

From the Dirac Operator to Gradients

本間 泰史 (早稲田大学理工)

早稲田「量子化の幾何学2」にて (2002年9月)

前半：スピン幾何のまとめ

後半：Gradient (ディラック作用素の一般化しよう)

第一部：スピン幾何のまとめ

1 ディラック作用素とクリフォード関係式

ディラック作用素 D = ラプラス作用素の平方根

その主表象は？

$$\sigma_\xi(D)\sigma_\xi(D) = \sigma_\xi(\Delta) = -\|\xi\|^2 \text{id} \quad \text{for } \xi \in T_x(M)^*$$

そこで $\sigma_\xi(D)$ を行列だと思う．これを ξ (ξ に依存した行列) と書けば，

$$\xi\xi = -\|\xi\|^2 \text{id}$$

(この行列が作用するベクトル空間をスピノール空間と呼ぶ)

以上からディラック作用素の主表象は次のような代数関係式をみたす

—— クリフォード関係式 ——

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\langle e_i, e_j \rangle = -2\delta_{ij}$$

for o.n.b $\{e_i\}_{i=1}^n$ of $\mathbb{R}^n \simeq T_x(M) \simeq T_x(M)^*$

ディラック作用素のより正確な定義は？

M : スピン多様体 .

S_Δ : スピノール束 (スピノール空間をファイバーとするベクトル束)

∇ : レビチビタ接続から導かれる S_Δ 上の共変微分

$\{e_k\}_{k=1}^n$: 局所正規直交フレーム

$$D = \sum_k e_k \nabla_{e_k} : \Gamma(M, S_\Delta) \rightarrow \Gamma(M, S_\Delta)$$

1.1 主表象の関係式 (クリフォード関係式) の使用例

—— Lichnerowicz の公式 (1962) ——

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \kappa/4$$

ここで κ はスカラー曲率 .

Proof. $\xi\xi = -\|\xi\|^2$ を微分作用素にもちあげればよい .

しかし ∇ は非可換であり , その非可換性を表すのが曲率

$$R_\Delta(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}.$$

であった . この曲率によるおつりの項をビアンキ恒等式 , クリフォード関係式により計算すれば $\kappa/4$ を得る . ■

スピン幾何では , クリフォード関係式が重要 . リーマン幾何でのテンソル解析の類似としてスピノール解析を行える .

1.2 ディラック作用素のもうひとつの定義

M : スピン多様体 .

$\text{Spin}(M)$: スピン構造 (主 $\text{Spin}(n)$ 束) $\text{SO}(M)$ の二重被覆 .

$\mathbf{S}_\Delta = \text{Spin}(M) \times_\Delta V_\Delta$: スピノール束 (スピノール空間は V_Δ)

∇ : 共変微分 $\nabla : \Gamma(\mathbf{S}_\Delta) \rightarrow \Gamma(\mathbf{S}_\Delta \otimes T^*(M)) = \Gamma(\mathbf{S}_\Delta \otimes T(M))$.

$\mathbf{S}_\Delta \otimes T(M)$ を部分束に既約分解する .

$$\mathbf{S}_\Delta \otimes T(M) = \mathbf{S}_T \oplus \mathbf{S}_\Delta$$

ディラック作用素のもう一つの定義

$$D : \Gamma(\mathbf{S}_\Delta) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\mathbf{S}_\Delta \otimes T^*(M)) = \Gamma(\mathbf{S}_\Delta \otimes T(M)) \xrightarrow{\Pi_\Delta} \Gamma(\mathbf{S}_\Delta)$$

ここで Π_Δ は直交射影 .

つまりディラック作用素は ∇ の既約成分である。

もう一方の ∇ の既約成分は？

ツイスター作用素 T

$$T : \Gamma(\mathbf{S}_\Delta) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\mathbf{S}_\Delta \otimes T^*(M)) = \Gamma(\mathbf{S}_\Delta \otimes T(M)) \xrightarrow{\Pi_T} \Gamma(\mathbf{S}_T)$$

$$\Pi_T(\psi \otimes u) = \psi \otimes u + 1/n \sum_{1 \leq k \leq n} (e_k u \psi) \otimes e_k \in (\mathbf{S}_T)_x \subset (\mathbf{S}_\Delta)_x \otimes T_x(M)$$

これより

$$\ker(T) = \{ \psi \in \Gamma(\mathbf{S}_\Delta) \mid \nabla_X \psi + \frac{1}{n} X D \psi = 0 \quad \forall X \in \Gamma(T(M)) \}$$

2 スピン幾何学へ

ディラック作用素とツイスター作用素の関係は？

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{n}T^*T + \frac{1}{n}D^*D &= \nabla^*\nabla, \\ -\frac{1}{2}\frac{n-1}{n}T^*T + \frac{n-1}{2}\frac{1}{n}D^*D &= \frac{1}{8}\kappa.\end{aligned}$$

この関係式もクリフォード関係式を用いることによる．

これより先ほどの Lichnerowicz の公式を得る．さらに，次が成立する．

$$D^2 = \frac{n}{4(n-1)}\kappa + \frac{n-1}{2n}T^*T.$$

Proposition 2.1 (Friedrich (1980)). コンパクトスピン多様体上でディラック作用素の固有値は次のように評価できる

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \min_{x \in M} \kappa(x) = \frac{n}{4(n-1)} \kappa_0.$$

等号成立は次のようなスピノール ψ が存在，

$$\nabla_X \psi = \pm \sqrt{\frac{\kappa_0}{n(n-1)}} X \psi, \quad \forall X.$$

—— 定義: キリングスピノール ——

$\nabla_X \psi = cX\psi \iff$ キリングスピノール (c 定数・キリング数) .

c 実数 (純虚数) $\iff$ 実 (虚) キリングスピノール.

$c = 0$ ($\nabla\psi = 0$) $\iff$ 平行スピノール .

(注意 : $V = \sum (e_i \psi, \psi) e_i$: キリングベクトル場)

キリングスピノール (より一般に特殊スピノール) を持つ多様体の分類をしよう .

— 特殊なスピノール —

平行スピノール $\iff \nabla\psi = 0$ (注意: $\nabla = D + T$)

調和スピノール $\iff D\psi = 0$

ツイスタースピノール $\iff T\psi = 0$ (キリングならツイスター)

2.1 平行スピノールとホロノミー縮約

Proposition 2.2 (Hitchin 1974).

M が単連結スピン多様体のとき可能なホロノミー群は次のどれか.

$n = \dim M$	$H(M)$	<i>geometric condition</i>	$N = \dim\{\psi \nabla\psi = 0\}$
n	$SO(n)$	<i>general</i>	0
$2m, m \geq 2$	$SU(m)$	ケーラーかつ <i>Ricci-flat</i>	2
$4m, m \geq 2$	$Sp(m)$	<i>Hyper</i> ケーラー	$m + 1$
8	$Spin(7)$		1
7	G_2		2

2.2 調和スピノールと指数定理

調和スピノールの次元 $h = \dim \ker D^+ + \dim \ker D^-$

指数定理より $\hat{A}(M) = \dim \ker D^+ - \dim \ker D^-$ (位相不変量).

$$h \geq |\hat{A}(M)|$$

Proposition 2.3. スカラー曲率が正となる計量がはいるコンパクトスピン多様体 M を考えると, $h = 0$ となり $\hat{A}(M) = 0$.

($\Rightarrow$ *Gromov-Lawson* 理論へ)

Bär 予想: M を $\dim M \geq 3$ のコンパクトスピン多様体とする. このときリーマン計量 g で $h(g, s) > 0$ となるものが存在. (調和スピノールの存在に対して位相的障害がない).

2.2.1 キリングスピノールを持つ多様体

Proposition 2.4.

M : キリングスピノールを持つスピン多様体 $\Rightarrow$

M はアインシュタイン多様体でスカラー曲率 (定数) は

$$c^2 = \frac{1}{4n(n-1)} \kappa.$$

特に, キリング数は実または純虚数.

実なら M はコンパクト. 純虚数なら非コンパクト

Proof. キリングスピノール ψ に曲率 2 次形式をクリフォード作用であてれば, Ric が定数, つまりアインシュタインであることがわかる. ■

キリングスピノールを持つ多様体を分類するには次の方法がよい
[Bär の方法 (1993)]

M の cone を考える.

$$CM = (M \times \mathbf{R}_+, dt^2 + t^2 g), \quad t \in \mathbf{R}_+$$

M 上キリングスピノール $\iff CM$ 上の平行スピノール.

CM のホロノミー群はわかるので, M の幾何構造がわかる

スピン幾何人: Lichnerowicz, Friedrich, H. Baum, Kirchberg, Hijazi, Bär, Moroianu, Semmelmann

第2部：Gradients

3 Gradients とは？

ディラック作用素：スピノール束上の共変微分 ∇ の既約成分
この考えを一般化して，幾何学的な一階微分作用素を得る．

M : (向きあり) リーマン多様体またはスピン多様体
(スピンでないときは $SO(n)$ の表現のみ考える)

$\text{Spin}(M)$: スピン構造。主 $\text{Spin}(n)$ 束

(π_ρ, V_ρ) : 構造群 $\text{Spin}(n)$ の有限次元既約ユニタリ表現. ρ は h. w.

$S_\rho := \text{Spin}(M) \times_\rho V_\rho$: 同伴ベクトル束。計量も入れておく。

∇ : レビチビタ接続からの導かれる S_ρ 上の共変微分

— 定義：gradient (def by Stein-Weiss 1968) —

$$D_\lambda^\rho : \Gamma(S_\rho) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(S_\rho \otimes T^*(M)) \simeq \Gamma(S_\rho \otimes T(M)) \xrightarrow{\Pi_\lambda} \Gamma(S_\lambda)$$

ここで $S_\rho \otimes T(M) = \sum_\lambda S_\lambda$ が $\text{Spin}(n)$ に関する既約分解

(呼び方: Stein-Weiss 作用素, gradients, 高スピンディラック作用素など)

Proposition 3.1 (共通な性質：共形共変性 Fegan(1976)).

リーマン計量 g を $g' = e^{2\sigma(x)}g$ と共形変形したとき、

$$D_\lambda'^\rho = e^{-(m(\rho;\lambda)+1)\sigma} D_\lambda^\rho e^{m(\rho;\lambda)\sigma}$$

ここで $m(\rho; \lambda)$ は *conformal weight* という定数 (ρ, λ に依存) .
つまり *gradient* は共形共変一階微分作用素である .

Example 3.1.

1. スピノール束上：ディラック作用素，ツイスター作用素
2. 微分形式上：共形キリング作用素，外微分，余微分
3. ツイスター束 (S_T) 上：ラリタ-シュインガー作用素
4. 4次元ツイスター理論での自己双対多様体上の線形場の方程式：

$$\nabla^{AA'}\psi_{AB\dots D} = 0 \text{ (Hitchin 1980).}$$

5. 共形ワイルテンソルに作用する微分作用素：

$$\delta W = 0 \text{ (LeBrun-Gursky 1999)}$$

目的：これら微分作用素を統一的に扱い，微分幾何，調和解析，大域解析を行う

1. **Parabolic 幾何**： G/P (P は G の Parabolic 部分群．例えば一般旗多様体) 上の微分作用素の話．共形幾何やツイスター幾何 (ペンローズ変換やその一般化) by M. Eastwood.
(cf. Baston and Eastwood 「The Penrose transform」 1989) .
2. **調和解析**：
球面上 gradients のスペクトル分解 (T. Branson 以下 B 1999) .
spherical monogenic functions の一般化 (Bureš, Souček 1999) .
3. **微分幾何，大域解析**：
 - (a) 楕円性の決定 (B 1997) , Bochner-Weizenbeck 公式 (B 1997) , 消滅定理 (B-Hijazi 1997,2000) , 固有値評価 (B-Hijazi 1997,2000)
 - (b) Yau のトリック (修正加藤不等式)
(B 2000 または Calderbank-Gauduchon-Herzlich 2000)
 - (c) 熱核の漸近展開 (Avramidi-B 2001, 2002)

4 A Breakthrough in theory of Gradients (Branson 理論)

Branson 「 Stein-Weiss operator and Ellipticity 」 J. F. A 1997

$$D_{\lambda_i}^\rho : \Gamma(\mathbf{S}_\rho) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\mathbf{S}_\rho \otimes T^*(M)) \simeq \Gamma(\mathbf{S}_\rho \otimes T(M)) \xrightarrow{\Pi_{\lambda_i}} \Gamma(\mathbf{S}_{\lambda_i})$$

ここで $\mathbf{S}_\rho \otimes T(M) = \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_{\lambda_i}$ が既約分解 .

Questions

- 1 . $(D_{\lambda_i}^\rho)^* D_{\lambda_i}^\rho$ はいつ楕円型か (楕円型となる ρ, λ_i を決定せよ) ?
- 2 . より一般に $\sum_{i \in I} (D_{\lambda_i}^\rho)^* D_{\lambda_i}^\rho$ は楕円型か ?
- 3 . $\sum_i b_i (D_{\lambda_i}^\rho)^* D_{\lambda_i}^\rho = \text{curvature action}$ となる $\{b_i\}_{i=1}^N$ を決定せよ .
(ボホナー恒等式またはボホナーワイゼンベック公式を決定せよ) .

Remark 4.1. 上の問いは各点での話しである .

主表象は

$$\sigma_\xi(D_{\lambda_i}^\rho) : V_\rho \xrightarrow{\otimes \xi} V_\rho \otimes \mathbf{R}^n \xrightarrow{\Pi_{\lambda_i}} V_{\lambda_i}.$$

1. 楕円性 : $\sigma_\xi(D_{\lambda_i}^\rho)^* \sigma_\xi(D_{\lambda_i}^\rho)$ が非退化かとなる ρ, λ_i の決定。
2. BW 公式 : 次の式をみたす係数 $\{b_i\}$ の決定 .

$$\sum_i b_i \sigma_\xi(D_{\lambda_i}^\rho)^* \sigma_\xi(D_{\lambda_i}^\rho) = 0$$

ディラック作用素の主表象 = クリフォード代数 (スピン幾何での武器)
上は、gradients の主表象に対する代数的構造 (代数にはならないが)

Step 1 : 標準的な球面上 S^n 上でみれば十分である .

球面 $S^n = Spin(n+1)/Spin(n)$ 上 gradients に対する調和解析 .

Lemma 4.1. 球面上の *gradients* に対しては次の二つの場合がおこる

1. $(D_{\lambda_i}^\rho)^* D_{\lambda_i}^\rho$ は楕円型で , 0 固有空間は有限次元
2. $(D_{\lambda_i}^\rho)^* D_{\lambda_i}^\rho$ は楕円型でなく , 0 固有空間は無限次元 .

また球面は定曲率なので BW 公式については

$$\sum_i b_i (D_{\lambda_i}^\rho)^* D_{\lambda_i}^\rho = constant$$

となる係数 $\{b_i\}_{i=1}^n$ をさがせばよい (すべての固有空間上で成立) .

Step2 : スペクトル (固有値) の計算

Branson, Olafsson, Orsted によるスペクトルの計算法 (難) を適用する :
(BOO の論文 : より一般的な状況、 G semisimple P maximal parabolic
として G/P 上の微分作用素のスペクトルの計算)

以上から、先ほどの問いは解決される

結果 : BW 公式 (楕円性は省略)

$\sum_i b_i (D_{\lambda_i}^\rho)^* D_{\lambda_i}^\rho = \text{curv}$ を与える係数 $\{b_i\}_{i=1}^N$ は次の連立方程式の解.
特に、独立なものは $[N/2]$ 個ある。

$$\sum_{1 \leq i \leq N} b_i \tilde{c}_{\rho \lambda_i} \left(m(\rho; \lambda_i) - \frac{n-1}{2} \right)^{2j} = 0 \quad \text{for } j = 0, \dots, \left[\frac{N+1}{2} \right] - 1$$

ここで $m(\rho; \lambda_i)$ は conformal weight. $\tilde{c}_{\rho \lambda_i}$ は ρ, λ_i に依存した定数。

応用 : BW 公式 , 固有値評価 , 消滅定理 , 修正加藤不等式 .

[Branson 理論の欠点]

1. 複雑で難解。(Branson 本人以外の人が使えないのは難)
2. 球面のスペクトルに話を置き換えているので、本質的になにが行われているのかがわからない

そこで、もっと直接的に gradients の主表象の構造をしらべたい。

5 Gradients の主表象と高次カシミール元 (自分の結果)

結論

gradients の主表象の代数的構造は $\mathfrak{so}(n)$ の展開環及びカシミール元により支配される。(その際、conformal weight を用いる)。特に、Gelfand 型カシミール元の関係式が B W 公式に対応。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n) : Spin(n)$ または $SO(n)$ のリー環

$\{e_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n} : \mathfrak{g}$ の標準基底。 $e_{ij} = -e_{ji}$.

$U(\mathfrak{g}) : \mathfrak{g}$ の展開環 (enveloping algebra)

$\mathfrak{z} \subset U(\mathfrak{g})$ の中心。その元をカシミール元という。

Gelfand 型カシミール元 (I. M. Gelfand 1950)

$q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して次はカシミール元である。

$$c_q := \sum_{1 \leq i, i_1, i_2, \dots, i_{q-1} \leq n} e_{ii_1} e_{i_1 i_2} \cdots e_{i_{q-1} i} \in \mathfrak{z} \subset U(\mathfrak{g})$$

1. $n = 2m + 1$ のとき $\{c_2, c_4, \dots, c_{2m}\}$ は $\mathfrak{z}$ の代数的生成元。
2. $n = 2m$ のとき $\{c_2, c_4, \dots, c_{2m-2}, pf\}$ は $\mathfrak{z}$ の代数的生成元。

特に、 $c_1, c_3, \dots$ は $\{c_2, c_4, \dots, c_{2m}\}$ の多項式としてかける。

Translated Casimir elements

少しずらす $\hat{e}_{ij} = e_{ij} + \frac{n-1}{2}\delta_{ij}$ として

$$\hat{c}_q := \sum_{1 \leq i, i_1, i_2, \dots, i_{q-1} \leq n} \hat{e}_{ii_1} \hat{e}_{i_1 i_2} \cdots \hat{e}_{i_{q-1} i} \in \mathfrak{Z} \subset U(\mathfrak{g})$$

Proposition 5.1. 任意の $q \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して, 次が成立。

$$2\hat{c}_{2q+1} = -\hat{c}_{2q} + \sum_{p=0}^{2q} (-1)^p \hat{c}_{2q-p} \hat{c}_p. \quad \forall q.$$

これらカシミール元と gradients の主表象の関係は

$$\sigma_\xi(D_{\lambda_i}^\rho) : V_\rho \xrightarrow{\otimes \xi} V_\rho \otimes \mathbf{R}^n \xrightarrow{\Pi_{\lambda_i}} V_\lambda.$$

$$\sum_{1 \leq i \leq N} \left(-m(\rho; \lambda_i) + \frac{n-1}{2} \right)^q \sum_{k=1}^n \sigma_{e_k}(D_{\lambda_i}^\rho)^* \sigma_{e_k}(D_{\lambda_i}^\rho) = \pi_\rho(\hat{c}_q) \quad \forall q$$

$$\sum_{1 \leq i \leq N} \left\{ \sum_{p=0}^{2q-1} \pi_\rho(\hat{c}_{2q-1-p}) \left(m(\rho; \lambda_i) - \frac{n-1}{2} \right)^p \right\} \sigma_\xi(D_{\lambda_i}^\rho)^* \sigma_\xi(D_{\lambda_i}^\rho) = 0$$

Gradients に対するボホナー恒等式

$$\sum_{1 \leq i \leq N} \left\{ \sum_{p=0}^{2q-1} \pi_\rho(\hat{c}_{2q-1-p}) \left(m(\rho; \lambda_i) - \frac{n-1}{2} \right)^p \right\} (D_{\lambda_i}^\rho)^* D_{\lambda_i}^\rho = \hat{R}_\rho^{2q} \quad \forall q$$

ここで $\hat{R}_\rho^{2q}$ は ∇ の曲率からきまる S_ρ の束準同型。

独立なものは $[N/2]$ 個。 ($q = 1, 2, \dots, [N/2]$ まででよい)。

[欠点] : この方法で楕円性はまだ決定できない (方法はわかる)。
 今後の課題 : これらの関係式をつかってスピン幾何の類似をする
 大域解析やクリフォード解析をやる。

$n = \dim M$	$H(CM)$	geometric condition	(N^+, N^-)	
n	$SO(n)$	general	$(0, 0)$	
n	$\{1\}$	S^n	$(2^{[n/2]}, 2^{[n/2]})$	
$2m - 1, m \geq 2$	$SU(m)$	Einstein-Sasakian	$(1, 1)$ or $(2, 0)$	$N^\pm$: 正
$4m - 1, m \geq 2$	$Sp(m)$	3-Sasakian	$(m + 1, 0)$	
7	$Spin(7)$		$(1, 0)$	
6	G_2		$(1, 1)$	
(負) のキリング数をもつキリングスピノールの次元				