非可換複素射影空間と Hochschild 次元*

上村　新吾[†]
慶應義塾大学大学院理工学研究科数理

2002 年 9 月 13 日

* 『量子化の幾何学 2』於早稲田大
[†]kamimura@math.keio.ac.jp

1　序

今回の話しは殆ど代数である。特に、q-変形ではない量子群とその次元についての話しである。

$$\{\text{ 代数 }\}\supset\{Hopf\text{ 代数 }\}\supset\{\text{ 量子群 }\}\begin{cases}\supset\{q\text{-変形 }\}\\ \supset\{\theta\text{-変形 }\}\end{cases}$$

ここでは量子群という言葉を、非可換かつ非余可換な Hopf 代数という意味で使っている。古典空間の非可換化にはいくつかの流儀があるが、今回の話しは歪対称行列 $\theta\in Sk(n;\mathbf{R})$ による θ-変形についてである。まずは簡単にその変形の流れを q-変形と比較してみよう。

$$q\in\mathbf{R}^\times(\subset\mathbf{C}^\times)\longrightarrow\text{標準的 }R\text{-行列 }R_0(q)\longrightarrow M_q\longrightarrow G_q$$

$$\theta\in Sk(n;\mathbf{R})\longrightarrow R\text{-行列 }R(\theta)\longrightarrow C^{alg}(M_\theta)\longrightarrow C^{alg}(G_\theta)$$

いずれも Yang-Baxter 方程式の解を変形因子とし、そこから Hopf 代数を得るところは全く同じである。ただ、q-変形は下部構造の古典空間そのものの変形であるのに対して、θ-変形の方は上部構造の座標環の変形であるという違いはある。

≀

しかしそれ以上にもっと大きな違いがある。例えば次元について言うと、q-変形の方は古典群のそれに対して退化するということがしばしば起こる。この次元の退化現象については色々な説明が試みられてはいるが、あまり上手くいっていないようである。

≀

ここで言う次元とは、代数の Hochschild（コ）ホモロジー群もしくは巡回（コ）ホモロジー群の（コ）ホモロジー次元である Hochschild 次元のことであり、言うまでもなく、可換代数すなわち自明な変形の場合には古典空間の通常の次元と一致するようなものである。

≀

非可換トーラスの例からもわかるように、歪対称行列による θ-変形は極めて自然なものである。A.Connes と M.Dubois-Violette は

QA/0107070 v4

において、$C^{alg}(\mathbf{R}^n_\theta)$ から出発し、$C^{alg}(S^n_\theta)$ や $C^{alg}(T^n_\theta)$ などを統一的に定義した。またいくつかの古典群 G に対しても、$C^{alg}(G_\theta)$ を定義した。

≀

一般に古典空間 M^n の θ-変形 M^n_θ は、Hochschild 次元を変えない。ここが他の変形と大きく異なるところである。

≀

今回は複素射影空間の等質空間表示を手掛かりにして、その θ-変形を考える。

2　$C^{alg}(P_\theta^n(\mathbf{C}))$

2.1　Hopf 代数

先に述べたように古典群の θ-変形は Hopf 代数として定義される。当然、等質空間の θ-変形も Hopf 代数の構造を持つべきであろう。Hopf 代数に不慣れな人は、取り敢えず群環を思い浮かべてもらえればよい。

復習 2.1.1 (Hopf 代数) G を群、$\mathbf{C}[G]$ をその $\mathbf{C}$ 上の群環、すなわち G が生成する $\mathbf{C}$ 上の自由加群とする。このとき、$\mathbf{C}[G]$ の *Hopf* 代数としての構造は次のような $\mathbf{C}$-線形射によって特徴付けられていた。

代数

$$m : \mathbf{C}[G] \otimes \mathbf{C}[G] \longrightarrow \mathbf{C}[G] \quad \textbf{（積）}$$

$$m : \left(\sum_{x \in G} a_x x\right) \otimes \left(\sum_{y \in G} b_y y\right) \longmapsto \sum_{z \in G} \left(\sum_{xy=z} a_x b_y\right) z$$

$$u : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}[G] \quad \textbf{（単位射）}$$

$$u : a \longmapsto a 1_{\mathbf{C}[G]}$$

余代数

$$\Delta : \mathbf{C}[G] \longrightarrow \mathbf{C}[G] \otimes \mathbf{C}[G] \quad \textbf{（余積）}$$

$$\Delta : \sum_{x \in G} a_x x \longmapsto \sum_{x \in G} a_x (x \otimes x)$$

$$\varepsilon : \mathbf{C}[G] \longrightarrow \mathbf{C} \quad \textbf{（余単位射）}$$

$$\varepsilon : \sum_{x \in G} a_x x \longmapsto a_e$$

双代数

更にΔとεは $\mathbf{C}$-**代数射**でもある。

Hopf 代数

$$S : \mathbf{C}[G] \longrightarrow \mathbf{C}[G] \quad \textbf{（対合射）}$$

$$S : \sum_{x \in G} a_x x \longmapsto \sum_{x \in G} a_x (x^{-1})$$

2.2 $C^{alg}(G_\theta)$

まず最初に歪対称行列 θ に付随する R-行列 $R(\theta)$ を使って、行列環の θ-変形を定義する。

定義 2.2.1 ($C^{alg}(M_\theta(2n;\mathbf{R}))$) $C^{alg}(M_\theta(2n;\mathbf{R}))$ を $4n^2$ 個の元

$$a^\mu_\nu,\ b^\mu_\nu,\ \bar{a}^\mu_\nu,\ \bar{b}^\mu_\nu \quad (\mu,\nu=1,\ldots,n)$$

によって生成される $\mathbf{C}$ 上の $*$-双代数として定義する。まず、

$$A:=(a^\mu_\nu),\quad B:=(b^\mu_\nu)$$

に対して、

$$A^*:=\bar{A},\quad B^*:=\bar{B}$$

*-構造を入れる。次に、$2n\times 2n$ 行列

$$L=(L^r_s):=\begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A}\end{pmatrix}、$$

すなわち

$$L^\mu_\nu=a^\mu_\nu,\ L^\mu_{\bar{\nu}}=b^\mu_\nu,\ L^{\bar{\mu}}_\nu=\bar{b}^\mu_\nu,\ L^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}},\ \bar{a}^\mu_\nu \quad (\bar{\mu}:=\mu+n)$$

に対して、**余積**と**余単位射**を

$$\Delta(L^r_t)L^r_s\otimes L^s_t,\quad \varepsilon(L^r_s)=\delta^r_s$$

で定義する。

　更に**関係式**として、

$$L^r_{r'}L^s_{s'}R(\theta)^{r's'}_{pq}=R(\theta)^{rs}_{p'q'}L^{p'}_pL^{q'}_q$$

を要請する。ここに $R(\theta)$ は、

$$R(\theta)^{\mu\nu}_{\tau\rho}=R(\theta)^{\bar{\mu}\bar{\nu}}_{\bar{\tau}\bar{\rho}}=\lambda^{\mu\nu}\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\tau}$$

$$R(\theta)^{\mu\bar{\nu}}_{\bar{\tau}\rho}=R(\theta)^{\bar{\mu}\nu}_{\tau\bar{\rho}}=\lambda^{\nu\mu}\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\tau}$$

$$\lambda^{\mu\nu}=e^{\sqrt{-1}}\theta_{\mu\nu},\quad (\theta_{\mu\nu})\in Sk(n;\mathbf{R})$$

であり（それ以外の成分はゼロとする）、**Yang-Baxter 方程式**

$$(R(\theta)\otimes I)(I\otimes R(\theta))(R(\theta)\otimes I)$$

$$(I\otimes R(\theta))(R(\theta)\otimes I)(I\otimes R(\theta))$$

$$R(\theta)\in End(\mathbf{C}^{2n}\otimes\mathbf{C}^{2n}),\quad I\in End(\mathbf{C}^{2n})$$

を満たす R-行列である。

ここから様々な古典群の θ-変形を引き出すわけだが、それにはまず**行列式の θ-変形**を定義したくなるのが普通だろう。しかし今回は、時間がないので性質だけ述べるにとどめ、別の方法を採用することにする。

性質 2.2.2 (det_θ)

$$det_{\theta,n} \in C^{alg}(M_\theta(2n;\mathbf{R}))$$

$$\Delta(det_{\theta,n}) = det_{\theta,n} \otimes det_{\theta,n}, \quad \varepsilon(det_{\theta,n}) = 1$$

$$det_{\theta,n} \in Z(C^{alg}(M_\theta(2n;\mathbf{R}))), \quad (det_{\theta,n})^* = det_{\theta,n}$$

以下、

$$C^{alg}(O_\theta(2n)) \longrightarrow C^{alg}(U_\theta(n)) \longrightarrow C^{alg}(P_\theta^n(\mathbf{C}))$$

という流れで話しを進める（勿論、完全系列ではない）。まず、**内積を保つ**ということを定式化すればよい。

定義 2.2.3 ($C^{alg}(O_\theta(2n))$) $C^{alg}(M_\theta(2n;\mathbf{R}))$ において、

$$\sum_{\mu=1}^{n}(\bar{a}_\alpha^\mu a_\beta^\mu + b_\alpha^\mu \bar{b}_\beta^\mu) - \delta_{\alpha\beta}1$$

$$\sum_{\mu=1}^{n}(\bar{a}_\alpha^\mu b_\beta^\mu + b_\alpha^\mu \bar{a}_\beta^\mu)$$

$$\sum_{\mu=1}^{n}(\bar{b}_\alpha^\mu a_\beta^\mu + a_\alpha^\mu \bar{b}_\beta^\mu)$$

たちで生成される両側イデアルを $\mathcal{I}$ とする。この商代数を

$$C^{alg}(O_\theta(2n)) := C^{alg}(M_\theta(2n;\mathbf{R}))/\mathcal{I}$$

と定義する。これは $*$-*Hopf* 代数である。

次に、**複素構造と可換**であるということを定式化すればよい。

定義 2.2.4 ($C^{alg}(U_\theta(n))$) 先の商写像

$$\pi : C^{alg}(M_\theta(2n;\mathbf{R}))\longrightarrow C^{alg}(O_\theta(2n))$$

に対して、

$$\pi(b^\mu_\nu),\quad \pi(\bar{b}^\mu_\nu)$$

の生成する両側イデアルを $\mathcal{J}$ とする。この商代数をもって

$$C^{alg}(U_\theta(n)) := C^{alg}(O_\theta(2n))/\mathcal{J}$$

と定義する。

ここまでが Connes たちの話しである。ここからは等質空間の θ-変形を試みる。

2.3 H_θ

群 G が空間 X に作用するときは、

$$\alpha : G \times X \longrightarrow X$$

という写像を考えた。これを上部構造で考えると、関数環の余作用すなわち関数環上の余加群の理論になる。

簡単のため G, X を有限とすると、作用

$$\alpha : G \times X \longrightarrow X$$

は、左余作用

$$\beta : Map(X; \mathbf{C}) \longrightarrow$$

$$Map(G \times X; \mathbf{C}) = Map(G; \mathbf{C}) \otimes Map(X; \mathbf{C})$$

を自然に引き起こす。この例からも上記の事情は了解されよう。

定義 2.3.1 (余作用) (C,Δ,ε) を余代数、V をベクトル空間とする。このとき、線形写像

$$\Delta_L : V \longrightarrow C \otimes V$$

が C の V への左余作用であるとは、

$$(\Delta \otimes id_V) \circ \Delta_L = (id_C \otimes \Delta_L) \circ \Delta_L, \quad (\varepsilon \otimes id_V) \circ \Delta_L = id_V$$

を満たすときを言う。このとき、V を**左** C**-余加群**と言う。

更に V が代数のときは、左余作用が代数射であることを要求する。

また、V の**左** C**-不変**な元全体を

$${}^{C}V := \{v \mid \Delta_L(v) = 1_C \otimes v\}$$

と書くことにする。

以下の**対応**を念頭においていく。

$$U(n)/(U(1)\times U(n-1))$$

$$\Longleftrightarrow {}^{(C^{alg}(U_{\theta'}(1))\otimes C^{alg}(U_{\theta''}(n-1)))}C^{alg}(U_\theta(n))$$

等質空間においては**群**の間の**包含写像**に関しては自明であるが、その上部構造である**代数**の間の**制限写像**に関してはそうでもない。

補題 2.3.2 (制限写像)

$$a^{\mu}_{\nu},\ b^{\mu}_{\nu}\in C^{alg}(M_{\theta}(2n;\mathbf{R}))$$

に対して、**関係式**

$$a^1_1=1,\ b^n_n=0,\ a^n_i=a^i_n=b^1_i=b^i_1=0\quad(2\leq i)$$

または

$$a^n_n=1,\ b^n_n=0,\ a^n_i=a^i_n=b^n_i=b^i_n=0\quad(i\leq n-1)$$

によって**生成**される $*$**-Hopf イデアル**をそれぞれ I, J とする。このとき、商写像

$$C^{alg}(M_{\theta}(2n;\mathbf{R}))\longrightarrow C^{alg}(M_{\theta}(2n;\mathbf{R}))/I$$

および

$$C^{alg}(M_{\theta}(2n;\mathbf{R}))\longrightarrow C^{alg}(M_{\theta}(2n;\mathbf{R}))/J$$

は、全射

$$C^{alg}(M_{\theta}(2n;\mathbf{R}))\longrightarrow C^{alg}(M_{\theta}(2(n-1);\mathbf{R}))$$

を誘導し、かつ

$$det_{\theta,n}\longmapsto det_{\theta',n-1}$$

が成り立つ。ここに、

$$\theta=\begin{pmatrix}\theta' & *\\ * & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & *\\ * & \theta'\end{pmatrix}\ \in Sk(n;\mathbf{R})$$

$$\theta' \in Sk(n-1;\mathbf{R})$$

である。

したがって、**全射 $*$-Hopf 代数射**

$$\alpha_n : C^{alg}(U_\theta(n)) \longrightarrow C^{alg}(U_{\theta'}(n-1))$$

$$\beta_n : C^{alg}(U_\theta(n)) \longrightarrow C^{alg}(U_{\theta'}(n-1))$$

を誘導する。

命題 2.3.3 (($C^{alg}(U_{\theta'}(1)) \otimes C^{alg}(U_{\theta''}(n-1))$ の左余作用) $\gamma_{n,1}$ を

$$\gamma_{n,1} := ((\alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_n) \otimes \beta_n) \circ \Delta$$

とおく。このとき、

$$\gamma_{n,1} : C^{alg}(U_\theta(n)) \longrightarrow (C^{alg}(U_{\theta'}(1)) \otimes C^{alg}(U_{\theta''}(n-1))$$

は**全射 $*$-Hopf 代数射**であり、

$$(\gamma_{n,1} \otimes id_{U_\theta(n)}) \circ \Delta :$$

$$C^{alg}(U_\theta(n)) \longrightarrow (C^{alg}(U_{\theta'}(1)) \otimes C^{alg}(U_{\theta''}(n-1)) \otimes C^{alg}(U_\theta(n))$$

が求める左余作用である。

定義 2.3.4 ($C^{alg}(P^n_\theta(\mathbf{C}))$) 上の左余作用を用いて

$$C^{alg}(P^n_\theta(\mathbf{C})) :=^{(C^{alg}(U_{\theta'}(1)) \otimes C^{alg}(U_{\theta''}(n-1)))} C^{alg}(U_\theta(n))$$

と定義する。

以上複素射影空間を中心に話しをしたが、複素 Grassmann 多様体や複素固有旗多様体などの場合についても同様に定義出来ることはもうおわかり頂けよう。勿論、実の場合も同様である。例えば $\gamma_{n,1}$ を一般化して、

定義 2.3.5 **(**$C^{alg}(Gr_\theta^{n,k}(\mathbf{C}))$**)**

$$\gamma_{n,k} := ((\alpha_{k+1}\circ\cdots\circ\alpha_n)\otimes(\beta_{n-k+1}\circ\cdots\circ\beta_n))\circ\Delta$$

とおいてやると、左余作用

$$\gamma_{n,k}\otimes id_{U_\theta(n)})\circ\Delta :$$

$$C^{alg}(U_\theta(n))\longrightarrow(C^{alg}(U_{\theta'}(k))\otimes C^{alg}(U_{\theta''}(n-k))\otimes C^{alg}(U_\theta(n))$$

が得られる。

3 Hochschild 次元

代数が与えられると、その元と汎関数と対合が考えられる。元（例えば冪等元や可逆元）の方は K_*-群とホモロジー Chern-Connes 指標を経由して巡回ホモロジー群の元を定める。一方、汎関数（例えばトレースや高階トレース）の方は、その持ち上げの曲率を経由して巡回コホモロジー群における Connes 類を定める。ここで改めて対合を考えるのが指数理論に他ならない。

今回はその前段階として、非可換代数の下部構造としての非可換多様体の次元について考えることにする。非可換代数の Hochschild（コ）ホモロジー群の（コ）ホモロジー次元である Hochschild 次元は、その候補である。

定義 3.0.6 (Hochschild ホモロジー) まず、$\mathbf{C}$-代数 $\mathcal{A}$ を用意する。

$$\mathcal{A}_n := \mathcal{A}^{\otimes(n+1)}$$

とおいて、**Hochschild 微分** $\partial_n : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}_{n-1}$ を

$$\begin{aligned} &\partial_n(A^0 \otimes \cdots \otimes A^{n-1} \otimes A^n) \\ := &\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i A^0 \otimes \cdots \otimes A^i A^{i+1} \otimes \cdots \otimes A^n \\ &+(-1)^n (A^n A^0 \otimes \cdots \otimes A^{n-1}) \end{aligned}$$

で定義する。

この複体 $(\mathcal{A}_*, \partial_*)$ のホモロジー群 $H_*(\mathcal{A}; \mathcal{A})$ が、$\mathcal{A}$ 自身を両側 $\mathcal{A}$-加群とする $\mathcal{A}$ の *Hochschild* ホモロジー群である。簡単のため、$HH_*(\mathcal{A})$ と書くことにする。

定義 3.0.7 (Hochschild 次元) $HH_*(\mathcal{A})$ のホモロジー次元を

$$dim_{HH}(\mathcal{A})$$

と書き、$\mathcal{A}$ の *Hochschild* 次元と言う。

注意 3.0.8 (可換多様体の Hochschild 次元) 閉多様体 M に対しては、

$$dim_{HH}(C^\infty(M)) = dim(M)$$

が成り立っている。

定理 3.0.9 ($C^\infty(P_\theta^n(\mathbf{C}))$ の Hochschild 次元)

$$dim_{HH}(C^\infty(P_\theta^n(\mathbf{C}))) = dim(P^n(\mathbf{C}))$$

証明には分裂写像

$$C^\infty(P_\theta^n(\mathbf{C}))\longrightarrow C^\infty(P^n(\mathbf{C})\times T_\theta^n) = C^\infty(P^n(\mathbf{C}))\widehat{\otimes}C^\infty(T_\theta^n)$$

$$z_\theta^i\longmapsto z^i\otimes U^i$$

および

$$C^\infty(P^n(\mathbf{C}),\quad C^\infty(T_\theta^n)$$

の射影分解を使って、Hochschild ホモロジー群の Künneth 系列を追ってやればよい。

Fréchet 構造は、標準的なトーラス作用でいれてやる。

また、先の挙げた他の等質空間たちについても同様の定理が証明される。