分割数の漸近挙動の
スペクトル論的類似

楯 辰哉

(名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

研究集会「量子化の幾何学」

於 早稲田大学理工学部

2005 年 9 月 7 日

- 目次

§1. 分割数の漸近挙動

§2. Meinardus の定理

§3. ボーズ粒子の状態数 (量子統計)

§4. 主定理

§5. 証明の方針

§6. 今後の課題

§1. 分割数の漸近挙動

● 分割数とは

E : 自然数

$p(E) :=$

自然数 E を幾つかの自然数の和で表す方法の数.

自然数の列は重複を許す.

列の長さは制限しない. 自然数の列の順は考慮しない.

式で書くと,

$p(E) =$

$$\# \left\{ (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots); E = \sum_{j \geq 1} \mu_j, 0 \leq \mu_j \in \mathbb{Z} \right\}$$

- 古典的解析数論の問題:

$p(E)$ は E が大きいとき, どのくらい大きくなるか.

- 知られている結果:

- Hardy-Ramanujan (1918)

分割数 $p(E)$ の最初の漸近公式:

$$p(E) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}E} \exp \left[\pi \left(\frac{2E}{3} \right)^{1/2} \right],$$

特に,

$$\lim_{E \rightarrow \infty} E^{-1/2} \log p(E) = \pi(2/3)^{1/2}.$$

- Rademacher (1937)

分割数 $p(E)$ の収束級数による表示:

$$p(E) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(E) \sqrt{k} \frac{d}{dE} \left(\frac{\sinh \left[\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3} \left(E - \frac{1}{24} \right)} \right]}{\sqrt{E - \frac{1}{24}}} \right),$$

ただしここで,

$$A_k(E) = \sum_{0 \leq h < k, (h, k) = 1} e^{\pi i \mathfrak{s}(h, k) - 2\pi i E h / k},$$

$$\mathfrak{s}(h, k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k} \left(\frac{hr}{k} - \left[\frac{hr}{k} \right] - \frac{1}{2} \right).$$

- 注意: $\mathfrak{s}(h, k)$ は Dedekind の和と呼ばれている.

● その他の結果

- Szekeres (1951 – 1953), Roth-Szekeres (1954)
長さに制限のある分割の個数の漸近挙動.
- Meinardus (1954) 分割数の母関数を一般化,
saddle point method を用いた解析
- Richmond (1972 – 1975) 分割数の一般化の漸
近挙動, 抽象的な数列による分割の個数の平均の漸
近挙動.
- 注意: Richmond の仕事は我々の問題と似ている
が, 数列が作用素の固有値に限らず, 一般の数列にして
いるため, 結果に現れる条件が複雑であり, 結果も煩雑.
- 注意: Szekeres の仕事の類似がスペクトル論でも
議論されるべきである.

§2. Meinardus の定理

● 分割数の母関数 (Euler)

任意の $\tau \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\tau) > 0$ に対して,

$$\sum_{E \geq 0} p(E) e^{-E\tau} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-n\tau})^{-1}$$

がなりたつ.

● 母関数の一般化 (Meinardus)

非負の実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\tau \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\tau) > 0$ に対して

$$G(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-n\tau})^{-a_n}$$

とおく.

●注意: これは, 例えば $\{a_n\}$ が有界であれば収束する.

- 定理の主張に必要な条件:

非負の実数列 $\{a_n\}$ に対して, 次の条件を仮定する.

- 条件 (0)

無限積

$$G(\tau) = \prod_{n \geq 1} (1 - e^{-n\tau})^{-a_n}$$

は $\operatorname{Re}(\tau) > 0$ で局所一様に絶対収束する.

この条件の下で, 無限積 $G(\tau)$ は $\operatorname{Re}(\tau) > 0$ で (または $z = e^{-\tau}$ とおき, z について $|z| < 1$ で) 正則関数を定める.

- 分割数の一般化 (Meinardus)

無限積 $G(\tau)$ を $z = e^{-\tau}$ について原点で Taylor 展開したときの係数を $r(E)$ と書く.

$$G(\tau) = \sum_{E \geq 0} r(E) e^{-E\tau}, \quad \operatorname{Re}(\tau) > 0.$$

- 注意: $a_n = 1$ のときが $r(E) = p(E)$ となる.
- 注意: 後で見るように, 我々の設定では「一般に」Taylor 展開の係数では, 物理的な意味はない.

Dirichlet 級数

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}$$

について、次の条件を考える.

- 条件 (1)

ある正の数 $\alpha > 0$ が存在して、 $L(s)$ は $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ で収束する.

この条件の下で $L(s)$ は $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ で正則となることが知られている.

- 条件 (2)

$0 < C_0 < 1$ である、ある定数 C_0 が存在して $L(s)$ は $\operatorname{Re}(s) \geq -C_0$ に有理型に解析接続される.

- 条件 (3)

$L(s)$ は $\operatorname{Re}(s) \geq -C_0$ 上で $s = \alpha$ のみに極を持ち, これは 1 位の極.

- 条件 (4)

ある $R > 0$ が存在して $\operatorname{Re}(s) \geq C_0$ 上で ($\operatorname{Re}(s)$ について局所一様に) 次が成り立つ:

$$|L(s)| = O(|\operatorname{Im}(s)|^R).$$

この条件は, Gamma 関数との積が, 虚軸と平行な直線上で可積分であるための条件である.

最後に次のような条件を考える.

● 条件 (H)

$\operatorname{Re}(\tau) > 0$ なる $\tau \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\theta(\tau) := \sum_{n \geq 1} a_n e^{-n\tau}$$

とおく. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $C = C_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の

$$\tau = x + iy \in \mathbb{C}, \quad x \leq |y| \leq \pi$$

に対して次が成り立つ.

$$\operatorname{Re}(\theta(x + iy)) - \theta(x) \leq -Cx^{-\varepsilon}.$$

● 注意: 条件 (0) の下で, $\theta(\tau)$ は $\operatorname{Re}(\tau) > 0$ で正則である.

● 注意: $\{a_n\}$ が正の実数列であるから, $|\theta(x + iy)| \leq \theta(x)$ であり,

$$\operatorname{Re}(\theta(x + iy)) - \theta(x) \leq 0$$

であることは, 明らかである.

このとき Meinardus の定理は次のように述べられる.

定理 正の実数列 $\{a_n\}$ に対して条件 (0)–(4) と条件 (H) が成り立つと仮定する. このとき, 次が成り立つ.

$$r(E) = CE^\kappa \exp(\varphi(E))(1 + O(E^{-\kappa_1})),$$

ただし, $\varphi(E)$, C , κ , κ_1 , A は次で与えられる.

$$\varphi(E) = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) E^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1))^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

$$C = \frac{e^{L'(0)}}{\sqrt{2\pi(\alpha+1)}} [A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)]^{\frac{1-2L(0)}{2(\alpha+1)}},$$

$$\kappa = \frac{L(0)-1-\alpha/2}{\alpha+1},$$

$$\kappa_1 = \frac{\alpha}{\alpha+1} \min \left\{ \frac{C_0}{\alpha} - \frac{\delta}{4}, \frac{1}{2} - \delta \right\},$$

$$0 < \delta < 1/2$$

$$A = \operatorname{Res}_{s=\alpha} L(s) > 0$$

ここで, Γ , ζ はそれぞれガンマ関数と Riemann のゼータ関数である.

● Meinardus の定理に関する注意

(1) $a_n = 1$ とすると $r(E) = p(E)$ であった. これについて, $L(s) = \zeta(s)$, $\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log(2\pi)$, $\zeta(0) = -1/2$ 等により, Hardy-Ramanujan の漸近公式が得られる.

(2) 一般化された分割数 $r(E)$ は次のような漸化式を満たす:

$$r(E) = \frac{1}{E} \sum_{j=1}^E r(E-j) D_j, \quad D_j = \sum_{d|j} da_d.$$

(3) 証明は saddle point method を用いる. その際, 母関数の対数 $\log G(\tau)$ を近似する必要がある. Richmond 等は, この近似を行わずに, 煩雑な結果となっている. しかし $\log G(\tau)$ を分かり易い形に近似する分, エラーの処理が複雑になる. 条件 (H) は, エラーの処理に用いられる.

(3) については, 後で再び述べる.

§3. ボーズ粒子の状態数

- 分割数の物理的意味:

分割数 $p(E) \sim$ ボーズ粒子からなる (相互作用の無い) 多粒子系のエネルギー E での状態数.

- 具体的な定式化

$P : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) : \text{コンパクト多様体 } M \text{ 上の 1 階正值楕円型擬微分作用素}$

$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \uparrow +\infty : P \text{ の固有値の列}$

多様体 M の上の, Hamilton 作用素を P とする量子論的粒子が, N 個存在する状況を考える.

配位空間 $\sim M^N := M \times \dots \times M$ (ボーズ粒子の場合, 正確には $(M \times \dots \times M) / \mathcal{S}_N$ (?))

$P^N : C^\infty(M^N) \rightarrow C^\infty(M^N)$ を次で定義する:

$$P^N = \sum_{i=1}^N (I \otimes \cdots \otimes P \otimes I).$$

$\mathcal{S}_N \curvearrowright L^2(M^N)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} (\sigma F)(x_1, \dots, x_N) &:= F(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}), \\ F &\in L^2(M^N), (x_1, \dots, x_N) \in M^N, \sigma \in \mathcal{S}_N. \end{aligned}$$

N 個の粒子が

ボーズ粒子 $\rightarrow$ Hamilton 作用素 は P_S^N

フェルミ粒子 $\rightarrow$ Hamilton 作用素 は P_A^N

ただし, P_S^N, P_A^N は, P^N のそれぞれ, 不変部分空間, 反不変部分空間への制限.

つまり,

$$\pi_S^N, \pi_A^N : L^2(M_N) \rightarrow L^2(M_N),$$

$$\pi_S^N F = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \sigma F,$$

$$\pi_A^N F = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \sigma F$$

と定義すると,

$$P_S^N = P^N|_{\text{Im}\pi_S^N}, \quad P_A^N = P^N|_{\text{Im}\pi_A^N}$$

- N 個のボーズ粒子の量子状態空間 $\sim \mathcal{H}_S^N = \text{Im}\pi_S^N$
- Hamilton 作用素 $\sim P_S^N$

この作用素のスペクトルが, N 個のボーズ粒子の系の取りうるエネルギー.

● 容易に分かること

作用素 A のスペクトルを $\text{Spec}(A)$ と表す. このとき, 今の設定では, 集合として

$$\text{Spec}(P^N) = \text{Spec}(P_S^N).$$

→ 重複度が問題.

補題 (既知) 任意の $E \in \text{Spec}(P_S^N)$ に対して

$$\Omega(N, E) := E \text{ の重複度}$$

とおくと, 次が成り立つ.

$$\Omega(N, E) = \# \left\{ (n_k)_{k=1}^{\infty}; 0 \leq n_k \in \mathbb{Z}, E = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \lambda_k, N = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \right\}.$$

上に現れた集合は「占有数の集合」と呼ばれてる.

- 問題:

$\Omega(N, E)$ の, E/N が (漸近的に) 一定の状況で, $N \rightarrow \infty$ かつ $E \rightarrow \infty$ の下での漸近挙動を調べよ.

→ 難しい. 現時点では打つ手なし.

- 平均化した問題:

全ての $N \geq 1$ を走らせたときの「平均」

$$\Omega(E) := \sum_{N \geq 1} \Omega(N, E)$$

の漸近挙動を調べよ.

→ この発表での問題.

($\Omega(E)$ をボーズ粒子の状態数と呼ぶことにする.)

- 注意: $\Omega(E)$ は次の離散集合 $\Gamma(P)$ 上の関数:

$$\Gamma(P) := \bigcup_{N \geq 1} \text{Spec}(P_S^N) \ni E \mapsto \Omega(E) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

● 母関数

補題 (既知) ボーズ粒子の状態数 $\Omega(E)$ に対して, その母関数

$$G(\tau) = \sum_{E \in \Gamma(P)} \Omega(E) e^{-E\tau}$$

は $\operatorname{Re}(\tau) > 0$ で局所一様に絶対収束し, 正則関数を定める. また, 次が成り立つ.

$$G(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_n \tau})^{-1}.$$

$\Omega(E)$ は作用素 P の固有値が $\lambda_n = n$, 重複度が 1 の時には, 分割数 $p(E)$ と一致している.

- 注意: 次の関数は, ボーズ粒子に対するグランド分配関数と呼ばれている.

$$\Xi(\tau, \mu) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{\mu - \lambda_n \tau})^{-1},$$

ここで μ は「化学ポテンシャル」を表す. これは, $\Omega(E)$ の定義において $\Omega(N, E)$ 自身の N についての母関数を考えると得られる:

$$\Xi(\tau, \mu) = \sum_{E \in \Gamma(P)} \Omega(E, \mu) e^{-E\tau},$$

$$\Omega(E, \mu) = \sum_{N \geq 1} \Omega(N, E) e^{N\mu}.$$

我々の問題においては $\mu = 0$ とする.

- 注意: 我々の問題では, 作用素 P は正值, つまり固有値が全て正としている. これは分配関数 $G(\tau)$ が特異性を持たない仮定である. また, 上記の化学ポテンシャルを 0 としているが, Bose-Einstein 凝縮などの事象の解析では, 化学ポテンシャルは重要な役割を果たす. Bose-Einstein 凝縮とは, 0-エネルギーに粒子が密集する事象を表す. 従ってこの事象の解析を問題とするなら, 我々の設定で作用素 P は非負値である必要がある. この状況では化学ポテンシャルを 0 とはできない.

→ 今後の課題

§4. 主結果

● 記号の準備

以後、多様体の次元を $n = \dim M$ と表す.

(1) 楕円型作用素 P のスペクトルゼータ関数

$$Z_P(s) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{-s}$$

は $\operatorname{Re}(s) > n$ で絶対収束し、複素平面全体に有理型に解析接続され、

$$s = n, n - 1, \dots, 1, -1, \dots$$

にのみ、1位の極を持つことが知られている. ($s = 0$ で正則である.)

● 注意: スペクトルゼータ関数は Meinardus の定理の仮定で条件 (H) を除いて、正の極の個数以外の条件、例えば虚軸に沿って多項式増大度を持つなどは満たしている、

上の事実を鑑み,

$$K_j := A_j \zeta(n-j+1) \Gamma(n-j), \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

とおく. ただし A_j は $s = n - j$ (右反平面の極) における, $Z_P(s)$ の留数である:

$$A_j = \operatorname{Res}_{s=n-j} Z_P(s), \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

● 注意: 次に述べるように $A_0 > 0$, 従って $K_0 > 0$ である. 一般の K_j は実数ではあるが非正である可能性もある.

(2) 1 階楕円型の擬微分作用素 P の主表象 $0 < p \in C^\infty(T^*M \setminus 0)$ に対して

$$\Sigma = \{p(x, \xi) = 1\} \subset T^*M \setminus 0$$

とおく. 次が知られている:

$$A_0 = (2\pi)^{-n} \operatorname{vol}(\Sigma)$$

主表象 p の生成する Hamilton 流 (の Σ への制限) を φ_t と書く.

(3) $E > 0$ に対して, 次のような関数を考える:

$$f_E(x) = Ex + \sum_{j=0}^{n-1} K_j x^{-(n-j)}, \quad x > 0.$$

このとき, (本質的には代数) 方程式

$$\frac{df_E}{dx}(x) = 0$$

の解を $x_E > 0$ と書く. このような正の数 x_E はただ一つであることが分かる.

さらに, 簡単な計算によって, 次が分かる.

$$x_E = \left(\frac{nK_0}{E} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left(1 + O\left(E^{-\frac{1}{n+1}}\right) \right)$$

主定理

作用素 P の固有値が自然数であるとする:

$$\text{Spec}(P) \subset \mathbb{Z}.$$

更に, Hamilton 流 $\varphi_t : \Sigma \rightarrow \Sigma$ は周期的であり, 最小周期 2π を持つとする. この時, 次が成り立つ.

$$\Omega(E) = CE^\kappa \exp[f_E(x_E)](1 + O(E^{-\kappa_1})),$$

ただし, 定数 C, κ, κ_1 は次で与えられる:

$$C = \frac{1}{(\det P)\sqrt{2\pi(n+1)}} (nK_0)^{\frac{1-2Z_P(0)}{2(n+1)}},$$

$$\kappa = \frac{Z_P(0) - 1 - n/2}{n+1},$$

$$\kappa_1 = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2} - \delta \right),$$

$$0 < \delta < \min\{1/2, 4/n\}.$$

- 主定理において

$$x_E = \left(\frac{nK_0}{E} \right)^{\frac{1}{(n+1)}} (1 + O(E^{-\frac{1}{n+1}})),$$

$$K_0 = \frac{\text{vol}(\Sigma)}{(2\pi)^n} \zeta(n+1) \Gamma(n)$$

を用いると、次を得る.

系 主定理と同様の仮定の下で、次が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \lim_{E \rightarrow \infty} E^{-\frac{n}{n+1}} \log \Omega(E) \\ &= (n+1) \left(\frac{\text{vol}(\Sigma)}{(2\pi)^n} \zeta(n+1) \Gamma(n) \right)^{\frac{1}{(n+1)}}. \end{aligned}$$

- 二次元 ($n=2$) の場合には, 主定理の主張における x_E は, より分かりやすい数に置き換える事が出来る.

系 $\dim M = n = 2$ の場合, 主定理と同様の仮定の下に, 次が成り立つ.

$$\Omega(E) = CE^\kappa \exp \left[\frac{3K_0}{y_E^2} + \frac{K_1}{y_E} - \frac{K_1^2}{12K_0} \right]$$

$$\times (1 + O(E^{-\frac{1}{3} + \frac{2\delta}{3}})),$$

$$0 < \delta < 1/2,$$

ただし, C, y_E, κ は次で与えられる:

$$C = \frac{1}{(\det P)\sqrt{6\pi}} \left(\frac{\zeta(3)\text{Vol}(\Sigma)}{2\pi^2} \right)^{(1-2Z_P(0))/6},$$

$$y_E = (2K_0/E)^{1/3} = \left(\frac{\zeta(3)\text{vol}(\Sigma)}{2\pi^2 E} \right)^{1/3},$$

$$\kappa = (Z_P(0) - 2)/3.$$

- **注意:** 定理の仮定「 $\text{Spec}(P) \subset \mathbb{Z}$ 」の下で, 対応する古典力学 (Hamilton 流) $\varphi_t : \Sigma \rightarrow \Sigma$ は周期 2π を持つ周期系であることは (Egorov の定理より) 分かる. しかし, その周期が「最小」であることが, 仮定である.

- **例** $M = S^2$ として, 作用素 P として, 次の物を取る.

$$P = \sqrt{\Delta_{\text{can}} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}.$$

ただし Δ_{can} は S^2 上の標準計量に対するラプラス作用素. このとき, 固有値は $\ell = 1, 2, \dots$, 重複度は $2\ell + 1$ となる. 更に定数 K_0, K_1 は次で与えられる:

$$K_0 = \frac{\zeta(3)\text{vol}(S_1^*M)}{4\pi^2}, \quad K_1 = -\frac{\text{vol}(S_1^*M)}{48}.$$

§5. 証明の方針

● 証明の方針は Meinardus の定理のそれと、ほぼ、同様であるが、若干の考察が必要.

→ 難点は、次の二点.

(1) Dirichlet 級数 “ $L(s)$ ” に対応するスペクトルゼータ関数 $Z_P(s)$ は、正の極を二つ以上持つ可能性がある.

(2) 条件 (H) が定理の仮定のもとで成り立つかどうか.

特に定理の仮定、すなわち Hamilton 流の周期性は、条件 (H) の成立を保証する物である.

- 仮定「 $\text{Spec}(P) \subset \mathbb{Z}$ 」より, 特に $\Gamma(P) \subset \mathbb{Z}$. よって, この場合, ボーズ粒子の状態数 $\Omega(E)$ は次のような積分表示を持つ.

$$\Omega(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq \pi} e^{E(x+iy)} G(x+iy) dy,$$

ただし, $G(x+iy)$ は (化学ポテンシャルが 0 の) 分配関数, $x > 0$ は任意である.

- この積分を, saddle point method を用いて解析する. そのとき, 相関数に現れる $\log G(x+iy)$ を近似する必要がある. これについて, 次が成り立つ:

補題 $\tau = x + iy$, $x > 0$ に対して, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \log G(x + iy) = & \sum_{j=0}^{n-1} K_j \tau^{-(n-j)} \\ & - Z_P(0) \log \tau + Z'_P(0) + J(\tau), \end{aligned}$$

ただし, $J(\tau)$ は次で与えられる:

$$\begin{aligned} J(\tau) \\ = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_0 - i\infty}^{-C_0 + i\infty} Z_P(s) \zeta(s+1) \Gamma(s) \tau^{-s} ds. \end{aligned}$$

- 注意: 上の補題は, Meinardus 以後, 物理 (特に場の量子論へのゼータ正規化の応用) で用いられている. Meinardus の定理においては, 和の部分の項が $j = 0$ の場合のみ現れる.

- 上の補題を用いて, 相関数

$$E(x + iy) + \log G(x + iy)$$

を次で近似する:

$$E(x + iy) + \sum_{j=0}^{n-1} K_j \tau^{-(n-j)} = f_E(x + iy)$$

これに saddle point method を用いるために,
 $\operatorname{Re}(f_E(x + iy))$ が極小になる $x > 0$ を選びたいが,
 $\operatorname{Re}(f_E(x + iy))$ を更に $f(x)$ で近似して, x を選ぶ.
つまり

$$x = x_E, \quad \frac{df_E}{dx}(x_E) = 0$$

となる点 x_E を用いる.

→ 主定理の指数に $f_E(x_E)$ が現れる理由.

→ $\operatorname{Re}(f_E(x + iy))$ と $f_E(x)$ の差を評価する必要がある. (技術的には, Meinardus の定理の証明より, 難しい点.)

- 積分を二つに分ける:

$$\Omega(E) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|y| \leq x_E^\beta} + \int_{|y| \geq x_E^\beta} \right)$$

ただしここで $(n+3)/3 < \beta < (n+2)/2$ と取る.
($\beta = 1$ としたのでは, 第一項が leading term にならない.)

第二項がエラーになるべき項. この項の評価に条件 (H) が必要になる.

- 条件 (H) については, 次の補題が成り立つ.

補題 Hamilton 流が 2π を最小周期とする周期系であるとする. このとき $\operatorname{Re}(\tau) > 0$ に対して $\theta(\tau) = \operatorname{Tr}(e^{-\tau P})$ とおく. $\tau = x + iy$, $x > 0$, $x \geq |y| \leq \pi$ のとき, ある定数 $C > 0$, $\varepsilon > 0$ が存在して, y について, 一様に, 次が成り立つ:

$$\operatorname{Re}(\theta(x + iy)) - \theta(x) \leq -Cx^{-\varepsilon}.$$

● **Hamilton 流が周期的であることが必要な理由は上の補題にある.**

上の補題の証明は, $|y|$ が十分小さい所では, Hörmander による sharp Weyl asymptotics と partial summation formula を用いる.

→ $\text{Tr}(e^{-\tau P})$ の $\tau = 0$ の近傍での特異性を用いている.

$|y|$ が下から有界, かつ $x \leq |y|$ のところでは, 次の定理を用いる:

定理 (Chazarain, Duistermaat-Guillemin)

$\mu = \text{Tr}(e^{iyP}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ とおく. このとき, 次が成り立つ:

$\text{sing. supp}(\mu)$

$\subset \{\text{Hamilton 流 } \varphi_t \text{ の周期軌道の周期}\}.$

→ $[-\pi, \pi]$ に周期軌道の周期がある場合, e^{iyP} の跡公式などの, 超関数 μ の特異性の解析が必要.

§6. 今後の課題

(1) 化学ポテンシャルを入れた場合.

具体的には, Hamilton 作用素 P がゼロ固有値を持つ場合の,

$$\Omega(E, \mu) = \sum_{N \geq 1} \Omega(N, E) e^{N\mu}$$

の漸近挙動. 特に, Bose-Einstein 凝縮とは, どのような物か解析すること.

(2) 主定理の仮定「 $\text{Spec}(P) \subset \mathbb{Z}$ 」をおとす.

Hamilton 流が周期的である, という仮定を (小さな周期が存在するぐらいは, 許されうるが) おとすことは, 現在の所, 難しいと思われる. 実際, 一般には, 次の公式が得られる:

補題 (Hamilton 流や $\text{Spec}(P)$ の仮定抜きに) 任意の $x > 0$ に対して次が成り立つ:

$$\left| \Omega(E) - \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{E(x+iy)} G(x+iy) dy \right| \leq \frac{G(x)e^{Ex}}{T} \left(\min_{E' \in \Gamma(P), E' \neq E} |E - E'| \right)^{-1}$$

→ この補題を用いるには、右辺の「エネルギーレベルの差」の評価、そして積分の $T \rightarrow \infty$, $E \rightarrow \infty$ としたときの漸近挙動が必要.

→ しかし、Hamilton 流が周期的、特に Zoll surface の場合には、上の補題が有効である可能性がある.

(3) Meinardus の定理における数列 $\{a_n\}$ をグラ
ンド分配関数に挿入.

• どのような $\{a_n\}$ を取るかについては, 以下のような候補がある.

A を非負値の 0 階の擬微分作用素として, φ_n を Hamilton 作用素 P の n 番目の固有値 λ_n に対応する正規化された固有関数とする.

$$a_n = \langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle_{L^2(M)}$$

とおくと $\{a_n\}$ は非負の有界数列で,

$$G_A(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_n \tau})^{-a_n}$$

は $\operatorname{Re}(\tau)$ で収束する.

これに対しては, Hamilton 作用素 P のスペクトルゼータ関数 $Z_P(s)$ の代わりにの役割をはたすものは,

$$Z_P(A; s) := \text{Tr}(AP^{-s}) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\lambda_n^s}$$

であることが, 容易に分かる.

→ 数列 a_n は整数ではなく, $\Omega(E)$ に対応する量の定義自体が問題.

→ 周期系の場合, $\Omega(E)$ に対応する量を積分で定義するとするなら, これにはどのような意味があるか?

(4) 分配関数の近似式を用いた, 作用素行列式の性質

分配関数 $G(\tau)$ に対する公式

$$\log G(x + iy) = \sum_{j=0}^{n-1} K_j \tau^{-(n-j)} - Z_P(0) \log \tau + Z'_P(0) + J(\tau),$$

$$J(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_0 - i\infty}^{-C_0 + i\infty} Z_P(s) \zeta(s+1) \Gamma(s) \tau^{-s} ds.$$

そのものが, 場の量子論などで応用されている.

→この公式を用いて，作用素行列式

$$\log \det P = -Z'_P(0)$$

の定量的性質を調べる．例えば Sarnak による，コンパクトリーマン面上のラプラス作用素の行列式の，セルバーグゼータを用いた表示と，この式との関連は？

また，Zoll surface のラプラス作用素の行列式と標準計量のラプラス作用素のそれとの定量的な比較などに応用がないか？

● 参考文献

- [AA] A. A. Actor, *Infinite products, partition functions, and the Meinardus theorem*, J. Math. Phys. **35** (1994) 5749–5764.
- [An] G. E. Andrews, “The Theory of Partitions”, Encyclopedia of Math. and its Appl., Addison-Wesley, 1976.
- [DG] J. J. Duistermaat and V. Guillemin, *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics*, Invent. Math. **29** (1975), 39–79.
- [EORBZ] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Byt-senko, S. Zerbini, “Zeta Regularization Techniques with Applications”, World Scientific, 1994.
- [Gi] P. B. Gilkey, “Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem” (second ed.), CRC press, 1994.
- [Gu1] V. Guillemin, *Band Asymptotics in Two Dimensions*, Adv. in Math. **42** (1981), 248–282.
- [Gu2] V. Guillemin, *A new proof of Weyl's formula on the asymptotic distribution of eigenfunctions*, Adv. in Math. **55** (1985), 131–160.
- [HR] G. H. Hardy and S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc (2) **17** (1918), 75–115.

[Kh] A. Y. Khinchin, “Mathematical Foundation of Quantum Statistics”, Dover, 1998 (First ed. 1960)

[Me] G. Meinardus, *Asymptotische Aussagen über Partitionen*, Math. Z. **59** (1954), 388–398.

[Ri] B. Richmond, *A general asymptotic result for partitions*, Canadian J. Math. **27** (1975) 1083–1091.

[W] A. Weinstein, *Fourier Integral Operators, Quantization, and the Spectra of Riemannian Manifolds*, Colloques Intern. C.N.R.S., No. 237 (1976), 289–298.

[UZ] A. Uribe, S. Zelditch, *Spectral Statistics on Zoll Surface*, Commun. Math. Phys. **154** (1993), 313–346.

[F] 藤田重次 (原啓明, 小幡常啓, 岡村好庸, 鈴木彰 共訳), “量子統計物理学 (復刊)”, 裳華房, 1990.