Geometry of lines on certain Moishezon threefolds

(work in progress)

本多 宣博

東京工業大学

2003年9月12日

M: oriented 4-manifold

Z: complex threefold

Z が M の twistor space $\Longleftrightarrow$

$\exists\sigma : Z \longrightarrow Z$; free anti-hol. invol.

$\exists\pi : Z \longrightarrow M$; CP^1-b'dle map (C^∞)

s.t. π の各ファイバーは σ 不変な Z の複素部分多様体で $N \simeq \mathcal{O}(1)^{\oplus 2}$ を満たす

π: twistor fibration

π のファイバー: twistor line

σ: real str.

[Penrose対応]

$Z \to M$: **twistor space of** M

$\Updownarrow$ **(can.)**

M **上の自己双対共形構造** $[g]$,

$$W_-(g) = 0$$

$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$: **2-form の分解**

$$\Downarrow$$

$W = W_+ + W_-$: **Weyl 曲率の分解**

Thm (Freedman, Donaldson)

M: コンパクト単連結 4-mfd,

$\exists g$: スカラー曲率正の自己双対計量

$$\Downarrow$$

$$M \sim n\mathrm{CP}^2 \text{ (homeo.)}$$

- $n = 0, 1, 2 \Rightarrow$ 完全な分類定理，構成．(Poon 1986)
- $\forall n \geq 1$, $n\mathrm{CP}^2$ 上にスカラー曲率正の自己双対計量が存在(LeBrun '92, Joyce '95) $U(1)$, $U(1)^2$ の作用を用いた具体的な構成
- 以下 $n = 3$ のときを考える。

Thm (Honda, 2001-2002)

(i) $3\mathbb{CP}^2$ **のtwistor spaceで正則な**$\mathbb{C}^*$**作用をもち、LeBrunでないものが存在する。**

(ii) そのようなツイスター空間は、次式で定まる4次曲面B**で分岐する二重被覆の構造をもつ:**

$$(y_2y_3 + Q(y_0, y_1))^2 - y_0y_1(y_0 + y_1)(ay_0 - by_1) = 0.$$

ここでQ**は実正定値２次形式、**$a, b > 0$**であり、**

$$Q(\lambda, 1)^2 - \lambda(\lambda + 1)(a\lambda - b) \geq 0, \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

が成立する。さらに等号を成立させるλ**がただ一つ存在する(したがって重根)。**

(iii) 4次曲面B**はelliptic ruled surfaceと双有理同値で、ちょうど3点の特異点をもつ。**

(iv) 特異点のうち1点は通常二重点，残りの2点は$\tilde{E}_7$**型の単純楕円型特異点**

Rmk. $\mathrm{C}^* \curvearrowright \mathrm{CP}^3$, $\sigma : \mathrm{CP}^3 \to \mathrm{CP}^3$ はともに上の同次座標で具体的に書き下せる。

Rmk. 上記の二重被覆写像は完備線形系 $|(-1/2)K_Z|$ で与えられる。

Rmk. C^*-actionの存在を仮定しない一般の場合，Poon, Kreussler-Kurke (1992) により類似の結果が得られている．ただし，その場合，分岐４次曲面は特異点として有理二重点しかもたず，$K3$ 曲面になる．

Cor. $\exists$ self-dual metric on $3\mathbb{CP}^2$ s.t.

(i) スカラー曲率正,

(ii) $\mathrm{Isom}_0 = U(1)$,

(iii) LeBrun計量と共形同値でない.

さらにこれらの計量の$U(1)$作用は同変同値を除いて一意的.

Outline of a proof of Thm:

[存在について]

• Donaldson-Friedman のgluing constr. の一般化(Honda, 1999)を用いる.

• LeBrun twistor space の equivariant deformation を考える。

[分岐曲面の方程式の導出]

tropeに着目する(+ Hitchinの消滅定理):

Problem. 逆に、上の方程式で与えられる４次曲面 B を与えたとき、B で分岐する二重被覆は $3\mathrm{CP}^2$ のツイスター空間の構造をもつか？

$$Z \longrightarrow Z_0$$

$$\mathrm{CP}^3 \supset B$$

- twistor line の族を実際に書き下すことにより Z がツイスター空間になっていることを直接証明できないか？

- twistor lineはきれいな形で入っているはず
- $3\mathrm{CP}^2$ 上の対応する自己双対計量を具体的に書き下せないか？

Prop. Z 上の generic な twistor line L の像 $\Phi(L)$ は (realな) conicである。従って，特にただ一つの (realな) 平面に含まれる。さらにより詳しく $\Phi(L)$ は分岐曲面 B と 4点で接する

Rmk. 実際にはどんな場合に $\Phi(L)$ が line に退化してしまうかを正確に決めることができる。

以下、このような conic のことを、

touching conic

と呼ぶことにする。上記命題より、与えられた分岐曲面 B (またはplane section $B \cap H$)に対して real なtouching conic がどのくらい存在するかが問題になる。

Prop. (i) 非特異な平面４次曲線は 28 本の複接線を持つ。(ii) 非特異な平面４次曲線の touching conics は 合計63個の１次元family をなし、それぞれは複接線のpairから生成される。

Prop.　(i) Bを初めの方程式で与えられる４次曲面、Hをgenericでrealな平面とすると、H上の63個のtouching conicの族のうち、realなもの(twistor lineの像となりうるもの)はちょうど４個ある。
(ii)　CをH上のreal touching conicとすると、$\Phi^{-1}(C)$の２つの既約成分は、どのCをとってもZの中でホモローガス

そこで、$H\cap B$が退化しているHに対してH上のtouching conic の族を調べる。

$H \in \langle l_\infty \rangle^\sigma$ のときの $H \cap B$ の構造
(このとき H は C^*-不変)

$$B \cap H_\lambda = C_1 + C_2$$

- C_1, C_2: real $\Leftrightarrow f(\lambda) > 0$
- $C_1 = C_2 \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$ or $\lambda = \infty$

$$f := f(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(a\lambda - b)$$

Lem. このように退化した 4 次曲線に対しては，touching conic の族を決定できて，それらの定義方程式を具体的に書き下すことができる．さらに，それらの族のうち，どれがtwistor lineの像になっているか，特定することができる．

Lem. 上で求めたtouching conicたちに対して，その(Φによる) 逆像は２つの有理曲線にsplitするが，それらのZ内でのnormal bundleをすべて決定することができる．

副産物として次の結果を得る．

Cor. $\exists L \subset Z$ s.t.

(i) L は real な非特異有理曲線,

(ii) $N \simeq \mathcal{O}(1)^{\oplus 2}$,

(iii) L は twistor line<u>ではない</u>.

Rmk. 上記のLは少なくともlocalには自己双対計量を決めることに注意.

Description of candidates for twistor lines

Z_0のsmall resolutionについて

$$Z \longrightarrow Z_0$$

$$\mathrm{CP}^3 \supset B$$

Bの特異点 $P_0, P_\infty, \overline{P}_\infty$,

P_0:通常二重点

$P_\infty, \overline{P}_\infty$: $\tilde{E}_7$型の単純楕円型特異点

$$\Downarrow$$

対応して，Z_0は通常二重点p_0とcompound A_3特異点 $p_\infty, \overline{p}_\infty$を持つ．

Z_0のsmall resolutionの取り方:

p_0: 2通り

$p_\infty, \overline{p}_\infty$: 4!=24通り

このとき次が成立する.

> **Thm.** p_∞の24通りのsmall resolutionのうち, Zがツイスター空間になりうるのは2通りしか存在しない．さらに，この２通りのresolutionは，p_0のsmall resolutionを与えれば自動的に定まる.

これらの結果の詳細は東工大のホームページhttp://www.math.titech.ac.jp のプレプリントシリーズからダウンロードできます.