

量子コホモロジー

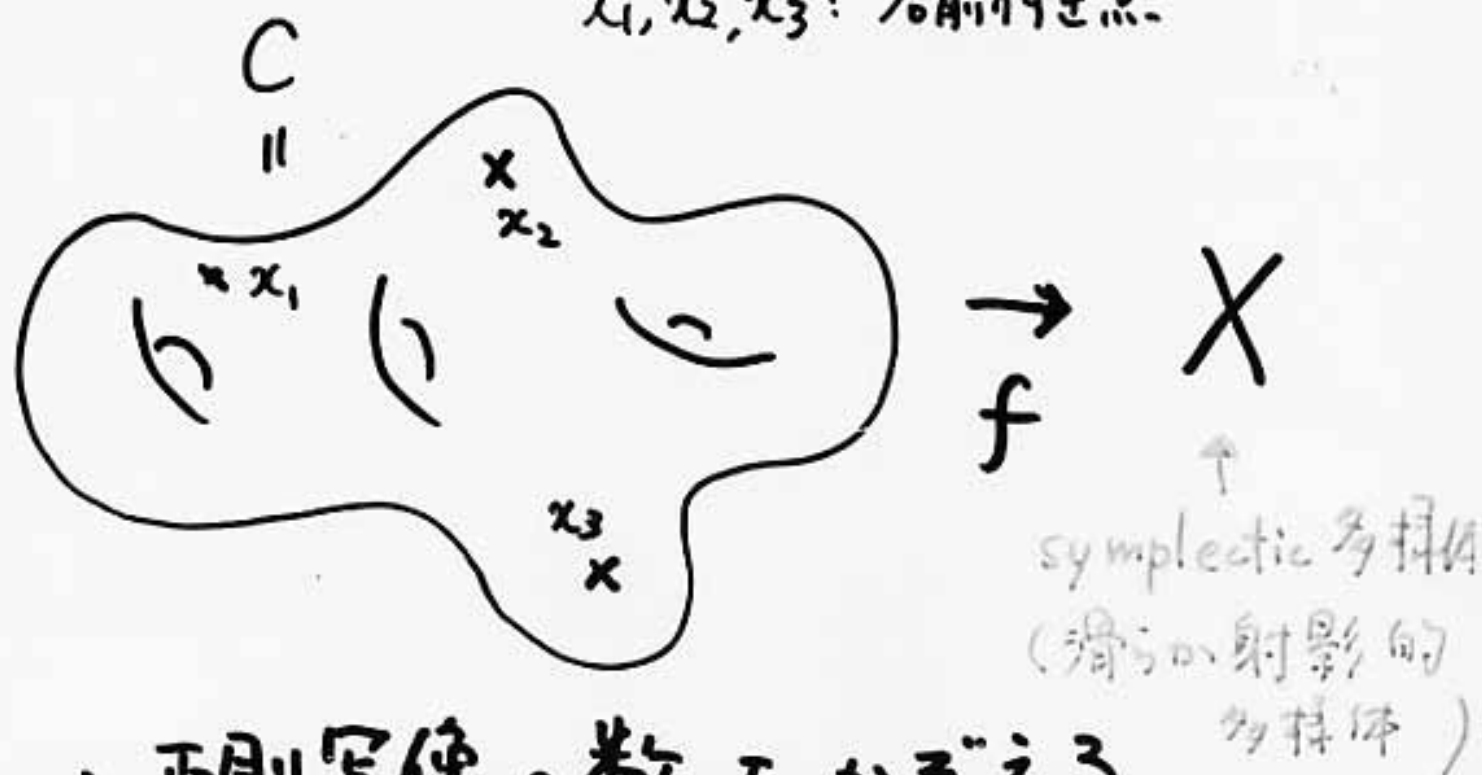
の収束について

(Givental の量子化の形式)

入谷 寛

Gromov-Witten 理論

x_1, x_2, x_3 : 各前付き点



・ 正則写像、数 n をかぞえる

・ コホモロジー類 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in H^*(X; \mathbb{Q})$

genus $g \geq 0$

整数 $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$

degree $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$

これら $\langle \alpha_1 \psi_1^{k_1}, \dots, \alpha_n \psi_n^{k_n} \rangle_{g, d}^X \in \mathbb{Q}$
が決まる。

正確には

- n 点付き リーマン面 (node を許すもの)
から X への "stable map" の モジュライ空間
 $\overline{M}_{g,n}(X, d)$ に 通入 する. (g : genus, d : degree)
- evaluation map (i 番目の点 z_i)

$$e_i: \overline{M}_{g,n}(X, d) \longrightarrow X$$

$$\left(f: \underset{\substack{\psi \\ x_i}}{C} \rightarrow X \right) \longmapsto f(x_i)$$
- cotangent line bundle

$$\mathbb{L}_i \rightarrow \overline{M}_{g,n}(X, d)$$
- stable map $(f: C \rightarrow X)$ への
fiber 上の $T_{x_i}^* C$ と なるもの.

• Gromov-Witten 不変量

$$\langle \alpha_1 \psi_1^{k_1}, \alpha_2 \psi_2^{k_2}, \dots, \alpha_n \psi_n^{k_n} \rangle_{g,d}^X$$

$$:= \int \prod_{i=1}^n e_i^*(\alpha_i) \wedge c_1(\mathbb{L}_i)^{k_i} \\ [\overline{M}_{g,n}(X,d)]_{\text{virt}} \leftarrow \text{仮想的基本類}$$

$k_1 = k_2 = \dots = 0$ のとき (ψ があらわれないとき)

primary invariant 有限変数

$k_i > 0$ のとき

descendent invariant

⋮
↓

無限次元

Gromov-Witten potential

$$\overline{\mathcal{F}}_g^X(\overbrace{t_0, t_1, t_2, \dots}^{\text{descendent}})$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{Q^d}{n!} \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} t_k \psi_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} t_k \psi_n^k \right\rangle_{g,d}$$

$d \in H_2(X, \mathbb{Z})$

- $t_0, t_1, \dots$ は $H^*(X)$ の元
- $\overline{\mathcal{F}}_g^X$ は 無限直積 $\prod_0^{\infty} H^*(X)$ 上の形式的な関数

total descendent potential

$$D_X := \exp \left(\sum_{g=0}^{\infty} e^{g-1} \overline{\mathcal{F}}_g^X \right)$$

• genus = 0 理論

WDVV 方程式 (F_0^X : descendent rsl
of genus = 0 potential

$$\frac{\partial F_0^X}{\partial t^a \partial t^b \partial t^k} g^{kl} \frac{\partial F_0^X}{\partial t^l \partial t^c \partial t^d}$$

は a, b, c, d について対称である

⇒ 量子コホモロジー代数

(cohomology の環構造, q -変形)

可換 & 結合的

— 量子 D 加群 (量子コホモロジーの“量子化”)

量子コホモロジーは量子 D 加群の

特性多様体 (Lagrangian) の関数環
になっている。

例

旗多様体

$$Fl(n) = \{ 0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = \mathbb{C}^n \}$$

$$\dim V_i = i$$

 $Fl(n)$ の量子 D 加群 $\leftrightarrow$ 量子戸田格子

- sl_{n-1} の cartan subalg $\perp \mathfrak{g}$

量子力学

- $\hat{H} = \sum_{i=1}^n \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t_i} \right)^2 + \sum_i e^{t_i - t_{i+1}}$

 $Fl(n)$ の量子コホモロジーの関係式

= 戸田格子における運動の定数

- genus 0 の descendent 付き 理論 は
descendent 無し の 理論 へは 一意に回復
できる。(Dubrovin)

Rem descendent 付き の ポテンシャル の 対称性

- $\partial_{1,1} \mathcal{F}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu} t_n^{\nu} \partial_{\nu,n} \mathcal{F}_0 - 2 \mathcal{F}_0$
dilaton
- $\partial_{1,0} \mathcal{F}_0 = \frac{1}{2} (t_0, t_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu} t_{n+1}^{\nu} \partial_{\nu,n} \mathcal{F}_0$
string
- $\partial_{\alpha,k+1} \partial_{\beta,l} \partial_{\gamma,m} \mathcal{F}_0$

$$= \sum_{\mu,\nu} \partial_{\alpha,k} \partial_{\mu,0} \mathcal{F}_0 g^{\mu\nu} \partial_{\nu,0} \partial_{\beta,l} \partial_{\gamma,m} \mathcal{F}_0$$

topological
recursion

• higher genus 理論

▲ 1点の total descendent potential

D_{pt} は KdV hierarchy の τ 関数

(Witten 予想, Kontsevich 也)

(D_{pt} は curve の モーデュライ 上の interaction theory の 母関数である.)

▲ Hodge integral

曲線の モーデュライ $\overline{M}_{g,n}$ (genus g , n 点付き)

上の ホッジ束 $E \rightarrow \overline{M}_{g,n}$

(curve C 上の fiber が $H^1(C, \mathcal{O}_C)^*$ になるもの)

の Chern class $\lambda_i = c_i(E)$ の積分

は Faber-Pandharipande の 微分方程式 により

計算される

▲ Virasoro 予想

任意の X に対する total descendent potential D_X は 無限個の微分方程式

$$\boxed{L_n D_X = 0} \quad n \geq -1$$

を満す。また L_n たちは

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m}$$

を満す微分作用素。(X の topology で決まる)

- 量子コホモロジーは semi-simple

(環として $\mathbb{C}$ の直和に同型) である。

Virasoro 条件 + genus = 0 理論

により、全ての genus の理論が決定される。

▲ P^1 の potential D_{P^1} は 戸田階層

と関係があることが知られている

(Okounkov-Pandharipande, Getzler)

量子化の構造

11

古典論

$H^*(X)$, $\cup$ cup 積



準古典

(genus = 0)

• 量子コホモロジー

• 量子D加群

(量子可積分系になったりする)



量子論

(全 genus)

• total descendent potential D_X

• Virasoro 対称性

• KdV } hierarchy
Toda

Givental の 量子化 の 形式

V : k 上の有限次元ベクトル空間

$(\cdot, \cdot)$: 内積

• Gromov-Witten 理論では

$$k = \mathbb{Q}[[\hbar]] \quad \text{Novikov 環}$$

$$V = H^*(X, k)$$

$$(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \cup \beta$$

• 無限次元 symplectic vector space

$$\mathcal{H} = V[[\hbar^{-1}, \hbar]]$$

$$= \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$$

$$\Omega(f, g) := \operatorname{Res}_{\hbar=0} (f(-\hbar), g(\hbar)) d\hbar$$

• Darboux 座標

$\{\phi_\alpha\} : V$ の basis

$\phi^\beta : \text{dual basis} \quad (\phi_\alpha, \phi^\beta) = \delta_\alpha^\beta$

$$f(\hbar) = \sum_{n \geq 0, \alpha} q_n^\alpha \phi_\alpha \hbar^n$$

$$\overset{n}{\mathcal{H}} + \sum_{n \geq 0, \beta} p_{\beta, n} \phi^\beta \frac{1}{(-\hbar)^{n+1}}$$

$$\{p_{\beta, m}, q_n^\alpha\} = \delta_\beta^\alpha \cdot \delta_{mn}$$

• symplectic 変換 の 量子化

T : 無限小シンプレクティック変換 ($\Omega(f, Tg) + \Omega(Tf, g) = 0$)

$$\rightarrow \hat{T} = \frac{1}{2} \Omega(f, Tf) \quad \text{2次 Hamiltonian}$$

$\rightarrow \hat{T}$: 微分作用素 (q_n^α の関数として作用)

symplectic 変換 の 量子化 (つぎ)

T : 無限小シンプレクティック変換

$$(\Omega(f, Tg) + \Omega(Tf, g) = 0)$$

$$\leadsto \tilde{T} := \frac{1}{2} \Omega(f, Tf) \quad \text{2次ハミルトン}$$

$$\leadsto \hat{T} : \text{2次微分作用素} \leadsto \text{H}_+ \text{上の function}$$

q のみの関数

量子化の rule

$$P_{\alpha, n} P_{\beta, m} \mapsto \epsilon \frac{\partial}{\partial q_n^\alpha} \frac{\partial}{\partial q_m^\beta}$$

$$P_{\alpha, n} q_{\beta, m} \mapsto q_{\beta, m} \frac{\partial}{\partial q_n^\alpha}$$

$$q_{\alpha, n} q_{\beta, m} \mapsto \frac{1}{\epsilon} q_{\alpha, n} q_{\beta, m}$$

$$P \rightarrow \sqrt{\epsilon} \frac{\partial}{\partial q}$$

$$q \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} q$$

という規則 であるが

順番が決められている。

(正規順序)

- 量子化の形式を使うと, Gromov-Witten 理論における多くの関係や対称性をコンパクトな形に表わすことができる.

- $V = H^*(X, \mathbb{Q}[\![Q]\!])$ とすると.

total potential $D_X(t_0, t_1, t_2, \dots)$

は「Dilaton Shift」を通じて $\mathcal{H}_+$ の上の関数と思うことができる.

$$t_0 = g_0$$

$$t_1 = g_1 + 1 \quad \begin{array}{l} 1 \in H^*(X) \\ \text{単位元} \end{array}$$

$$t_2 = g_2$$

$$t_3 = g_3$$

$$g(h) = \#(\dot{h}) - h = \sum_{n=0}^{\infty} t_n h^n - 1 \cdot h$$

例 (以下の例は Givental にとる)

Virasoro 対称性

$$L_m := h^{-\frac{1}{2}} \left(h \frac{d}{dh} h - \mu h + \rho \right)^{m+1} h^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} L_{-1} = 1/h \\ L_0 = (h + \frac{1}{2}) \frac{d}{dh} + \frac{\rho}{h} - \mu \\ \vdots \end{cases}$$

は $\mathcal{H}$ の 無限小 シンプレクティック 作用素

$$\mu(\phi_\alpha) = \left(\deg_{\mathbb{C}} \phi_\alpha - \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} X \right) \phi_\alpha$$

$$\rho(\phi_\alpha) = c_1(X) \cup \phi_\alpha \quad \mu, \rho \in \text{End}(V)$$

Virasoro 予想は

$$\left(\hat{L}_m + \left(\frac{1}{4} \text{tr}(\mu\mu^*) + \frac{1}{16} \chi(X) \right) \delta_{m,0} \right) \mathcal{D}_X = 0$$

と書くことが出来る。

▲ Hodge 積分

ポテンシャル $\mathcal{F}_g(\#)$ を Hodge 積分 も含めて

形に拡張する. $\mathcal{S} = (s_1, s_2, \dots)$ 11054-9

$$\mathcal{F}_g(\#, \mathcal{S}) = \sum_{n, d} \frac{Q^d}{n!} \times$$

$$\times \int_{[\bar{M}_{g,n}(X, d)]_{\text{virt}}} e^{\sum_k s_k \text{ch}_{k-1}(\mathcal{E})} \frac{n}{\prod_{i=1}^n} \left| \sum_{k=0}^{\infty} e_i^*(t_k) c_1(\mathcal{L}_i)^k \right|$$

E は Hodge 束

$$D_X(\#, \mathcal{S}) := \exp \left(\sum_{g=0}^{\infty} \epsilon^{g-1} \mathcal{F}_g(\#, \mathcal{S}) \right)$$

とよいとき.

$$D_X(\#, \mathcal{S}) = \exp \left(\sum \frac{B_{2k}}{(2k)!} s_k \widehat{h}^{2k-1} \right) D_X(\#)$$

無限小 symplectic operator

の 量子化

B_{2k} : ヴィルヌーイ 数

▲ 固定点公式

X : ハミルトン $\mathbb{T} \cong (\mathbb{C}^*)^r$ 作用を

持ち, その固定点及び固定点による

一次元軌道は全て孤立している

このとき, X の Gromov-Witten 不変量は

固定点 $X^{\mathbb{T}}$ (有限集合) の Gromov-Witten

不変量 (及び Hodge 積分) に帰着する

$$D_X = e^{C(u)} \hat{S}_u^{-1} \hat{\Xi} \hat{R}_u e^{(u/k)\hat{\cdot}} \prod_{i=1}^N D_{pt}(x_i)$$

ここで (S, Ξ, R) は $\mathbb{T}$ 同変 genus = 0 理論
($C(u)$)

から決まる Symplectic 作用素.

▲ 量子 Riemann-Roch (Coates & Givental)¹⁾

$$V \rightarrow X \quad \text{正則ベクトル束}$$

$$\mathbb{C}(\cdot) = \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} s_k \operatorname{ch}_k(\cdot) \right)$$

$s_0, s_1, s_2, \dots$ 無限個のパラメータ

$\mathbb{C}$ は 最も一般的な乗法的特性類

$(\mathbb{C}, V)$ で与えられた Gromov-Witten 理論

を定義する ために 次の図式を考える

$$\overline{M}_{g,n+1}(X,d) \xrightarrow{e_{n+1}} X$$

$$\downarrow \pi$$

$$\overline{M}_{g,n}(X,d)$$

$$V_{g,n,d}^{\bullet} := R^{\bullet} \pi_* e_{n+1}^*(V) : \begin{array}{l} \overline{M}_{g,n}(X,d) \\ \text{上の層の} \\ \text{複体} \end{array}$$

o $\mathcal{C}$ と V により与えられる Gromov-Witten
理論

$$\widehat{\mathcal{F}}_g^{(\mathcal{C}, V)}(\#_0, \#_1, \#_2, \dots) \quad \#_i \in H^*(X)$$

$$:= \sum_{n, d} \frac{Q^d}{n!} \int_{[\overline{M}_{g, n}(X, d)]_{\text{virt}}} \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} e_i^*(\#_k) c_i(\mathcal{L}_i)^k \right) \cup \underbrace{\mathcal{C}(V_{g, n, d})}_{\text{ホリィ}} \quad \text{a 2nd}$$

$$D_X^{(\mathcal{C}, V)}(\#) := \exp \left(\sum_{g=0}^{\infty} \epsilon^{g-1} \widehat{\mathcal{F}}_g^{(\mathcal{C}, V)}(\#) \right)$$

Dilaton shift ϵ の形 $\epsilon \in \mathbb{R}$ ($\mathcal{C}, V$ により決まる)

$$g_0 = \sqrt{\mathcal{C}(V)} \#_0$$

$$g_1 = \sqrt{\mathcal{C}(V)} (\#_1 - 1)$$

$$g_n = \sqrt{\mathcal{C}(V)} \#_n \quad (n \geq 2)$$

よって $D_X^{(\mathcal{C}, V)} \in \mathcal{H}_+$ 上の $\mathbb{R}$ 数 と思う。

定理 (Coates - Givental)

$$D_X^{(\mathbb{C}, V)} \propto \hat{\Delta} \cdot D_X$$

ここで Δ は 次の形式的無限積 Δ (たにき) の
漸近展開で与えられる symplectic operator

$$\Delta \sim \sqrt{\mathbb{C}(V)} \prod_{m=1}^{\infty} \mathbb{C}(V \otimes e^{-m\hbar})$$

(Δ の explicit な形は論文参照)

なぜなら? Gromov - Witten 理論 の 意味 は ?

- V : convex, $\mathbb{C}$ = 同変ホッジ-類

genus = 0 なら 次に来たる quantum Lefschetz
(submanifold の GW)

- V : concave なら $\mathbb{C} = (\text{同変ホッジ-類})^{-1}$

と なる。 local Gromov-Witten

Quantum Lefschetz (genus = 0 理論)

量子 Riemann-Roch の応用

$$V \rightarrow X \quad \text{convex} \quad \left(\begin{array}{l} \text{i.e. } \forall f: \mathbb{P}^1 \rightarrow X \\ \text{hol} \\ \text{に対し } H^1(\mathbb{P}^1, f^*V) = 0 \end{array} \right.$$

$\xleftarrow{s}$

s は零切断に横断的で部分多様体

$Y = s^{-1}(0) \subset X$ と定めるとする.

さらに乗法的特性類 e とし $e = e$

$$e(\mathcal{L}) = \lambda + c_1(\mathcal{L}) \quad \text{同変オイラー-類}$$

$\uparrow$
同変オイラー-類

for $\mathcal{L} \rightarrow X$ line 束

ととる. このとき, genus = 0 ポテンシャルは

$$\mathcal{F}_0^{(e, V)}(\#) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{F}_0^Y(i^*(\#))$$

$$\# = (\#_0, \#_1, \dots) \in \prod_0^\infty H^*(X)$$

$i: Y \hookrightarrow X$ 包含写像

という関係に
あり.

準古典極限 (genus = 0 の極限)

total potential は

$$D = \exp \left(\underbrace{\frac{1}{\epsilon} \tilde{F}_0}_{\text{genus 0 potential}} + \tilde{F}_1 + \epsilon \tilde{F}_2 + \dots \right)$$

の形である。



$\epsilon \rightarrow 0$ とすると genus 0 potential $\tilde{F}_0$ のみが残る。

T : 無限小 symplectic operator $\sim \mathcal{H}$

$$e^{\hat{T}} D = \exp \left(\frac{1}{\epsilon} \tilde{F}'_0 + \tilde{F}'_1 + \dots \right)$$

とすると 以下関係がある。

$$e^T (d\tilde{F}_0 \text{ on graph}) = (d\tilde{F}'_0 \text{ on graph})$$

$$\text{ここで } d\tilde{F}_0 : \mathcal{H}_+ \rightarrow T^*\mathcal{H}_+ \cong \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$$

は $\tilde{F}_0$ のビグン

symplectic
同型 $\mathcal{H}$

Quantum Lefschetz 定理

$\mathcal{L}^X = d\hat{F}_0^X$ の graph とは定まる

$\mathcal{H}$ 内の 半無限次元の 多様体

$\mathcal{L}^{(c,V)} = d\hat{F}_0^{(c,V)}$ の graph

これは 量子 Riemann-Roch の 準古典極限により

$$\mathcal{L}^{(c,V)} = \Delta \mathcal{L}^X$$

$$\Delta \sim \sqrt{c(V)} \prod_{n=1}^{\infty} c(V \otimes e^{-n\hbar})$$

$\mathcal{L}^X$ は 次の性質をもつ $\mathcal{H}$ 内の 錐 (: スカラー倍で生成される)

• $\mathcal{L}^X$ の任意の 接平面 $\mathbb{L}$ は $\mathcal{L}^X$ と

右 $\mathbb{L}$ に沿って 接する. i.e.

$$T_{\mathbb{L}} = \mathcal{L}_X \cap \mathbb{L}$$

・ の関係式 $\mathcal{L}^{(a,V)} = \Delta \mathcal{L}^X$ は

ロー対称性 をもちいて実行される $\text{genus} = 0$

不変量の計算を 非常に簡潔な形

で言いあらわしたものである。

・ Δ は具体的に与えられる symplectic 変換

ではあるが、 $d\mathcal{F}_0$ の グラフの変換 を表すも

であり、また 無限次元の線型変換である

ため、 $d\mathcal{F}_0$ 自身の 変換は 複雑な

ステップを踏まなければ分からない。

・ V が直線束の和の場合は

$$\mathcal{J} := d\mathcal{F}_0|_V : \underbrace{V - \mathcal{H}}_{\mathcal{H}_+} \rightarrow \mathcal{H}$$

に対する“超幾何的変形”により上記の

シンプレティック変換 Δ の効果があらわされる

超幾何的変形と量子コホモロジー

の4束の関係

以下で $V = \mathcal{L}$: line bundle

で $c_1(\mathcal{L}) \geq 0$, $c = e$ (同変オイラー数)
とする.

$-h + V \subset \mathcal{H}_+ = V[h]$

$\wedge^0 d\mathcal{F}_0^X$ の制限 ε J_X とおく
(いわゆる J 関数)

$$J_X = \sum_d J_d(t, h) Q^d \quad \text{ただし } \begin{matrix} V \\ t \in H^*(X) \end{matrix}$$

級数

$$I_{X, \mathcal{L}} := \sum_d J_d(t, h) \cdot \prod_{k=1}^{\langle p, d \rangle} (\rho + 1 + kh) Q^d$$

ε 超幾何変形 と呼ぶ.

ここで $\rho = c_1(\mathcal{L})$, λ : 同変パラメータ

定理 (Coates - Givental)

$\mathcal{L}^X : d\mathcal{F}_0^X$ の graph

$\mathcal{L}^{(e, \mathcal{L})} = \Delta \mathcal{L}^X : d\mathcal{F}_0^{(e, \mathcal{L})}$ の graph

J-関数 $J_X(t, \hbar) \in \mathcal{L}^X$ に対し

その超幾何変形 $I_{X, \mathcal{L}}(t, \hbar)$ は

$\mathcal{L}^{(e, \mathcal{L})}$ 上になっている。

- $I_{X, \mathcal{L}}(t, \hbar)$ から ねじられた potential $\mathcal{F}_0^{(e, \mathcal{L})}$ を得る為には あるゲージ変換が必要である。
- もっとも、 $J_X(t, \hbar)$ が収束していたとしても、その超幾何変形 $I_{X, \mathcal{L}}(t, \hbar)$ は一般には形式巾級数にしかならない。

定理 $\mathcal{F}_0^X(\mathcal{G})$ が 4 束ベキ級数 2-束特に $\mathcal{I}_X(t, h)$ も 4 束すると仮定する.このとき $\mathcal{F}_0^{(e, \mathcal{L})}(\mathcal{G})$ も 4 束する

- $c_1(X) - c_1(\mathcal{L}) \neq 0$ の時は $\mathcal{I}_{X, \mathcal{L}}(t, h)$

は 4 束しないベキ級数 にしかならないが、

その乗っている 金銀 $\mathcal{L}^{(e, \mathcal{L})}$ 自体は 4 束
ベキ級数上 定義できる

高い種数への拡張？

前定理を D_X に拡張するときの困難

…級数 $\sum_{g=0}^{\infty} \epsilon^{g-1} \mathcal{F}_g(\#)$ が

収束すべき級数であることは ほとんど

期待できない.

…しかしながら、いくつかの例では.

genus についてたしあげた関数は解析的

な関数であり、上の級数は例えば

$\text{Re}(\epsilon) > 0$ の漸近展開と見なせる

ものになっている.

部分的な結果として得られた。

定理 $X: \text{ハミルトン } \mathcal{H} \cong (\mathbb{C}^*)^k \text{ 作用}$
 Σ 持つ多様体 Σ fixed point B^u
 fixed 1-dimensional orbit π^i 孤立
 12.13

$\Rightarrow \hat{F}_g(\Sigma)$ は各 g ごとに有限個の数