A generalization of the Donaldson invariant

笹平　裕史 (東大数理)

Introduction

- X:closed, oriented 4-manifold

- g:Riemannian metric on X

- $E \to X$:SU(2)-vector bundle on X,
$c_2(E) = k \in H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

- $M_k(g)$:moduli space of instantons on E
M_k:(noncomapct,) orientable, smooth manifold (適当な条件のもと)

- $\dim M_k = 2d$, $(k \geq 1, d > 2k)$と仮定
  $[\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d] \in H_2(X, \mathbb{Z}) \Rightarrow$
  $\mu([\Sigma_1]), \cdots, \mu([\Sigma_d]) \in H^2(M_k, \mathbb{Z})$ (定義は後)
  $\gamma_k([\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d]) :=$
  $\displaystyle\int_{M_k(g)} \mu([\Sigma_1]) \cup \cdots \cup \mu([\Sigma_d]) \in \mathbb{Z}$
  (M_kには適当に向きをいれている)

- γ_k: $\overbrace{H_2(X, \mathbb{Z}) \otimes \cdots \otimes H_2(X, \mathbb{Z})}^{d} \to \mathbb{Z}$
  γ_kはgに依存しない
  $\{\gamma_k\}_k$:4次元多様体Xの不変量

- $\{\gamma_k\}_k$をDonaldson不変量という

$\{\gamma_k\}_k$を次のように一般化する

- $\dim M_k = 2d + r$ $(r = 1, 2, 3)$
  $V \subset M_k$:compact submanifold, $\dim V = r$
  $\mu([\Sigma_1]) \cup \cdots \cup \mu([\Sigma_d]) \in H^{2d}(M_k, \mathbb{Z})$
  の "ポアンカレ双対"

- $\mathcal{A}$:Eの接続の空間
  $\mathcal{A}^* := \{A \in \mathcal{A} | A : \text{既約}\}$
  $\mathcal{G}$:Eのゲージ群
  $\iota : V \hookrightarrow \mathcal{B}^* := \mathcal{A}^*/\mathcal{G}$:inclusion

- (適当な条件でのもと) Vに標準的なスピン構造
  $[V, \iota] \in \Omega_r^{spin}(\mathcal{B})$: gに依存しない
  $\gamma_{k,r}^{spin} : \mathfrak{H}_d(X) \to \Omega_r^{spin}(\mathcal{B}^*)$
  $\{\gamma_{k,r}^{spin}\}_{k,r}$:$X$の不変量
  $\mathfrak{H}_d(X)$の定義は後で

plan of this talk

- インスタントン
- モジュライ空間のスピン構造
- 不変量$\gamma_{k,r}^{spin}$の定義
- $\gamma_{k,r}^{spin}$のwell-defined性

インスタントン

- $* = *_g : \Omega^2_X(\mathfrak{g}_E) \to \Omega^2_X(\mathfrak{g}_E)$
  Hodge $*$-operator, $*^2 = 1$
  $\Omega^2_X(\mathfrak{g}_E) = \Omega^+_X(\mathfrak{g}_E) \oplus \Omega^-_X(\mathfrak{g}_E)$
  $\Omega^+_X(\mathfrak{g}_E)$:$*$の固有値1, $\Omega^-_X(\mathfrak{g}_E)$:$*$の固有値$-1$.

- $A \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_E$:$E$の接続
  $F_A \in \Omega^2_X(\mathfrak{g}_E)$:$A$の曲率
  F^+_A:F_Aの$\Omega^+_X(\mathfrak{g}_E)$への射影
  $F^+_A = 0$ (ASD方程式)

- インスタントンのモジュライ空間
  $M_k = M_k(g) = \{A \in \mathcal{A} | F^+_A = 0\}/\mathcal{G}$

モジュライ空間について

$\mathcal{H}_g^+(X)$:X 上の自己双対調和２形式の空間
$b^+(X) := \dim \mathcal{H}_g^+(X)$
Proposition 1. *(smoothness)*
$b^+(X) \geq 1$, $k \geq 1$, g: *"generic"* $\Rightarrow$
$M_k \subset \mathcal{B}^* = \mathcal{A}^*/\mathcal{G}$
M_k:*smooth manifold*
$T_{[A]}M_k =$
$\ker(d_A^* + d_A^+ : \Omega^1(\mathfrak{g}_E) \to \Omega^0(\mathfrak{g}_E) \oplus \Omega^+(\mathfrak{g}_E))$
$\dim = 8k - 3(1 - b_1(X) + b^+(X))$
Theorem 2. *(compactification)*
• $\{A_\alpha\}_\alpha \subset M_k$:任意の点列$\Rightarrow$
適当に部分列をとると、
ある$x_1, \cdots, x_l \in X$ $(0 \leq l \leq k)$があって、
$[A_\alpha] \to ([A_\infty]; x_1, \cdots, x_l) \in M_{k-l} \times s^l(X)$
(ある意味で)

• $\bar{M}_k$:M_kの$M_k \cup (M_{k-1} \times X) \cup \cdots \cup (M_0 \times s^k(X))$
における閉包
$\Rightarrow$ $\bar{M}_k$はコンパクト

M_k の向き付け可能性

- $\mathrm{Ind}\{D_A\}_{[A]\in\mathcal{B}^*} \in KO(\mathcal{B}^*)$:
  index bundle of operators $D_A = d_A^* + d_A^+$
  parameterized by $\mathcal{B}^*$

- $\mathrm{Ind}\{D_A\}_{[A]\in\mathcal{B}^*}|_{M_k} = TM_k$ in $KO(M_k)$

Lemma 3. *(Donaldson)*
• $w_1(\mathrm{Ind}\{D_A\}_{[A]\in\mathcal{B}^*}) = 0 \in H^1(\mathcal{B}^*, \mathbb{Z}_2)$
特に M_k は向き付け可能

• $\mathcal{O}$:$\mathcal{H}_g^1(X) \oplus \mathcal{H}_g^+(X)$ の向き $\Rightarrow$ M_k に向きが定まる
$\mathcal{H}_g^1(X)$:X 上の調和１形式の空間,
$\mathcal{H}_g^+(X)$:X 上の自己双対調和２形式の空間

M_k のスピン構造

Proposition 4. *(spin str on M_k)*
(a) X:closed, spin 4-mfd,
$H_1(X,\mathbb{Z})$:torsion free
$\Rightarrow w_2(\mathrm{Ind}\{D_A\}_{[A]\in\mathcal{B}^*}) = 0 \in H^2(\mathcal{B}_k^*, \mathbb{Z}_2)$
特に M_k はスピン構造を持つ。

(b)k:odd
σ:X のスピン構造, $\mathcal{O}$:$\mathcal{H}_g^1(X) \oplus \mathcal{H}_g^+(X)$ の向き
$\Rightarrow M_k$ にスピン構造

Outline of proof of (a)

• $x_0 \in X$ fix, $\mathcal{G}_0 = \{g \in \mathcal{G} | g(x_0) = 1\}$
$\widetilde{\mathcal{B}} := \mathcal{A}/\mathcal{G}_0$, $\widetilde{\mathcal{B}}^* = \mathcal{A}^*/\mathcal{G}_0$
$\beta : \widetilde{\mathcal{B}}^* \to \mathcal{B}^*$:projection
$\beta^* : H^2(\mathcal{B}^*, \mathbb{Z}) \to H^2(\widetilde{\mathcal{B}}^*, \mathbb{Z})$ は単射

• $E(l) := E \oplus \underline{\mathbb{C}}^{l-2} \to X$: $SU(l)$-vector bundle
$\mathcal{B}(l) := \mathcal{A}_{E(l)}/\mathcal{G}_{E(l)}$ などと書く
$l \gg 0$ のとき、$H_1(X, \mathbb{Z}) \cong H_1(\widetilde{\mathcal{B}}(l), \mathbb{Z})$
特に、$H_1(X, \mathbb{Z})$:torsion free
$\Rightarrow H^2(\widetilde{\mathcal{B}}(l), \mathbb{Z})$:torsion free (普遍係数定理)

まずは、次の特別な場合を考える.

Lemma 5. X*:closed 4-manifold*
$H_1(X,\mathbb{Z})$*:torsion free*
$\exists J$*:almost complex str on* X
$c_1(X,J)=0\in H^2(X,\mathbb{Z})$
$\Rightarrow w_2(\mathrm{Ind}\{D_A\}_{[A]\in\mathcal{B}^*})=0\in H^2(\mathcal{B}^*,\mathbb{Z}_2)$

outline of proof of lemma

- X:almost complex $\Rightarrow$
$D_A=\bar\partial_A^*+\bar\partial_A:\Omega_X^{0,1}(\mathfrak{g}_E^{\mathbb{C}})\to\Omega_X^{0,0}(\mathfrak{g}_E^{\mathbb{C}})\oplus\Omega_X^{0,2}(\mathfrak{g}_E^{\mathbb{C}})$
(0次のoperatorの差を除いて)

- mod 2で、
$w_2(\mathrm{Ind}\{D_A\}_{[A]\in\mathcal{B}^*})\equiv c_1(\mathrm{Ind}\{\bar\partial_A^*+\bar\partial_A\}_{[A]\in\mathcal{B}^*})$
よって
$c_1(\mathrm{Ind}\{\bar\partial_A^*+\bar\partial_A\}_{[A]\in\mathcal{B}^*})=0\in H^2(\mathcal{B}^*,\mathbb{Z})$を示せば良い

- $\beta^*:H^2(\mathcal{B}^*,\mathbb{Z})\to H^2(\widetilde{\mathcal{B}}^*,\mathbb{Z})$:injective
$\widetilde{\mathcal{B}}^*=\widetilde{\mathcal{B}}_E^*\hookrightarrow\widetilde{\mathcal{B}}(l)=\widetilde{\mathcal{B}}_{E\oplus\underline{\mathbb{C}}^{l-2}}:[A]\mapsto[A\oplus\Theta_{l-2}]$
$c_1(\mathrm{Ind}\{\bar\partial_A^*+\bar\partial_A\}_{[A]\in\widetilde{\mathcal{B}}(l)})=0\in H^2(\widetilde{\mathcal{B}}(l),\mathbb{Z})$
を示すことに帰着

- $\widetilde{\mathbb{E}}(l) = \mathcal{A}_{E(l)} \times E(l)/\mathcal{G}_{E(l)0} \to \widetilde{\mathcal{B}}(l) \times X$

族の指数定理より

$ch(\mathrm{Ind}\{\bar{\partial}_A^* + \bar{\partial}_A\}_{[A]\in\widetilde{\mathcal{B}}(l)}) =$

$ch(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\widetilde{\mathbb{E}}(l)})Todd(X,J)/[X] \in H^*(\widetilde{\mathcal{B}}(l),\mathbb{Q})$

$\Rightarrow c_1(\mathrm{Ind}\{\bar{\partial}_A^* + \bar{\partial}_A\}_{[A]\in\widetilde{\mathcal{B}}(l)}) =$

$\frac{1}{2}p_1(\mathfrak{g}_{\widetilde{\mathbb{E}}(l)})c_1(X,J)/[X] \in H^2(\widetilde{\mathcal{B}}(l),\mathbb{Q})$

- $c_1(X,J) = 0 \in H^2(X,\mathbb{Z})$ (仮定) $\Rightarrow$

$c_1(\mathrm{Ind}\{\bar{\partial}_A^* + \bar{\partial}_A\}_{[A]\in\widetilde{\mathcal{B}}(l)}) = 0 \in H^2(\widetilde{\mathcal{B}}(l),\mathbb{Q})$

- $H_1(X,\mathbb{Z})$:torsion free (仮定) $\Rightarrow$

$H^2(\widetilde{\mathcal{B}}(l),\mathbb{Z})$:torsion free $\Rightarrow$

$c_1(\mathrm{Ind}\{\bar{\partial}_A^* + \bar{\partial}_A\}_{[A]\in\widetilde{\mathcal{B}}(l)}) = 0 \in H^2(\widetilde{\mathcal{B}}(l),\mathbb{Z})$.

その他の場合を$c_1(X,J)=0$の場合に帰着させる。
そのためには、次が必要である

Lemma 6. X*:closed, spin 4-mfd* $\Rightarrow$
$\exists W$*:closed, simply connected, spin 4-mfd s.t*
$\exists J$*:almost complex str on* $X\#W$
$c_1(X\#W,J)=0\in H^2(X\#W,\mathbb{Z})$

証明は略
具体的にWを次のようにとる。

X:spin $\Rightarrow 2\chi(X)+3\tau(X)\equiv 0 \mod 4$

- $2\chi(X)+3\tau(X)\leq 0$のとき

$2\chi(X)+3\tau(X)=-4m$ $(m\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$
$W=\#^m S^2\times S^2$

- $2\chi(X)+3\tau(X)>0$のとき

$2\chi(X)+3\tau(X)=4m$ $(m\in\mathbb{Z}_{>0})$
$W=\#^m K3$

一般の場合

- $x_0 \in X$:fix, $B_\epsilon(x_0)$:x_0の小さい近傍
$\phi : E|_{B_\epsilon(x_0)} \cong B_\epsilon(x_0) \times \mathbb{C}^2$:fix

- $\mathcal{B}^{*,f} = \{[A] \in \mathcal{B}^* | A|_{B_\epsilon(x_0)} = \Theta_{B_\epsilon(x_0)} \text{w.r.t } \phi\}$
$\mathcal{B}^* \cong \mathcal{B}^{*,f}$:ホモトピー同値
($X \to X/B_\epsilon(x_0) \cong X$ よる接続の引き戻しを考えよ)

- W:closed, spin, simply connected 4-mfd,
$\exists J$:almost complex str on $X \# W$,
$c_1(X \# W, J) = 0 \in H^2(X \# W, \mathbb{Z})$
$E_W := W \times \mathbb{C}^2$, Θ_W:product connection on E_W

- $E \#_{x_0} E_W \to X \# W$: $E|_{B_\epsilon(x_0)}$の自明化ϕを用いてE_Wと張り合わせる.
$[A] \in \mathcal{B}^{*,f}$に対して、$[A \# \Theta_W]$を$\phi$を用いて張りあわせた接続

- 族の指数の和公式を用いて、$c_1(X, J) = 0$の場合に帰着させて
$w_2(\text{Ind}\{D_A\}_{[A] \in \mathcal{B}^*}) = 0 \in H^2(\mathcal{B}^*, \mathbb{Z}_2)$
を得る

不変量$\gamma_{k,r}^{spin}$の定義

μ-map

- $[\Sigma] \in H_2(X, \mathbb{Z})$, $\Sigma \subset X$:embedded surface

- $\mathcal{B}^*_\Sigma$: $E|_\Sigma$の既約な接続のゲージ同値類の空間

- A:$E|_\Sigma$の接続
$\bar{\partial}\!\!\!/_A : \Omega^{0,0}_\Sigma(K_\Sigma^{\frac{1}{2}} \otimes E|_\Sigma) \to \Omega^{0,1}_\Sigma(K_\Sigma^{\frac{1}{2}} \otimes E|_\Sigma)$
$\bar{\partial}$-operator

- $\mathcal{L}'_\Sigma = \det \mathrm{Ind}\{\bar{\partial}\!\!\!/_A\}_{[A] \in \mathcal{B}^*_\Sigma} \to \mathcal{B}^*_\Sigma$
complex line bundle

- $r_\Sigma : \mathcal{B}^* = \mathcal{B}^*_{X,E} \to \mathcal{B}^*_\Sigma$: 接続の制限写像
(正確にはΣの管状近傍$\nu(\Sigma)$を考える必要がある)
$\mathcal{L}_\Sigma := r^*_\Sigma \mathcal{L}'_\Sigma \to \mathcal{B}^* = \mathcal{B}^*_{X,E}$
$\mu([\Sigma]) := c_1(\mathcal{L}_\Sigma) \in H^2(\mathcal{B}^*, \mathbb{Z})$

- s'_Σ:$\mathcal{L}'_\Sigma$の切断
$s_\Sigma := r^*_\Sigma s'_\Sigma$:$\mathcal{L}_\Sigma$の切断
$V_\Sigma := s_\Sigma^{-1}(0) \subset \mathcal{B}^* = \mathcal{B}^*_{X,E}$

$\mu(\Sigma_1) \cup \cdots \cup \mu(\Sigma_d)$ の "ポアンカレ双対" V

- $\dim M_k = 2d + r$
  $[\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d] \in H_2(X, \mathbb{Z})$
  $\Sigma_i \subset X$:embedded surface

- $b^+(X) \geq 1$, s'_{Σ_i}:generic $\Rightarrow$
  $V = M_k \cap V_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap V_{\Sigma_d}$
  $\dim V = r$ の多様体

- 条件
  (a)$\Sigma_i \cap \Sigma_j$:横断的 $(i \neq j)$
  (b)$\Sigma_i \cap \Sigma_j \cap \Sigma_k = \emptyset$ $(i, j, k$ 異なる$)$

Lemma 7. $\dim M_k = 2d + r$ $(r = 1, 2, 3)$
$d > 2k$, 条件 (a),(b) のもと
$V = M_k \cap V_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap V_{\Sigma_d}$ はコンパクト

Lemma 7の証明

- $\{[A_\alpha]\}_\alpha \subset V = M_k \cap V_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap V_{\Sigma_d}$
  任意の点列
  $[A_\alpha] \to [A_\infty; x_1, \cdots, x_l] \in M_{k-l} \times s^l(X)$
  $l = 0$であることを示したい。
  $0 < l < k$と仮定する。

  - あるiにたいして、$x_1, \cdots, x_l \notin \Sigma_i$
    $\Rightarrow\ [A_\infty] \in M_{k-l} \cap V_{\Sigma_i}$

  - 条件(b)より、
    $\#\{i | x_\nu \in \Sigma_i \quad (\exists \nu = 1, \cdots, l)\} \leq 2l$

    * 2つをまとめると (適当に番号を入れ替えて)
      $[A_\infty] \in M_{k-l} \cap V_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap V_{\Sigma_{d-2l}}$

- 一方
  $\dim M_{k-l} \cap V_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap V_{d-2l}$
  $= \dim M_k - 8l - 2(d-2l)$
  $= 2d + r - 8l - 2d + 4l = r - 4l < 0 \quad (r < 4)$
  $\Rightarrow M_k \cap V_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap M_{\Sigma_{d-2l}} = \emptyset$
  矛盾

- $l = k$ の場合は、別に議論が必要．仮定の $d > 2k$ をつかう．ここでは省略

Proposition 8. X*:closed,spin 4-mfd*
$b^+(X) \geq 1$, $H_1(X,\mathbb{Z})$*:torsion free*
σ:Xのスピン構造, $\mathcal{O}$:$\mathcal{H}^1_g(X) \oplus \mathcal{H}^+_g(X)$の向き
$k \geq 1$*:odd*, $\dim M_k = 2d + r$, $r = 1,2,3$
$[\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d] \in H_2(X,\mathbb{Z})$
$[\Sigma] \in H_2(X,\mathbb{Z})$
$2[\Sigma] = [\Sigma_1] + \cdots + [\Sigma_d] \in H_2(X,\mathbb{Z})$
$\Phi : \mathcal{L}_\Sigma^{\otimes 2} \cong \mathcal{L}_{\Sigma_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_{\Sigma_d}$
$V = M_k \cap V_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap V_{\Sigma_d}$
$\mathcal{O}$, σ,Φ $\Rightarrow$
Vのスピン構造$\sigma_V = \sigma_V(\sigma, \mathcal{O}, \Phi)$が定まる。

Proof. $\mathcal{O}, \sigma \Rightarrow M_k$のスピン構造
$\Phi \Rightarrow \mathcal{L}_{\Sigma_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{\Sigma_d}$ のスピン構造
$\mathcal{N} \to V$:$V \subset M_k$の法束
$d(s_{\Sigma_1} \oplus \cdots \oplus s_{\Sigma_d}) : \mathcal{N} \cong \mathcal{L}_{\Sigma_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{\Sigma_d}|_{M_k}$
$\Rightarrow \mathcal{N}$にスピン構造
$TV \oplus \mathcal{N} = TM_k|_V$
$\Rightarrow V$にスピン構造 $\square$

Theorem 9. 上の仮定に$b^+(X) > 1$をつけ加える。

$\iota : V \hookrightarrow \mathcal{B}^*$:*inclusion*
$[V, \sigma_V, \iota] \in \Omega_r^{spin}(\mathcal{B}^*)$ はg, s'_{Σ_i}のとり方に依存しない。
したがって、
$\mathfrak{H}_d(X) =$
$\left\{ ([\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d]; \Phi) \middle| \begin{array}{c} [\Sigma_1] + \cdots + [\Sigma_d] = 2[\Sigma] \\ \Phi : \mathcal{L}_{\Sigma}^{\otimes 2} \cong \mathcal{L}_{\Sigma_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_{\Sigma_d} \end{array} \right\}$
とおくと、

$$\gamma_{k,r}^s(\sigma, \mathcal{O}) : \mathfrak{H}_d(X) \to \Omega_r^{spin}(\mathcal{B}_k^*)$$

は、4次元多様体Xの不変量

outline of proof

• g_-, g_+:Xのリーマン計量
$\tilde{g}_t$ $(-1 \le t \le 1)$: Xのリーマン計量の道
$\tilde{g}_{\pm 1} = g_\pm$
$\mathcal{M}_k = \cup_{-1 \le t \le 1} M_k(\tilde{g}(t))$
($b^+(X) > 1$ より smooth)

• $s'_{\Sigma_i,-}, s'_{\Sigma_i,+}$: $\mathcal{L}'_{\Sigma_i} \to \mathcal{B}^*_{\Sigma_i}$ の切断
$\tilde{s}'_{\Sigma_i,t}$ $(-1 \le t \le 1)$: $\mathcal{L}'_{\Sigma_i}$ の切断の道
$\tilde{s}'_{\Sigma_i,\pm 1} = s'_{\Sigma_i,\pm}$
$\tilde{s}_{\Sigma_i,t} = r^*_{\Sigma_i} \tilde{s}'_{\Sigma_i,t}$
$\mathcal{V}_{\Sigma_i} = \cup_{-1 \le t \le 1} \tilde{s}^{-1}_{\Sigma_i,t}(0)$
$\mathcal{V} = \mathcal{M}_k \cap \mathcal{V}_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap \mathcal{V}_{\Sigma_d}$

• V と同様に$\mathcal{V}$にもスピン構造が定まる。

• $\mathcal{V}$がコンパクトならば、$\partial \mathcal{V} = V_- \coprod V_+$ でV_-とV_+がスピン同境となる。

• $\dim V = r$が1または2のとき、$\mathcal{V}$はコンパクトであることは、Vと同様に “dimension couting” から分かる.

$r=3$のときを考える

Lemma 10. $r=\dim V=3$のとき, 必要ならば$\tilde{s}_{\Sigma_i,t}$を摂動して、$\mathcal{V}$をコンパクトにできる。

proof

• $\{[A_\alpha]\}_\alpha \subset \mathcal{V}$ 任意の点列とする。
"dimension counting" より、
$[A_\alpha] \to [A_\infty; x_1] \in \bar{\mathcal{M}}_k$
$[A_\infty] \in \mathcal{M}_{k-1} \cap \mathcal{V}_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap \mathcal{V}_{\Sigma_{d-2}}$,
$x_1 \in \Sigma_{d-1} \cap \Sigma_d$
のみ起こり得ることが分かる。

• U:x_1のXにおける小さい近傍
$\bar{\mathcal{U}}$:$[A_\infty; x_1]$の$\bar{\mathcal{M}}_k \cap \bar{\mathcal{V}}_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap \bar{\mathcal{V}}_{\Sigma_{d-2}}$ における近傍
$\cong U \times [0,\epsilon) \times SO(3)/(x,0,g) \sim (x,0,h)$
$\cong U \times \mathrm{Cone}(SO(3))$

• $[A_\infty; x_1]$の$\bar{\mathcal{V}}$における近傍$\cong \bar{\mathcal{U}} \cap \bar{\mathcal{V}}_{d-1} \cap \bar{\mathcal{V}}_d$

Proposition 11. $i = d-1, d$に対して
$\mathcal{L}_{\Sigma_i}|_{U\times(0,\epsilon)\times SO(3)} \cong \underline{\mathbb{C}}$

Propositionより、$\tilde{s}'_{\Sigma_i,t}$ $(i = d-1, d)$を少し動かして、$\bar{\mathcal{U}}$において、$\tilde{s}_{\Sigma_i,t}$が零点を持たないようにできる
$\Rightarrow$ $\mathcal{V}$をコンパクトにできる

例

$X = K3 \# K3$, Xの適当なリーマン計量g, $k=9$
適当な$[\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_{24}] \in H_2(X, \mathbb{Z})$
$[\Sigma_1] + \cdots + [\Sigma_{24}] \equiv 0 \mod 2$
$V = M_9 \cap V_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap V_{24} = \coprod^s \mathbb{RP}^3$

$$\gamma_{9,3}^{spin}([\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_{24}]; \Phi) = ? \in \Omega_3^{spin}(\mathcal{B}_9^*)$$