４次元多様体の不変量
ー楕円曲面とそこから派生する例をめぐって

上　正明

楕円曲面やそれに関連する（楕円曲面と同相だが複素構造を持たない，またはそこから派生する）４次元多様体を中心に，Seiberg-Witten 不変量による判別に関する Survey.

1. Seiberg-Witten 不変量

X : ４次元閉多様体　s : X の spin^c 構造

$Fr \to X$	orthogonal frame bundle of X
$P_{\mathrm{spin}^c} \to X$	lift of Fr to a principal $\mathrm{spin}^c(4)$ bundle
$S_\pm \to X$	associated $\pm$ spinor bundle
$L = \det S_+ = \det s$	the determinant line bundle

X の Riemann 計量 g を１つとって

$\mathcal{A}(L)$:　L 上の connection 全体

$\Gamma(S_+)$:　S_+ の cross section 全体

q : $\quad \Gamma(S_+) \to \Omega^2_+(X)$,

$$\langle c(v)\psi, \psi\rangle_{S_+} = 4\langle v, q(\psi)\rangle_{\Omega^2_+(X)}$$

$c : \wedge^2_+ T^*X \Longrightarrow \mathrm{End}(S_+)$ 　　clifford 積

X 上の configuration space の元

$$(a,\psi)\in\mathcal{C}_X=\mathcal{A}(L)\times\Gamma(S_+)$$

に対する (perterbed) Seiberg-Witten 方程式

$$(SW)\qquad\begin{cases} F_A^+ + i\omega = q(\psi) \\ \mathcal{D}_A\psi = 0 \end{cases}$$

F_A^+　A の curvature F_A の self-dual part

ω　X の self-dual 2-form (perturbation)

$\mathcal{D}_A$　Dirac operator coupled with A

$\mathcal{B}_X(s)=\mathcal{C}_X(s)/\mathcal{G}_X$

$\mathcal{Z}_X(s)=\{(A,\psi)\in\mathcal{C}_X(s)|$SW 方程式をみたす$\}$

$\mathcal{M}_X(s)=\mathcal{Z}_X(s)/\mathcal{G}_X$ (Seiberg-Witten モジュライ空間)

ゲージ群 $\mathcal{G}_X=\mathrm{Map}(X,S^1)$ の作用

$$\varphi(A,\psi)=(A-2\varphi^{-1}d\varphi,\varphi\psi)\quad(\varphi\in\mathcal{G}_X)$$

$$\mathcal{B}_X^{irr}(s) = \{(A,\psi) \in \mathcal{C}_X(s) \mid \psi \not\equiv 0\}/\mathcal{G}_X$$

$$\mathcal{B}_X^{red}(s) = \{(A,\psi) \in \mathcal{C}_X(s) \mid \psi \equiv 0\}/\mathcal{G}_X$$

$\mathcal{M}_X^{irr}(s), \mathcal{M}_X^{red}(s)$ はそれぞれ既約，可約なSW 方程式の解からなる $\mathcal{M}_X(s)$ の部分空間.

Fact.

$H_2^{\pm}(X)$ maximal positive (negative) definite subspace of $H^2(X, \mathbf{R})$

$b_2^{\pm}$ $= \dim H_2^{\pm}(X)$

- $\mathcal{M}_X(s)$ はコンパクト.
- $b_2^+(X) > 0$ ならばgenericな (g,ω) に対し，$\mathcal{M}_X^{red}(s) = \emptyset$，かつ $\mathcal{M}_X(s)$ は向き付け可能な有限次元多様体.
- $\dim \mathcal{M}_X(s) = (c_1(L)^2 - (2\chi + 3\sigma))/4$. ただし (χ, σ) はそれぞれ X のオイラー数，符号数.
- $\mathcal{M}_X(s)$ の向きは $\wedge^{top} H^1(X) \otimes \wedge^{top} H_+^2(X)$ のhomology orientationを指定すると定まる.

Definition (Seiberg-Witten(SW) 類と SW 不変量).

$$\widetilde{\mathcal{M}}_X(s) = \mathcal{Z}_X(s)/\mathcal{G}_X^0$$

$$\mathcal{G}_X^0 = \{g \in \mathcal{G}_X | g = id \text{ over } p\}$$

The principal S^1 bundle $\widetilde{\mathcal{M}}_X(s) \to \mathcal{M}_X(s)$ に付随する $\mathbf{C}$-bundle $\mathcal{L} \to \mathcal{M}_X(s)$ に対し

$$SW_X(s) = \langle c_1(\mathcal{L})^{d/2}, [\mathcal{M}_X(s)] \rangle$$

$(d = \dim \mathcal{M}_X(s))$，ただし $d/2$ が非負の整数でないときは $SW_X(s) = 0$ とおく

$SW_X(s)$ の同値な定義 ($d/2$ が非負の整数のとき)

X 上の $d/2$ 個の generic point $\Lambda = \{x_i\}$ と $\mathbf{C}$-linear surjection $\Phi_i : S_+|_{x_i} \to \mathbf{C}$ を generic に選ぶと

$$\mathcal{M}_X^\Lambda(s) = \{[A, \psi] \in \mathcal{M}_X(s) | \Phi_i(\psi(x_i)) = 0 \ (x_i \in \Lambda)\}$$

は符号つきの有限個の点．これに対して

$$SW_X(s) = \sharp \mathcal{M}_X^\Lambda(s) \text{ (符号付き点の個数)}$$

Definition. （SW 不変量）$L \in H^2(X, \mathbf{Z})$ に対し

$$SW_X(L) = \sum_{c_1(\det s) = L} SW_X(s)$$

Fact.

- $b_+^2(X) > 1$ならば, $SW_X(s), SW_X(L)$は(g,ω)によらずXの微分同相類の不変量(homology orientationからくる符号差をのぞく）.
- $SW_X(L) \neq 0$なる$L \in H^2(X, \mathbf{Z})$（XのSW類）は高々有限個.
- $b_+^2(X) = 1$ならば$SW_X(s)$は(g,ω)の取り方に依存する（Wall crossing formula)

以下簡単のため$b_+^2(X) > 1$の場合のみ考える.

Definition.

$$SW_X = \sum SW_X(L) e^L$$

形式的に$\mathbf{Z}[H^2(X, \mathbf{Z})]$の元とみなせる.

Fact. $\varphi : X_1 \to X_2$ diffeomorphism preseving the homology orientations of X_1 and X_2. Then

$$\varphi^* SW_{X_2} = SW_{X_1}$$

Remark. X の spin^c-構造 $s \iff (S_+, S_-, L)$ に対する SW 方程式の解 (A, ψ) に対し,

$$\overline{s} \iff (\overline{S}_+, \overline{S}_-, \overline{L})$$

（$S_\pm$, L の complex conjigate）に関して $(-A, -\psi)$ も SW 方程式をみたすことから

$$SW_X(s) = (-1)^{(\chi+\sigma)/4} SW_X(\overline{s})$$

$\Longrightarrow L \in H^2(X, \mathbf{Z})$ が SW 類ならば $-L$ もそう.

Xがある3次元多様体Nにより2つの部分に分かれる場合のSW不変量の記述

$$X = X_1 \cup_N X_2, \quad \partial X_1 = N,\ \partial X_2 = -N$$

（$N = S^3$ならば連結和分解に対応する.）

$$X = \widehat{X}_1 \sharp \widehat{X}_2, \quad \widehat{X}_i = X_i \cup D^4$$

X_iの代わりに$X_i \cup [0,\infty) \times N$上のSW moduli spaceを考えて貼り合わせ公式を求める.

以下cylindrical end $\widehat{N} = [0,\infty) \times N$をもつ4次元多様体$X = X_0 \cup \widehat{N}$, ($\partial X_0 = N$に$\widehat{N}$上product metric になるようなRiemann計量gを入れて考える.

spin^{c}構造の対応

$$\pi : \widehat{N} \to N$$

に対応して

$$\widehat{s}\ \widehat{N}\text{の}\mathrm{spin}^c\text{構造}\ \widehat{P} \to Fr_{\widehat{N}}$$

$$\Longleftrightarrow \ \text{(one-to-one)}$$

$$s\ N\text{の}\mathrm{spin}^c\text{構造}\ P \to Fr_N$$

$s : P \to Fr_N$ （P は pricipal $U(2) = \mathrm{spin}^c(3)$bundle over N）に付随する spinor bundle $S_N = P \times_{U(2)} \mathbf{C}^2$ に対し $N \cong \{t\} \times N \subset \widehat{N}$ への制限を介して

$$S_N \cong S_+|_{\{t\}\times N} \cong S_-|_{\{t\}\times N}$$

後者の同型は $J = \widehat{c}(dt)$ ($\widehat{c}$: Clifford multilication on $\widehat{N}$).

Fact. $\widehat{L} = \det \widehat{s}$ 上の connnection $\widehat{A}$ は $\widehat{N}$ 上の Gauge 変換で dt 成分のないものへ変換される (in temporal gauge). $\widehat{A}$ に同伴する Dirac 作用素を $\{t\} \times N$ に制限すると,

$$\mathcal{D}_{\widehat{A}} = J(\partial_t - \mathcal{D}_{A(t)}) \quad (A(t) = \widehat{A}|_{\{t\}\times N})$$

Definition. ((X,s)に対するSW moduli space)

- $\mathcal{C}_X = \mathcal{A}(L) \times \Gamma(S_+)$
- $\mathcal{Z}_X(s) = \{(A,\psi) \in \mathcal{C}_X \mid (SW)^4 \ \int_X |F_A|^2 < \infty \text{ (finite energy)}\}$
- $\mathcal{M}_X(s) = \mathcal{Z}_X(s)/\mathcal{G}_X$

Definition.

$$j^* : H^2(X_0, \partial X_0, \mathbf{Z}) \cong H_c^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X_0, \mathbf{Z})$$

に対し,

- $H^2_\pm$: the maximal positive (negative) subspace of $H^2(X_0, \partial X_0, \mathbf{R})$
- $b^2_\pm(X) = \dim H^2_\pm$, $\sigma = b^2_+ - b^2_-$

Fact.
- $b^2_+(X) > 0$の時, generic (g,ω)に対し, $\mathcal{M}_X^{red}(s) = \emptyset$, かつ$\mathcal{M}_X(s)$は有限次元の向き付け可能な多様体（ただしコンパクトとは限らない)
- $\mathcal{M}_X(s)$の向きは$\wedge^{top} H^1(X_0, \partial X_o, \mathbf{R}) \otimes \wedge^{top} H^2_+(X_0, \partial X_0, \mathbf{R})$の"homology orientation"で決まる.
- $\dim \mathcal{M}_X(s)$はAtiyah-Patodi-Singer index theoremで与えられる.

Definition. (cylindrical end $\widehat{N} = [0,\infty) \times N$ 上の SW 方程式)

$s_N = s|_{\{t\}\times N}$, $S_N \cong S_+ \cong S_-$, $L_N = dets_N$, $\mathcal{C}_N = \mathcal{A}(L_N) \times \Gamma(S_N)$ に対して,

$$(A(t) = A|_{\{t\}\times N}, \psi(t) = \psi|_{\{t\}\times N}) \in \mathcal{C}_N$$

(A in temporal gauge) とおくと $\widehat{N}$ 上の SW 方程式は

$$\dot{\psi}(t) = \mathcal{D}_{A(t)}\psi(t)$$
$$\dot{A}(t) = q(\psi(t)) - *F_{A(t)} - iw_0$$

$*$: Hodge star on N, q は N の Clifford 積の adjoint,

$$\langle c(b)\psi, \psi\rangle_{S_N} = 2\langle b, q(\psi)\rangle_{\wedge^1(N)},$$

$\omega_0 \in \wedge^1(N)$ は perturbation （もとの perturbation ω に対して

$$\omega|_{\widehat{N}} = dt \wedge \omega_0 + *\omega_0$$

この式は $\mathcal{C}_N$ 上の Chern-Simons-Dirac functional の gradient flow に等しい.

$$\mathcal{E}(A,\psi) = \frac{1}{2}\int_N (A - A_0)\wedge(F_A + F_{A_0} + *\omega_0)$$
$$+\int_N \mathbf{Re}\langle \mathcal{D}_A\psi,\psi\rangle dvol$$

$\gamma \in \mathcal{G}_N = \mathrm{Map}(N, S^1)$ の作用:

$$\mathcal{E}(\gamma(A,\psi)) - \mathcal{E}(A,\psi) = -8\pi^2 \int_N (\deg\gamma)\wedge c_1(L)$$

($\deg\gamma$ は $\mathcal{G}_N \to [N, S^1] = H^1(N, \mathbf{Z})$ での γ の像)

$\Longrightarrow \mathcal{E} : \mathcal{B}_N = \mathcal{C}_N/\mathcal{G}_N \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$

（ただし $c_1 L \cup \gamma = 0$ for all $\gamma \in H^1(N, \mathbf{Z})$ ならば $\mathcal{E} : \mathcal{B}_N \to \mathbf{R}$ を引き起こす）.

Definition. (3 次元の (perturbed) SW 方程式)

$$(SW)^3 : \quad \begin{cases} *(F_A + i\omega_0) = q(\psi), \\ \mathcal{D}_A\psi = 0 \end{cases}$$

$$(SW)^3 \text{ の解} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{E} \text{ の critical point}$$

- $\mathcal{Z}_N(s_N) = \{(A,\psi) \in \mathcal{C}_N | SW^3\}$
- $\mathcal{M}_N(s_N) = \mathcal{Z}_N(s_N)/\mathcal{G}_N$
- $(\mathcal{M}_N^{red}(s_N) = \{(A,0) \in \mathcal{Z}_N(s_N)\}/\mathcal{G}_N)$

$\mathcal{M}_X(s)$ および $\mathcal{M}_N(s_N)$ の局所構造

$C = (A, \psi) \in \mathcal{Z}_X(s)$ における deformation complex

$$0 \to \Omega^0(X, i\mathbf{R}) \stackrel{\mathcal{L}_C}{\to} \Omega^1(X, i\mathbf{R}) \times \Gamma(S_+) \stackrel{sw_C}{\to} \Omega^2_+(X, i\mathbf{R}) \times \Gamma(S_-)$$

$\mathcal{L}_C$: the infinitesimal Gauge action at C

sw_C : the liniearization of he SW equation

$H^0(C) = 0 \Longleftrightarrow C$ irreducible, $\quad H^2(C) = 0 \Longleftrightarrow C$ is regular

両方の条件をみたすなら（$b_+^2 > 0$ なら generic perturbation で regular になる）

$$T_C \mathcal{M}_X(s) = H^1(C) \cong \ker \mathcal{D}_C$$

$$\begin{aligned} \text{orientation of } \mathcal{M}_X(s) &\Longleftrightarrow \text{the trivialization of } \wedge^{top} T\mathcal{M}_X(s) \\ &\Longleftrightarrow \text{trivialization of } \mathrm{ind}\, \mathcal{D}_C \end{aligned}$$

ここで$\mathcal{D}_C = \mathcal{L}_C^* + sw_C = (d^* + d^+) \oplus \mathcal{D}_A +$(the 0-th order term).
$\Longrightarrow$ homology orientation （$\wedge^{top} H^1 \otimes \wedge^{top} H^2_+$ の orientaion）で向きが入る. $\mathcal{M}_X(s)$の(形式的）次元は$\mathrm{ind}\, \mathcal{D}_C$で与えられる.

$C_N = (A_N, \psi_N) \in \mathcal{Z}_N(s_N)$での deformation complex:

$$0 \to \Omega^0(N, i\mathbf{R}) \stackrel{\mathcal{L}_{C_0}}{\to} \Omega^1(N, i\mathbf{R}) \times \Omega(S_N) \stackrel{sw^3_{C_0}}{\to} \Omega^1(N, i\mathbf{R}) \times \Gamma(S_N)$$

$\mathcal{L}_{C_0}$: infinisesmal Gauge action

$sw^3_{C_0}$: linearzation of the SW^3 equation

$[C_N] \in \mathcal{M}_N(s_N)$の近傍はKuranishi写像を使って記述される.

$\mathcal{S}_{C_0}$: slice of the gauge orbit through $C_0 \subset \ker \mathcal{L}^*_{C_0}$

$\Pi : T_{C_0}\mathcal{C}_N \to \ker \mathcal{L}^*_{C_0}, \quad \Pi_1 : \ker \mathcal{L}^*_{C_0} \to H^1(C)$

に対し，$SW^3(C_0 + \dot{C}) = 0, (\dot{C} \in \mathcal{S}_{C_0}) \Longleftrightarrow$

$$(1 - \Pi_1)\Pi SW(C_0 + \dot{C}) = 0, \quad \Pi_1 \Pi SW(C_0 + \dot{C}) = 0$$

と分けて書いて第１式の解を第２式に代入することにより

$$f : U \subset H^1(C_0) \to H^1(C_0) \ (\mathrm{Stab}(C_0)\text{-equivariant})$$

such that

$$\text{neighborhood of } [C_0] \cong f^{-1}(0)/\,\mathrm{Stab}(C_0)$$

$\Longrightarrow$

$\mathcal{M}_N(s_N)$ smooth at C_0 if $f \equiv 0$ (regular at C_0) and $\mathrm{Stab}(C_0) = 0$

Definition. (s_N, g_N) (spin^c structure and the metric on N) が"good" $\Longleftrightarrow \forall(A,\psi) \in \mathcal{Z}_N(s_N)$ (irreducible) が regular かつ $\forall(A,0) \in \mathcal{Z}_N(s_N)$ に対し，Dirac operator $\mathcal{D}_A$ が invertible

Example 1.
- N が正のスカラー曲率の計量をもてば（たとえばspherical space form）good (Weitzenböck 公式) で $\mathcal{M}_N^{irr}(s_N) = \emptyset$.
- $N = T^3$, g_N が flat 計量のとき，unperturbed ($\omega_0 = 0$) ならば SW^3 の解は $(A,0)$, A flat connection のみ.

  $\Longrightarrow$

$$c_1(\det s_N) \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{M}_N(s_N) = \emptyset$$

$c_1(\det s_N) = 0$ ならば

$$\mathcal{M}_N(s_N) = \mathcal{M}_N^{red}(s_N) \cong H^1(N, \mathbf{R})/H^1(N, \mathbf{Z}) = T^{b_1(N)}$$

ただし trivial connection のところで degenerate (not good).

- $N = T^3$, g flat $c_1(\det s_N) = 0$ のときは perturbation $\omega_0 \neq 0$ を適当にとると $\mathcal{M}_N(s_N)$ は 1 点 $[A_0, \psi_0]$, (A_0: trivial connection, ψ_0, covariantly constant with $q(\psi_0) = i\omega_0$) (non-degenerate) (by Taubes, B.D. Park)

Fact. X with cylindrical end $\widehat{N}$ において，(s_N, g_N) が good $\Longrightarrow$

$$\partial_\infty : \mathcal{M}_X(s) \to \mathcal{M}_N(s_N)$$

$[A, \psi] \in \mathcal{M}_X(s)$ を $\widehat{N}$ 上 in temporal gauge で $(A(t), \psi(t))$ で表すと，$t \to \infty$ で $(A_\infty, \psi_\infty) = \partial_\infty(A, \psi)$ に近づく．実際は $\mathcal{G}_N^* = \{\gamma \in \mathcal{G}_N | \gamma \text{ extends to } \widehat{\gamma} \in \mathcal{G}_X\}$ に対し

$H^1(N, \mathbf{Z})/j^* H^1(X, \mathbf{Z})$ -cover

$$\mathcal{Z}_N(s_N)/\mathcal{G}_N^* \to \mathcal{M}_N(s_N)$$

を経由する．

Moduli space の gluing

$X = X_1 \cup_N X_2, \quad \partial X_1 = -\partial X_2 = N$

$X_+ = X_1 \cup [0,\infty) \times \partial X_1,\ X_- = X_2 \cup [0,\infty) \times \partial X_2$

$X_R = X_1 \cup [-R, R] \times N \cup X_2$

g_R cylinder 上 product になる X_R の計量

ω_R perturbation で cylinder 上

$dt \wedge *\omega_0 + \omega_0$ (ω_0 は N 上の perturbation)

(g_N, ω_0) が N 上"good" とする.

(A_R, ψ_R) spin^c 構造 s に対する SW 方程式の解の列

$\mathcal{M}_{X_\pm}(s_\pm)$ $(s_\pm = s|_{X_\pm})$ がコンパクトなら，$R \to \infty$ とすると up to gauge transformations で

$$(A_R, \psi_R)|_{X_1} \to (A_+, \psi_+), \quad (A_R, \psi_R)|_{X_2} \to (A_-, \psi_-)$$

$$([A_\pm, \psi_\pm] \in \mathcal{M}_{X_\pm}(s_\pm))$$

$$\partial_\infty[A_+, \psi_+] = \partial_\infty[A_-, \psi_-] = [A_0, \psi_0] \in \mathcal{M}_N(s_N)$$

逆に $[A_\pm, \psi_\pm] \in \mathcal{M}_{X_\pm}(s_\pm)$ with $\partial_\infty[A_+, \psi_+] = \partial_\infty[A_-, \psi_-]$ を与えたとき，上の意味で $X_\pm$ 上これらの解に近づく X の SW の解 (A, ψ) があるか？

Fact. 各 $C_\pm = (A_\pm, \psi_\pm)$ の deformation complex の $H^2(C_\pm)$ がゼロなら存在する．

$(A_\pm, \psi_\pm)$ を cylinder 上 cup-off fuction をかけてでつなぎ X 上の approximate SW solution を作る．$\Longrightarrow$ これを摂動して真の解を得る $(H^2(C_\pm)$ はそのための obstruction)

$(b^+(X_\pm) > 1$ ならば適当な perturbation のもと $H^2(C_\pm) = 0$ にできる)

後はcylinder上でつなぐときのGauge変換分の自由度をみてやる．以下$N = T^3$の場合にこれを見る．

$N = T^3$ の場合

spin^c 構造の gluing

$X - X_1 \cup_N X_2$ 上の spin^c 構造 s

$$c_1(\det s_N) \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{M}_N(s_N) = \emptyset$$
$$\Longrightarrow \mathcal{M}_X(s) = \emptyset$$

よって以下次のことを仮定.

$$c_1(\det s_N) = 0$$

Definition.

$$\mathcal{S}_0(X_1) = \{s\colon\ X_1 \text{ の spin}^c \text{ 構造} \mid c_1(detS_N) = 0\}$$
$$\mathcal{S}_0(X_1, \partial X_1) = \{(s, z) \mid s \in \mathcal{S}_0(X_1),$$
$$z \in H^2(X_1, \partial X_1, \mathbf{Z}),\ j^* z = c_1(\det s)\}$$

$$H^1(X_1) \to H^1(\partial X_1) \xrightarrow{\delta} H^2(X_1, \partial X_1) \xrightarrow{j^*} H^2(X_1) \to H^2(\partial X_1)$$

z の指定 $\quad \Longrightarrow$ trivialization $dets_N \cong N \times \mathbf{C}$

$(s_i, z_i) \in \mathcal{S}_0(X_i, \partial X_i)$, $(i = 1, 2)$ にたいし,

$$\det s_1|_N \overset{z_1}{\cong} N \times \mathbf{C} \overset{z_2}{\cong} \det s_2|_N$$

は $id : Fr_N \to Fr_N$ を cover する spin$^c(3)$-bundle の同型 $\phi : P_1|_N \to P_2|_N$ を誘導する. $\Longrightarrow$ (N と $\widehat{N}$ 上の spin^c 構造の 1 対 1 対応を経由して)

$$\mathcal{P} : \mathcal{S}_0(X_1, \partial X_1) \times \mathcal{S}_0(X_2, \partial X_2) \to \mathcal{S}_0(X)$$

$$(s_1, z_1), (s_2, z_2) \qquad \to s = (s_1, z_1)\sharp_\phi (s_2, z_2)$$

Definition. X_+ 上の connection $A \in \mathcal{A}(\det s)$ with $||F_A||_{L^2} < \infty$ は end 上で $A = A_0 + ia$ (A_0 : trivial connection on T^3) の形.

$$A^\beta = A_0 + i\beta a \quad \beta : \text{cut-off fuction}$$

$$c_A = [\frac{i}{2\pi} F_{A^\beta}] \in h^2(X_1, \partial X_1, \mathbf{Z}) \cong H^2_c(X_+, \mathbf{Z})$$

$(s, z) \in \mathcal{S}_0(X_1, \partial X_1)$ に対し,

$$\mathcal{Z}_{X_+}(s, z) = \{(A, \psi) \text{ SW solution} \mid c_A = z\}$$

$$\mathcal{M}_{X_+}(s, z) = \mathcal{Z}_{X_+}(s, z)/\mathcal{G}_{X_+}$$

$$\mathcal{M}_{X_+}(s) = \cup_{j^* z = c_1(dets)} \mathcal{M}_{x_+}(s, z)$$

Remark. compactness of the moduli spaces

- X_+ with cylindrical end $\widehat{N} = [0, \infty) \times N$ 上の finite energy SW moduli space は常にコンパクトとは限らない.
- $\mathbf{R} \times N$ 上の任意の finite energy SW solution が N の SW^3 solution の pull-back に限るならばコンパクト．end 上 unperturbed ($\omega_0 = 0$) の場合，Chern-Siomons-Dirac functional $\mathcal{E}$ が $\mathcal{C}_N/\mathcal{G}_N \to \mathbf{R}$ へ lift し (たとえば $c_1(dets_N)$ が torsion)，$\mathcal{E}$ の critical point set が連結な場合ならばコンパクト（．T^3 の例はこれにあたる）．$N = T^3$ で end で perturb する場合も $\mathcal{M}_N(s, z)$ はコンパクト（Taubes, B.D. Park）.

Definition. (X_+ with cylindrical end の SW 不変量)

$(s, z) \in \mathcal{S}_0(X_1, \partial X_1)$ にたいし，

$$\mathcal{G}^0_{X_+} = \{\gamma \in \mathcal{G}_{X_+} | g = id \text{ over } * \}$$

$$\mathcal{M}^0_{X_+}(s, z) = \mathcal{Z}_{X_+}(s, z)/\mathcal{G}^0_{X_+}$$

$\mathcal{M}^0_{X_+}(s,z) \to \mathcal{M}_{X_+}(s,z)$ に付随する line bundle $\mathcal{L}$ に対し

$$SW_{X_+}(s,z) = \langle c_1(\mathcal{L})^{\frac{d}{2}}, [\mathcal{M}_{X_+}(s,z)]\rangle$$

（ただし $d = \dim \mathcal{M}_{X_+}(s,z)$ で $d/2$ が非負の整数でなければ $SW_{X_+}(s,z) = 0$ とおく.）

$z \in H^2_c(X_+, \mathbf{Z}) \cong H^2(X_1, \partial X_1, \mathbf{Z})$ に対し,

$$SW_{X_+}(z) = \sum_{(s,z)\in\mathcal{S}_0(X_1,\partial X_1)} SW(s,z)$$

$$SW_{X_+} = \sum SW_{X_+}(z)e^z \in \mathbf{Z}[H^2(X_1,\partial X_1,\mathbf{Z})]$$

（ただしperturbationωがある m に関して $z\cdot[\omega] \leq m \forall z$ のときに有限和（Taubes））

Fact. $b_2^2(X_+) > 1$ なら SW_{X_+} は metric によらず homology orientation を保つ diffeomorphism $\varphi : X_+ \to X'_+$ に対し，$SW_{X_+}(\varphi^*s, \varphi^*z) = SW_{X'_+}(s,z)$.

$X = X_1 \cup_N X_2$, $(N = T^3)$ の場合 $s \in \mathcal{S}_0(X) \Longleftrightarrow c_1(\det c_N) = 0$ ならば適当な pertubation で $\mathcal{M}_N(s_N)$ は (non-denerate な）１点 $\Longrightarrow$

$$SW_X(s) = \sum_{((s_1,z_1),(s_2,z_2))\in\mathcal{P}^{-1}(s)} SW_{X_+}(s_1,z_1)SW_{X_-}(s_2,z_2)$$

和をとって

Theorem (Taubes, Park)**.** [1]$X = X_1 \cup_{T^3} X_2$, $b_2^+(X_1) > 1$, $B_2^+(X_2) > 1$ でかつ $\omega \in H^2(X,\mathbf{R})$ で $\omega|_{T^3} \neq 0 \in H^2(T^3,\mathbf{R})$ なる元があれば

$$SW_X = j_1(SW_{X_+})j_2(SW_{X_-}) \in \mathbf{Z}H^2(X,\mathbf{Z})$$

（j_k は $j_k^* : H^2(X_k, \partial X_k, \mathbf{Z}) \to H^2(X,\mathbf{Z})$ から引き起こされる．$\omega_0 = \omega|_{T^3}$ を *end* の *perturbation* に利用する）．

なお $X = X_1 \cup_{T^3} T^2 \times D^2$ のときはより具体的な公式が少し別のやり方で得られている（後述）

1 以下 Taubes による．Park の定式化は見かけが異なるが本質的には同じ

2. 楕円曲面とそこから派生する例

Definition. （楕円曲面）

Riemann 面 B への holomorphic な写像

$$\pi : X \to B$$

で一般ファイバー（π の正則値の逆像）が楕円曲線（実２次元トーラス）となるものを持つ複素曲面．以下どのファイバーも (-1) 曲線を含まない, (相対的）極小な場合のみ考える．

(1) 特異ファイバー（π の特異値の逆像）自体の分類（小平）
(2) 複素構造を変形すると（微分同相類を変えずに）特異ファイバーは次の２種類のみにできる (Kas-Moishezon)

(a) I_1 型ファイバー(fishtail). I_1 の正則近傍 $N(I_1)$ は $T^2 \times D^2$ に 1 個の 2 ハンドル(with framing -1) が $H_1(T^2, \mathbf{Z})$ の生成元（T^2 は一般ファイバー）の１つをつぶすようにはりついたもの（その core は vanishing cycle）．射影 $\pi : N(I_1) \to D^2$ において ∂D^2 の周りの局所モノドロミーは $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ またはその conjugate.

(b) 多重トーラス（重複度 p）pI_0. 一般ファイバは その上に p 重にまきつく.

(3) 多重トーラスを含む楕円曲面はそれらを含まない楕円曲面から”対数変換”することで得られる（小平)

Definition. cusp ファイバー II. ２次元球面上１個の cusp 型特異点をもつもの. その正則近傍 $N(II)$ は複素構造の変形により２この I_1 型特異点に分裂する $\iff$ $N(II)$ は $T^2 \times D^2$ にたいし $H_1(T^2, \mathbf{Z})$ の生成元をつぶすように２この２－ハンドル (vanishing cycle) をつけたもの.

Fact. 特異ファイバーをもつが多重トーラスを含まない楕円曲面Xは微分同相類を変えずに次のように変形される.

(1) $B = S^2$の場合（Kas-Moishezon）あるkに対し, $12k$個のI_1型ファイバーを含む. Bの基点上の（一般）ファイバー$\cong T^2$にたいし$H_1(T^2, \mathbf{Z})$の生成元σ_1, σ_2を定めるとそれぞれの特異ファイバーのvanishing cycleは$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \ldots$ と交互にならぶ（対応する局所モノドロミーは$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$）

(2) $B = \Sigma_g$ （種数g）の場合（Y. Matsumoto）$B = B^0 \cup D^2$ （D^2は2-disk）と分けたとき, $X = T^2 \times B^0 \cup \pi^{-1}(D_2)$かつ$\pi^{-1}(D^2)$はある$k$につき上と同様に$12k$個の$I_1$型ファイバーを含む.

Definition. （ファイバー和）

$E_1,\ E_2$　２つの楕円曲面

（またはT^2を一般ファイバーとするファイバー空間）

$f_1,\ f_2$　E_1, E_2の一般ファイバー

$E_1 \sharp_{T^2} E_2 = (E_1 \backslash N(f_1)) \cup (E_2 \backslash N(f_2))$　E_1とE_2のファイバー和

（$N(f_i) \cong T^2 \times D^2$は$f_i$のtubular neighborhood）

Definition. $E(k)$: 多重ファイバーのないS^2上の楕円曲面でちょうど$12k$個のI_1型ファイバーを含むもの.

$\chi(E(k)) = 12k,\ \sigma(E(k)) = -8k$

$\pi_1(E(k)) = 1$

$E(k)$は$\sigma \cdot \sigma = -k$なるcross section σを含む

Fact. 特異ファイバーを持つが多重ファイバーは持たない（極小）楕円曲面の微分同相類は

$E(k)$ $(k \geq 1)$　base が S^2 の場合 (Kas-Moishzon)

$T^2 \times \Sigma_g \sharp_{T^2} E(k)$　base が Σ_g の場合 (Y.Matsumoto)

に限る．ここで

$$E(k) = E(1) \sharp_{T^2} \sharp \ldots \sharp_{T^2} E(1)$$
$$E(1) = \mathbf{C}P^2 \sharp 9 \overline{\mathbf{C}P}^2, E(2) = K3 \text{ surface}$$

Definition. 多重ファイバーを持つ楕円曲面はそれらを持たないものから「対数変換」で得られる．

E :（多重ファイバーなしの）楕円曲面

f : E の一般ファイバー

$E_0 = E \setminus N(f)$ にたいし，orientation-reversing diffeomorphism

$$\varphi : \partial(T^2 \times D^2) \cong T^3 \to T^3 \cong \partial(E_0)$$

をとって

$$E_\varphi = E_0 \cup_\varphi T^2 \times D^2$$

$a,\ b,\ c$ generators of H_1 of $\partial E_0 \cong T^3$

b, c generate $H_1(f, \mathbf{Z})$

Fact. • φ の isotopy 類は $\varphi_* : H_1(T^3, \mathbf{Z}) \to H_1(T^3, \mathbf{Z})$ で決まる.

• E_φ の微分同相類は

$$\varphi_*([* \times \partial D^2]) = \gamma = pa + qb + rc \in H_1(\partial E_0, \mathbf{Z})$$

を指定すると一意的に定まる. (よって $E_\varphi = E_\gamma$ と書く). ($\varphi : T^3 \to T^3$ が $T^2 \times D^2$ の self-diffeomorphism に拡張 $\Longleftrightarrow \varphi_*[* \times \partial D^2] = \pm[* \times \partial D^2]$)

• E_γ において $T^2 \times \{0\} \subset T^2 \times D^2$ は重複度 p の多重ファイバー. ($p = 0$ のときは E_γ はファイバー構造を持たない)

Fact. 特に $E=E(k)$ あるいはより一般に cusp fiber II を (smooth embedding として) 含むとき，E_γ ($\gamma=pa+qb+rc$) の微分同相類は p のみで決まる（重複度 p の対数変換）

（$N(II)$ の self-diffeomorphism の観察による (Moisehzon, U))

この場合 $E_\gamma=E_p$ と書く.

$\Longleftrightarrow$

多重ファイバー以外の特異ファイバーを持つ（極小）楕円曲面は多重ファイバーのないもの E（上記 ）に有限回の対数変換を施したもの

$$E_{p_1,\ldots,p_k}$$

Theorem. （楕円曲面の分類の初等的な部分）

（極小）楕円曲面の微分同相類は基本群が有限巡回群でなければオイラー数と基本群できまる（*Y. Matsumoto, U)*

$$\pi_1 E \text{ が有限巡回群} \Longleftrightarrow E=E(k)_{p,q}\ (k\geq 1,p,q\geq 1)$$

$(E(k)_{p,1} = E_p,\ E(k)_{1,1} = E(k))$

このとき

$$\pi_1 E(k)_{p,q} = \mathbf{Z}/\gcd(p,q)\mathbf{Z}$$

（E が多重トーラスだけを特異ファイバーに持つ場合の分類もできる）

Theorem. （楕円曲面の分類ー非初等的部分}

$E(k)_{p,q} \cong E(k')_{p',q'} \Longleftrightarrow k = k'$ *and* $\{p,q\} = \{p',q'\}$

ただし $E(1)_p \cong E(1) \cong \mathbf{C}P^2 \sharp 9 \overline{\mathbf{C}P}^2$ のみ例外.

Remark.

- $\chi(E(k)_{p,q}) = 12k$, $\sigma(E(k)_{p,q} = -8k$, $b_2^+(E(k)_{p,q}) = 2k-1$, $b_2^-(E(k)_{p,q}) = 10k-1$
- The universal covering of $E(k)_{p,q}$ is $E(sk)_{p/s,q/s}$, where $s = \gcd(p,q)$
- $E(k)_{p,q}$ の homeomorphism type の分類 (Freedman, Hambleton-Kreck)

Donaldson 不変量による証明(....R. Friedman) $\Longrightarrow$ Seiberg-Witten 類（不変量）によるより簡単な分類

Theorem. （楕円曲面の SW 不変量}

$E = E(k)$ *(or* $E(k)_{p,q}$*)* の一般ファイバー f, 重複度 p, q の多重ファイバー f_p, f_q に対し

$$x = PD[f], \quad x_p = PD[f_p], \quad x_q = PD[f_q] \in H^2(E, \mathbf{Z})$$

とおくと *(*$x = px_p = qx_q$*)*

$$SW_{E(k)} = (e^{-x} - e^{x})^{k-2}$$
$$SW_{E(k)_{p,q}} = SW_{E(k)} \cdot \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x_p} - e^{x_p}} \cdot \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x_q} - e^{x_q}}$$

代数曲面としての divisor による SW の解の記述から示せる[2]

別の方法として

$SW_{E(2)} = 1 \Longleftrightarrow$

$E(2)$ の SW 類は $0 \in H^2(E(2), \mathbf{Z})$ のみ，SW 不変量は 1

から出発して T^3 にそう貼り合わせ公式を使う．

---

[2] ここでの符号の取り方は canonical class K に対し，$-K$ の SW 不変量が $+1$ となる moduli space の向きによっている．文献によっては反対の convention を採用している

この方法は前述の定理 (Taubes,...) とその特別な場合である"surgery 公式"にもとづく. (複素構造を持たない他の 4 次元多様体の場合にも適用できる.)

Theorem. (*Morgan-Mrowka-Szabö*)（彼らは *end* で *perturb* しない *SW moduli space* を用いて証明した）

$$X = X_0 \cup_\varphi T^2 \times D^2$$

$$\varphi : T^2 \times \partial D^2 \cong T^3 \to T^3 \cong \partial X_0$$

$$\varphi([* \times \partial D^2]) = \gamma = pa + qb + rc, where$$

$$a,\ b,\ c\ generate\ H_1(T^3, \mathbf{Z})$$

$$(b,\ c\ generate\ H_1\ of\ the\ general\ fiber)$$

さらに $b_2^+(X_0) > 1,\ \gamma = 0\ in\ H_1(X_0, \mathbf{Z})$ とする $\Longrightarrow$

$$SW_X = j(SW_{X_0}) \cdot \frac{1}{e^{-x_\gamma} - e^{x_\gamma}}$$

x_γ は $T^2 \times \{0\} \subset T^2 \times D^2$ （重複度 p の " 多重ファイバー "）の *Poincare* 双対.

Remark. 上記の公式において $b_2^+ = 1$ の場合も metric と perturbation を 1 つとっておくとそれらに依存する形で公式がなりたつ

$E(1) \cong \mathbf{C}P^2 \sharp 9 \overline{\mathbf{C}P}^2$ は正のスカラー曲率の計量をもつ $\Longrightarrow$ $E(1)$ のこの計量に関する generic な SW の解はない.

Remark. X with $\partial X = T^3$ に対し,

$$j^* SW_X = SW_{X \cup_{T^3} E(1)_0}$$

ただし $E(1)_0 = E(1) \setminus N(f)$. $j : H^2(X, \partial X, \mathbf{Z}) \to H^2(X \cup_{T^3} E(1)_0, \mathbf{Z})$.

Remark. $j : H^2(E(n)_0, \partial E(n)_0, \mathbf{Z}) \to H^2(E(n), \mathbf{Z})$ の kernel の元 z にたいしては $SW_{E(n)_0}(z) = 0$（$E(n)_0$ の self-diffeomorphism で z をたがいに異なる無限個の元に写せることから SW 類の有限性を使って示す. cusp fiber を含んでいるより一般の 4 次元多様体についても同様）$\Longrightarrow$

$jSW_{E(n)_0} \to SW_{E(n)_0 \cup_\gamma T^2 \times D^2}$ は injective.

これらの公式から

$$SW_{E(2)} = 1, \quad E(n) = E(n-1) \sharp_{T^3} E(1)$$

$$\Longrightarrow$$

$$SW_{E(n)} = jSW_{E(n-1)_0}, \quad SW_{E(n-1)} = jSW_{E(n-1)_0} \cdot \frac{1}{e^{-x} - e^{x}}$$

$$\Longrightarrow SW_{E(n)} = (e^{-x} - e^{x})^{n-2}$$

$$jSW_{E(n)_0} = SW_{E(n)}(e^{-x} - e^{x}), \quad j'SW_{E(n)_0} = SW_{E(n)_p}(e^{-x_p} - e^{x_p})$$

より

$$SW_{E(n)_p} = SW_{E(n)} \cdot \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x_p} - e^{x_p}}$$

Remark. Parkの論文では$E(n)$のSW不変量の結果から逆に貼り合わせ公式を使って$E(n)_0$の相対SW不変量$SW_{E(n)_0}$を導いている（$SW_{E(n)}$が既知であるため当然このプロセスもありうる）

他の例への適用　I

Example 2. $E(m+n)$ のファイバー和への分解 $E(m)\sharp_{T^3}E(n) = E(m)_0 \cup E(n)_0$ において境界

$$\partial E(m)_0 \cong \partial E(n)_0 \cong T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$$

（$pt \times S^1 \times S^1$ がそれぞれの一般ファイバーに対応するとする）での貼り合わせを3つの S^1 成分の巡回置換 $\varphi : T^3 \to T^3$ によってねじったものを

$$E(m)\sharp_\varphi E(n) = E(m)_0 \cup_\varphi E(n)_0$$

とおくと，$m, n > 1$ ならば貼り合わせ公式より

$$SW_{E(m)\sharp_\varphi E(n)} = (e^{-x_1} - e^{x_1})^{m-1}(e^{-x_2} - e^{x_2})^{n-1}$$

（ただし x_1, x_2 はそれぞれ $E(m)_0$, $E(n)_0$ 内の一般ファイバーのPoincare双対）

φ の取り方から x_1 と x_2 は $H^2(E(m)\sharp_\varphi E(n))$ 内で一次独立

$\Longrightarrow E(m)\sharp_\varphi E(n)$ はどの楕円曲面とも SW が異なり微分同相でない．しかし $E(m+n)$ とは同相(Freedman)

$\Longrightarrow E(m)\sharp_\varphi E(n)$は複素構造をもたない（Enriques-Kodairaの表による）．ただしシンプレクティック構造は入る（Gompfのシンプレクティックファイバー和の構成）

Remark. T^3の任意のSelf-diffeoφは$E(1)_0$のself-diffeoに拡張する．よって任意のφにたいし$E(1)\sharp_\varphi E(n)$は$E(n+1)$と微分同相．ただし$E(1)_0$の一般ファイバーにおいて対数変換で多重ファイバーをいれるとその限りではない．たとえば上記のφに対し，$E(1)_p\sharp_\varphi E(1)_q$は$p, q$ odd > 1なら$K3$曲面$E(2)$と同相だがSWは異なり，複素構造を持たない．Gompf-Mrowkaが最初に見いだした複素曲面と同相だが複素構造をもたない4次元多様体の例がこれにあたる（彼らはDonaldson不変量で判別した）．

他の例への適用 II

Example 3. (Fintushel-Stern)

X	cusp fiber を含む 4 次元多様体
$K \subset S^3$	knot
K_0	K の 0-surgery でえられる 3 次元多様体

ℓ : K の (preferred) longitude, m : K の meridian

$T = m \times S^1 \subset K_0 \times S^1$

F X 内の cusp heighborhood にふくまれる一般ファイバー

$X_K = X \sharp_{F=T} K_0 \times S^1$ X と $K_0 \times S^1$ のファイバー和

Theorem (FS)**.** $b_+^2(X) > 1$, $\pi_1(X \setminus F) = 1$ ならば

$SW_{X_K} = SW_X \cdot \Delta_K(e^{2(PD[T])})$

($\Delta_K(t)$: The symmetrilized Alexander polynomial of K)

Remark. (1) たとえば $X = E(2)$ とすると X_K はすべて $E(2)$ と同相．Δ_K が互いに異なれば微分同相でなく，一般に複素構造も持たない．（$K3$ 曲面と同相な複素曲面は $E(2)_{p,q}$ p, q odd, $\gcd(p,q) = 1$ に限る）．

(2) K が fibered knot のとき（$K_0 \times S^1$ は T^2 上の surface bundle）$E(2)_K$ はシンプレクティック構造をもつ（Symplectic fiber sum by Gompf）

(3) $\Delta_K(t)$ の最高次の係数が 1 でないときは $E(2)_K$ はシンプレクティック構造をもたない (by Taubes)

(4) $\Delta_K(t) \equiv 1$ K nontrivialのとき $E(2)$ と $E(2)_K$ は SW では判別できない．

連結和に関する公式

Fact. (1) $X\sharp Y, b_2^+(X)>1, b_2^+(Y)>1 \Longleftrightarrow SW_{X\sharp Y}(s)=0$ for $\forall s$.

(2) (blow-up formula) $E=PD(\overline{\mathbf{C}P}^1 \subset \overline{\mathbf{C}P}^2) \in H^2(\overline{\mathbf{C}P}^2, \mathbf{Z})$

$$SW_{X\sharp\overline{\mathbf{C}P}^2} = SW_X \cdot (e^E + e^{-E})$$

$X\sharp W$, W rational homology 4-sphere の場合．$H^2(W,\mathbf{Z})$ が torsion を含むので表示を簡単にするため SW の定義を少し修正.

Definition. $z \in H^2(X,\mathbf{R})$ (X closed) に対し,

$$SW_X(z) = \sum_{s:c_1(\det s)=z\in H^2(X,\mathbf{R})} SW_X(s)$$

$$SW_X = \sum SW_X(z)e^z \in \mathbf{Z}H^2(X,\mathbf{R})$$

Fact. W rational homology 4-sphere $\Longleftrightarrow$

$$SW_{X\sharp W} = |H_1(W,\mathbf{Z})| SW_X$$

１つの応用として

Theorem. *(U)*

任意の自明でない有限群 G に対し，４次元多様体 X で可算無限個の自由 G 作用をもち，それらの軌道空間がすべて同相だがどの２つも互いに微分同相でないものが存在する．

構成 : エキゾチックな４次元多様体 X_k で unbranched G covering $\widetilde{X}_k$ が互いに微分同相になるものを構成する．

(1) たとえば $E(2)_p$ は p odd ならば $E(2)$ と同相．一方

Fact.

$$E(2)_p \sharp S^2 \times S^2 \cong E(2) \sharp S^2 \times S^2$$

if p is odd .

Remark. 一般に単連結４次元多様体 X と Y が同相（h 同境）ならばある k について $X \sharp k S^2 \times S^2 \cong Y \sharp k S^2 \times S^2$ (Wall). X, Y が単連結楕円曲面ならば $k = 1$ で成り立つ (Mandelbaum-Moishezon)

(2) 任意の G に対し，ある rational homology 3-sphere $\widetilde{Y}$ で G が自由に作用するものがある（特に $Y = \widetilde{Y}/G$ も rational homology 3-sphere) (Cooper-Long)

(3) Y のスピン

$$s(Y) = (Y \setminus D^3) \times S^1 \cup S^2 \times D^2$$

はrational homology 4-sphereで$\pi_1(s(Y)) \cong \pi_1(Y) \to G$に対応する$G$ coveringは

$$\widetilde{s(Y)} \cong s(\widetilde{Y})\sharp(|G|-1)S^2 \times S^2$$

(4)

$$X_p = E(2)_p \sharp s(Y)$$

とおくと$\pi_1(X_p) \cong \pi_1(s(Y)) \to G$に対応する$G$ coveringは

$$\widetilde{X}_p = s(\widetilde{Y})\sharp|G|E(2)_p\sharp(|G|-1)S^2 \times S^2$$

(5)

$$\widetilde{X}_p \cong s(\widetilde{Y})\sharp|G|E(2)\sharp(|G|-1)S^2 \times S^2$$

if p is odd.

(6)

$$SW_{X_p} = |H_1(Y, \mathbf{Z})|SW_{X_p} \neq |H_1(Y, \mathbf{Z})|SW_{X_q} = SW_{X_q}$$

if $p \neq q$.

Remark. $X\sharp W$, W rational homology 4-sphere の場合 Donaldson 不変量においても同様の貼り合わせ公式が成り立つ．$\mathcal{D}_X$ (Donaldson power series) に関して

$$\mathcal{D}_{X\sharp W} = |H_1(W, \mathbf{Z})|\mathcal{D}_X$$

特に $\mathcal{D}_X \neq \mathcal{D}_Y$ なら $\mathcal{D}_{X\sharp W} \neq \mathcal{D}_{Y\sharp W}$

これらの例では

$SW_{X_p} \neq SW_{X_q}$ $(p \neq q)$

$SW_{\widetilde{X}_p} = SW_{\widetilde{X}_q} \equiv 0$ SW 類は存在しない

Theorem. *(Fintushel-Stern)*

ある２つの４次元多様体 X, Y で次の性質をもつものがある．

(1) X と Y は同相で $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = \mathbf{Z}_p$ *(p ある odd number)*

(2) $SW_X = SW_Y$

(3) X と Y の *universal covering* $\widetilde{X}$ と $\widetilde{Y}$ に関して $SW_{\widetilde{X}} \neq SW_{\widetilde{Y}}$, 特に X と Y は微分同相でない．

Remark. rattinal homology 3-sphere M に対し

$$sM = (M \setminus D^3) \times S^1 \cup_{id} S^2 \times D^2$$

$$sM' = (M \setminus D^3) \times S^1 \cup_{\varphi} S^2 \times D^2$$

（φ は $S^2 \times D^2$ の self-diffeo に拡張しない $S^2 \times S^1$ の diffeo）

とおくと sM と sM' のホモトピー群は等しく,

$$SW_{sM\sharp X} = SW_{sM'\sharp X} = |H_1(M, \mathbf{Z})| SW_X$$

（Donaldson 不変量も同じ）.

一方

Proposition. *M: aspherical rational homology 3-sphere, X: spin 1-connected 4-manifold*

$\Longrightarrow$

$sM\sharp X$ と $sM'\sharp X$ はホモトピー同値でない（π-equivariant intersection form $\pi_2 \times \pi_2 \to \mathbf{Z}[\pi_1]$ が異なる）

References

[1] R. Fintushel, R. Stern, *Knots, links and 4-manifolds*, Invent. Math. **134**, (1998), 363–400.

[2] J. Morgan, T. Mrowka, Z. Szabö , *Product formulas along T^3 for Seiberg-Witten invariants*, Math. Res. Lett. **4**, (1997), 915–929.

[3] C. Taubes, *The Seiberg-Witten invariants and 4-manifolds with essasential tori*, Geom. Topol. **5**, (2001), 441–519.

[4] B.D. Park, *A gluing formula for the Seiberg-Witten invariants along T^3*, Michigan Math. J. **50**, (2002), 593–611.

[5] M. Ue, *Exotic group actions in dimension four and Seiberg-Witten theory*, Proc. Japan Acad. **74**, (1998), 68–70.