

同変な接続つき gerbe の簡約

五味 清紀

東京大学大学院数理科学研究科

§ Introduction

幾何的量子化

$$\left\{ \begin{array}{ll} (M, \omega) & \cdots \text{symplectic 多様体} \\ \omega & \cdots \text{整数性条件を満たす} \\ & [\omega] \in \text{Im}\{H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{R})\} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{接続付きの円周束 } (P, \theta), \quad F(\theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\omega$$

$$\begin{array}{ccccc} P & & L := P \times_{S^1} \mathbb{C} & & \\ \downarrow_{S^1} & \rightsquigarrow & \downarrow_{\mathbb{C}} & \rightsquigarrow & H = \Gamma(M, L) \\ M & & M & & \end{array}$$

円周束

複素直線束
(前量子化束)

ベクトル空間
(Hilbert 空間)

Symmetry がある場合

$$\left\{ \begin{array}{ll} G & \text{Lie 群} \\ (M, \omega) & \text{symplectic 多様体} \\ (P, \theta) & \omega \text{ を曲率とする接続つき円周束} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & (P, \theta) \text{ 同変な接続つき円周束} \\ & \searrow & \downarrow \pi \\ G & \longrightarrow & (M, \omega) \end{array}$$

$\Rightarrow$ moment map $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$

$$\boxed{\mu_X(x) := \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\theta(p; X_p^*)}$$

$$\left(p \in \pi^{-1}(x), \quad X_p^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tX} \cdot p \right)$$

$$d\mu_X = \iota_{X^*}\omega, \quad g^*\mu = \text{Ad}_g\mu$$

Symplectic 商

$$\left\{ \begin{array}{l} G \text{ はコンパクト} \\ M \text{ は有限次元} \\ 0 \in \mathfrak{g}^* \text{ は } \mu \text{ の regular value} \\ \mu^{-1}(0) \text{ への作用は自由} \end{array} \right.$$

$$(M, \omega) \rightsquigarrow (\mu^{-1}(0)/G, \bar{\omega})$$

symplectic 商

$\mu^{-1}(0)/G$ の上に、 $\bar{\omega}$ を曲率とする接続つき円周束 $(\bar{P}, \bar{\theta})$ を構成することができる。

($\bar{P} := P|_{\mu^{-1}(0)}/G$ とすれば、 θ から $\bar{\theta}$ が決まる。)

同変な接続つき円周束の簡約

Lie 群 G が多様体 M に作用しているとする。

仮定

1. G の M への作用は自由で局所的に自明。
2. M/G は $q: M \rightarrow M/G$ が smooth になるように多様体の構造が入る。

命題 1. $(P, \theta): M$ 上の同変な接続つき円周束

(a) M/G 上の接続つき円周束 $(\bar{P}, \bar{\theta})$ であって、 q で引き戻したものが (P, θ) に同変に同型であるものが存在する。

$\Updownarrow$

$$\mu \equiv 0$$

(b) 上のような $(\bar{P}, \bar{\theta})$ の同型類は一意。

$\therefore$) $\bar{P} := P/G$ とすると θ から $\bar{\theta}$ が定まる。

注意. (P, θ) から できるだけ自然に $(\bar{P}, \bar{\theta})$ を構成することを「簡約 (reduction)」と呼ぶ。

同様な問題を円周束を gerbe におきかえて考える。

円周束と gerbe

Gerbe ... “「カテゴリーのファイバー束」”
(カテゴリーの層)

	円周束	gerbe
分類	$H^2(M, \mathbb{Z})$	$H^3(M, \mathbb{Z})$
接続	1-form (local) $A_\mu dx^\mu$	2-form (local) $B_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
曲率	2-form (global) $F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$	3-form (global) $H_{\lambda\mu\nu} dx^\lambda dx^\mu dx^\nu$

幾何的量子化

円周束 $\leadsto$ 複素直線束 $\leadsto$ ベクトル空間

Gerbe を使ったアナロジー

gerbe $\leadsto$ 2-line bundle $\leadsto$ 加法圏
↓
twisted
K-group

同変な接続つき gerbe の場合

仮定

1. G の M への作用は自由で局所的に自明。
2. M/G は $q: M \rightarrow M/G$ が smooth になるように多様体の構造が入る。

定理 2 (G). $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0, K) : M$ 上の同変な接続つき gerbe

- (a) M/G 上の接続つき gerbe $(\bar{\mathcal{C}}, \bar{\mathcal{C}}_0, \bar{K})$ であって、 q で引き戻したものが $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0, K)$ に同変に同型であるものが存在する。



あるコホモロジー類が消える。

- (b) 上のような $(\bar{\mathcal{C}}, \bar{\mathcal{C}}_0, \bar{K})$ の同型類は一般に一意ではない。

→ Gerbe の簡約は円周束の時ほど当り前でない。

講演の目標

Gerbe の簡約の具体的説明

... “bundle gerbe” を使う。

応用

1. Lie group valued moment maps
(Alekseev-Malkin-Meinrenken)
2. Chern-Simons theory

§ Bundle gerbe

Gerbe と bundle gerbe

Gerbe — Giraud, Brylinski, ...
(カテゴリーの層)



Bundle gerbe — Murray, Stevenson, ...
(貼り合わせの情報)

どちらも $H^3(M, \mathbb{Z})$ で分類される幾何的対象

定義の準備

$$\left\{ \begin{array}{ll} M, Y & \text{滑らかな多様体 (1 の分割を持つ)} \\ \pi : Y \rightarrow M & \text{局所的に断面を持つ上への沈め込み} \end{array} \right.$$

例

(1) fibration $\pi : Y \rightarrow M$

(2) M の開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ に対して $Y := \sqcup_\alpha U_\alpha$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y^{[p]} := \{(y_1, \dots, y_p) \mid \pi(y_1) = \dots = \pi(y_p)\} \\ \pi_i : Y^{[p]} \rightarrow Y^{[p-1]} \quad (i \text{ 番目をとばす}) \\ \delta := \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \pi_i^* : A^q(Y^{[p]}) \rightarrow A^q(Y^{[p+1]}) \end{array} \right.$$

$$M \xleftarrow{\pi} Y \xleftarrow[\pi_2]{\pi_1} Y^{[2]} \rightleftharpoons Y^{[3]} \rightleftharpoons Y^{[4]} \dots$$

$$\leadsto \delta\delta = 0$$

補題 1 (Murray). 次は完全系列 ($q \geq 0$)。

$$0 \longrightarrow A^q(M) \xrightarrow{\pi^*} A^q(Y) \xrightarrow{\delta} A^q(Y^{[2]}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

Bundle gerbe の定義

定義 1. $\mathcal{G} = (Y, P, s)$ が M 上の bundle gerbe

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (1) & \pi : Y \rightarrow M \quad \text{局所的に断面を持つ} \\ & \quad \text{上への沈め込み} \\ (2) & P \rightarrow Y[2] \quad \text{円周束} \\ (3) & s : Y[3] \rightarrow \delta P \quad \text{断面} \\ (4) & \delta s = 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & P & & \delta P & & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \wr s & & \downarrow \wr \delta s=1 \\ Y & \Leftarrow & Y[2] & \Leftarrow & Y[3] & \Leftarrow & Y[4] \\ & & \downarrow \pi & & & & \\ & & M & & & & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} \delta P := \pi_1^* P \otimes \pi_2^* P^{\otimes -1} \otimes \pi_3^* P, \\ \delta \delta P \cong 1 \\ \delta s := \pi_1^* s \otimes \pi_2^* s^{\otimes -1} \otimes \pi_3^* s \otimes \pi_4^* s^{\otimes -1} \end{array} \right)$$

Bundle gerbe の分類

命題 3 (Murray-Stevenson).

$$\{M \text{ 上の } bundle \text{ gerbe}\} / \text{安定同値} \cong H^3(M, \mathbb{Z})$$

Bundle gerbe $\mathcal{G}$ を分類するコホモロジー類
= Dixmier-Douady 類 $\delta(\mathcal{G}) \in H^3(M, \mathbb{Z})$

Bundle gerbe の例 (lifting bundle gerbe)

$$\left\{ \begin{array}{ll} K & \text{コンパクト Lie 群} \\ LK & K \text{ の (自由) ループ群} \\ \widehat{LK} & LK \text{ の } S^1 \text{ による中心拡大} \\ Y \rightarrow M & \text{主 } LK \text{ 束} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} \widehat{LK} \\ \downarrow S^1 \\ \tau : Y^{[2]} \longrightarrow LK, \quad y_1 \cdot \tau(y_1, y_2) = y_2 \end{array}$$

$P := \tau^* \widehat{LK}$ とおくと、 $\widehat{LK}$ の積構造から断面 $s : Y^{[3]} \rightarrow \delta P$ が定まり、 $\mathcal{G} = (Y, P, s)$ は bundle gerbe になる。

$$\delta(\mathcal{G}) = \text{string class (Killingback)}$$

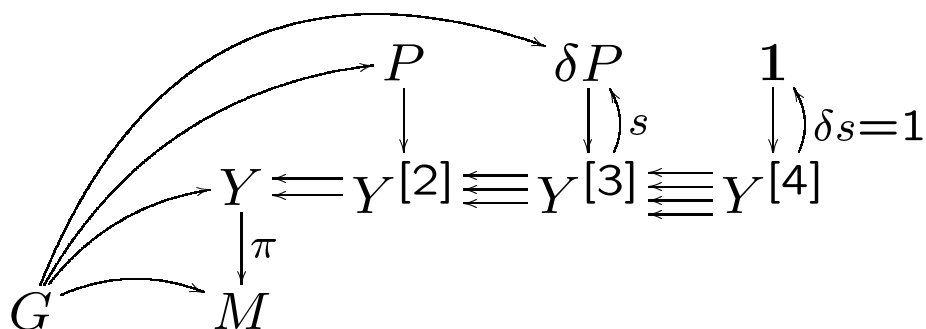
§ 同変 bundle gerbe の簡約

同変 bundle gerbe

Lie群 G が多様体 M に作用しているとする。

定義 2. $\mathcal{G} = (Y, P, s)$ が同変

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) & \pi : Y \rightarrow M & G \text{ 同変} \\ (2) & P \rightarrow Y[2] & G \text{ 同変} \\ (3) & s : Y[3] \rightarrow \delta P & G \text{ 不変} \end{cases}$$



注意. 上の定義は、一般の同変 bundle gerbe の定義の特別な場合である。(強同変 bundle gerbe)

同変 bundle gerbe の簡約

$\mathcal{G} = (Y, P, s) \cdots M$ 上の G 同変 bundle gerbe

仮定

1. G の M への作用は自由で局所的に自明。
2. M/G は $q : M \rightarrow M/G$ が smooth になるように多様体の構造が入る。
3. さらに Y も同様の性質を持つ。

命題 4. M/G 上の bundle gerbe $\bar{\mathcal{G}}$ であって、 $q^*\bar{\mathcal{G}}$ が $\mathcal{G}$ に同変に安定同値なものが存在する。
(このような $\bar{\mathcal{G}}$ は安定同値を除いて一つ。)

$$\begin{array}{ccccc}
& P & & \delta P & \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
Y \Leftarrow Y[2] \Leftarrow Y[3] & \xrightarrow{\quad} & P/G & \xrightarrow{\quad} & \delta P/G \\
\downarrow \pi & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \bar{s} \\
M & \xrightarrow{\quad} & Y/G \Leftarrow Y[2]/G \Leftarrow Y[3]/G & \xrightarrow{\quad} & \\
& \searrow & \downarrow & & \\
& & M/G & &
\end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Y} := Y/G \\ \bar{P} := P/G \\ \bar{s} \in \Gamma(\bar{Y}^{[3]}, \delta \bar{P}) \\ \updownarrow \\ s \in \Gamma(Y^{[3]}, \delta P)^G \end{array} \right. \Rightarrow \bar{\mathcal{G}} = (\bar{Y}, \bar{P}, \bar{s})$$

§ Bundle gerbeの接続

定義 3. $\mathcal{G} = (Y, P, s) : M$ 上の bundle gerbe

$$\mathcal{G} \text{ の接続 } \nabla \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ の接続 } \nabla \in \sqrt{-1}A^1(P) \\ s^*(\delta\nabla) = 0$$

$$\nabla \text{ の curving } f \quad \Leftrightarrow \quad 2 \text{ 形式 } f \in A^2(Y) \\ \delta f = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}F(\nabla)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & P & & \delta P & & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \rightrightarrows & Y[2] & \rightrightarrows & Y[3] & \rightrightarrows & Y[4] \\ \downarrow \pi & & & & & & \\ M & & & & & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \downarrow s \\ \downarrow \delta s = 1 \end{array}$$

注意

- (1) ∇ や f は存在するが、一意ではない。
- (2) $\exists! \Omega \in A^3(M), \pi^*\Omega = df$
 $\dots$ 3-curvature

同変 bundle gerbe の接続

定義 4. $\mathcal{G} = (Y, P, s) \cdots$ 同変 bundle gerbe

(a) $\mathcal{G}$ の接続 ∇ が G 不変

$\Leftrightarrow$ 円周束の接続として G 不変

(b) ∇ の curving f が G 不変

$\Leftrightarrow$ 2 形式として G 不変

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & P & \xrightarrow{\delta P} & 1 \\
 & \searrow & \searrow & \searrow & \downarrow & \downarrow s & \downarrow \delta s = 1 \\
 G & \xrightarrow{\quad} & Y & \xleftarrow{\quad} & Y[2] & \xrightarrow{\quad} & Y[3] & \xrightarrow{\quad} & Y[4] \\
 & \searrow & \downarrow \pi & & & & & & \\
 & & M & & & & & &
 \end{array}$$

“ G 同変な接続つき bundle gerbe” = “ G 不変な接続と G 不変な curving を持つ G 同変 bundle gerbe”

$\leadsto$ 3-curvature Ω は G 不変な 3 形式になる。

§ 同変な接続つき bundle gerbe の簡約

G 同変な接続つき bundle gerbe $(\mathcal{G}, \nabla, f)$
 $\leadsto (P, \nabla)$ の moment map $\tilde{\lambda} : Y^{[2]} \rightarrow \mathfrak{g}^*$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & P & \xrightarrow{\quad} & \delta P \\
 & \searrow & & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & Y & \xleftarrow{\quad} & Y^{[2]} \rightleftharpoons Y^{[3]} \rightleftharpoons Y^{[4]} \\
 & \searrow & & \searrow & \downarrow \pi & & \\
 G & & & & M & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \downarrow \delta s = 1 \\
 \downarrow \delta s = 1
 \end{array}$$

補題 2. $(\mathcal{G}, \nabla, f), \tilde{\lambda}$ を上の通りとする。

(a) $\exists \lambda \in A^0(Y, \mathfrak{g}^*), \delta \lambda = \tilde{\lambda}$

(b) $\{ \lambda \in A^0(Y, \mathfrak{g}^*) \mid \delta \lambda = \tilde{\lambda} \} \leftrightarrow A^0(M, \mathfrak{g}^*)$

$\because \delta \tilde{\lambda} = 0$ と Murray の結果 (補題 1) より。

Cohomology $\mathcal{Z}/\mathcal{B}$

$$A^1(M, \mathfrak{g}^*) \oplus A^0(G \times M, \mathfrak{g}^*) \supset \mathcal{Z} \supset \mathcal{B}$$

$(E, \zeta) \in \mathcal{Z} \dots$ cocycle

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} g^*E(x; V) - \text{Ad}_g E(x; V) = d_M \zeta((g, x); V), \\ \text{Ad}_g \zeta(h, x) - \zeta(gh, x) + \zeta(g, hx) = 0. \end{cases}$$

$(g \in G, \ x \in M, \ V \in T_x M)$

$(E, \zeta) \in \mathcal{B} \dots$ coboundary

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \exists f \in A^0(M, \mathfrak{g}^*), \\ E = df, \\ \zeta(g, x) = f(gx) - \text{Ad}_g f(x). \end{cases}$$

補題 3. 同変接続つき *bundle gerbe* $(\mathcal{G}, \nabla, f)$ が与えられたとき、 $\delta\lambda = \tilde{\lambda}$ となる $\lambda \in A^0(Y, \mathfrak{g}^*)$ に対し次のように $(E, \zeta) \in \mathcal{Z}$ を定める。

$$\begin{cases} \pi^* E_X &:= d\lambda_X + \iota_{X^*} f \\ (\pi^* \zeta_X)(g, y) &:= g^* \lambda_X(y) - \text{Ad}_g \lambda_X(y) \end{cases}$$

$\Rightarrow [E, \zeta] \in \mathcal{Z}/\mathcal{B}$ は λ のとり方によらない。

$\beta(\mathcal{G}, \nabla, f) := [E, \zeta] \cdots$ “moment map” の役割

$$\boxed{dE_X = -\iota_{X^*} \Omega}$$

同変な接続つき bundle gerbe の簡約

$(\mathcal{G}, \nabla, f) : M$ 上の G 同変な接続つき bundle gerbe

仮定

1. G の M への作用は自由で局所的に自明。
2. M/G は $q : M \rightarrow M/G$ が smooth になるように多様体の構造が入る。
3. さらに Y も同様の性質を持つ。

定理 5. $(\mathcal{G}, \nabla, f)$ の簡約ができる。
 $\Updownarrow$
 $\beta(\mathcal{G}, \nabla, f) \in \mathcal{Z}/\mathcal{B}$ が消える。

$$\beta(\mathcal{G}, \nabla, f) = 0 \Leftrightarrow \text{ある } \lambda \text{ に対して } \begin{cases} \delta \lambda &= \tilde{\lambda} \\ (E, \zeta) &= 0 \end{cases}$$

大事なポイント

1. 上のような λ を一つ固定
 $\leadsto$ 具体的な簡約
2. 上のような λ は一般には一意ではない
 $\leadsto M/G$ で異なる同値類

具体的な簡約

$$\begin{cases} \mathcal{G} = (Y, P, s) & G \text{ 同変 bundle gerbe} \\ \nabla \in \sqrt{-1}A^1(P) & G \text{ 不変な } \mathcal{G} \text{ の接続} \\ f \in A^2(Y) & G \text{ 不変な } \nabla \text{ の curving} \end{cases}$$

$$\beta(\mathcal{G}, \nabla, f) = 0 \in \mathcal{Z}/\mathcal{B}$$

$$\Rightarrow \lambda \in A^0(Y, \mathfrak{g}^*) \text{ をうまくとり } \begin{cases} \delta\lambda & = \tilde{\lambda} \\ (E, \zeta) & = 0 \end{cases}$$

(主 G 束 $M \xrightarrow{q} M/G$ の接続 $\Xi \in A^1(M, \mathfrak{g})$ を固定)

$$\kappa := \langle \lambda, \pi^* \Xi \rangle \in A^1(Y)$$

$$(\mathcal{G}, \nabla, f) \rightsquigarrow (\mathcal{G}, \nabla - 2\pi\sqrt{-1}\delta\kappa, f + d\kappa)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ (\bar{\mathcal{G}}, \bar{\nabla}, \bar{f}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow & \searrow \text{---} \\ Y \rightleftharpoons Y[2] & & P/G \\ \downarrow \pi & \searrow \text{---} & \downarrow \\ M & & Y/G \rightleftharpoons Y[2]/G \\ & \searrow \text{---} & \downarrow \pi \\ & & M/G \end{array}$$

λ のとり方について

$$\begin{aligned} & \left\{ \lambda \in A^0(Y, \mathfrak{g}^*) \mid \delta\lambda = \tilde{\lambda}, (E, \zeta) = 0 \right\} \\ & \quad \updownarrow \\ & \left\{ \mu \in A^0(M, \mathfrak{g}^*) \mid d\mu = 0, g^*\mu = \text{Ad}_g\mu \right\} \end{aligned}$$

($\Rightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ ならば、 $[(\bar{\mathcal{G}}, \bar{\nabla}, \bar{f})]$ は一意。)

$$\begin{array}{ccc} & (\mathcal{G}, \nabla, f) & \\ \swarrow \lambda & & \searrow \lambda' \\ (\bar{\mathcal{G}}, \bar{\nabla}, \bar{f}) & & (\bar{\mathcal{G}}, \bar{\nabla}', \bar{f}') \end{array}$$

命題 6. $(\bar{\mathcal{G}}, \bar{\nabla}, \bar{f}) \simeq (\bar{\mathcal{G}}, \bar{\nabla}', \bar{f}')$: 安定同値
 $\Leftrightarrow \lambda' - \lambda \in A^0(M, \mathfrak{g}^*)$ が、ある同変な平坦接続
 つきの円周束の *moment map* になっている。

$[(\bar{\mathcal{G}}, \bar{\nabla}, \bar{f})]$ が一意でない例: $S^1 \curvearrowright S^3$, $S^3/S^1 \cong S^2$