

運動量写像と簡約定理

野田 知宣

1. INTRODUCTION

M を (連結) コンパクト多様体、 ω を M 上の 2 形式とする。

Definition 1. (M, ω) が symplectic 多様体であるとは、 ω が次の 2 条件を満たすときに云う：

- i) d -closed
- ii) 非退化

条件 ii) から 1 形式の空間 $A^1(M)$ とベクトル場の空間 $\mathfrak{X}(M)$ の間の対応を得る。この対応において、閉 1 形式に対応するベクトル場を **局所 Hamilton** ベクトル場、完全 1 形式に対応するものを **Hamilton** ベクトル場と云う。またベクトル場の括弧積から $A^1(M)$ に括弧積が induce されるが、これを完全 1 形式に制限することで、定数項を除いて、 $C^\infty(M)$ にも括弧積 $\{, \}$ が induce される。すると $(C^\infty(M), \{, \})$ は Lie 環であり、更に $\{, \}$ は Lipnitz rule

$$\{fg, h\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

を満たす。即ち $(C^\infty(M), \{, \})$ は **Poisson 環**。運動量写像とはこの Poisson 環の有限次元部分環の事であるが、通常はもう少し条件を置く。

いま G を compact Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ で表す。 G が M に ω を保つように作用しているとする。このとき $X \in \mathfrak{g}$ に対し作用により誘導される M 上のベクトル場も同じ X で表すと $di(X)\omega = L_X\omega = 0$ から $i(X)\omega$ は閉形式であるが、これが完全形式であると仮定する： $i(X)\omega = d\mu_X$ なる $\mu_X \in C^\infty(M)$ が存在。このとき

$$\langle \mu(p), X \rangle = \mu_X(p), \quad p \in M$$

によって写像 $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ を定める。この写像 μ が co-adjoint 作用に関し G -同変であるとき **運動量写像**と呼ぶ。

$\eta \in \mathfrak{g}^*, p \in M$ に対し G の $\mathfrak{g}^*$ への co-adjoint 作用と M への作用の isotropy subgroup をそれぞれ G_η, G_p とする。すると運動量写像 μ は G -同変だから $M_\eta := \mu^{-1}(\eta)/G_\eta$ は well-defined. さらに $\eta \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ ($:=$ regular value の集合) なら G_p は全ての $p \in \mu^{-1}(\eta)$ に対し finite. いま natural projection と natural inclusion を $p_\eta : \mu^{-1}(\eta) \rightarrow M_\eta$ と $\iota_\eta : \mu^{-1}(\eta) \hookrightarrow M$ で表す。このとき

$$p_\eta^* \omega_\eta = \iota_\eta^* \omega$$

を満たす M_η 上の 2 形式で (M_η, ω_η) が symplectic となるものが存在する。この (M_η, ω_η) を **簡約空間**と云う。

本講ではこの運動量写像と簡約定理を必ずしも symplectic でない多様体に対し拡張する事を考える。拡張の方針の為に Definition 1 の 2 条件を再録してみると

- i) d -closed
- ii) 非退化

であった。そこで 2 つ在る条件の一方を外したものを考え、そこで運動量写像・簡約定理を考える。 ω を M 上の 2 形式とし

- i) のみを仮定した空間として presymplectic 多様体
- ii) のみを仮定した空間として l.c.s. 多様体

を選ぶ。

以下において $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$, G_η などを説明なしに用いることがあるが、これは本節のものと同様に定めるものとする。

2. PRESYMPLECTIC MANIFOLD (小田昌史氏との共同研究)

2.1. Definition and Example. M を n -次元のコンパクト複素多様体、 ω を M 上の $\text{rank} = r$ の d -closed real $(1, 1)$ -形式とする。コンパクト Lie 群 G が M に ω を保って作用している：任意の $g \in G$ に対し $g^*\omega = \omega$ とし、 G の複素化 $G^\mathbb{C}$ が M に正則に作用していると仮定する。各 $p \in M$ に対し $T_p M$ の部分空間 $D(p) := \{X \in T_p M; i(X)\omega(p) = 0\}$ を考えると $D(p)$ は $\mathbb{C}$ -部分空間であり、 $D(p)$ によって定められる distribution D は involutive である。 N で D によって定まる複素極大積分多様体を表す。

Lemma 2.1. 任意の $p \in M$ に対し

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{\alpha, \beta=1}^r a_{\alpha\bar{\beta}}(z_1, \dots, z_r) dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}}, \quad a_{\beta\bar{\alpha}} = \overline{a_{\alpha\bar{\beta}}}$$

を満たす局所正則座標 $(U; z_1, \dots, z_n)$ が存在する。

$X \in \mathfrak{g}$ に対し仮定から $X \in H^0(M, \mathcal{O}(TM))$ 。また $d(i(X^\mathbb{R})\omega) = L_{X^\mathbb{R}}\omega = 0$ が成立、但し $X^\mathbb{R} = X + \bar{X}$ は X に対応する実ベクトル場。いま、これが d -exact であると仮定し $i(X^\mathbb{R})\omega = d\mu_X$ と表す。

$p \in M$ に対し $\langle \mu(p), X \rangle = \mu_X(p)$ によって写像 $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}$ を定め **運動量写像**と呼ぶ。

μ の定義から $i(X^\mathbb{R})\omega = d\langle \mu, X \rangle$ 。また全ての $p \in M$ に対し Lemma 2.1 の局所正則座標において $\partial\mu_X/\partial z^{r+\gamma} = 0$ ($\gamma = 1, \dots, n-r$) と $N(p) \subset \mu^{-1}(\mu(p))$ を得る。symplectic 多様体に対する運動量写像と同様にここでの運動量写像も定数除を除いて一意的であり、 G -同変と出来る。よってこれより以下、運動量写像 μ は G -同変と仮定する。 M_η を §1 と同様に定める。

Proposition 2.2. M_η 上には $\iota_\eta^*\omega = p_\eta^*\omega_\eta$ を満たす d -closed real $(1, 1)$ -形式 ω_η が存在する。

Example. 1) C をコンパクト Riemann 面とし $M := \mathbb{C} \times C$ とおく。 $\omega = \sqrt{-1}dz \wedge d\bar{z}$ とし $\mathbb{C}^*$ -action を $\mathbb{C}$ への乗法によって与える。このとき $(z, c) \in M$ に対し $\mu(z, c) = |z|^2$ であり $\eta \in (0, \infty)$ に対し $M_\eta = C$, $\omega_\eta = 0$.

2) $Z := \{((z_1, z_2), (w_1, w_2)) ; (z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}$, $\gamma : ((z_1, z_2), (w_1, w_2)) \mapsto ((\alpha z_1, \alpha e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} z_2), (w_1, e^{2\pi\sqrt{-1}\theta'} w_2))$ とする、ただし $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. また $\hat{Z} := \{(z_1, z_2) ; (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}$ と $\hat{\gamma} : (z_1, z_2) \mapsto (\alpha z_1, \alpha e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} z_2)$ とする。これらに対し $M := Z/\langle \gamma \rangle$, $S := \hat{Z}/\langle \hat{\gamma} \rangle$ と定める。すると M は Hopf surface S 上の $\mathbb{P}^1$ -bundle. さらに

$$\omega := 2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\{\log(|z_1|^2 + |z_2|^2) + \log(|w_1|^2 + |w_2|^2)\}$$

と定める。 α , θ そして θ' を上手く選ぶことにより null foliation の M における closure の次元を 3 と出来る。次に Z への $G := \{e^{2\pi\sqrt{-1}t} ; t \in \mathbb{R}\}$ の作用を

$$g : ((z_1, z_2), (w_1, w_2)) \mapsto ((z_1, z_2), (w_1, e^{2\pi\sqrt{-1}t} w_2))$$

と定める。この作用は M への G の作用を induce し、

$$\mu((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = -\frac{|w_1|^2 - |w_2|^2}{|w_1|^2 + |w_2|^2}, \quad M_\eta = S, \quad \omega_\eta = 2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

となる。

2.2. Transformation formula and Duistermaat-Heckman measure. これより G は ℓ -torus とする。 $\eta_0 \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ を一つ fix する。 V を η_0 の開凸近傍とし、 fibration $\mu^{-1}(V) \rightarrow V$ 上に G -invariant connection を一つ定める。 $\eta \in V$ と η_0 を結ぶ線分の上にある horizontal curve で $p \in \mu^{-1}(\eta_0)$ を通るものをひく。すべての $\eta \in V$ に対しこれを行うことにより、 G -equivariant projection $\text{pr} : \mu^{-1}(V) \rightarrow \mu^{-1}(\eta_0)$ で、その制限 $\text{pr}|_{\mu^{-1}(\eta)} : \mu^{-1}(\eta) \rightarrow \mu^{-1}(\eta_0)$ が G -equivariant diffeo. であるようなものを得る。この diffeomorphism から同型

$$H^i(M_{\eta_0}, \mathbb{Z}) \cong H^i(M_\eta, \mathbb{Z}) \quad (2.1)$$

を得る。次に $\eta \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ に対し Γ_η で G_p , $p \in \mu^{-1}(\eta)$ によって生成される G の finite subgroup を表す。 $\Lambda_\eta := \{X \in \mathfrak{g} ; \exp X \in \Gamma_\eta\}$ とおき、主 G/Γ_η -bundle

$$q_\eta : \mu^{-1}(\eta)/\Gamma_\eta \rightarrow M_\eta \quad (2.2)$$

を考える。このとき $\mu^{-1}(\eta)/\Gamma_\eta$ は orbifold. S_{diff} で S -valued C^∞ function の germ の sheaf を表し、 bundle (2.2) に対応する $H^1(M_\eta, (G/\Gamma_\eta)_{\text{diff}})$ の元を ξ_η で表す。 $\mathfrak{g}_{\text{diff}}$ は fine だから short exact sequence $0 \rightarrow \Lambda_\eta \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow G/\Gamma_\eta \rightarrow 0$ より得られる long exact sequence から同型

$$\delta : H^1(M_\eta, G/\Gamma_\eta) \cong H^2(M_\eta, \Lambda_\eta)$$

が従う。 $\xi_\eta \in H^1(M_\eta, G/\Gamma_\eta)$ に対応する $\delta(\xi_\eta)$ を bundle (2.2) の **Chern class** と云う。(2.1) によりこれらは V 上一致するからこれを δ で表す。

Theorem 1.[NO] $\eta, \eta_0 \in V$ に対し

$$[\omega_\eta] = [\omega_{\eta_0}] + \langle \delta, \eta - \eta_0 \rangle \quad (2.3)$$

次に Duistermaat-Heckman measure に関する formula を与える。いま次の measure を考える：

$$\begin{aligned} dg &: \text{normalized Haar measure on } G \\ dX &: \text{the corresponding Lebesgue measure on } \mathfrak{g} \\ d\eta &: \text{the dual Lebesgue measure on } \mathfrak{g}^*. \end{aligned}$$

更に ψ を M 上の real $(n-r, n-r)$ -form とし volume form を dv_M とすると、 $Fdv_M = \frac{1}{r!}\omega^r \wedge \psi$ と書ける、ここで F は M 上の C^∞ 関数。 μ の properness から μ の下での $dm := \omega^r/r! \wedge \psi$ の push-forward $\mu_*(dm)$ は $\mathfrak{g}^*$ の (signed) measure である。このとき

$$\mu_*(dm) = f d\eta$$

を満たす $\mathfrak{g}^*$ 上の locally integrable function f が存在する。 f は $\eta \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ において滑らかであり $f(\eta)$ は $\mu^*d\eta$ による dm の quotient である。これらの下で：

Theorem 2.[NO]

$$f(\eta) = \int_{M_\eta} \frac{1}{(r-\ell)!} \omega_\eta^{r-\ell} \wedge \psi.$$

次にこれとは別の定式化を行う。 Z を M の r -dimensional closed complex submanifold で各 $\eta \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ において null foliation D と transversal に交わるものとする。 $Z_\eta := Z \cap \mu^{-1}(\eta)/G$ とおき $d\xi$ で $\omega^r/r!$ で定められる Z 上の measure を表す。すると μ の下での $d\xi$ の push-forward $\mu_*(d\xi)$ は $\mu(Z)$ 上の (signed) measure を定める。このとき $\mu_*(d\xi) = \tilde{f}d\eta$ を満たす $\mathfrak{g}^*$ 上の locally integrable function $\tilde{f}$ が存在する。

Theorem 3.[NO]

$$\tilde{f}(\eta) = \int_{Z_\eta} \frac{1}{(r-\ell)!} \omega_\eta^{r-\ell}. \quad (2.4)$$

更に $\mu_*(\omega^r/r!)$ により定められる measure は degree $\leq (r-\ell)$ の piecewise polynomial である。

Remark. Theorem 3 は chain や cycle でも成立する。より一般に、必ずしも closed ではない埋め込まれた部分多様体 Z であってその閉方 $\bar{Z}$ が Z と同次元であり境界 $\bar{Z} \setminus Z$ が zero r -dimensional measure を持つものでも成立する。

2.3. Localization Formula. $X \in \mathfrak{g}$ を fix し M^G で $X \in \mathfrak{X}(M)$ の zero set を表し、 $\pi: E \rightarrow M^G$ を M における M^G の normal bundle とする。 $\iota: M^G \hookrightarrow M$ を inclusion とする。 X の linearization は fiber preserving automorphism $LX: E \rightarrow E$ を induce する。 M 上の G -invariant Riemannian metric g_M を fix する。 E 上の接続 D を選び Ω を curvature matrix とする。

Theorem 4.[NO] Theorem 2 の notation の下で、 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を E への LX の作用の different weight とする。このとき $\langle X, \lambda_j \rangle \neq 0, j = 1, \dots, m$ である $X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に対して

$$\int_M e^{\mu_X} e^\omega \wedge \psi = \int_{M^G} \frac{e^{\iota^* \mu_X} e^{\iota^* \omega} \wedge \psi}{\det(\frac{LX + \Omega}{2\pi\sqrt{-1}})}.$$

更に push-forward measure $\mu_*(dm)$ は class $[\omega]$ のみに依存する。

Theorem 5.[NO] Theorem 3 の notation の下で

$$\int_Z e^{\mu_X} e^\omega = \int_{Z^G} \frac{e^{\iota^* \mu_X} e^{\iota^* \omega}}{\det(\frac{LX + \Omega}{2\pi\sqrt{-1}})},$$

ここで $Z^G := Z \cap M^G$. さらに push-forward measure $\mu_*(d\xi)$ は class $[\omega]$ のみに依存。

3. LOCALLY CONFORMAL SYMPLECTIC MANIFOLD

M^{2n} を可微分多様体、 ω を M 上の非退化 2 形式とする。
 任意の $x \in M$ に対し x の開近傍 $U \subset M$ と U 上の函数 $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$ で $d(e^{-\tau}\omega) = 0$ と成るものが存在するとき (M, ω) を **局所共形 symplectic** 多様体、以下 l.c.s. 多様体、と云う。この構造の局所表示に依らない特徴付けとして次が知られている：

Fact. (M, ω) が l.c.s. 多様体である事と $d\omega = \sigma \wedge \omega$ を満たす閉 1 形式 σ が存在する事は同値。

σ を Lee 形式と云う。この Lee 形式 σ が exact のとき、特に**大域共形 symplectic**(g.c.s.) と云う。この場合、 M には symplectic 構造が入る。以下では、特に断らない限り、l.c.s. 構造とは g.c.s. でないものを表す。また M が複素多様体で ω が局所的に Kähler 計量と共形的であるとき、**局所共形 Kähler**(l.c.K.) 多様体と云う。

Example. 接触多様体 (N, α) と S^1 に対し $M := S^1 \times N$, $\omega := \alpha \wedge \sigma + d\alpha$ と置くと (M, ω) は l.c.s. 多様体、但し $\sigma = d\theta$.

M 上の C^∞ 函数 f に対し f の **Hamilton** ベクトル場 X_f を $i(X_f)\omega = df - f\sigma$ により定める。このとき $C^\infty(M)$ から $\mathfrak{X}(M)$ へのこの対応は一对一である。
 Lie 群 G が M に ω を保つように作用しているとし、全ての $X \in \mathfrak{g}$ に対し X が μ_X の Hamilton ベクトル場と一致するようなものが存在すると仮定する。写像 $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ を

$$\langle X, \mu(p) \rangle = \mu_X(p), \quad p \in M$$

で定め**運動量写像**と云う。l.c.s. 多様体に対する運動量写像は（存在すれば）一意であり常に co-adjoint action に関し G -equivariant である。

Theorem 6.[No] (1) $\eta \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ に対し G_η は $\mu^{-1}(\eta)$ に properly 且つ freely に作用しているとする。更に $\iota_\eta^* \sigma = 0$ とする。このとき M_η は $\pi_\eta^* \omega_\eta = \iota_\eta^* \omega$ を満たす symplectic

form ω_η を唯一許容する。

(2) $0 \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ で isotropy subgroup G_0 は $\mu^{-1}(0)$ に properly and freely に作用しているとす。このとき M_0 は $\pi_0^*\omega_0 = \iota_0^*\omega$ と $\pi_0^*\sigma_0 = \iota_0^*\sigma$ を満たす locally conformal symplectic form ω_0 with Lee form σ_0 を唯一許容する。

上の Theorem は locally conformal symplectic structures を locally conformal Kähler structures にしても成立する。即ち (M, ω) を locally conformal Kähler manifold とすると:

Theorem 7.[No] (1) $0 \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ であり 0 での isotropy subgroup G_0 は $\mu^{-1}(0)$ に properly and freely に作用しているとす。 M_0 がコンパクトで σ_0 が d -exact で無いなら M_0 は Kähler metrics を許容しない。

(2) 各 $\eta \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ に対し $M_\eta = \mu^{-1}(\eta)/G_\eta$ は自然な complex structure を許容する。

この定理によって一般次元において Kähler 計量を許容しない複素多様体を構成できる。大きさが全て等しい $n+1$ 個の複素数 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ を fix する ($|\alpha_1| = \dots = |\alpha_{n+1}| > 1$)。 $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ への作用 $g: (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}; z^1, \dots, z^{n+1}) \mapsto (\alpha_1 z^1, \dots, \alpha_{n+1} z^{n+1})$ によって生成される巡回群による商空間を $\mathbb{C}H^{n+1} = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\langle g \rangle$ で表し **Hopf 多様体**と云う。良く知られた通り $\mathbb{C}H^{n+1}$ は可微分多様体としては $S^1 \times S^{2n+1}$ と同相であり、第一 Betti 数は 1。よって $\mathbb{C}H^{n+1}$ は Kähler 構造を許容しない (但し $n > 0$)。 $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ 上の非退化 2-形式の族

$$\omega_t = 2\sqrt{-1} \frac{\|z\|^{2t} \sum dz^j \wedge d\bar{z}^j + t\|z\|^{2(t-1)} (\sum \bar{z}^j dz^j) \wedge (\sum z^k d\bar{z}^k)}{\|z\|^{2(t+1)}}$$

を考える、ここで $t \in (-1, \infty)$ 。この形式は任意の t に対し $\langle g \rangle$ -不変であるから $\mathbb{C}H^n$ 上の l.c.s. (l.c.K.) 構造を定める。Lee 形式は

$$\sigma_t = -(1+t) \frac{\sum (z^j d\bar{z}^j + \bar{z}^j dz^j)}{\|z\|^2}.$$

と表される。整数 $a_1, \dots, a_{n+1}$ を選ぶ。 $S^1 = \{e^{\sqrt{-1}\theta}; \theta \in \mathbb{R}\}$ の $\mathbb{C}H^{n+1}$ の基本領域 $\{z = (z_1, \dots, z_{n+1}); 1 \leq \|z\| < |\alpha|\}$ への作用 $(e^{\sqrt{-1}\theta}; z^1, \dots, z^{n+1}) \mapsto (e^{a_1\sqrt{-1}\theta} z^1, \dots, e^{a_{n+1}\sqrt{-1}\theta} z^{n+1})$ を考える。このとき運動量写像 μ は

$$\mu(z^1, \dots, z^n) = -\frac{a_1|z^1|^2 + \dots + a_{n+1}|z^{n+1}|^2}{\|z\|^2}.$$

で与えられる。全ての $a_1, \dots, a_{n+1} \neq 0$ で、或る j, k で $a_j > 0, a_k < 0$ となれば $0 \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ となり、簡約空間 M_0 を得る。 J で $\mathbb{C}H^{n+1}$ の複素構造を表す。すると $\mathbb{C}H^{n+1}$ の各点において $\mathfrak{g} = J\mathfrak{g}^*$ であり S^1 の作用は自由であるから、 $\mathbb{C}H^{n+1}$ の複素構造 J は M_0 上の複素構造を誘導する。いま、簡約空間 M_0 の Lee 形式は作り方から完全とはならない。よって Theorem 7 (1) から M_0 は Kähler 構造を許容しない事が判る。以下で M_0 の構造を具体的に見ることにする。 $(a_1, \dots, a_{n+1})$ に対し得られる簡約空間 M_0 を $R(a_1, \dots, a_{n+1})$ で表す事にする。

$n = 1$ の場合。このとき $(a_1, a_2) = (1, -1)$ とすると $R(1, -1)$ は 1 次元複素トーラスでこのときは Kähler。

$n \geq 2$ の場合。 $R(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ (1 が k 個、 -1 が $n - k + 1$ 個、 $k \geq n - k + 1$) は $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n+1}$ のとき $\mathbb{C}P^{k-1} \times \mathbb{C}P^{n-k}$ 上の 1 次元複素トーラス $T_{\mathbb{C}}^1$ - 束。より詳しくは $\mathbb{C}P^{k-1} \times \mathbb{C}P^{n-k}$ 上の S^1 束があり、 $\mathbb{C}P^{k-1}$ と S^1 で S^{2k-1} 、 $\mathbb{C}P^{n-k}$ と S^1 で $S^{2n-2k+1}$ となる空間と S^1 の直積である (但しこれは $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ を上手く選んだ場合であり、一般には代数次元はより低いものとなる)。Betti 数は $b_{2k} = \dots = b_{2(n-k+1)} = 0$ で他は 1。特に $R(1, \dots, 1, -1) = \mathbb{C}H^n$ 。

REFERENCES

- [AM] R. Abraham and J.E. Marsden : *Foundations of Mechanics*, 2nd edition, Reading, Massachusetts, 1978
- [Bo] R. Bott : *A residue formula for holomorphic vector fields*, J. Diff. Geom., **1**, 311–330, 1967
- [DO] S. Dragomir and L. Ornea : *Locally conformal Kähler geometry*, Progress in Math. 155 (Birkhäuser, Boston, 1998)
- [DH1] J. Duistermaat and G. Heckman : *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*, Invent Math., **69**, 259–268, 1982
- [DH2] J. Duistermaat and G. Heckman : *Addendum to “On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space”*, Invent Math., **72**, 153–158, 1983
- [GS] V. Guillemin and S. Sternberg : *Symplectic techniques in Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984
- [HS] M. Hayase and H. Suzumiya : *preprint*
- [Hs] W.Y. Hsiang : *Cohomology Theory of Topological Transformation Groups*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **85**, Springer, New York, 1975
- [Ko1] S. Kobayashi : *Fixed points of isometries*, Nagoya Math. J., **13**, 63–68, 1958
- [Ko2] S. Kobayashi : *Transformation Groups in Differential Geometry*, Ergebnisse de Math. 70 (Springer, Berlin, 1972)
- [LM] P. Libermann and C-M. Marle : *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, D. Reidel Publishing Company, Hlland, 1987
- [Ma] T. Mabuchi : *An algebraic character associated with the Poisson bracket*, Adv. stud. Pure Math., **18**, Tokyo and Boston, Kinokuniya and Academic Press, 339–358, 1990
- [MW] J.E. Marsden and A. Weinstein : *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Reports on Math. Phys, 5, 121–130, 1974
- [No] T. Noda : *Reduciton of locally conformal symplectic manifolds with examples of non-Kähler manifolds*, preprint
- [NO] T. Noda and M. Oda : *Duistermaat-Heckman theorem for presymplectic manifolds*,
- [Va1] I. Vaisman : *On Locally Onformal Almost Kähler Manifolds*, Israel J. Math. 24, 338–351, 1976
- [Va2] I. Vaisman : *Locally Conformal Symplectic Manifolds*, Internat. J. Math. & Math. Sci. vol 8 No 3, 521–536, 1985