非可換空間上の場の理論と位相への応用

慶應理工　佐古彰史

E-mail: sako@math.keio.ac.jp

0. Intro

- 非可換空間のトポロジーを場の理論で
- 行列模型のトポロジー(スカラー、ゲージ理論)
- 非可換パラメータのシフトで不変な理論
- Kー理論との関係を議論

内容

1. 量子論（経路積分復習）
2. 復習（CohFT、etc）
3. 可換な場合の雛型
4. 有限行列の模型
   非可換CohFTの計算
5. IKKT模型などについてコメント
6. まとめ

1　記法、慣例の注意

添え字の種類

○$\mu, \nu \cdots$ ：観測者のいる空間のベクトルの添え字
特にd次元時空の座標を$(x_0, x_1, \cdots, x_{d-1})$ ととり時間成分$t = x_0$(またはtのかわりにτを使うこともある) とわけてx_iを空間成分とすることが多い
○$i, j, \cdots$: 空間成分の添え字,内部空間の添え字
○$\alpha, \beta, \cdots$ ：スピノルの添え字

また、「スカラー場」、「スピノル場」、「ベクトル場」、「テンソル場」などと使い分けられるのは、全て時空の回転（SO(D) 回転）に対しての変換性を表し、例えば場が内部空間のベクトルであっても時空回転でスカラーであれば「スカラー場」と呼ばれる

添え字の上下

下付添え字(共変）のベクトル x_μ 、計量 $g^{\mu\nu}$ に対し、上付き添え字（反変、双対）ベクトルを

$$x^\mu \equiv \sum_\mu g^{\mu\nu} x_\nu \tag{1}$$

で定義し、また$g_{\mu\nu}$を$g^{\mu\nu}$の逆行列で定義する。

アインシュタインの縮約の記法

vector x_μ, y_μ

計量 $g^{\mu\nu}$ に対して内積を、

$$\sum_{\mu,\nu} x_\mu y_\nu g^{\mu\nu} = x_\mu y^\mu \tag{2}$$

$$x^2 = x \cdot x = x_\mu x^\mu \tag{3}$$

と書く。また任意の階数のテンソルに対し添え字が同じ時は、断らないかぎり縮約をとる。

フェルミオンとボゾン

ボゾン：グラスマン偶な場(成分が可換 $AB = BA$)

フェルミオン：グラスマン奇な場（反可換 $AB = -BA$）

フェルミオンはギリシャ文字を使って書かれることが多い。　ψ, χ, η など。

例外がボゾンのスカラー場で ϕ をよく使う

交換関係、反交換関係

交換関係:$[A, B] \equiv AB - BA$

反交換関係：$\{A, B\} \equiv AB + BA$

クロネッカーとディラックのデルタ

δ_{ij}：クロネッカーのデルタ（$i = j$ で1、$i \neq j$ で0）

$\delta(x - y)$:Diracのデルタ　$\int dx f(x)\delta(x - y) = f(y)$

$\epsilon_{\mu\cdots\nu}$:反対称テンソル

などの記号を慣習として使う

1. 量子論復習

1-1. 古典論

$\boxed{\text{粒子の力学の場合}}$

$\tau \in l$: l は時間を表す線分、τ は時刻（パラメター）

M: リーマン多様体（ターゲット空間）

$g^{\mu\nu}$: リーマン計量

$\mathcal{F}$: $Map(l, M)$

$x_\mu(\tau)$:$\mathcal{F}$ の元。時刻 τ の粒子の位置

L : ラグランジアン $Map(\mathcal{F}, \mathcal{C}^\infty(M))$、あるスカラー関数

$S \equiv \int_l L(x_\mu(\tau))$: 作用

「作用 S を与えると運動が決定する」

⇒ S を最小とする x_μ の軌跡が決定する

(最小作用の原理)

運動方程式 (Euler-Lagrange 方程式：

運動を決める方程式

$$\delta S = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial(dx^\mu/d\tau)}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \tag{4}$$

0-2. 正準量子化

正準運動量： $P^\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_\tau X_\mu)}$

ハミルトニアン：正準運動量と座標で書く（座標の微分を含まない）

$$H = P^\mu \partial_\tau X_\mu - L = \frac{P^2}{2m} + V(x) \tag{5}$$

ハミルトニアンの固有値がエネルギー　**E**

不確定性関係：$[X^\mu, P^\nu] = X^\mu P^\nu - P^\nu X^\mu = i\delta^{\mu\nu}$

⇒　$P^\nu = i\partial^\nu$ とすると上の交換関係は満たされる。

⇒　運動量 P^ν は空間座標 X^ν を並進する演算子であることがわかる

古典論：X^μ は粒子や弦の位置座標

P^ν は　粒子や弦の運動量

量子論：X^μ は粒子や弦の位置を測定する作用

P^ν は　粒子や弦の運動量を測定する作用

例１）調和振動子

バネについた粒子などの運動が調和振動子であるが、場の理論は摂動的にはすべてこの調和振動子の問題であり重要。

ラグランジアンのポテンシャルが

$V(x) = -kx^2$

この時ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + kx^2 \tag{6}$$

「生成演算子、消滅演算子」を導入。

$$a^\dagger \equiv \sqrt{k}x + \frac{i}{\sqrt{2m}}p, \quad a \equiv \sqrt{k}x - \frac{i}{\sqrt{2m}}p \tag{7}$$

正準交換関係：$[x,p]=i$ **は以下のように書き換わる**

$$[a,a^\dagger]=1, \quad [a,a]=[a^\dagger,a^\dagger]=0 \tag{8}$$

以下の計算は全てこの交換関係で計算される。

個数演算子を$N=a^\dagger a$**とするとハミルトニアンは**

$$H=a^\dagger a+\frac{1}{2}=N+\frac{1}{2} \tag{9}$$

N**の固有状態を** $|n\rangle$ **とする。つまり、**$N|n\rangle=n|n\rangle$**。このとき**$[a,a^\dagger]=1$ **より**

$$a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle \tag{10}$$

これが生成（消滅）と呼ばれる所以。係数は規格化
ハミルトニアン（エネルギー）は正定値なのでN**の固有状態には下限がありそれを**$|0\rangle$ **とする。（つまり**$a|0\rangle=0$**）**

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}{a^\dagger}^n|0\rangle \tag{11}$$

は完全系を張りる。この式は$|n\rangle$**が真空に**n**回生成演算子を掛けたものであることを示す。**

$$E_n=n+\frac{1}{2}\ ; \quad n=0,1,2,\cdots \tag{12}$$

量子論ではエネルギーがこのように連続でない値をとることがある。（量子化されたと呼ぶ。）

1-2. 経路積分による量子化

● ガウス積分

有限次元

n 次元ベクトル x とエルミート行列 A に対し

$$\int dx_1 \cdots dx_n \exp(-x^T A x) = \sqrt{(\frac{\pi^n}{det A})}$$

これを無限次元に拡張する。

● 場のガウス積分

場 $\phi_i(x)$ と微分も含んでよい作用素 A に対し

$$\int \mathcal{D}\phi \exp(-\phi_i(x) A^{ij}(x,y)\phi_j(y)) = C\sqrt{(\frac{1}{det A})} \quad (13)$$

と形式的に定義する。

● フェルミオンの積分

Fermion の場合はどうだろうか。

積分の並進不変性からフェルミオンの積分は

$$\int d\psi \psi = 1 \ , \ \int d\psi = 0$$

と定義される。

〔ヤコビアン〕

フェルミオンを $\psi'_i = A_i{}^j \psi_j$ と変数変換すると

$$J = \det A$$

つまり $d\psi'_1 \cdots d\psi'_n = (\det A) d\psi_1 \cdots d\psi_n$ と

ボゾンとは逆に出てくることに注意 !!

⇒　ボゾンとフェルミオンが対称に入っていると

　　　ガウス積分がキャンセルする

「これが超対称性や位相的場の理論で有限の期待値が出てくる理由」

● $\boxed{\text{Fermion のガウス積分}}$

ヤコビアンの出方が逆なのでガウス積分の結果も逆

ψ_i を実グラスマン奇とし M^{ij} を反対称行列とすると

$$\int d\psi_1 \cdots d\psi_n \;\; \exp(-\psi_i M^{ij} \psi_j) = 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det M} \qquad (14)$$

●経路積分による量子化

古典解は関数空間で作用の極値を与える軌跡

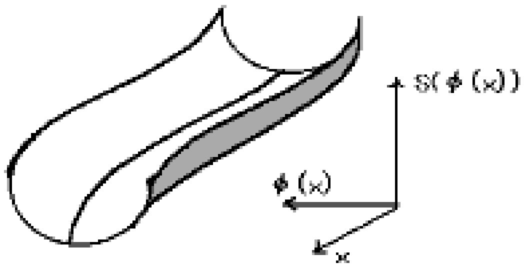

図 1: 古典解

経路積分の思想は摂動論的には古典解の周りでガウス分布で重みを与えてあらゆる軌道で積分

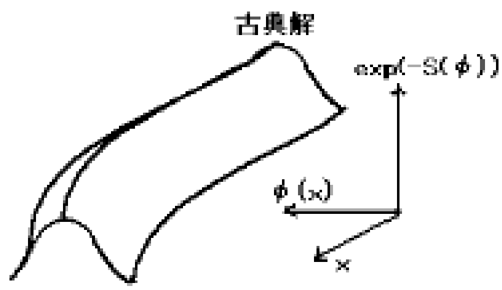

図 2: ガウス分布(スカラー場の場合)

O という観測量を観測する期待値を

$$\int \mathcal{D}\phi_i \quad O \exp\left(- S(\phi_i)\right) \equiv \langle O \rangle \tag{15}$$

と定義することが「経路積分による量子化」である。

●分配関数 Z とは $O = 1$

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\phi_i \quad \exp\left(- S(\phi_i)\right) \tag{16}$$

2. 復習 Cohomological F.T. etc.

2-1. Mathai-Quillen 形式

M ： **コンパクトリーマン多様体、** $x \in M$

$s^a(x)$: **ベクトル束の切断**

$\boxed{\text{TFT}}$ **BRSを** $\hat{\delta}$ **で書き**

$$\hat{\delta} x_\mu = \psi_\mu \sim dx_\mu, \ \hat{\delta}\chi_a = H_a, \ \hat{\delta}\psi_\mu = \hat{\delta}\chi_a = 0 \tag{17}$$

Cohomological Field Theory の作用

$$\begin{aligned} S \ &= \ \hat{\delta}\left\{\frac{1}{2}\chi_a(2s^a(x) + A_\mu^{ab}\psi^\mu\chi_b + b^a)\right\}. \\ &= \ \frac{1}{2}\left|s^a(x)\right|^2 - \frac{1}{2}\chi_a\Omega_{\mu\nu}^{ab}\psi^\mu\psi^\nu\chi_b - i\nabla_\mu s^a(\psi)^\mu\chi_a. \end{aligned} \tag{18}$$

$s^a(x) = 0$ **の周りで展開すると:**

$$|s^a|^2 = (\nabla_\mu s^a \delta x^\mu)^2 + \cdots \tag{19}$$

ボソン x **の積分　⇒** $1/\sqrt{det|\nabla_\mu s^a|^2}$

フェルミオン ψ, χ **積分⇒** $det(\nabla_\mu s^a)$

ゼロモードの積分を（ $M_0 = \{x|s^a = 0\}$ **上の積分）**

$$\int_{M_0} \mathcal{D}x\mathcal{D}\psi_0\mathcal{D}\chi_0 e^{-\frac{1}{2}\chi_{a0}\Omega_{\mu\nu}^{ab}\psi_0^\mu\psi_0^\nu\chi_{b0}} = \int_{M_0} Paff(\Omega^{ab}) \tag{20}$$

と書くと分配関数は

$$Z = \sum_k {\color{red}\epsilon_k}\chi_k(M_0\text{上ベクトル束}) \tag{21}$$

k **は真空を特徴付ける添え字、** $\epsilon_k = \pm$

つまり符号付きのオイラー数(ゼロ点）を足しあげ

無限次元の場の理論に拡張したものがCohFT

２－１．非可換空間の Cohomological field theory

非可換パラメータ $i\theta^{\mu\nu} = [x^\mu, x^\nu]$ **の変形**
非可換パラメータをシフトする

$$\theta \longrightarrow \theta' = \theta + \delta\theta. \qquad (22)$$

≪Topological Field Theory はθの変形で不変≫
分配関数はBRS変換と可換な変換のもとでは不変

$$\begin{aligned}\hat{\delta}\delta' &= \pm\delta'\hat{\delta}, \\ \delta' \ Z_\theta &= \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi\mathcal{D}H \quad \delta'\left(-\int dx^D\hat{\delta}V\right) \ \exp\left(-S_\theta\right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi\mathcal{D}H \quad \hat{\delta}\left(-\int \delta' V\right) \ \exp\left(-S_\theta\right) = 0.\end{aligned}$$

θ-shift の作用を導入

$$\delta_\theta\theta_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + \delta\theta_{\mu\nu}. \qquad (23)$$

δ_θ **はBRS変換とは可換**
⇒ θ-shift のもと分配関数は不変
⇒$\mathcal{M}$のオイラー数はθに依らない

座標も適当に$\sqrt{\theta}$倍する

$$S_{\theta'} \sim \int \det\sqrt{\theta}dx'^D\mathcal{L}(*_\theta, \frac{1}{\sqrt{\theta}}\frac{\partial}{\partial x'^\nu}). \qquad (24)$$

モヤル積のパラメータを止めてリスケールすること

$$*_\theta = exp^{\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_\mu}\theta^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial_\nu}} \qquad (25)$$

3.N.C.Cohomological Scalar model

3-1.Finite Matrix model with a connection

M : $N \times N$ **Hermitian matrixの全体**

V : $N \times N$ **次元自明ベクトル束**

ϕ^{ab}**の上三角部分** : **canonical coordinate of** M

∇ : **connection** $\Gamma(V) \to \Gamma(T^*M \otimes V) = V$

$A_{ji;mn}{}^{kl}(\phi)$: V **上で定義された接続**

e_{ij} : **localに**$N^2 \, \mathrm{dim}$**1次独立な基底** $\nabla_{ij} e_{kl} = \sum A_{ij;kl}{}^{mn} e_{mn}$

≪作用≫

$$\hat{\delta}\{\ \chi^{ij}([\phi(1-\phi)]_{ji} + i\chi^{mn} A_{ji,mn}{}^{kl}(\phi)\psi_{kl} - iH_{ij})\}$$

ボゾン部分

$$\mathrm{Tr}(\phi(1-\phi))^2 \tag{26}$$

フェルミオン部分

$$i\chi^{ba}\left\{(\psi(\phi-1)+\phi\psi)_{ab} - \sum_{ijklmn} \psi_{ij}\psi_{kl} F(ij,kl;ab,mn)\chi_{mn}\right\}$$

但し曲率 $F(ij,kl;ab,mn)$

$$\frac{\delta}{\delta\phi_{ij}} A_{kl;ab}{}^{mn} - \frac{\delta}{\delta\phi_{kl}} A_{ij;ab}{}^{mn} + i\sum_{(c,d)} [A_{ij;ab}{}^{cd} A_{kl;cd}{}^{mn} - A_{kl;ab}{}^{cd} A_{ij;cd}{}^{mn}]$$

《停留点》

$(\phi(1-\phi))=0$

⇔Projection P : N 次元から k 次元

＝グラスマン多様体 $G_k(N)$ への写像

Poincare 多項式

$$P_t(G_k(N)) = \frac{(1-t^2)\cdots(1-t^{2N})}{(1-t^2)\cdots(1-t^{2(N-k)})(1-t^2)\cdots(1-t^{2k})}$$

これを用いて分配関数

$$Z = \sum_{k=0}^{N} P_{-1}(G_k(N))(-1)^k \tag{27}$$

となる。

定理

$$P_{\pm 1}(G_k(N)) = \frac{N!}{k!(N-k)!} \tag{28}$$

$$Z = \sum_{k=0}^{N} P_{-1}(G_k(N))(-1)^k = (1-1)^N \tag{29}$$

非可換空間上のコホモロジカル場の理論と深く関係

3-2.N.C.Coh.F.T.

「行列」⇒[非可換空間上の作用素表示のスカラー場]

作用（運動項も入れておく）

$$S = \int dx^D \sqrt{g}\mathcal{L} + S_{top} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \hat{\delta}\left(\frac{1}{2}\chi * \Big(2(\phi * (1-\phi) - \partial_\mu B^\mu)\right. \\
& \left.\left. + i\int d^n z d^n y \psi(z) A(z;x,y)\chi(y) - iH\right)\right). \\
& + \hat{\delta}\left(\frac{1}{2}\chi^\mu * (\partial_\mu \phi + B_\mu - iH_\mu)\right)
\end{aligned} \tag{31}$$

Topological action (g を複素結合定数)

$$S_{top} = g\tau_{2n}(\mathcal{F}, \cdots, \mathcal{F}) \tag{32}$$

Connes's Chern character homomorphism ;

$$\begin{aligned}
ch_{2n} \;&:\; K_0(\mathcal{A}) \mapsto HC_{2n}(\mathcal{A}) \\
ch_{2n}(p) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{2n}(f, \cdots, f)
\end{aligned} \tag{33}$$

where $f_{ij} = [p\partial_i p, p\partial_j p]$**.**

$$\mathcal{F}_{ij} = [\phi\partial_i\phi, \phi\partial_j\phi] \tag{34}$$

Cyclic cohomology を入れている。

3-3. 強非可換極限　$\theta \to \infty$

$\theta \to \infty$ では**微分を含む運動項が落ちる**

large θ 極限で, model は

$$\begin{aligned} S_0 &= Tr\hat{\delta}\{\hat{\chi}(\hat{\phi}(1-\hat{\phi}) - i\hat{H})\} \\ &+ Tr\hat{\delta}\{\hat{\chi}^{\mu}(\hat{B}_{\mu} - i\hat{H}_{\mu})\} \end{aligned} \tag{35}$$

ボゾン部分

$$Tr\{(\hat{\phi}(1-\hat{\phi}))^2 + (\hat{B}_{\mu})^2\} \tag{36}$$

但しヒルベルト空間をNで切ってトレースの巡回対称性を使う

《停留点》

$(\hat{\phi}(1-\hat{\phi})) = 0$ と $\hat{B}_{\mu} = 0$

Projection P を用いてGMS soliton P が解

Finite θ
微分を含む項を摂動的にとりこんで評価
⇒停留点のトポロジーは変わらない
⇒分配関数は θ に依存しないこと確認

3-4. Moyal plane の分配関数

Fock space などの行列表示をとると有限行列模型を全く同じ理論

《停留点》

$(\hat{\phi}(\hat{\phi}-a))=0$ と $\hat{B}_\mu=0$

⇔ GMS ソリトン aP ＝グラスマン多様体

$G_k(N)$(Moyal plane など)

(但し k はプロジェクション P のランク)

Moyal plane では topological 項 $S_{top}=gk$ は θ には依存しない

$\boxed{\text{Poincare 多項式}}$

$$P_t(G_k(N))=\frac{(1-t^2)\cdots(1-t^{2N})}{(1-t^2)\cdots(1-t^{2(N-k)})(1-t^2)\cdots(1-t^{2k})}$$

これを用いて分配関数

$$\begin{aligned} Z &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} P_{-1}(G_k(N))e^{gk}(-1)^k \\ &= \lim_{N\to\infty}(1-e^g)^N \end{aligned} \tag{37}$$

特に $g=0$ とすると

$$Z=0 \tag{38}$$

4.K 理論と可換空間の CohFT

4-1.Topological Gauge Theory
「ゲージ対称性がある時の変更」

ゲージ変換群 G 、場のゲージ変換 $\mathcal{G}$
モジュライ空間： $\mathcal{M} \equiv \mathcal{A}/\mathcal{G}.$

● 《$\hat{\delta}$ を変更》　$\hat{\delta}^2 = \delta_g$
《Yang-Mills の例》

$$\hat{\delta} A_\mu = i\psi_\mu, \ \hat{\delta}\psi_\mu = -D_\mu\theta = \delta_g A_\mu, \tag{1}$$

ゲージ不変な量　→ 冪零のよい性質は変わらない。

●≪$\mathcal{M} \equiv \mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の積分≫
⇒純ゲージの空間の Poincare dual が見つかるといい

$$\int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} O(\phi, d\phi) = \int_{\mathcal{A}} O(\phi, d\phi)\ e^{-\int \hat{\delta}\Psi_{proj}}. \tag{2}$$

$e^{-\int \hat{\delta}\Psi_{proj}}$ ＝「$\mathcal{A}$ をゲージ水平方向へ射影」
それを見つけて、$\hat{\delta}\Psi_{proj}$ も作用に付け加えるといい

$$S = \int_M (\hat{\delta}\Psi + \hat{\delta}\Psi_{proj}). \tag{3}$$

モジュライ空間上の積分になる
C と $C^\dagger$ 導入.（θ ：ゲージパラメータ）

$$\delta_g\phi = C\theta. \tag{4}$$

η （反ゴースト）と補助場 $\bar{\theta}$ を導入

変換則は

$$\hat{\delta}\bar{\theta} = \eta, \quad \hat{\delta}\eta = \delta_g \bar{\theta}. \tag{5}$$

これらの場を使い Ψ_{proj} **は**

$$\Psi_{proj} = \langle C^\dagger \psi, \bar{\theta} \rangle. \tag{6}$$

付け加えられる作用は

$$\hat{\delta}\Psi_p = \langle (\hat{\delta}C^\dagger)\psi + C^\dagger C\theta, \bar{\theta} \rangle - \langle C^\dagger \psi, \eta \rangle. \tag{7}$$

●≪モジュライ空間の曲率≫⇒ $\bar{\theta}$ **方程式から**

$$\theta = \frac{1}{C^\dagger C}(\hat{\delta}C^\dagger)\psi \tag{8}$$

これが曲率の Pf **を出し、オイラー数になる**

モデル作り

M : $n\,\mathrm{dim}$ **Riemannian Manifold**

v :**rank** N **自明ベクトル束**

ϕ : **End**(v) $N \times N$ **Hermitian matrix**

スカラー場 ⇔ フェルミオン

$\phi^{ab}(x)$ **and** $H^{ab}(x)$ **⇔** $\psi^{ab}(x)$ **and** $\chi^{ab}(x)$,

作用

$$S = S_0 + S_{pro} \tag{9}$$

$$S_0 = \int_M tr\hat{\delta}\{\chi(\phi(1-\phi) - H)\} \tag{10}$$

ボゾン部分

$$(\phi(\phi - a))^2 \tag{11}$$

《停留点》

$(\phi(\phi - 1)) = 0$

⇔各点でプロジェクション P **(dimension** k **へ制限)**

=グラスマン多様体 $G_k(N) = \frac{U(N)}{U(k)\times U(N-k)}$ **への写像**

≪ゲージ対称性のある系≫
モジュライ空間に接続を入れるゲージ群$U(N-k)\times U(k)$のゲージ変換群$\mathcal{G}_{k,N}$

曲率２形式

$$\theta = -\frac{1}{C^\dagger C}[\psi, \psi] \tag{12}$$

⇒モジュライ空間のオイラー数

モジュライ空間$\mathcal{M}_{k,N} = \{\phi | M \mapsto G_k(N)\}/\mathcal{G}_{k,N}$

Note: BRS 変換$\hat{\delta}\phi = \psi$の意味するもの
理論は任意の微小変換で不変
ホモトープな変形で理論は不変
もちろんゲージ変換$\mathcal{G}_{k,N}$の下でも不変
⇒$Vect_k(M) = [M, BU(k)]$：
$BU(k) \equiv \bigcup_{m=k+n+1}^{\infty} G_k(m)$

$$Z = \sum_k \sum_{Vect_k(M)} \chi(\mathcal{M}_{k,N}) \tag{13}$$

$K'(M)$ group：virtuarl dim が０のＫ群
$K(M) = \mathbf{Z} \oplus \tilde{K}$, M が connected なら：$K' = \tilde{K}$
$K'(M) = [M, BU(\infty)]$ 安定領域$k > \frac{1}{2}\dim M$では$K'(M) = [M, BU(k)]$としてよい。

従って、$N \to \infty$で分配関数はK' での足し上げになる。

4-4. K-theory との関係

≪Moyal plane の場合≫

$\tau_0(P_k) = k, \tau_2(P_k) = k$

↓

k で足しあげているので、

K_0 を不変にする変形で今の理論も不変

≪N.C.torus の場合≫

SL(2,Z) 変換で任意に小さい θ 変形が作れる

↓

任意の K 同値な N.C.torus は森田同値で結びつく。

↓

無限小　Morita 同値な変形で今の理論は不変

↓

森田同値は無限小で生成される。

↓

よって、今の理論は K-group を変えない変形で不変になっている。

5.N.C. Cohomological Yang-Mills Theory

θの変形で理論が不変かどうかは非自明

$$\delta^2 = \delta_{g,\theta} \tag{14}$$

$\delta_{g,\theta}$ ： $*_\theta$で積を定義したゲージ変換
交換関係（交換すると理論は不変）

$$\delta_\theta \delta \neq \delta \delta_\theta \Rightarrow \delta_\theta \delta = \delta' \delta_\theta \tag{15}$$

ゲージ変換自身が変更される

$$\delta'^2 = \delta_{g,\theta+\delta\theta} \tag{16}$$

θ shift の後、作用はδ' exactになる。

↓

経路積分測度がδ'のもと不変であればゲージ理論でもZは不変

↓

これは確認される「理論はθ変形のもと不変」

またゲージ変換自身も$\delta_{g,\theta+\delta\theta}$ に変更されるが、
経路積分測度はこの変換に対しても不変

以上より、例えば

●N.C. Cohom. Yang-Mills Theory on 10-dim Moyal space とIKKT 行列模型の分配関数は等しい。(非摂動的な効果を含めて）
さらに2,4,6,8次元などにdimensional reductionしたものとも等価

●N=4のVafa-Witten theory と関係する
非可換の場合には$U(1)$インスタントンの存在がケーラー多様体上でも予想される。

↓

これは、Vafa-Witten theoryの成立条件であるVanishing Theoremが成立しないことを意味する。

↓

Moore-Nekrasov-Shatashviliとの比較でVanishing Theorem が成立しない部分の分配関数の寄与が求まる。

●N.C. Cohomological Yang-Mills Theory
on 4-dim Moyal space でADHM Matrix model との対応が$D_{-1}-D_3$双対性を経由することなく理解される。

４．まとめ

非可換幾何の位相的性質を見るうえでいくつか位相的場の理論的アプローチを見てきた。

1. K 理論と関係が見える位相的場の理論
   （可換、非可換 両方）
   ⇒非可換でも矛盾はない。
   位相的な性質をさらに議論できる？
2. 幾つかのモデルで分配関数が計算
   行列模型で計算された。
   (接続をいれて幾何の手法で）
3. θ の変形のもと不変であること。
   様々な理論が結びつく（特に行列模型と）
4. 最近の超対称な N.C. 理論の発展が
   非常に重要に結びつく