

非可換代数幾何 – 最近の話題

Noncommutative Algebraic Geometry – recent topics

**国際基督教大学 (ICU) 理学科
清水勇二**

Plan:

1. **非可換代数幾何 (NCAG) とは**
– affine, projective, categorical
2. **非可換射影幾何 (NC Projective Geometry)**
非可換射影平面を例に
3. **非可換代数多様体 (NC Algebraic Varieties) の変形**

1 非可換代数幾何 (NCAG) とは

1.1 非可換代数幾何の概観

非可換代数幾何 – (可換) 代数幾何の非可換への一般化

- アフィン (非可換) 代数幾何

可換環 vs 非可換環 = 可換代数幾何 vs 非可換代数幾何

必ずしも 可換代数幾何 $\subset$ 非可換代数幾何 でない

非可換環の世界は広い Artin 環の表現論、量子群

非可換 Symplectic 幾何からの Input

(Connes, Kontsevich, ...)

- 非可換射影代数幾何

非可換射影代数曲線、非可換射影代数曲面

とくに、非可換射影平面の分類 (M. Artin et al.)

- 圏論的 (Categorical) 非可換代数幾何 (NCAG)

Reconstruction theorem $[Coh(X) \Rightarrow X]$

(Gabriel, A. Rosenberg)

非可換スキーム、非可換空間

= Grothendieck 圏 (A. Rosenberg, van den Bergh)

= 局所化された space covers (Kontsevich-A. Rosenberg)

1.2 ホモロジー的ミラー対称性と非可換代数幾何

Kontsevich のホモロジー的ミラー対称性 (予想)

A model (Lagrangian 交叉の導来深谷圏)

$\simeq$ B model (接続層の導来圏)

接続層の導来圏の変形 = extended moduli space

その接空間 = Hochschild cohomology

$$HH^*(X) \simeq \bigoplus_{p,q} H^p(X, \Lambda^q T_X),$$

X = 非特異射影代数多様体

T_X = X 上の正則接ベクトル場の層

変形の幾何的意味は何か?

第2 Hochschild cohomology 群

$$HH^2(X) \simeq H^2(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^1(X, T_X) \oplus H^0(X, \Lambda^2 T_X)$$

$H^1(X, T_X)$ = X の複素構造の変形

$H^0(X, \Lambda^2 T_X)$ = 構造層 $\mathcal{O}_X$ の積の変形

cf. 変形量子化 (Yekutieli)

$H^2(X, \mathcal{O}_X)$ = 接続層の張り合わせ条件の変形

cf. twisted sheaves (Caldararu)

例 $X = \mathbb{P}^2$ の場合

$$\begin{aligned} HH^*(\mathbb{P}^2) &\simeq HH^0(\mathbb{P}^2) \oplus HH^1(\mathbb{P}^2) \oplus HH^2(\mathbb{P}^2) \\ &= H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}) \oplus H^0(\mathbb{P}^2, T) \oplus H^0(\mathbb{P}^2, \Lambda^2 T) \end{aligned}$$

(それぞれ次元は 1, 8, 10)

$H^0(\mathbb{P}^2, T) = “T_{\text{id}}\text{Aut}(\mathbb{P}^2)”$ **接空間**

$\Lambda^2 T = K^{-1} = \mathcal{O}(3)$ **ゆえ、**

$H^0(\mathbb{P}^2, \Lambda^2 T) \simeq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(3)) (= 3 \text{ 次の方程式の空間})$

extended moduli は確かに導来圏のアーベル部分圏より細かい構造の変形を表しているはず。 $Coh(X) \subset D^b Coh(X)$

Fano 多様体の場合のホモロジー的ミラー対称性 ($k = \mathbb{C}$)
(Auroux-Katzarkov-Orlov)

X ; **Fano 多様体** $\leftrightarrow$ Landau-Ginzburg model $W : Y \rightarrow \mathbb{C}$

$X = \mathbb{P}^2(a, b, c)$ **重み付き射影平面**

$$\leftrightarrow W = x + y + z, Y := \{(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3 \mid x^a y^b z^c = 1\}$$

X **の変形** $\mathbb{C}\{x, y, z\}/(yz - \mu_1 zy, zx - \mu_2 xz, xy - \mu_3 yx)$

$\leftrightarrow Y$ **上の symplectic form ω の B-field による変形**

$$(\mu_1^a \mu_2^b \mu_3^c = e^{it}, \int_{S^1 \times S^1} B + i\omega = t)$$

1.3 Digression: 接続層、導来圏 etc.

X ; 体 k 上の代数多様体 = 体 k 上の有限型 scheme

(主に、 $\bar{k} = k$, 特に $k = \mathbb{C}$)

X ; Zariski 位相をもつ (non-Hausdorff だが開被覆の有限交叉性をもつ (quasi-compact))

$\mathcal{O}_X$ -module ; $M : \text{Open}(X)^{op} \rightarrow k\text{-Vect}$ + 張り合わせの条件

$M(U)$ は $\mathcal{O}_X(U)$ -module ($\forall U \in \text{Open}(X)$)

開集合の制限と両立する (compatible)

$\mathcal{O}_X$ -module M が quasi-coherent (準接続) ;

$\forall x \in X \exists U \in \text{Open}(X); x \in U, \exists I, J \text{ s.t.}$

$$\mathcal{O}_X^{(I)}|_U \rightarrow \mathcal{O}_X^{(J)}|_U \rightarrow M|_U \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

$\mathcal{O}_X$ -module M が coherent (接続) ;

a) M ; 有限生成 (i.e. $\forall x \in X \exists U \in \text{Open}(X); x \in U, \exists n \geq 0$

s.t. $\mathcal{O}_X^n|_U \rightarrow M|_U \rightarrow 0$ (exact));

b) $\forall U \in \text{Open}(X), n \geq 0, \phi : \mathcal{O}_U^n \rightarrow M_U \text{ Ker}(\phi) \text{ 有限生成}$

$QCoh(X) =$ 準連接層のなす abel 圏

$Coh(X) =$ 連接層のなす abel 圏

$D^b QCoh(X) = QCoh(X)$ の object の (co)chain complex のなす homotopy 圏 $K(QCoh(X))$ の局所化 $K(QCoh(X))[Qis^{-1}]$

$D_{coh}^b(X) = H^i(M \cdot) \in Coh(X)$ なる $D^b QCoh(X)$ の object $M \cdot$ のなす $D^b QCoh(X)$ の充満 (full) 部分圏

$D^b QCoh(X)$ は三角圏の構造をもつ。

N.B. 非特異 (smooth) な X については、 $D^b Coh(X) \simeq D_{coh}^b(X)$ 以下、 $D^b Coh(X)$ の記号のみ使う。

6 operations $f_*, f^*, f_!, f^!, \otimes^L, RHom$ on derived categories
 $f : X \rightarrow Y$ に対して

$f_* : QCoh(X) \rightarrow QCoh(Y), Rf_* : D^b QCoh(X) \rightarrow D^b QCoh(Y)$

etc. Rf_* を f_* と記す。

f proper のとき、 $f_* : D^b Coh(X) \rightarrow D^b Coh(Y)$ が意味をもつ。

三角圏 (triangulated category) $(\mathcal{D}, K \mapsto K[1])$ とは、
加法圏 (additive category) $\mathcal{D}$ と圏同値 $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}; K \mapsto K[1]$
および distinguished triangle の集合 Δ からなるもので、次の条件 TR 1) ~ 4) をみたすもの

TR 1) Δ は同型で閉じている。

$\forall u : X \rightarrow Y \in \mathcal{D}$ に対して、 $\exists (X, Y, Z, u, v, w) \in \Delta$ が存在する。

$\forall X \in \mathcal{D}$ に対して、 $(X, X, 0, 1_X, 0, 0) \in \Delta$ である。

TR 2) $\forall (X, Y, Z, u, v, w) \in \Delta$ に対して、 $(Y, Z, X[1], v, w, -u[1]) \in \Delta$ である。

TR 3) $(X, Y, Z, u, v, w), (X', Y', Z', u', v', w') \in \Delta$ および $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y'$ で $vf = gu$ をみたすものに対して、 $h : Z \rightarrow Z'$ が存在して次の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

TR 4) $(X, Y, Z', u, i, i'), (Y, Z, X', v, j, j') \in \Delta$ および (TR 1) により存在する) $(X, Z, Y', vu, k, k') \in \Delta$ に対して、 $f : Z' \rightarrow Y', g : Y' \rightarrow X'$ が存在して次の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccccccccc} Y'[-1] & \xrightarrow{k'[-1]} & X & \xrightarrow{1_X} & X & & & & \\ \downarrow g[-1] & & \downarrow u & & \downarrow vu & & & & \\ X'[-1] & \xrightarrow{j'[-1]} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{j} & X' & \xrightarrow{j'} & Y[1] \\ & & \downarrow i & & \downarrow k & & \downarrow 1_{X'} & & \downarrow i[1] \\ & & Z' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & X' & \xrightarrow{i[1]j'} & Z'[1] \\ & & \downarrow i' & & \downarrow k' & & & & \\ & & X[1] & \xrightarrow{1_X[1]} & X[1] & & & & \end{array}$$

1.4 アフィン (非可換) 代数幾何

Victor Ginzburg, math.AG/0506603. R.Bezrukavnikov, V.Ginzburg, math.AG/0503053.
Bernhard Keller, <http://www.math.jussieu.fr/~keller>

associative k -algebra の変形論 (Gerstenhaber '64)

A_0 の 1st order deformation (A, ψ)

A ; flat $k[t]/(t^2) = k[\epsilon]$ -algebra, $\psi : A/tA \simeq A_0$

$$\leftrightarrow HH^2(A_0) = Ext_{A \otimes A_0^{op}}^2(A_0, A_0)$$

(2nd Hochschild cohomology)

$Tor^{k[\epsilon]}(k, \)$ of $0 \rightarrow I_A \otimes_{k[\epsilon]} k \rightarrow A \otimes A_0 \rightarrow A_0 \rightarrow 0$

$$I_A := \text{Ker}(A \otimes A \rightarrow A)$$

$$\Rightarrow 0 \rightarrow A_0 \rightarrow k \otimes_{k[\epsilon]} I_A \otimes_{k[\epsilon]} k \rightarrow A_0 \otimes A_0 \rightarrow A_0 \rightarrow 0$$

The class of this 2-extension $\in HH^2(A_0)$

(derived) Morita equivalence (Rickard '89)

A, B ; k -algebras, flat over k **について次は同値**

i) $\exists$ **圏同値** $F : DMod A \simeq DMod B$

ii) $\exists$ a complex of A - B bimodules X s.t.

$$? \otimes^L X : DMod A \simeq DMod B$$

iii) $\exists$ a perfect complex of B -modules T s.t.

T **は** $DMod B$ **を生成し、**

$$Hom_{DMod B}(T, T[n]) = 0 (n \neq 0), \quad Hom_{DMod B}(T, T) \simeq A$$

さらに、 A, B ; right coherent **ならば、この同値な条件のもと**

$$D^b Mod_f A \simeq D^b Mod_f B$$

($Mod_f A =$ **有限生成** A **加群の圏**)

1.5 圏論的 (Categorical) 非可換代数幾何

Reconstruction theorem $[QCoh(X) \Rightarrow X]$

(Gabriel, A.Rosenberg)

abel 圏 $QCoh(X)$ の spectrum として X を復元できる

非可換スキーム = Grothendieck 圏 (quasi-scheme)

(A.Rosenberg, van den Bergh)

Grothendieck 圏 ;

abel 圏 $(\exists \text{ Ker, Coker } (\forall \text{ 射}), \text{ 準同型定理成立})$

$\exists$ generator, exact filtered colimits をもつ

非可換代数曲面の blow-up 等に応用、無限小変形論もある

非可換空間 = 局所化された space covers の圏の object

(Kontsevich-A.Rosenberg, mathAG/9812158)

Beilinson の定理 $D^bCoh(\mathbb{P}^n) \simeq D^b(mod - R)$

$R = n$ -Kronecker quiver の path algebra

McKay 対応 (Bridgeland-King-Reid)

$G \subset SL_n(\mathbb{C})$ ($n = 2, 3$) 有限部分群

$D^bCoh_G(\mathbb{C}^n) \simeq D^bCoh(X)$

$X =$ crepant resolution of $\mathbb{C}^n/G$

$D^bCoh(X)$ の半直交 (Semi-orthogonal) 分解 (Bondal-Orlov)

2 非可換射影幾何

J. T. Stafford, Noncommutative projective geometry, Proceedings of the ICM, Beijing 2002, vol. 2, 93–104.

J. T. Stafford, M. van den Bergh, Noncommutative curves and noncommutative surfaces, Bull. AMS 38, (2001), 171–216.

2.1 Review: Serre の定理

非可換射影幾何 – 射影多様体上の接続層のアーベル圏を記述する Serre の定理に基づく

k ; 体

X ; k 上の射影多様体 $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$

$\mathcal{O}(1) = \iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ ample invertible $\mathcal{O}$ 加群

$\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$

$S := \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}(n))$ 次数環 ; $S_m \times S_n \rightarrow S_{m+n}$

$gr(S)$; 有限生成次数 S 加群の圏

$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$; $S_m \times M_n \rightarrow M_{m+n}$

$tors(S)$; k 上有限次元の (i.e. $\exists n_0$; $M_n = 0$ ($n \geq n_0$)) なる)

次数 S 加群 M のなす $gr(S)$ の充満 (epaisse) 部分圏

$qgr(S) := gr(S)/tors(S)$; 商圏

[Serre の定理]

$$\begin{aligned} \text{Coh}(X) &\simeq \text{qgr}(S) \\ \mathcal{F} &\mapsto \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{F}(n)) \end{aligned}$$

例 $X = \mathbb{P}^n$ の場合、

$\mathcal{O}(1) = \text{Pic}(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}$ の ample な生成元

$$S = k[x_0, \dots, x_n]$$

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(n)) = x_0, \dots, x_n \text{ の斉次 } n \text{ 次式の全体}$$

2.2 非可換射影多様体

$k = \mathbb{C}$ (あるいは代数閉体 $k = \bar{k}$) (NB. $k = \mathbb{R}$ は考えていない。)

S ; 次数 k 代数、noetherian

NC(= non-commutative) projective variety

$$= \text{qgr}(S)$$

Some notions:

Hilbert series of S ; $H_S(t) := \sum_{n \geq 0} (\dim_k S_n) t^n$

Gelfand-Kirillov dim ;

$$\text{GKdim } S = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \dim_k (\bigoplus_{i=0}^n S_i) \leq n^\alpha \text{ for } n \gg 0 \}$$

S is AS(=Artin-Schelter) regular algebra of dim d if

- (0) $S_0 = k$
- (1) S has homological dim d
- (2) $\text{GKdim } S < \infty$
- (3) (AS-Gorenstein) one has

$$\text{Ext}_S^i(k, S) = \begin{cases} 0 & i \neq d \\ k(m) & i = d \end{cases}$$

for some m . ((m) = the shift in degrees)

2.3 非可換射影平面

Definition

NC projective plane $:= qgr(S)$

S ; AS regular algebra of dim 3

with Hilbert series $H_S(t) = 1/(1 - t)^3$

M.Artin とその協力者たち AS regular algebras of dim 3 with $H_S(t) = 1/(1 - t)^3$ を分類

M. Artin and W. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, Adv. in Math. **66** (1987) 171–216.

M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves, The Grothendieck Festschrift, vol.1, Birkh"auser, Boston, (1990) 33–85.

分類の Corollary:

$qgr(S) \simeq Coh(\mathbb{P}^2)$
or $qgr(S) \not\simeq Coh(\mathbb{P}^2)$
 $\Rightarrow \exists g \in S_3$, elliptic curve E , a line bundle $\mathcal{L}$ on E ,
and $\sigma \in Aut(E)$ such that

$$gS = Sg, \quad S/gS \simeq B(E, \mathcal{L}, \sigma)$$

$\Rightarrow$ “elliptic quantum plane” と呼ばれる

ここで twisted homogeneous coordinate ring of $(X, \mathcal{L}, \sigma)$

$$B(X, \mathcal{L}, \sigma) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}_n)$$

$$\mathcal{L}_n := \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^\sigma \cdots \mathcal{L}^{\sigma^{n-1}}, \quad \mathcal{L}^{\sigma^m} = (\sigma^m)^* \mathcal{L}$$

例 1 $qgr(B(X, \mathcal{L}, \sigma)) \simeq qgr(B(X, \mathcal{O}(1), id)) = Coh(X)$.

例 2

$$B(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1), \sigma) = \mathbb{C}\{x, y\}/(xy - yx - x^2) \quad \text{for } \sigma(u) = u + 1$$

$$B(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1), \tau) = \mathbb{C}\{x, y\}/(xy - qyx) \quad \text{for } \tau(x : y) = (x : qy), \quad q \neq 0$$

$\mathbb{C}\{x, y\} =$ non-commutative polynomial ring over $\mathbb{C}$

NC $\mathbb{P}^2$ の例

(1) Weyl algebra $\mathcal{D}(\mathbb{A}^1)$

$$S = \mathbb{C}\{x, y, z\}/(yx - xy - z^2, zx - xz, zy - yz)$$

(2) 3 dim Sklyanin algebra Sk_3

$$S = \mathbb{C}\{x, y, z\}/(axy + byx + cz^2, ayz + bzy + cx^2, azx + bxz + cy^2)$$

$$a, b, c \in \mathbb{C}, (3abc)^3 \neq (a^3 + b^3 + c^3)^3$$

$$\mathbb{P}^2 \subset E; \quad abc(x^3 + y^3 + z^3) - (a^3 + b^3 + c^3)xyz = 0$$

$$\sigma = \text{the translation by the point } (a : b : c)$$

Remark 楕円量子平面と可積分系との関係

1 対 1 対応 (Cannings-Holland, J. Algebra 167 (1994), no. 1, 116–141)

$$\{ \text{right ideals of } \mathcal{D}(\mathbb{A}^1) \}$$

$$\leftrightarrow Gr^{ad} \text{ (Wilson's adelic Grassmannian)}$$

$$Gr^{ad} = \coprod_{n \geq 0} \mathcal{C}_n$$

$$\mathcal{C}_n : \text{ Calogero-Moser phase space}$$

$$\simeq \mathbb{A}^2 \text{ の } n \text{ 点の Hilbert scheme } (\mathbb{A}^2)^{[n]} \text{ の変形}$$

これの elliptic version (Nevins-Stafford, math.AG/0310045)

2.4 非可換射影代数曲面

NC curves (Artin-Stafford '95)

$S_0 = k$ で S_1 で生成される GKdim= 2 の次数整域 S に対して、既約な曲線 Y 、 $\sigma \in \text{Aut}(Y)$ と ample な可逆層 $\mathcal{L}$ が存在して

$$S \hookrightarrow B(Y, \mathcal{L}, \sigma), \quad S_n \simeq B_n(Y, \mathcal{L}, \sigma) \quad (n \gg 0)$$

となる。特に、 $qgr(S) \simeq \text{Coh}(Y)$ である。

NC surfaces

Stephenson '96,97

AS regular algebra S of dim 3 を分類

$\Rightarrow S$; noetherian domain かつ

$$H_S(t) = 1/(1 - t^a)(1 - t^b)(1 - t^c)$$

また、全射 $S \rightarrow B(X, \mathcal{L}, \sigma) = B$ が存在する

($\Rightarrow \text{Coh}(X) \simeq qgr(B) \hookrightarrow qgr(S)$)

Van den Bergh '01

Bondal-Polishchuk の方法を使い NC quadrics を分類

NC $\mathbb{P}^1$ -bundles, NC blow-up, etc.

3 非可換代数多様体の変形

2つの観点 – 変形と偏向 (偏光?)

- 変形 (deformation)

変形量子化 (Kontsevich, Yekutieli)

無限小変形 (Van den Bergh-Lowen)

(圏論的) 非可換スキームの変形

- 偏向 (tilting)

安定性条件とその偏向 (Bridgeland)

導来 Picard 群とその接空間

(Rouquier-Zimmermann, Yekutieli, Keller)

3.1 変形量子化

Kontsevich, [math.AG/0106006](#)

semi-formal deformation of algebraic Poisson manifolds

Yekutieli, [math.AG/0310399](#) ([math.QA/0502137](#); [math.AG/0502206](#)).

X ; smooth k -variety, $\mathcal{D}$ -affine (i.e. $H^i(X, \mathcal{M}) = 0$ for $\forall i > 0$, left quasi-coherent $\mathcal{D}$ -modules), $\text{char } k = 0$

$Q : \{ \text{formal Poisson structures on } X \} / \text{gauge equiv.}$
 $\simeq \{ \text{deformation quantizations of } \mathcal{O}_X \} / \text{gauge equiv.}$

(“quantization map”)

ここで deformation quantization $(\mathcal{A}, \psi, \tau)$ of $\mathcal{O}_X$ とは

$\mathcal{A}$; a sheaf of $\hbar$ -adically complete flat $k[[\hbar]]$ -algebras

$\psi : \mathcal{A}/\hbar\mathcal{A} \simeq \mathcal{O}_X$; k -algebra isomorphism

$\tau = \{\tau_i\}$; differential structure, i.e. $\tau_i : \mathcal{O}_{U_i}[[\hbar]] \xrightarrow{\sim}$

$\mathcal{A}|_{U_i}$ (for an open covering $X = \cup_i U_i$) s.t.

i) $f \star_{\tau_i} g := \tau_i^{-1}(\tau_i(f) \star \tau_i(g))$ a star product of $\mathcal{O}_{U_i}[[\hbar]]$

ii) $(\psi \cdot \tau_i)(f) = f (f \in \mathcal{O}_{U_i})$

iii) $\tau_j^{-1} \cdot \tau_i$ is a gauge equivalence.

また gauge equivalence $\gamma : (\mathcal{A}, \psi, \tau) \rightarrow (\mathcal{A}', \psi', \tau')$ とは

$\gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ $k[[\hbar]]$ -algebra isomorphism s.t.

i) $\psi = \psi' \cdot \gamma$; ii) $\tau_j^{-1} \cdot \gamma \cdot \tau_i$ is a gauge equivalence.

algebraic bundleのsectionの存在が C^∞ カテゴリーではOKでも、代数的なカテゴリーでは言えないがゆえに条件がきつくなっている。

3.2 非可換スキームの変形

Wendy T. Lowen, Michel Van den Bergh, math.CT/0405226; math.KT/0405227.

Wendy T. Lowen, math.KT/0407019.

abel圏の変形の一般論

k ; 基礎の可換環

$\mathcal{A}$; (k -linear) abel圏

$\ell \rightarrow k$; surjective ring hom, Ker 有限生成でべき零

ℓ -abel圏 $\mathcal{B}$ が flat ℓ -deformation of $\mathcal{A}$ とは

(flatness) $Ind\mathcal{B}$ の injectives が $Ind\mathcal{B}^{op}$ で ℓ -flat

$\mathcal{B}_k := \{(C, \varphi) | C \in \mathcal{B}, \varphi : k \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C, C); \ell\text{-linear}\} \simeq \mathcal{A}$

deformation functor

$Def_{\mathcal{A}}(\ell) := \{ \text{flat } \ell\text{-deformation of } \mathcal{A} \}$

$$Def_{\mathcal{A}} : Ring_{/k}^{op} \rightarrow Groupoids$$

[障害理論]

$I = \text{Ker}(\sigma : \ell' \rightarrow \ell)$ s.t $I \text{Ker}(\ell' \rightarrow k) = 0$ と $\mathcal{B} \in \text{Def}_{\mathcal{A}}(\ell)$ に対して、

1) $\text{Def}_{\mathcal{A}}(\sigma)^{-1}(\mathcal{B}) \neq \emptyset \Leftrightarrow o(\mathcal{B}) = 0$ となる障害類 $o(\mathcal{B}) \in HH^3(\mathcal{A}, I \otimes \mathcal{A})$ が存在する。

2) $o(\mathcal{B}) = 0$ のとき、集合 $\text{Def}_{\mathcal{A}}(\sigma)^{-1}(\mathcal{B})$ は $HH^2(\mathcal{A}, I \otimes \mathcal{A})$ 上の affine 空間である。

Hochschild cohomology

$$HH^*(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = H^*C_{ab}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$$

$C_{ab}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$; bimodule $\mathcal{M}$ を係数とする Hochschild cochain complex

$$C_{ab}(\mathcal{A}) := C_{ab}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \text{ と記す}$$

体 k 上の代数多様体 X について、

$$\begin{aligned} C_{ab}(\text{Mod}(\mathcal{O}_X)) &= C_{ab}(\text{QCoh}(X)) = C_{ab}(\text{Coh}(X)) \\ &= R\text{Hom}_{X \times X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

3.3 安定性条件とその偏向

Douglas の Π -stability の考えに基づき、
Bridgeland は三角圏 (triangulated category) $\mathcal{D}$ 上の安定
条件 (stability condition) という概念を導入

安定条件 $\sigma = (Z, \mathcal{P})$;

群準同型 $Z : K(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ ("central charge")

$\mathcal{D}$ の full subcategories の族 $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}}$ ("slicing")

4 条件を仮定

Stc 1) $0 \neq \forall E \in \mathcal{P}(\phi)$ について、 $m(E) \in \mathbb{R}_{>0}$ があって $Z(E) = m(E) \exp(\sqrt{-1}\pi\phi)$ となっている。

Stc 2) $\mathcal{P}(\phi)[1] = \mathcal{P}(\phi + 1)$ for $\forall \phi \in \mathbb{R}$.

Stc 3) $A_j \in \mathcal{P}(\phi_j)$ ($j = 1, 2$) について、 $\phi_1 > \phi_2$ であるならば $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A_1, A_2) = 0$ である。

Stc 4) $0 \neq \forall E \in \mathcal{D}$ について、有限個の実数の減少列 $\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_n$ と $A_j \in \mathcal{P}(\phi_j)$ ($\forall j$) および triangle

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = E_0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & E_{n-1} & \longrightarrow & E_n = E \\
 & & +1 \swarrow \downarrow & & +1 \swarrow \downarrow & & & & +1 \swarrow \downarrow \\
 & & A_1 & & A_2 & & & & A_n
 \end{array}$$

があり、 E は分解される。

安定条件 $\sigma \leftrightarrow$ 組 $({}^\sigma\mathcal{D}^{\leq 0}, Z_\sigma)$

有界な t 構造 ${}^\sigma\mathcal{D}^{\leq 0}$ と slope 関数 $Z_\sigma : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$

($\mathcal{A}$ は t 構造 ${}^\sigma\mathcal{D}^{\leq 0}$ の heart で、 $K(\mathcal{A}) = K(\mathcal{D})$)

三角圏 $\mathcal{D}$ 上の t 構造とは、充満部分圏の対 $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ であって、次の条件 t 1) ~ 3) を満たすものである。

t 1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0$ for $\forall X \in \mathcal{D}^{\leq 0}, Y \in \mathcal{D}^{\geq 0}$.

t 2) $\mathcal{D}^{\leq n} := \mathcal{D}^{\leq 0}[-n], \mathcal{D}^{\geq n} = \mathcal{D}^{\geq 0}[-n]$ とおくとき、 $\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 1}, \mathcal{D}^{\geq 1} \subset \mathcal{D}^{\geq 0}$ である。

t 3) $\forall X \in \mathcal{D}$ に対して、(distinguished) triangle $(X', X, X'', u, v, w) \in \Delta(\mathcal{D})$ であって $X' \in \mathcal{D}^{\leq 0}, X'' \in \mathcal{D}^{\geq 1}$ であるようなものが存在する。

三角圏 $\mathcal{D}$ 上の t 構造 $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ に対して、 $\mathcal{D}$ の充満部分圏 (t 構造の heart) $\mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0} =: \mathcal{A}$ は Abel 圏である。 ([BBD])

新しく安定条件を創り出す手法 $\rightarrow t$ 構造の tilting (偏向)

Abel 圏 $\mathcal{A}$ の充満部分圏の対 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ が、torsion pair であるとは、次の 2 条件が満たされること。

1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, F) = 0$ for $\forall T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$.

2) $\forall X \in \mathcal{A}$ に対して、短完全列

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$$

であって $X' \in \mathcal{T}, X'' \in \mathcal{F}$ であるものが存在する。

[Tilting] 対 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ が、Abel 圏 $\mathcal{A}$ の torsion pair であるとき、

$$D^{\leq 0}(\mathcal{A}) := \{X \in D^b(\mathcal{A}) \mid H^i(X) = 0 \ (\forall i > 0), H^0(X) \in \mathcal{T}\}$$

$$D^{\geq 0}(\mathcal{A}) := \{X \in D^b(\mathcal{A}) \mid H^i(X) = 0 \ (\forall i < -1), H^{-1}(X) \in \mathcal{F}\}$$

とおくと、 $D^b(\mathcal{A})$ の t 構造を定める。(math.AG/0307164)

局所有限で数値的な安定条件の全体 $Stab(\mathcal{D})$ は、複素多様体の構造を持つ。 $\mathcal{D}$ の自己圏同値の全体のなす群 $Aut(\mathcal{D})$ は自然に $Stab(\mathcal{D})$ に作用する。

$\mathcal{D} = D(X) = D_{coh}^b(\mathcal{O}_X)$ に対し、 $Stab(D(X))/Aut(D(X))$ は X の弦理論的な Kähler moduli の空間を近似していると予想される。

X が曲線るとき、 $g(X) = 0, 1$ なら $Stab(X) \cong GL^+(2, \mathbb{R})$ であり、 $g(X) \geq 2$ なら $Stab(X)$ のある連結成分が $GL^+(2, \mathbb{R})$ に同型であることが分かる。

X が射影的 K3 曲面るとき、 $Stab(X)$ のある連結成分 $\Sigma(X)$ で $N(X) \otimes \mathbb{C}$ のある開集合 $\mathcal{P}^+(X)$ の被覆空間となっているものがあることが示される。(被覆変換群は $Aut(D(X))$ の部分群で、 $N(X) = \mathbb{Z} \oplus NS(X) \oplus \mathbb{Z}$ は代数的向井格子。)

Remark $D(X)$ の t 構造のハート (heart) として得られる Abel 圏の spectrum は、 X の変形を与えていると考えられる。

$D(X)$ に三角圏として同値な圏 $\mathcal{D}'$ が見つかるたびに、 $D(X)$ の t 構造が誘導されるので、 $\mathcal{D}'$ は X の変形に対応すると考えられる。

3.4 導来 Picard 群

環の場合 – Rouquier-Zimmermann, Yekutieli
differential graded(=dg) **環の場合** – Keller

Hochschild cohomology と導来 Picard 群 (Keller)

A ; associative algebra over a field k , $A^e := A^{op} \otimes A$
 $cdg(k)$; (graded-)commutative dg k -algebras

The derived Picard group functor

$$DPic_A : cdg(k) \rightarrow Groups$$

$$DPic_A(R) = \{ U \in D_{R,rel}(R \otimes A^e) \mid \exists V \in D_{R,rel}(R \otimes A^e) \\ s.t. U \otimes_{R,rel}^L V \simeq R \otimes A, V \otimes_{R,rel}^L U \simeq R \otimes A \}$$

dg R -algebra B と dg B -modules に対して、 $D_{R,rel}(B), \otimes_{R,rel}$
が定義される。

i 次の接空間 $LieDPic_A^i$ (cf. $\deg \epsilon_{-i} = -i$)

$$\text{Ker} (DPic_A(k[\epsilon_{-i}]/(\epsilon_{-i}^2)) \rightarrow DPic_A(k)) \simeq HH^{i+1}(A)$$

Lie superalgebra の同型が存在する

$$LieDPic_A^* := \oplus_i LieDPic_A^i \\ \simeq HH^{*+1}(A) := \oplus_i HH^{i+1}(A)$$

右辺は Gerstenhaber bracket により Lie superalgebra