Gerbe のことはしりませんが、string class と関係があって、ゲージを $mathcalA_R$ の上で考えるか ΩM の上で考えるかの違いのような気がしますので、loop group bundle についての結果をまとめてみました。それから torso や gerbe と以前やっていた non abelian de Rham theory とは関係がりそうなので、それもまとめて見ました．参考になれば幸いです。

StringClass: M はパラコンパクトで C^∞-smooth（C^∞-class function で 1 の分解が出来る。有限次元多様体やヒルベルト多様体なら良い）、$\xi = \{g_{UV}\}$ を M 上の $G = U(n)$-bundle (n は任意）とします。

U を M の開集合とし $f : U \to \mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ は G またはそのリー環　等、としたとき $f^\Omega : \Omega U \to \Omega\mathcal{G}$ を

$$(f^\Omega(\gamma))(t) = f(\gamma(t)), \quad \gamma \in \Omega U, \quad t \in S^1,$$

とし、ξ から誘導される ΩM 上の $\Omega\mathcal{G}$-bundle ξ^Ω を $\xi^\Omega = \{g^\Omega_{UV}\}$ で定義します（開被覆についての議論は [3] を見てください）。特に ξ が M の接バンドルであれば ξ^Ω は ΩM の接バンドルになります。

$\mathbf{f} : X \to \Omega\mathcal{G}$ があれば　$\mathbf{f}^\natural : X \times S^1 \to \mathcal{G}$ を

$$\mathbf{f}^\natural(x, t) = (\mathbf{f}(x))(t), \quad x \in X,\ t \in S^1,$$

で定義します。これから X 上の ΩG-bundle $Xi = \{\mathbf{g}_{UV}\}$ にたいし $X \times S^1$ 上の G-bundle $\Xi^\natural$ を $\{\mathbf{g}^\natural_{UV}\}$ で定義できます.

String class は loop group bundle Ξ の特性類で $\Xi^\natural$ の Chern character $Ch(\Xi^\natural)$ をつかって

$$\tilde{c}^p(\Xi) = (2\pi i)^{p+1}(p+1)! \int_{S^1} Ch^{p+1}(\Xi^\natural),$$

で定義します。直接 Ξ の接続・曲率（これらは G-bundle の場合と同じように定義されます）$\{A_U\}, \{F_U\}$ で表すには　最初に

$$\int_0^1 tr(F_u^p \cdot \mathbf{g}'_{UV}\mathbf{g}_{UV}^{-1})dt = B_V - B_U,$$

と書けることを示します（$\mathbf{g}'$ は loop 変数 t についての微分)。また

$$d(\int_0^1 tr(F_U^p \mathbf{g}'_{UV}\mathbf{g}_{UV}^{-1})dt = \int_0^1 tr(F_V^p \wedge A'_V)dt - \int_0^1 tr(F_u^p \wedge A'_U)dt,$$

となりこの右辺の項は閉形式（の差）ですから $(2p+1)$-closed form

$$\int_0^1 tr(F_U^p \wedge A'_U)dt - dB_U,$$

は X の上で定義され　これのド・ラム類が（一般次元の場合も含めて）string class です。ただし　これは　有理形式ですから　中心拡大との関係では　$\tilde{c}^1(\Xi)=0$ からは　Ξ がリー環の中心拡大（Kac-Moody algebra）に値をとる接続を持つ　というところまでしか言えません.

最初の定義式を使えば、ξ^Ω の string class が $Ch(\xi)$ の transgression image になることが分かります。ΩM の string class は接バンドルの string class ですから、M の Chern class (Pontrjagin class) の transgression image になります。

Loop group bundle の　特性写像は　$g : X \to G$ です。　g と Ξ の対応は具体的にあたえられますが、省略します（[1] にかいてあります）。g による $H^*(G,\mathbb{Z})$ の生成元の引き戻しは

$$-(2\pi i)^{p+1}\frac{(2p+1)!}{(p+1)!}tr((g^{-1}dg)^{2p+1}),$$

のド・ラム類ですが、この事をつかうと string class は g による $H^*(G,\mathbb{Z})$ の生成元の引き戻しになることが分かります（この証明はカレントの計算を使うので、いやなのですが、ほかの証明は知りません）.

Non abelian de Rham theory: 今までの議論では　bundle だけを考えているので、string class は integral class（g は一価）ですが、bundle の概念を拡張した　non abelian de Rham theory を使うと多価の g にたいして同様の議論が出来ます.

$G=GL(n,\mathbb{C})$ のときの non abelian de Rham theory は G_t, G_d を定数　および微分可能な G-valued function の芽の層、$\mathcal{M}^1$ を $d\theta+\theta\wedge\theta=0$ となる行列値関数の芽の層　$\rho(g)=g^{-1}dg$ として得られる完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{G}_t \longrightarrow \mathrm{G}_d \xrightarrow{\rho} \mathcal{M}^1 \longrightarrow 0,$$

(およびこれと chiral な $d\theta-\theta\wedge\theta=0$ となる行列値形式の芽の層と写像 $dg\cdot g^{-1}$ から得られる完全列）に関するコホモロジー論です。荒く言って　この完全列からコホモロジーの「完全列」

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow H^0(M,\mathrm{G}_t) \longrightarrow H^0(M,\mathrm{G}_d) \xrightarrow{\rho} H^0(M,\mathcal{M}^1) \xrightarrow{\delta}\\
&\longrightarrow H^1(M,\mathrm{G}_t) \xrightarrow{\rho^*} H^1(M,\mathrm{G}_d) \longrightarrow H^1(M,\mathcal{M}^1) \xrightarrow{\delta}\\
&\longrightarrow H^2(M,\mathrm{G}_t) \longrightarrow H^2(M,\mathrm{G}_d) \xrightarrow{\rho^*} H^2(M,\mathrm{M}^1),
\end{aligned}$$

がえられます（$\mathcal{M}^1$ は群の層でもないので、完全列といっても $kernel=image$ の意味です。また　正しくは Bockstein map δ を通るたびに右手系と左手系が交代します)。$\mathcal{M}^1$ には　$mathrmG_d$ が gauge action で作用するので、torso (gerbe) に近い感じです。

$H^0(M,\mathcal{M}^1)$ は　大域的可積分接続の集合で $H^1(M,\mathcal{G}_t) \cong Hom(\pi_1(M),G)$ で、$\delta(\theta)$ は微分方程式 $dg = g\theta$ の monodromy （表現）になります．従って $\delta : H^0(M,\mathcal{M}^1) \to H^1(M,\mathrm{G}_t)$ は Riemann-Hilbert 対応です。また $tr(\theta^{2p-1}$ は閉形式で,$dg = g\theta$ が M 上で、解をもてば、この形式のド・ラム類（$\times(2\pi i)^{p-1}(2p-1)!/(p-1)!$) が integral class になります。

$H^1(M,\mathrm{M}^1)$ の元 $\{\omega_{UV}\}$ は $\omega_{UV} = g_{UV}^{-1}dg_{UV}$ と書いたとき

$$g_{UV}g_{VW}g_{WU} = c_{UVW}, \text{ constant},$$

となります（このコホモロジー集合と gerbe のコホモロジー論とは関係がありそうです)。また

$$\omega_{UV} = A_V - g_{UV}^{-1}A_U g_{UV},$$

となる１－形式の族 $\{A_U\}$ が存在します。$\{g_{UV}\}$ がバンドルをきめていれば、$\{A_U\}$ は接続形式ですから、上の分解は接続の一般化で、これから曲率形式を定義すれば、Chern class（の拡張）が定義できますが、一般には integral class にはなりません。

$H^1(M,\mathcal{M}^1)$ の元にたしてもバンドルのときと同様に ΩM 上の ΩG にかんする１次元非アーベル　ド・ラム集合へのリフトができます。そこでバンドルのときと同じ議論をすれば（ΩG について G の場合と同じような完全列とそのコホモロジー集合を作って）non integral な string class がえられます ([1])。またこのことから $H^1(M,\mathcal{M}^1)$ の元はグラスマンへの多価写像と解釈できます。

$H^2(M,\mathcal{M}^1)$ は定義が複雑で、今のところ意味がわかっていません。群の層についてはアーベルでなくても３次元まではなんとか定義できるようですが、どう使うのか知りません（２次元のコホモロジー集合も意味がわかりません）.

Supplement: V を G の表現空間とすると $L^2(S^1)\otimes V$ は ΩG の表現空間ですから Ωg-bundle $\Xi = \{\mathbf{g}_{UV}\}$ に associate した $L^2(S^1)\otimes V$-bundle ができます。sokode $\Omega\mathfrak{g}$-valued 1-form $\mathbf{A}_U$ が

$$(\frac{1}{i}\frac{d}{dt} + \mathbf{A}_U)\mathbf{g}_{UV} = \mathbf{g}_{UV}(\frac{1}{i}\frac{d}{dt} + \mathbf{A}_V),$$

をみたすとき $\{\mathbf{A}_U\}$ を Ξ の $1/id/dt$ にかんする接続と定義します。この時 $1/id/dt + \mathbf{A}_U$ の spectre は U に関係しませんから

$$\eta(\mathbf{A}_U)(x) = \eta(\frac{1}{i}\frac{d}{dt} + \mathbf{A}_U(x))(0), \quad x \in U,$$

は M 上の関数で　$1/id/dt+\mathbf{A}_U(x)$ が 0-mode を持っているところで、不連続になり、その微分は M-上の閉形式になり　そのド・ラム　クラスは Ξ で決まります。Distribution の意味で微分すれば $d\eta(\mathbf{A}_U)$ は $Y=\{x|ker(\frac{1}{i}\frac{d}{dt}+\mathbf{A}_U)\neq\{0\}\}$ に support があります。

Ξ の特性写像を $g:X\to G$ とすれば　g から $\mathbf{A}_U$ が計算でき、それを使うと

$$Y=\{x|det(g(x)-I)=0\},$$

が導かれます（例えば $G=SU(2)=S^3=X$ とすれば　恒等写像からきまるバンドルについては string class は一点の dual class で実現される）。g の固有値　1 の重複度によって各次数の string class を realize する subvariety (chain) を得ることも可能です ([3],[7]).

文献

String class に関するもの：

[1] Charcteristic classes of loop group bundles and generalized string class, Coll. Math. Soc. János Bolyai 56 (1992), 33-66,

[2] Non-Abelian cohomology and field theory, Seminari di Geometria 1991-1993, Univ. Bologna, 19-32.

[3] Spectral invariants and geometry of mapping spaces, Contemporary Math., 242 (1999), 189-202.

Non abelian de Rham theory に関するもの：

[4] Curvature forms with singularities and non-integral characteristic classes, Lect. Notes in Math., 1139 (1985), 152-168,

[5] Non Abelian de Rham Theory, Proc. Prospects of Math. Sci., 13-40, World Sci., 1988,

[6] Four Lectureas on Geometry of loop Group Bundles and Non Abelian de Rham Theory, Chalmers Univ. of Tech./The Univ. of Göteborg, 1990,

[7] Non-commutative de Rham theory and spectral monodromy, preprint.

[6] は [1] を詳しくした講義録、[2] は [1] の概略です。　[4] は $H^1(M,\mathcal{M}^1)$ の定義まで、$H^2(M,\mathcal{M}^1)$ の定義は [5](と [6]) にあります。Supplement は [7] に書いてありますが、概略は [3] にもあります。