Higher dimensional holonomy and discrete torsion

寺嶋郁二氏(東工大)との共同研究

五味 清紀
東京大学大学院数理科学研究科

話したいこと

単体多様体上のサイクルに関する
高次元ホロノミーの定式化

動機

軌道体上の弦理論における
discrete torsionへの応用

§1 高次元ホロノミーとは

$\cdots$ どんなものかを簡単に説明する.

§2 物理の話

$\cdots$ Discrete torsionに関する説明

§3 数学の話

$\cdots$ 得られた結果についての説明

§1 高次元ホロノミーとは

通常のホロノミー

多様体 M 上に接続つき主 $U(1)$ 束 (P, A) が与えられたとき, 次のような関数を与える:

$$\Phi_{(P,A)} : \mathcal{F} \longrightarrow U(1).$$

ただし, $\mathcal{F}$ は M の中のループのなす空間である:

$$\mathcal{F} = \{\ell : [0,1] \to M |\ \ell(0) = \ell(1)\}.$$

高次元ホロノミー

寺嶋郁二氏(東工大)との共同研究で導入した, 次の様な一般化:

$$\begin{cases} \text{ループ} & \rightsquigarrow \quad \text{閉 } n \text{ 次元多様体から } M \text{ への写像}, \\ (P, A) & \rightsquigarrow \quad \text{Deligne } n\text{-コサイクル}. \end{cases}$$

- ここで，次のような状況を考える．

$G \curvearrowright M$ ：多様体に群が作用する
(P, A) ：M 上の G 同変接続つき主 $U(1)$ 束

$g \in G$ に対して，$\mathcal{F}(g)$ を次のように定める:

$$\mathcal{F}(g) = \{\ell : [0,1] \to M |\ g \cdot \ell(0) = \ell(1)\}$$

- この状況下では，次のような $U(1)$ 同変写像がある:

$$\begin{aligned} \mathrm{PT}_\ell : P|_{\ell(0)} &\to P|_{\ell(1)}, && \text{平行移動} \\ g : P|_{\ell(0)} &\to P|_{\ell(1)}. && \text{群作用} \end{aligned}$$

これらのズレによって，次の関数が得られる:

$$\Phi_{(P,A)} : \mathcal{F}(g) \longrightarrow U(1).$$

($g = 1$ のときは通常のホロノミーと一致している.)

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{通常のホロノミー}} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{\text{群作用がある場合}} \arrow[d, dashed] \\ \boxed{\text{高次元ホロノミー}} \arrow[r, dashed] & (***) \end{tikzcd}$$

● 今回新たに定式化したのは:

(i) 単体多様体の中のサイクル,

(ii) 単体多様体上の Deligne コサイクルの積分.

これらの特別な場合として, $(***)$ の箇所にあたる一般化が得られる.

● $(***)$ の箇所は, 軌道体上の弦理論における discrete torsion への応用がある.

実はこれがもともとの主な動機であったので, 次に離散位相について説明する.

§2 物理の話(discrete torsionについて)

$\boxed{\text{C. Vafaの仕事(1986)}}$

Discrete torsionが出てくる状況を説明する.

- 多様体 M 上の B 場(B-filed)を含む弦理論

$$\begin{cases} \Sigma_n \cdots \text{種数}\, n\, \text{の閉Riemann面}, \\ f \in \mathcal{F}_n = C^\infty(\Sigma_n, M) \cdots M\, \text{への写像}, \\ B \in \mathcal{B} = A^2(M) \cdots 2\text{次微分形式}(B\,\text{場}). \end{cases}$$

作用汎関数(action functional):

$$I(f, B) = I_0(f, B) + 2\pi \int_{\Sigma_n} f^* B.$$

n-ループの分配関数(partition function) :

$$\mathcal{Z}_n = \int_{\mathcal{F}_n \times \mathcal{B}} \mathcal{D}f \mathcal{D}B \ e^{\sqrt{-1} I(f,B)}.$$

- 軌道体 M/G 上の弦理論の分配関数

有限群が作用: $G \curvearrowright M \Rightarrow$ “twisted sector” の寄与.

1-ループの時, $g, h \in G, [g,h]=1$ に対して,

$$\mathcal{F}_1(g,h) = \left\{ f : [0,1]\times[0,1] \to M \,\middle|\, \begin{array}{c} g\cdot f(0,t) = f(1,t) \\ h \cdot f(s,0) = f(s,1) \end{array} \right\}.$$

経路積分では次のような場を考える:

$$\mathcal{F}_1 = \bigsqcup_{[g,h]=1} \mathcal{F}_1(g,h),$$
$$\mathcal{B} = A^2(M)^G.$$

軌道体 M/G 上の分配関数:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &= \int_{\mathcal{F}_1\times\mathcal{B}} \mathcal{D}f\mathcal{D}B\ e^{\sqrt{-1}I(f,B)} \\ &= \sum_{[g,h]=1} \int_{\mathcal{F}_1(g,h)\times\mathcal{B}} \mathcal{D}f\mathcal{D}B\ e^{\sqrt{-1}I(f,B)} \\ &= \sum_{[g,h]=1} \mathcal{Z}_1(g,h). \end{aligned}$$

• n-ループの場合でも同様に "twisted sector" からの寄与の和となる.

$$\mathcal{Z}_n = \sum_{[g_i,h_i]=1} \mathcal{Z}_n(g_1,h_2;\ldots;g_n,h_n).$$

• 弦理論からの要請: モジュラー不変性.
例えば, 1-ループ($\Sigma_1 = T^2$)の場合,

$$\mathcal{Z}_1(g,h) = \mathcal{Z}_1(gh,h) = \mathcal{Z}_1(h^{-1},g).$$

• ここで次のような問題を考える:

$$\epsilon(g_1,h_1;\ldots;g_n,h_n) \in U(1)$$

という位相(phase)を導入して,

$$\mathcal{Z}'_n(g,h) := \epsilon(g_1,h_1;\ldots;g_n,h_n) \times \mathcal{Z}_n(g_1,h_2;\ldots;g_n,h_n)$$

もモジュラー不変性を持つようにできるか?

• Vafaの仕事

モジュラー不変性とRiemann面のfactorizationについての条件を課して位相の形を求めた:

Vafa's discrete torsion

$g, h \in G, [g,h] = 1$に対して, $\epsilon(g,h) \in U(1)$が

$$\begin{cases} \epsilon(g_1 g_2, h) &=& \epsilon(g_1, h)\epsilon(g_2, h), \\ \epsilon(g,h) &=& \epsilon(h,g)^{-1}, \\ \epsilon(g,g) &=& 1, \end{cases}$$

を満たすとする．このとき,

$$\epsilon(g_1, h_1; \ldots ; g_n, h_n) = \epsilon(g_1, h_1) \cdots \epsilon(g_n, h_n)$$

とすればよい.

特に, 群Gの2-コサイクル

$$\zeta : G \times G \to U(1),$$
$$\zeta(h,k)\zeta(gh,k)^{-1}\zeta(g,hk)\zeta(g,h)^{-1} = 1,$$

に対して,

$$\epsilon(g,h) = \zeta(g,h)\zeta(h,g)^{-1}$$

は上の条件を満たす.

E. Sharpeの仕事(1999)

Discrete torsionの一つの解釈を与えた:

"B 場への群作用の選択を反映する量である."

これは次のStep 1 — Step 3から導かれる.

Step 1

まず, B 場を次の様に思いなおす:

2次微分形式 $\rightsquigarrow$ Deligne 2-コサイクル.

すると, B 場への群作用の選択が色々ある. 特に, 群の2-コサイクルζによって, 群作用をとりかえることができる:

$$\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}^{\zeta}, \quad B \mapsto B^{\zeta}.$$

Step 2

次に, Step 1 に対応した“位相項” の一般化:

$$e^{\sqrt{-1}\int_\Sigma f^*B} \rightsquigarrow \Phi(f,B)$$

を構成する. 特に, $f \in \mathcal{F}_1(g,h)$ に対しては,

$$\Phi(f,B^\zeta) = \zeta(g,h)\zeta(h,g)^{-1}\Phi(f,B)$$

となるものを構成する.

<u>注意</u>.

Sharp の論文では特別な Deligne 2-コサイクルに対する $\Phi(f,B)$ のみが構成されている. 一般の場合の公式を与えることが, 今回の講演で述べる結果の応用であり, 主たる動機である.

$\boxed{\text{Step 3}}$ すると経路積分の定義式より:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1(g,h) &= \int \mathcal{D}f\mathcal{D}B\ e^{\sqrt{-1}I(f,B)}, \\
\mathcal{Z}_1^{\zeta}(g,h) &:= \int \mathcal{D}f\mathcal{D}B^{\zeta}\ e^{\sqrt{-1}I(f,B^{\zeta})} \\
&= \int \mathcal{D}f\mathcal{D}B\ \zeta(g,h)\zeta(h,g)^{-1}e^{\sqrt{-1}I(f,B)} \\
&= \epsilon(g,h)\mathcal{Z}_1(g,h).
\end{aligned}
$$

$\therefore$ B 場(Deligne 2-コサイクル)への群作用の選択を反映する量として, discrete torsionが導かれた.

§3 数学の話

§3.1 単体多様体

§3.2 単体多様体上のDeligneコサイクル

§3.3 単体多様体上のサイクル

§3.4 ペアリング

§3.1 単体多様体

単体多様体/集合(simplicial manifold/set)

単体多様体 $X^\bullet$ とは，次のデータ

$$\begin{cases} X^0, X^1, X^2, \ldots & \text{多様体の列}, \\ e_i : X^p \to X^{p-1}, \ (i = 0, \ldots, p) & \text{面写像}, \end{cases}$$

であって，次の関係式を満たすもののことである．

$$e_i \circ e_j = e_{j-1} \circ e_i, \quad (i < j).$$

<u>注意</u> 正式な定義には退化写像 $s_i : X^p \to X^{p+1}$ が含まれるが，今回の話では省略している．

<u>例</u> $G \curvearrowright M$: 群作用をもつ多様体 $\Rightarrow G^\bullet \times M$

$$M \underset{e_1}{\overset{e_0}{\leftleftarrows}} G \times M \Lleftarrow G^2 \times M \Lleftarrow G^3 \times M \cdots$$

$$e_i(g_1, .., g_p, x) = \begin{cases} (g_2, .., g_p, x), \ (i = 0) \\ (g_1, .., g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, .., g_p, x), \\ (g_1, .., g_{p-1}, g_p x), \ (i = p). \end{cases}$$

§3.2 単体多様体上のDeligneコサイクル

単体多様体の開被覆

単体多様体 $X^\bullet$ の開被覆 $\mathfrak{U}^\bullet$ とは，次のデータ

$$\begin{cases} \mathfrak{U}^p = \{U^p_\alpha\}_{\alpha\in I^p} \cdots X^p \text{の開被覆} \\ I^\bullet = \{I^p, e_i : I^p \to I^{p-1}\} \cdots \text{単体集合} \end{cases}$$

であって，次の条件を満たすもののことである．

$$e_i(U^p_\alpha) \subset U^{p-1}_{e_i(\alpha)}.$$

<u>例</u>　離散群 G が多様体 M に作用しているとき
G 不変な M の開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ があれば，

$$\begin{cases} I^\bullet = G^\bullet \times I, \\ U^p_{(g_1,\dots,g_p,\alpha)} = (g_1,\dots,g_p) \times U_\alpha, \end{cases}$$

とすると，$G^\bullet \times M$ の開被覆が得られる．

一般に，単体多様体 $X^\bullet$ の開被覆 $\mathfrak{U}^\bullet$ を，X^0 の開被覆 $\mathfrak{U}$ から，$\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{U}$ となる様に構成することができる．

- 非負整数 p と開集合 U に対して, 次の様におく:

$$\tilde{A}^k(U) = \begin{cases} \{\ \mathbb{R}/\mathbb{Z}\text{値の関数}\ \}, & (k=0) \\ \{\ \mathbb{R}\text{値の}\,k\,\text{次微分形式}\ \}, & (0<k\le p) \\ 0. & (k>p) \end{cases}$$

- $X^\bullet$ の開被覆 $\mathfrak{U}^\bullet$ に対して, 次の三重複体を考える:

$$C^{i,j,k} = \prod_{\alpha_0,\dots,\alpha_j\in I^i} \tilde{A}^k(U^i_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U^i_{\alpha_j})$$

$$\begin{aligned} e^*:&\ C^{i,j,k}\to C^{i+1,j,k}, && e^*=\textstyle\sum_{\ell=0}^{i+1}(-1)^\ell e^*_\ell \\ \delta:&\ C^{i,j,k}\to C^{i,j+1,k}, && \text{Čech 境界作用素} \\ d:&\ C^{i,j,k}\to C^{i,j,k+1}, && \text{外微分} \end{aligned}$$

単体多様体 $X^\bullet$ 上の Deligne p-コサイクル

上の三重複体の全複体 $C^*(\mathfrak{U}^\bullet,\mathbb{D}(p))$ における, p 次コサイクルとして定義する.

$H^*(X^\bullet,\mathbb{D}(p)) = \varinjlim_{\mathfrak{U}^\bullet} H^*(\mathfrak{U},\mathbb{D}(p))$ のことを, $X^\bullet$ の Deligne コホモロジーと呼ぶ.

例　$Z^1(\mathfrak{U}^\bullet, \mathbb{D}(1))$

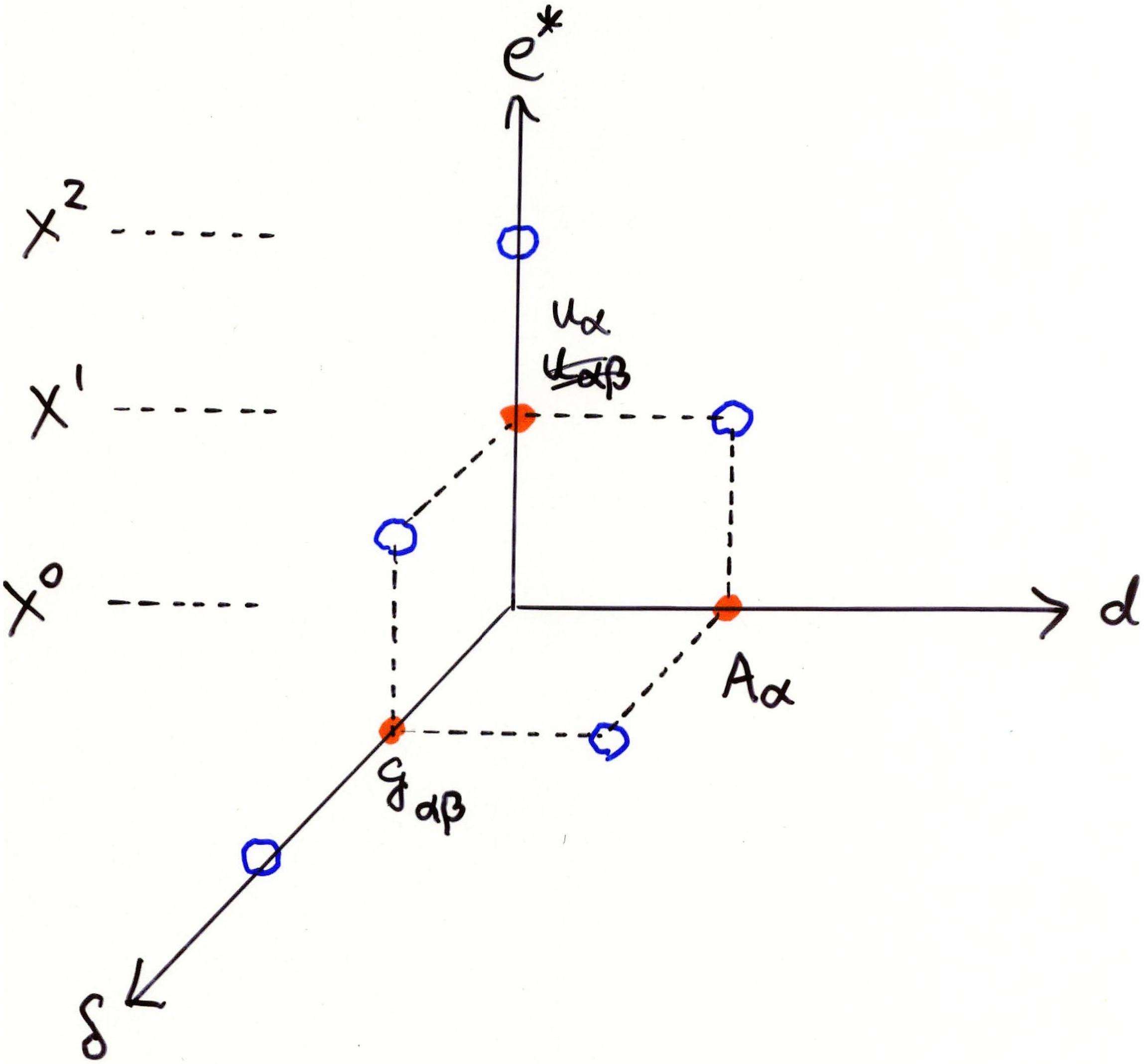
$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} & \in & C^\infty(U^0_\alpha \cap U^0_\beta, \mathbb{R}/\mathbb{Z}), \\ A_\alpha & \in & A^1(U^0_\alpha), \\ u_\alpha & \in & C^\infty(U^1_\alpha, \mathbb{R}/\mathbb{Z}). \end{cases}$$

- $(g_{\alpha\beta}, A_\alpha)$ $\cdots$ X^0 上の接続つき $U(1)$ 束の情報

事実

離散群 G が多様体 M に作用している時,

$$H^1(G^\bullet \times M, \mathbb{D}(1)) \\ \cong \{M \text{ 上の } G \text{ 同変接続つき } U(1) \text{ 束}\}/\text{iso.}$$



e^*
X^2
u_α
$\cancel{u_{\alpha\beta}}$
X^1
X^0
d
A_α
$g_{\alpha\beta}$
δ

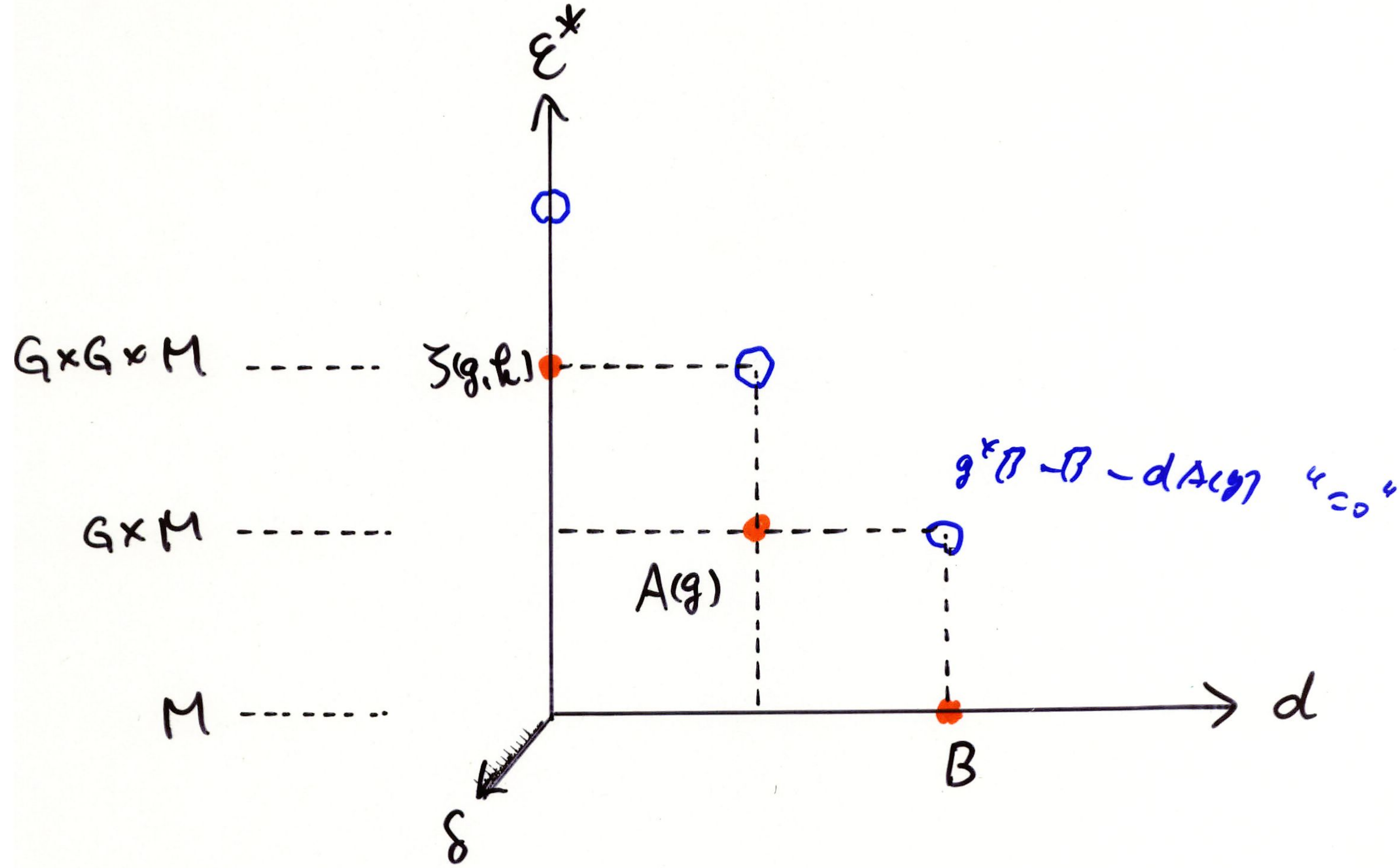
<u>例</u>　$Z^2(\mathfrak{U}, \mathbb{D}(2)) \cdots$ “B場”

離散群Gが多様体Mに作用するとき，次のデータは
$G^\bullet \times M$上のDeligne 2-コサイクルの特別な例:

$$\begin{cases} B & \in & A^2(M), \\ A(g) & \in & A^1(M), \quad (g \in G) \\ \zeta(g,h) & \in & C^\infty(M, \mathbb{R}/\mathbb{Z}). \quad (g,h \in G) \end{cases}$$

$$g^*B - B = dA(g),$$
$$A(h) - A(gh) + h^*A(g) = d\zeta(g,h),$$
$$\zeta(h,k) - \zeta(gh,k) + \zeta(g,hk) + h^*\zeta(g,h) = 0.$$

$$\begin{array}{lcl} A(g) = 0, \zeta(g,h) = 0 & \Rightarrow & G\text{不変2形式}\,B, \\ A(g) = 0, B = 0 & \Rightarrow & G\text{の2-コサイクル} \\ & & \quad \zeta : G \times G \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \end{array}$$


$\mathcal{E}^*$
$G\times G\times M$
$\zeta(g,h)$
$G\times M$
$g^*B - B - dA(g)$ "$=0$"
$A(g)$
M
B
d
δ

§3.3 単体多様体上のサイクル

- 単体多様体 $X^\bullet$ に対して, 次の 2 重複体を考える:

$$C_{i,j} = C_j(X^i, \mathbb{Z}) \cdots \text{特異複体}$$

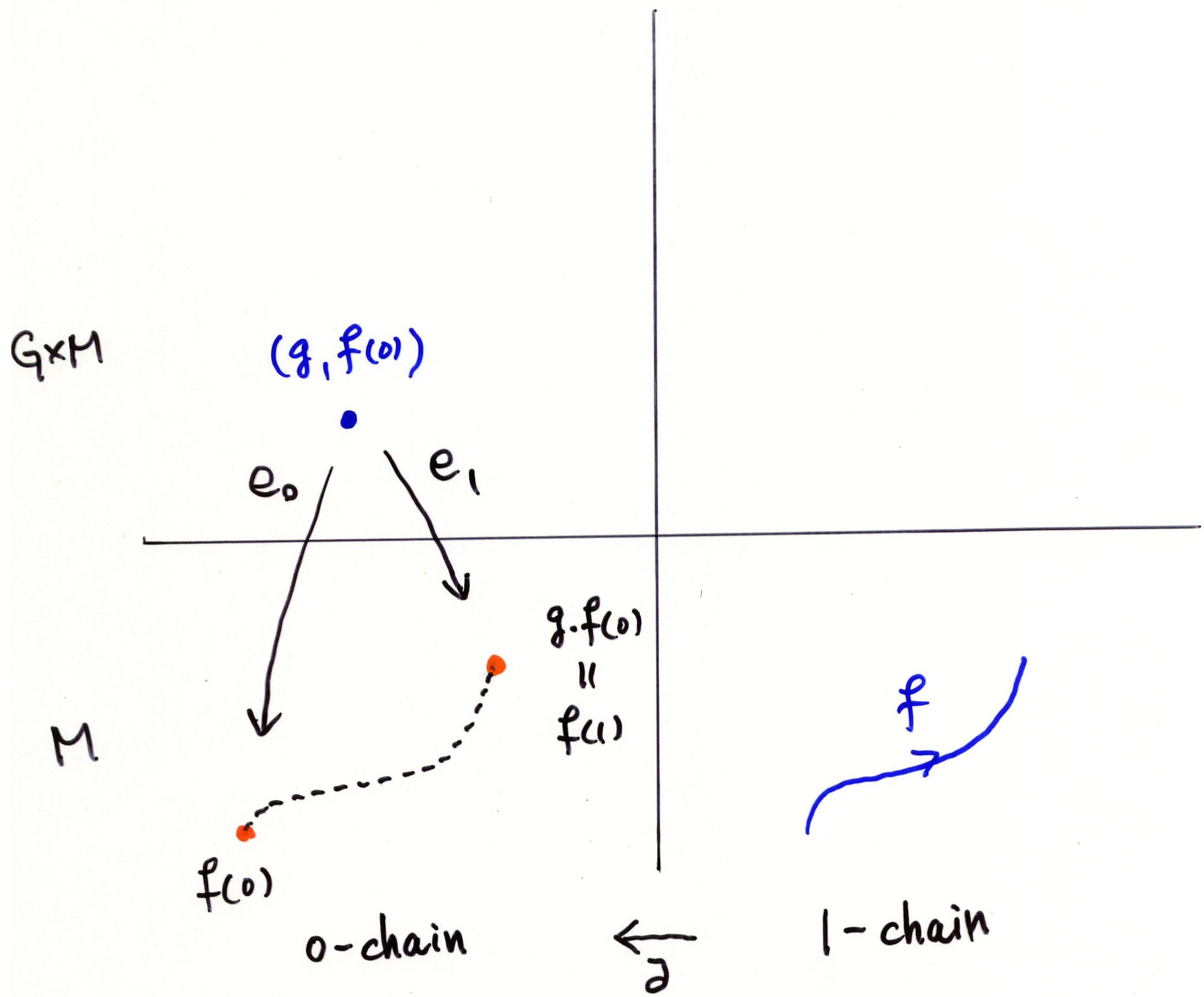
$$\begin{aligned} e_* :\ & C_{i,j} \to C_{i-1,j}, \quad e_* = \textstyle\sum_{\ell=0}^{i} (-1)^\ell (e_\ell)_* \\ \partial :\ & C_{i,j} \to C_{i,j-1}, \quad \text{境界作用素} \end{aligned}$$

単体多様体 $X^\bullet$ 上のサイクル

上の二重複体の全複体 $C^*(X^\bullet, \mathbb{Z})$ における,
p 次サイクルとして定義する.

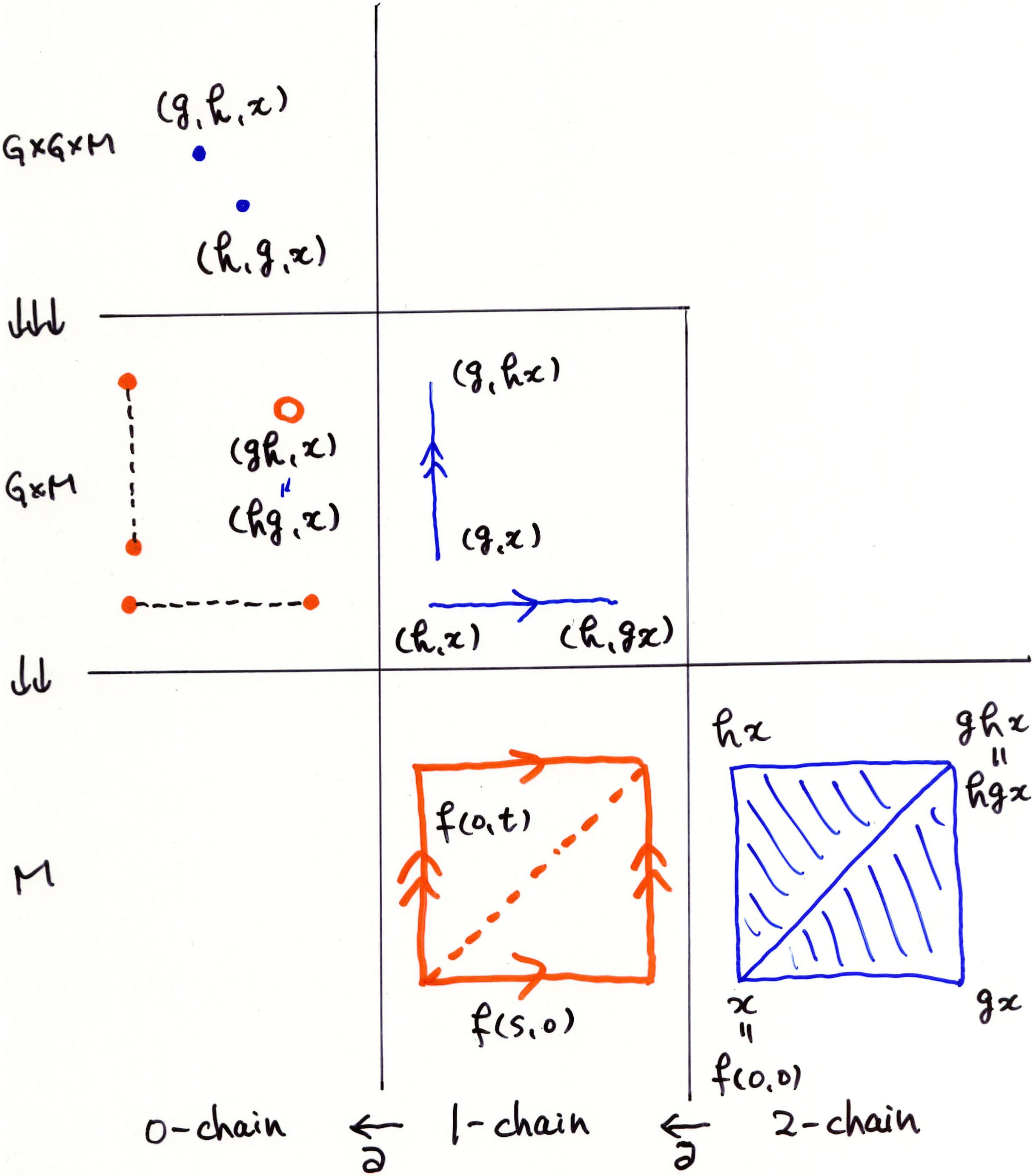
<u>例 (1-サイクル)</u> $G \curvearrowright M \rightsquigarrow X^\bullet = G^\bullet \times M$.

$$\mathcal{F}(g) = \{\ell : [0,1] \to M \mid g \cdot \ell(0) = \ell(1)\}$$


$G\times M$
$(g, f(0))$
e_0
e_1
$g.f(0)$
$=$
$f(1)$
M
f
$f(0)$
0-chain
∂
1-chain

例(2-サイクル)　"twisted sector"

$$\mathcal{F}_1(g,h) = \left\{ f : [0,1] \times [0,1] \to M \,\middle|\, \begin{array}{l} g \cdot f(0,t) = f(1,t) \\ h \cdot f(s,0) = f(s,1) \end{array} \right\}.$$


G×G×M
(g, h, x)
(h, g, x)
G×M
(gh, x)
"
(hg, x)
(g, hx)
(g, x)
(h, x)
(h, gx)
M
f(0, t)
f(s, 0)
hx
ghx
"
hgx
x
"
f(0, 0)
gx
0-chain
∂
1-chain
∂
2-chain

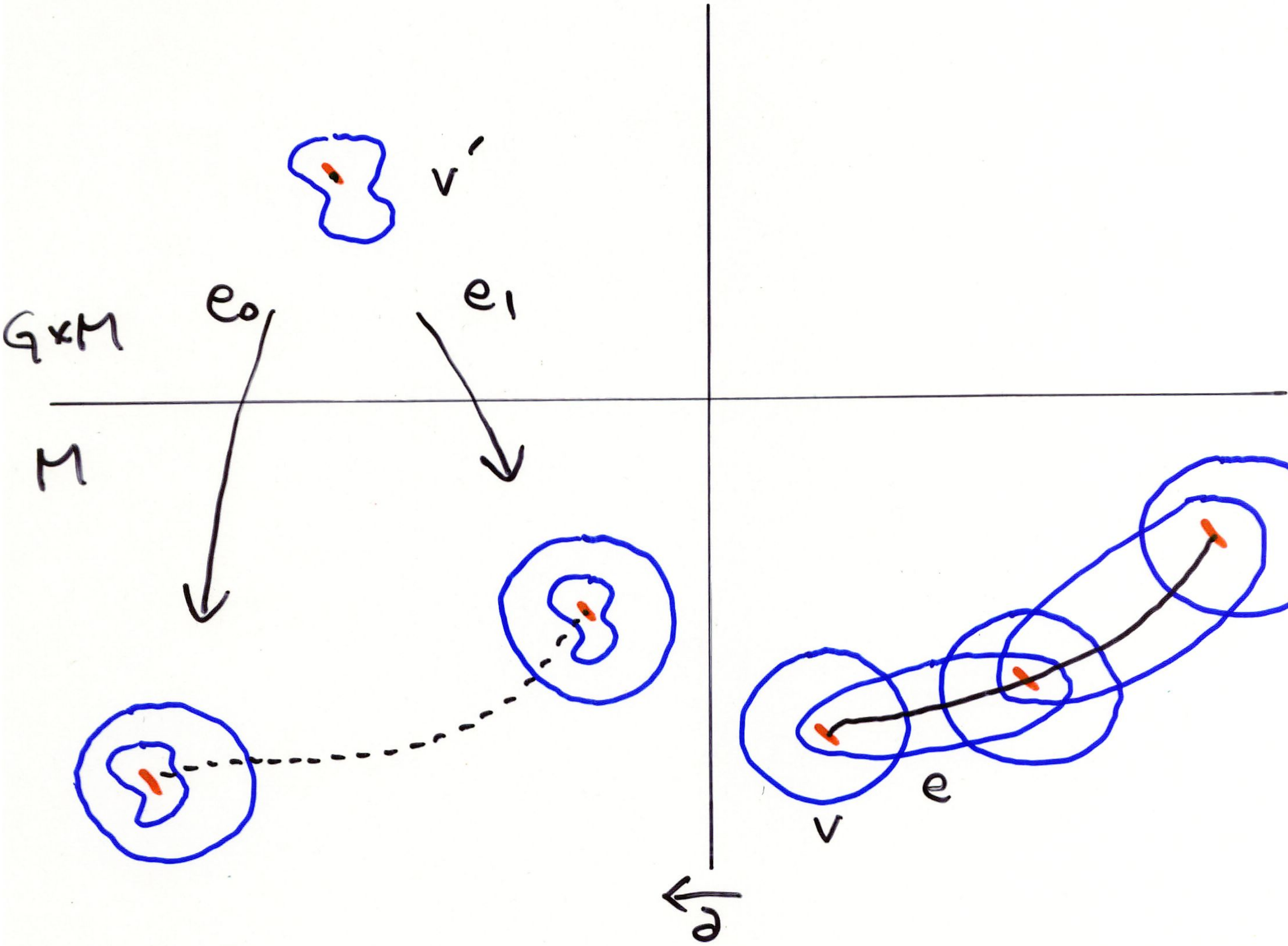
§3.4 ペアリング

単体多様体上の Deligne コサイクルとサイクルとのペアリングを定義したい．そのために，開被覆 $\mathfrak{U}^\bullet = \{\mathfrak{U}^i, I^i\}$ とサイクル $f^\bullet = (f^i)$ に対して，

$$\begin{cases} \text{各チェイン } f^i \text{ の三角形分割 } K^i, \\ \text{写像 } \phi^i : K^i \to I^i, \end{cases}$$

であって，次の条件を満たすものをとる:

$$\begin{cases} f^i(\sigma) \subset U^i_{\phi^i(\sigma)}, \ (\sigma \in K^i) \\ e_* f^i - \partial f^{i-1} = 0 \text{ と compatible.} \end{cases}$$



$$\begin{cases} f^0(v) \in U^0_{\phi^0(v)}, \; f^0(e) \in U^0_{\phi^0(e)}, \cdots \\ f^1(v') \in U^1_{\phi^1(v')} \end{cases}$$

$$K^{\cdot} \;\{ e_0(v') = v, \cdots$$

$$\phi^{\cdot} \;\{ e_0 \circ \phi^1(v') = \phi^0(v), \cdots$$

$$(e_j : I^i \to I^{i-1})$$

主定理(五味–寺嶋)

$$\begin{cases} \omega^\bullet = (\omega^{i,k}_{\alpha_0\cdots\alpha_j}) & \in Z^p(\mathfrak{U}^\bullet, \mathbb{D}(p)), \\ f^\bullet = (f^i) & \in Z_p(X^\bullet, \mathbb{Z}) \end{cases}$$

のペアリング $\langle \omega^\bullet, f^\bullet \rangle$ を

$$\sum_{i=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{p-i} \sum_{\sigma^{p-i-\ell} \subset \cdots \subset \sigma^{p-i}} \int_{\sigma^{p-i-\ell}} (f^i)^* \omega^{i,p-i-\ell}_{\phi^i_{\sigma^{p-i}} \cdots \phi^i_{\sigma^{p-i-\ell}}}$$

と定めると, 次の well-defined な順同型を導く.

$$\langle \ , \ \rangle : H^p(X^\bullet, \mathbb{D}(p)) \otimes_{\mathbb{Z}} Z_p(X^\bullet, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

<u>注意</u>　$H^p(X^\bullet, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_p(X^\bullet, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\langle \ , \ \rangle} \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$

<u>例</u>　§1で述べた “ホロノミー”

離散群 G の作用で同変な接続つき主 $U(1)$ 束 (P, A)
　$\rightsquigarrow [\omega^\bullet] \in H^1(G^\bullet \times M, \mathbb{D}(1))$.

$f : [0,1] \to M$, ${}^\exists g \cdot f(0) = f(1)$
　$\rightsquigarrow f^\bullet \in Z_1(G^\bullet \times M, \mathbb{Z})$.

例 Discrete torsionの導出の際の位相項の一般化

- $G^\bullet \times M$の2-サイクル

$$f : [0,1]\times[0,1] \to M, \ \begin{cases} g\cdot f(0,t) = f(1,t), \\ h\cdot f(s,0) = f(s,1). \end{cases}$$

- $G^\bullet \times M$のDeligne 2-コサイクル

$$\begin{cases} B & \in & A^2(M), \\ A(g) & \in & A^1(M), \\ \zeta(g,h) & \in & C^\infty(M,\mathbb{R}/\mathbb{Z}). \end{cases}$$

- ペアリング

$$\begin{aligned} \langle \omega^\bullet, f^\bullet \rangle = & \int_{[0,1]\times[0,1]} f^*B \\ & + \int_{[0,1]} f(0,\cdot)^* A(g) - \int_{[0,1]} f(\cdot,0)^* A(h) \\ & + \Big(\zeta(g,h) - \zeta(h,g)\Big)(f(0,0)). \end{aligned}$$

特に, 群Gの2-コサイクルζに対して,

$$\langle \omega^\bullet, f^\bullet \rangle = \zeta(g,h) - \zeta(h,g).$$