon and J. Viaclovsky. Orthogonal complex structures on domains in $\mathbb{R}^4$, 2008.

[79] B. Schneider. Reading the cosmic palm: spinor, the Weyl tensor fingerprint, and mass in general relativity, 2023.

[80] S. Seet. Twistor space and celestial holography, 2024.

[81] A. G. Sergeev. Twistor geometry and gauge fields. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, Vol. 79, pp. 135–175, 2018.

[82] I. A. B. Strachan. The twistor description of integrable systems, 1991.

[83] J. Swearngin, A. Thompson, A. Wickes, J. W. Dalhuisen, and D. Bouwmeester. Gravitational Hopfions, 2013.

[84] A. Taghavi-Chabert. Twistor geometry of null foliations in complex Euclidean space. *Symmetry, Integrability and Geometry, Methods and Applications*, Vol. 13, , 2017.

[85] C. Tsai. The Penrose transform for Einstein-Weyl and related spaces, 1996.

[86] P. M. van den Broek. Twistor space, Minkowski space and the conformal group. *Physica A*, Vol. 122, No. 3, pp. 587–592, 1983.

[87] P. M. van den Broek. Twistor geometry. *Helvetica Physica Acta*, Vol. 57, No. 4, pp. 429–, 1984.

[88] R. S. Ward. Curved twistor spaces, 1977.

[89] R. S. Ward. A class of self-dual solutions of Einstein's equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 363, No. 1713, pp. 289–295, 1978.

[90] R. S. Ward. Self-dual space-times with cosmological constant. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 78, No. 1, pp. 1–17, 1980.

[91] R. S. Ward and R. O. Wells, Jr. *Twistor Geometry and Field Theory*. Cambridge University Press, 1990.

[92] R. O. Wells. Complex manifolds and mathematical physics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 1, No. 2, pp. 296–336, 1979.

[93] R. O. Wells. The twistor-geometric representation of classical field theories. In *Non-Linear Partial Differential Operators and Quantization Procedures*, Vol. 1037 of *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 142–169. Springer Berlin Heidelberg, Germany, 2006.

[94] J. Williams. Aspects of twistors and tractors in field theory, 2021.

[95] E. Witten. Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 252, No. 1-3, pp. 189–258, 2004.

[96] P. Woit. Euclidean spinors and twistor unification, 2021.

[97] P. Woit. Euclidean twistor unification, 2021.

[98] P. Woit. Notes on the twistor $\mathbf{P}^1$, 2022.

[99] M. Wolf. A first course on twistors, integrability and gluon scattering amplitudes. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 43, No. 39, p. 393001, 2010.

[100] N. Woodhouse. Real methods in twistor theory. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 2, No. 3, pp. 257–291, 1985.

[101] N. Woodhouse, A. Janner, M. Boon, and T. Janssen. Twistor theory and geometric

quantisation. In *Group Theoretical Methods in Physics*, Lecture Notes in Physics, pp. 149–163. Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[102] 高崎金久. ツイスターの世界 : 時空・ツイスター空間・可積分系. 共立出版, 東京, 2005.

[103] 高崎金久. 重力場のツイスター理論と可積分系, 2015.

[104] 高崎金久. 線形代数とグラスマン多様体. 日本評論社, 東京, 2024.

[105] 高崎金久, Lionel J. Mason, 国友浩, 村田嘉弘, 浜中真志, 関口英子, 長友康行, 藤木明, 佐藤肇, 青山秀明, 相馬亘, 藤原義久, 渡辺浩, 船木由喜彦. ツイスター理論の拡がり–多彩な発展と今後への展望. 数理科学, Vol. 44, No. 10, pp. 5–60, 2006.

[106] 松下泰雄, 鎌田博行, 中田文憲. 4 次元微分幾何学への招待 : 不定値計量の存在, ニュートラル計量, 複素曲面, ツイスター. 臨時別冊・数理科学, 2014 年 12 月. サイエンス社, 東京, 2014.

[107] 新井朝雄. 相対性理論の数理. 日本評論社, 東京, 2021.

[108] 藤木明. 自己双対多様体のツイスター空間.

[109] 内山龍雄. 一般相対性理論. 物理学選書 ; 15. 裳華房, 東京, 1978.

[110] 本間泰史. スピン幾何学 : スピノール場の数学. 森北出版, 東京, 2016.

[111] 本多宣博. ツイスター空間と自己双対計量. 数学, Vol. 60, No. 4, pp. 380–398, 2008.

[112] 本多宣博. 秋葉原微分幾何セミナー「ツイスター理論」, 2013.

[113] 本多宣博. ツイスター空間の幾何学, 2015.

[114] 本多宣博. ツイスター空間論の問題. 数理解析研究所講究録, Vol. 2211, , 2022.

謝辞

本稿をまとめるにあたり, 多くの方々のご理解とご協力, 多大なるご指導とご助言を賜りましたことを, 心より感謝申し上げます.

早稲田大学理工学術院基幹理工学部教授の本間泰史先生には, 2 年間指導教官としてご指導賜りました. 研究の進め方に関するご助言や修士論文の作成におけるご指導のみならず, 表現論や幾何学の知識が不十分な箇所に関しては補足資料まで作成していただきました. 本間先生の丁寧なご指導がなければ, 修士のはじめに読んでいたレクチャーノートの 2,3 ページ目でツイスター理論は断念していたと思います. 加えて, ゼミや研究方針を話し合う際には, 私の考え方や意思を尊重しつつ, 力不足な私のレベルに合わせて上手く行きそうな方向に導いてくださいました. 私を修士から受け入れ, 2 年間手厚くサポートしていただいたこと, 心より厚く御礼申し上げます.

大阪公立大学名誉教授で現在は早稲田大学理工学術院国際理工学センター教授も務めていらっしゃる大仁田義裕先生には, 貴重なお時間を割いて水曜日のゼミにご出席いただき, ゼミの内容について多くのご助言をいただきました. とくに, ツイスター理論の可積分系に関連するトピックについてのお話は, 他ではなかなか伺うことのできない貴重なお話でした. 心より御礼申し上げます.

早稲田大学教育・総合科学学術院教育学部の多田輝夫助教には, 資料の収集や論文の印刷といった事務的な場面で大変お世話になりました. ツイスター理論と情報幾何の関連を調べていた際には偏微分方程式に関するご助言もいただきました. 残念ながら修士論文にまとめられるような十分な成果とはなりませんでしたが, 他分野の貴重なご助言をいただけたこと, 深く感謝いたします.

早稲田大学教育・総合科学学術院教育学部教授の小森洋平先生には, 学部時代, 指導教官として 2 年間ご指導賜りました. 大学院では複素解析幾何学の授業以外で直接的なご指導をいただく機会はありませんでしたが, 学部時代の小森先生の愛のあるご指導が修士の 2 年間を支える精神的な支柱となっていました. ゼミを通して, 議論のどこが本質なのかを見抜きストーリー立てて説明する力, 数学や学問への向き合い方等をご教示いただいたこと, 深く御礼申し上げます.

足利大学共通教育センターの雪田友成講師には, 学部時代, 小森ゼミでお世話になりました. 修士課程に入ってからは, 早稲田大学を離れられたということもあり直接ご指導いただく機会はありませんでしたが, 学部時代に微分幾何や "Bott-Tu" の自主ゼミで厳しく指導していただいた経験, ランチや帰りの電車で何気なく質問した数学の内容等が研究を進める際にヒントとなる場面が幾度もありました. 些細な質問にも一つ一つ丁寧に対応していただいたこと, 深く感謝いたします.

そして, 本間研究室関係者の皆様, とくに切磋琢磨してきた同期の今田夏暉君, 藤本瑠唯君, Jonas Trübl 君, 並びに幾何院生室のメンバーたち, 14 号館 706 数学科教室の "魅力的な同期" たちにも感謝の言葉を贈りたいと思います.

加えて最後に, ペンローズの不可能図形を描くのが上手い米田研究室の福井調君には, 学部時代も含めとりわけ多大なご迷惑をお掛けしたことをお詫びいたします.