

Zeta 正則化の無限次元微積への応用

浅田 明 Freelance, (元信州大学)

E-mail asada-a@poporo.ne.jp

概要

ζ -正則化を用いて 無限次元での初等関数や微積の計算に現われる発散の問題を組織的に処理する方法について解説する。そのため まず微分作用素の spectre ζ -関数 η -関数 Ray-Singer 行列式を説明し 次いで初等関数や行列式の正則化を述べる。その後 無限次元積分の正則化を定義し その応用として無限次元球面の正則化体積要素の計算や 無限多変数の周期関数の Fourier 展開を説明する。最後に Fourier 展開と関連して無限次元での Laplacian の正則化とその周期的境界条件での固有値・固有関数を求める。

1 始めに

無限次元では簡単な微積の計算でも 発散の問題が起きる。例えば H を Hilbert 空間 としたとき H の完備正規直交系 $e_1, e_2, \dots$ を固定し それによる H の座標を $x = (x_1, x_2, \dots); x = \sum_n x_n e_n$ とすれば

$$\Delta r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} \right),$$

は発散する。こうした計算を扱う為 H の (正值) Schatten 級作用素 G で その ζ -関数 $\zeta(G, s) = \text{tr} G^s$ で その $s = 0$ への解析接続が存在し 有限な値をとるものを固定し組 $\{H, G\}$ を考える。 G の固有値・固有ベクトルを $G e_n = \mu_n e_n, \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots > 0, \|e_n\| = 1$ としたとき 例えば

$$: \Delta : f = \Delta(s) f|_{s=0}, \quad \Delta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{2s} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

で Δ の $\{H, G\}$ での正則化 $: \Delta :$ を定義すれば

$$\begin{aligned} : \Delta : r(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{2s} \frac{\partial^2 r(x)}{\partial x_n^2} \right) |_{s=0} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{2s} \left(\frac{1}{r(x)} - \frac{x_n^2}{r(x)^3} \right) \right) |_{s=0} \\ &= \left(\frac{\zeta(G, 2s)}{r(x)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^{2s} x_n^2}{r(x)^3} \right) |_{s=0} = \frac{\nu - 1}{r(x)^2}, \quad \nu = \zeta(G, 0), \end{aligned}$$

と $: \Delta : r(x)$ が有限になる ([2],[7])。

$\{H, G\}$ の例としては X が compact Riemann 多様体で E がその上の vectro bundle、 D を E の切断に働く (正值) 非退化自己共役楕円形 (擬

微分作用素 D とするとき $H = L^2(X, E)$, G を D の Green 作用素としたものがある (これ以外に意味の有る例があるか不明)。この場合 D の固有値・固有関数を λ_n, e_n : $De_n = \lambda_n e_n$, G の固有値は $\mu_n = \lambda_n^{-1}$ となり

$$\zeta(D, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^s = \zeta(G, s),$$

である。Dirac 作用素のように正値でないものを含め D の ζ -関数 (と η -関数 $\eta(D, s) = \sum_n \text{sgn} \lambda_n |\lambda_n|^{-s}$ については次の事が知られている。

1. $\zeta(D, s)$ ($\eta(D, s)$) は全平面に有理型に解析接続され $s = \frac{d-n}{m}$, $n = 0, 1, \dots, d = \dim X$, $m = \text{ord} D$ に高々 1 位の極を持つ。
2. $\zeta(D, s)$ ($\eta(D, s)$) は $s = 0$ で正則である。
3. D が正のとき $\zeta(D, s)$ は 実軸上で実数値をとる。このとき 留数も実数である。

([1],[18],[19],[22],[28], なお [9],[10],[15],[20],[21] 参照)。

形式的に $\zeta(G, 0) \sim 1 + 1 + \dots (=G$ の固有値の数), $\zeta'(G, 0) \sim \log \mu_1 + \log \mu_2 + \dots (= \log \prod_n \mu_n)$ だから $\zeta(G, 0) = \nu$ は H の正則化次元であり、 $\exp(\zeta'(G, 0))$ は G の正則化行列式である。 G が D の Green 作用素のときは $\exp(-\zeta'(D, 0)) (= \exp(\zeta'(G, 0))^{-1})$ が D の正則化行列式 (Ray-Singer 行列式) になる。また $\zeta(G, s)$ の最初の極の位置を d そこでの $\zeta(G, s)$ の留数を c とおく。これらはともに正の実数である。形式和 $e^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^\alpha$ は $\alpha > d/2$ のとき H の元だが $\alpha \leq d/2$ では H では発散する。

$$e^{\zeta'(G, 0)} = e^{\zeta'(G, s)}|_{s=0} = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\mu_n^s}|_{s=0},$$

だから 数列 $x_1, x_2, \dots$ が Agmon 角 θ ; $\theta + \epsilon < \text{Arg} \theta_n < \theta + 2\pi - \epsilon$, を持つとき $x_1, x_2, \dots$ の正則化無限積: $\prod_n x_n :_{G, \theta}$ を

$$: \prod_{n=1}^{\infty} x_n :_{G, \theta} = \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{\mu_n^s}|_{s=0}, \quad \theta + \epsilon < \text{Arg} x_n < \theta + 2\pi - \epsilon,$$

で定義する。 $x = (x_1, x_2, \dots) \in H$ に対し: $\prod_n x_n :_{G, \theta}$ を対応させる関数は θ の決め方を含め H を 1-次元拡大した空間の稠密な部分空間で定義される。この場合 ν が整数なら この関数は 1 価 そうでなければ多価になる ([2])。

作用素 I_x ; $I_x e_n = x_n e_n$ を使えば

$$\begin{aligned} : \prod_{n=1}^{\infty} x_n :_{G, \theta} &= e^{G^s \log I_x}|_{s=0}, & \log I_x e_n &= \log \mu_n e_n, \\ & & \theta + \epsilon &< \text{Arg} \log \mu_n < \theta + 2\pi - \epsilon, \end{aligned}$$

となる。一般に作用素 T が 対数 $S = \log T$ を持つとき T の G に関する正則化行列式 $\det_G T$ を

$$\det_G T = e^{G^s S}|_{s=0},$$

で定義する。 $\log T$ は 存在しても一意ではないので、 $\det_G T$ も一意ではない。また 一般には $\det_G T$ と $\det_G(PTP^{-1})$ は等しくない。

正則化無限積、正則化行列式は 無限次元積分の正則化に現われる。

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^N &= \left\{ \sum_{n=1}^N x_n e_n | a_n \leq x_n \leq b_n \right\} \subset \mathbb{R}^N, \\ \mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n | a_n \leq x_n \leq b_n \right\} \subset H^{\sharp} = H \oplus \mathbb{R}e_{\infty},\end{aligned}$$

ただし $e_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{d/2} e_n$ であり $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots)$ は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{-d/2} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{-d/2} b_n = b,$$

を満たす とする。また $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots) \in \mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$, $\mathbf{c}^N = (c_{N+1}, c_{N+2}, \dots)$ とする。このとき $\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ で 全微分可能な f にたいし

$$\begin{aligned}& \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}} f(x) : d^{\infty} x :_G \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^N} f(x_1, \dots, x_N, \mathbf{c}^N) d(x_1^{\mu_1^s}) \cdots d(x_N^{\mu_N^s})|_{s=0},\end{aligned}$$

で その正則化積分を定義する。

正則化積分は scaling 変換 I_{ξ} ; $I_{\xi} e_n = \xi_n e_n$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ に対し

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}} f(x) : d^{\infty} x :_G = \int_{I_{\xi}(\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}})} |\det_G I_{\xi}|^{-1} f(I_{\xi}(x)) : d(\xi(x))^{\infty} :_G,$$

と変換する。これから $f(x) = \prod_n f_n(x_n)$ のとき

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}} f(x) : d^{\infty} x :_G =: \prod_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n :_G,$$

となる。 $a_n = -\infty$, $b_n = \infty$ も許されるから この式から Gauss 型経路積分の公式

$$\int e^{-\pi(x, Dx)} \mathcal{D}x = \frac{1}{\sqrt{\det D}},$$

が導かれる。ただし $\det D$ は D の Ray-Singer 行列式である ([3])。

極座標を使うと 正則化体積要素は

$$: d^\infty x :_G = r^{\nu-1} dr : d^\infty \omega :, \quad : d^\infty \omega := \prod_{n=1}^{\infty} \sin^{\nu-n-1} \theta_n d\theta_n,$$

となる。 G が楕円形作用素 D の Green 作用素のとき $\zeta(D + mI, 0)$ は m の多項式になるので、この形から有限次元積分の繰り込み での次元正則化は無次元積分での質量摂動と解釈できる可能性がある ([4],[5])。

本稿の概略は次のようである。最初にこうした話に必要な spectre ζ -関数と Ray-Singer 行列式を §2-§5 で説明した後、Schttten 級作用素と Hilbert 空間の組 $\{H, G\}$ と H の拡大 $H^\sharp$ および その上の初等関数の正則化、正則化行列式とその $\zeta(G, s)$ の高階導関数の特殊値による計算を §6-§10 で説明する。§11-§13 では正則化積分の定義と $H^\sharp$ の球面の正則化体積の計算、正則化 Cauchy 積分と $H^\sharp$ の周期関数の Fourier 展開を述べる。Fourier 展開と正則化 Laplacian の周期的境界条件による固有値問題の関係は §14 で説明する。最後の §15 では G が Dirac 作用素の二乗の Green 作用素の場合についての注意を述べる。

2 楕円形作用素の Zeta 関数

X を n -次元 (compact) Riemann 多様体 E を X 上の (Hermite または対称) vector bundle とする。 E の (C^∞ -級) 切断 $\Gamma(X, E)$ から $\Gamma(X, E)$ への写像 D が局所的に

$$D = \sum_{|\alpha| < m} A_\alpha(x) D^\alpha, \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

と書けるとき D を m 階の微分作用素 cotangent vector $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ に対し $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ と置いて 写像

$$\sigma(D) = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) \xi^\alpha : \pi^*(E) \rightarrow \pi^*(E),$$

π は cotangent bundel の projection, を D の (主) symbol という。0-section を除いて $\sigma(D)$ が同型写像のとき D を楕円形と呼ぶ。

D が supectre 分解され その固有値が Agmon 角 θ を持つとき D の ζ -関数 $\zeta(D, s) = \zeta_\theta(D, s)$ は γ を $\mathbb{C} \setminus \{z | \text{Arg} z = \theta\}$ の中の D の固有値を囲む路として

$$\zeta(D, s) = \text{tr} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^{-s} (\lambda I - D)^{-1} d\lambda \right),$$

で定義される ([23])。 D が自己共役であれば $\theta \neq 0, \pi$ と取れる。これから $\zeta_\theta(D, s)$ は

$$\zeta_+(D, s) = \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s} + e^{i\pi s} \sum_{\lambda_n < 0} |\lambda_n|^{-s}, \quad \pi < \theta < 2\pi, \quad (1)$$

$$\zeta_-(D, s) = \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s} + e^{-i\pi s} \sum_{\lambda_n < 0} |\lambda_n|^{-s}. \quad 0 < \theta < \pi, \quad (2)$$

と 2 種類ある。ただし D が正なら $\zeta(D, s) = \zeta_+(D, s)$ と一意に決まる ([1])。

D が正で 固有値・固有関数が λ_n, e_n ; $De_n = \lambda_n e_n, 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, とすれば

$$e^{-tD} f = \int_X K(t, x, \xi) f(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\lambda_n} e_n(x) (f, e_n),$$

で e^{-tD} が定義される。積分核 $K(t, x, \xi)$ は 次のような漸近展開を持つ事が知られている。

$$\mathrm{tr}(e^{-tD}) \sim \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\lambda_n} \sim \sum_{n \geq 0} a_n(D) t^{(n-d)/m}, \quad t \rightarrow +0. \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-\lambda t} dt = \lambda^{-s} \int_0^{\infty} (\lambda t)^{s-1} e^{-\lambda t} d(\lambda t) = \Gamma(s) \lambda^{-s} \text{ だから}$$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{tr}(e^{-tD}) t^{s-1} dt = \Gamma(s) \zeta(D, s), \quad (4)$$

である。(3) と (4) から

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \zeta(D, s) &= \int_1^{\infty} t^{s-1} \mathrm{tr}(e^{-tD}) dt + \sum_{0 \leq n \leq N} a_n(D) \int_0^1 t^{(n-d)/m+s-1} dt \\ &\quad + \int_0^1 \left(\mathrm{tr}(e^{-tD}) - \sum_{0 \leq n \leq N} a_n(D) t^{(n-d)/m} \right) t^{s-1} dt, \end{aligned}$$

となり この第 1 項は総ての s で、第 3 項は $\Re((N-d)/m+s) > 0$ で存在する。第 2 項は $s = (d-n)/m$ で高々 1 位の極を持つ 全平面で有利型な関数である。従って $\zeta(D, s)$ は 全平面に有利型に解析接続され 極はあるとしても $s = (d-n)/m, n = 0, 1, \dots$ で高々 1 位である ([18],[22],[28])。

なお (28) にある Seeley 展開の係数の訂正が (30) にある。

この証明は熱核の漸近展開を用いているが それを使わない Heisenberg の交換関係 $[\frac{d}{dx}, x] = 1$ に基づく以下のような証明もある。

D が q 階の微分作用素なら $qD = \sum_{i=1}^n [D, x_i] \frac{\partial}{\partial x_i} + R$, $\text{ord} R \leq q - 1$ だから

$$(q + n)D = \sum_{i=1}^n [D, x_i] \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n [\frac{\partial}{\partial x_i}, x_i] D + R, \quad \text{ord} R \leq q - 1,$$

である。この式は D の代わりに $D\Delta^{-z}$ を使っても成り立つから ($\text{tr}[A, B] = 0$ により)

$$\text{tr}(D\Delta^{-z}) = \frac{1}{q - 2z + n} \text{tr}(R_z),$$

となる。これを繰り返せば $\text{tr}(D\Delta^{-z})$ が全平面に有利型に解析接続できると極の位置・位数がわかる。一般の多様体でも 1 の分割と関数 $A_1, \dots, A_n$, vectro 場 $B_1, \dots, B_n$ で

$$\sum_{i=1}^n [B_i, A_i] = 1, \quad qD = \sum_{i=1}^n [D, A_i] B_i + R, \quad \text{ord} R \leq q = 1,$$

と成るものを書いて 同様に $\text{tr}(D\Delta^{-z})$ の解析接続が出来る ([19])。これは非可換留数等で用いられる指数定理でも使われる ([8],[19],[31])。

3 Eta 関数

Dirac 作用素のように D が正 負とも無限の固有値を持つとき D の η -関数 $\eta(D, s)$ を

$$\eta(D, s) = \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s} - \sum_{\lambda_n < 0} |\lambda_n|^{-s},$$

で定義する。

$$\begin{aligned} \text{tr}(De^{-tD^2}) &= \sum_n \lambda_n e^{-\lambda_n^2 t}, \\ \text{sgn} \lambda |\lambda|^{-s} &= \lambda (\lambda^2)^{-(s+1)/2} = \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^{-1} \int_0^\infty \lambda t^{(s-1)/2} e^{-t\lambda^2} dt, \end{aligned}$$

だから

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \eta(D, s) = \int_0^\infty t^{(s+1)/2} \text{tr}(De^{-tD^2}) dt, \quad (5)$$

である。

D が 1 階の時 $M \times \mathbb{R}^+$ の微分作用素 P を

$$P = \frac{\partial}{\partial s} + D, \quad P^\dagger = -\frac{\partial}{\partial s} + D,$$

で定義し、 P の境界条件を $\Pi_+ f(\cdot, 0) = 0$ とする ([9], Π_+ は D の正固有空間への射影、 $P^\dagger$ の境界条件は $(I - \Pi_+)f(\cdot, 0) = 0$)。

$\Delta_1 = P^\dagger P = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} + D^2$, $\Delta_2 = PP^\dagger$ とする。 Δ_1 の境界条件は

$$\Pi_+ f(\cdot, 0) = 0, \quad (I - \Pi_+) \left(\left(\frac{\partial f}{\partial s} + Df \right) |_{s=0} \right) = 0,$$

である (APS 条件)。この条件で $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \lambda^2$ の基本解は

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\lambda^2 t}}{\sqrt{4\pi t}} \left(\exp\left(-\frac{(s-\sigma)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(s+\sigma)^2}{4t}\right) \right), \quad \lambda > 0, \\ & \frac{e^{-\lambda^2 t}}{\sqrt{4\pi t}} \left(\exp\left(-\frac{(s-\sigma)^2}{4t}\right) + \exp\left(-\frac{(s+\sigma)^2}{4t}\right) \right) + \\ & + \lambda e^{-\lambda(s+\sigma)} \operatorname{erfc}\left(\frac{(s+\sigma)}{2\sqrt{t}} - \lambda\sqrt{t}\right), \quad \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi, \quad \lambda < 0, \end{aligned}$$

である。同様に Δ_2 の基本解も求められる。これから $K(t, x, s) = (e^{-t\Delta_1} - e^{-t\Delta_2})|_{(x,s,x,s)}$ は

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} \operatorname{sgn} \left(-\frac{e^{-\lambda^2 t}}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{s^2}{2}} + |\lambda| e^{2|\lambda|s} \operatorname{erfc}\left(\frac{s}{\sqrt{t}} + |\lambda|\sqrt{t}\right) \right) |\phi_\lambda(x)|^2 \\ & = \sum_{\lambda} \operatorname{sgn} \lambda \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} e^{2|\lambda|s} \operatorname{erfc}\left(\frac{s}{\sqrt{t}} + |\lambda|\sqrt{t}\right) \right) |\phi_\lambda(x)|^2, \end{aligned}$$

となり $K(t) = \int_0^\infty \int_M K(t, x, s) dx ds = -\sum \frac{\operatorname{sgn} \lambda}{2} \operatorname{erfc}(|\lambda|\sqrt{t})$ となり

$$\frac{dK(t)}{dt} = \sqrt{14\pi t} \sum_n \lambda_n e^{-\lambda_n t}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = -\frac{1}{2}h, \quad h = \dim \operatorname{Ker} D,$$

だから

$$\int_0^\infty \left(K(t) + \frac{h}{2} \right) t^{s-1} dt = \frac{\Gamma(s + \frac{1}{2})}{2s\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda_n \neq 0} \operatorname{sgn} \lambda_n |\lambda_n|^{-2s} = \frac{\Gamma(s + \frac{1}{2})}{2s\sqrt{\pi}} \eta(2s),$$

となって $K(t)$ が $\sum_{k \geq -n} a_k t^{k/2}$, $t \rightarrow +\infty$ の形の漸近展開を持てば

$$\eta(D, 2s) = -\frac{2s\sqrt{\pi}}{\Gamma(s + \frac{1}{2})} \left(\frac{h}{2s} + \sum_{k=-n}^N \frac{a_k}{\frac{k}{2} + s} + O(s) \right),$$

となり $\eta(D, 0) = -(2a_0 + h)$ となって $\eta(D, s)$ は $s = 0$ で正則である。一般に M が compact なら $\eta(D, s)$ は $s = 0$ で正則になる ([18])。境界のある多様体上では これは必ずしも成り立たないが 境界条件の選び方によってはなりたつ ([32])。

$M = S^1$ の上で 方程式 $D = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} + a, 0 < a < 2\pi$ を考えると 固有値は $\{2n\pi + a | a \in \mathbb{Z}\}$ だから

$$\eta(D, s) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n\pi + a)^s} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n\pi - a)^s},$$

だから

$$\begin{aligned} \eta(D, s) &= a^{-s} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n\pi)^s} \left(\frac{1}{(1 + \frac{a}{2n\pi})^s} - \frac{1}{(1 - \frac{a}{2n\pi})^s} \right) \\ &= a^{-s} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n\pi)^s} \left(\left(1 - \frac{as}{2n\pi} + \cdots\right) - \left(1 + \frac{as}{2n\pi} + \cdots\right) \right) \\ &= a^{-s} - \frac{2as}{(2\pi)^{s+1}} \zeta(s+1) + \cdots, \end{aligned}$$

となり $\lim_{s \rightarrow 0} s\zeta(s+1) = 1$ により $\eta(D, 0) = 1 - \frac{a}{\pi}$ である。 D は S^1 の $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ の生成元を $\exp(2a\pi i)$ に写す表現から得られる Flat bundle に S^1 の Dirac 作用素 $\frac{1}{i} \frac{d}{dt}$ を持ち上げたものだから $\eta(D, 0)$ は Flat bundle $(\pi_1(S^1))$ の不変量を与える ([11] 参照)。

4 Ray-Singer 行列式

$\zeta_\theta(D, s)$ が $s = 0$ で正則なとき D の (θ に関する) Ray-Singer 行列式 $\det D (= \det_\theta D)$ を

$$\det_\theta D = e^{-\zeta'_\theta(D, 0)} \quad (6)$$

で定義する ([23], [26])。適当な仮定のもとに D の行列式は 本質的に Ray-Singer 行列式に一致することが知られている ([27])。 D の固有値を使って書けば

$$\det D = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\lambda_n^{-s}} \Big|_{s=0} \quad (7)$$

である。これから

$$\begin{aligned}\det(tD) &= \prod_{n=1}^{\infty} (t\lambda_n)^{(t\lambda_n)^{-s}}|_{s=0} \\ &= (t^{-s \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-s}}) \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\lambda_n^{-s}}|_{s=0} = t^{\nu} \det D, \quad \zeta(D, 0) = \nu,\end{aligned}$$

である。 D が正だと $\det D$ は一意的に定まり正の実数になるが一般には $\det D$ は一意でなく値も実数とは限らない。以下では $D = \not{D}$, Dirac 作用素、のときについて このことを説明する。

D は 0-mode がなしとし 正負固有空間への射影を $\Pi_{\pm}$, $D\Pi_{\pm} = \pm D_{\pm}$ とする。 $D = D_+ - D_-$, $|D| = D_+ + D_-$ である。また

$$\zeta(|D|, s) = \eta(D^2, \frac{s}{2}), \quad \zeta(D_{\pm}, s) = \frac{\zeta(|D|, s) \pm \eta(D, s)}{2},$$

とする。このとき $\zeta(D, s) = \zeta(D_+, s) + (-1)^s \zeta(D_-, s)$ だから

$$\zeta_{\pm}(D, s) = \zeta(D_+, s) + e^{\pm i\pi s} \zeta(D_-, s), \quad (8)$$

である。 $\zeta'_{\pm}(D, s) = \zeta'(D_+, s) + \pm i\pi e^{\pm i\pi s} \zeta(D_-, s) + e^{\pm i\pi s} \zeta'(D_-, s)$ だから

$$\det_{\pm} D = e^{\pm i\pi \nu_-} \det D_+ \det D_- = e^{\pm i\pi \nu_-} \det |D|, \quad (9)$$

である。ただし $\nu_- = \zeta(D_-, 0)$ である。従って $\det D$ は ν_- が整数のときに限り一意に定まり 実数になる。

また この計算から $\det_+ D$ と $\det_- D$ は互いに共役で 従って $|\det_{\pm} D|$ は一意に定まることが解る。

5 質量摂動

$D + mI$ の固有値は $\lambda_n + m$, $n = 1, 2, \dots$ だから D が正の時

$$\begin{aligned}\zeta(D + mI, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + m)^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} \left(1 - s \frac{m}{\lambda_n} + \dots (-1)^k \frac{s \cdots (s - k + 1)}{k!} \left(\frac{m}{\lambda_n} \right)^k + \dots \right) \\ &= \zeta(D, s) - s \cdot m \zeta(D, s + 1) + \dots \\ &\quad + (-1)^k \frac{s(s-1) \cdots s - k + 1}{k!} m^k \zeta(D, s + k) + \dots, \quad |m| < \lambda_1\end{aligned}$$

となる。これから

$$\zeta(D + mI, 0) = \nu - \text{Res}_{s=1}\zeta(D, s)m - \cdots - \text{Res}_{s=k}\zeta(D, s)\frac{m^k}{k} - \cdots (10)$$

となる。この式は $|m| < \lambda_1$ で示されるが $\zeta_N(D, s) = \sum_{n>N} \lambda_n^{-s}$ を考えると この式が任意の m にたいし成立することがわかる ([1],[2])。

D が自己共役の時 $\zeta(D + mI, s) = \zeta(D_+ + mI, s) + (-1)^s \zeta(D_- - mI, s)$ だから $\zeta(D + mI, 0) = \zeta(D_+ + mI, 0) + \zeta(D_- - mI, 0)$ と

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{s=k}\zeta(D + mI, s) \\ &= \text{Res}_{s=k}\zeta(D_+ + mI, s) + (-1)^k \text{Res}_{s=k}\zeta(D_- - mI, s), \end{aligned}$$

により

$$\zeta(D + mI, 0) = \nu - \sum_{1 \leq k \leq [d/m]} \text{Res}_{s=k}\zeta(D, s)\frac{m^k}{k} \quad (11)$$

である。 $\nu, \text{Res}_{s=k}\zeta(D, s)$ は実数だから (11) によって $[d/m]$ が奇数であれば任意の実数 c にたいし $\zeta(D + mI, 0) = c$ となる実数 m が存在する。

後の議論では $\nu = \zeta(D, 0)$ が整数になることが必要な場合があるが、この結果から ν が整数である というのは本質的な制約にはならない。

D が Dirac 作用素のとき $\zeta(D_{\pm}) = \nu_{\pm}$ を任意の値にする為には polarization $J = D|D|^{-1} = P_+ - P_-$ を導入して 作用素 $D + m_1 I + m_2 J$ を考えればよいが この作用素は微分作用素ではない。

$\det|D + mI|$ については $|m| < |\lambda_{N+1}|$ で

$$\det|D + mI| = \det|D| \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{m}{\lambda_i}\right)^{\text{sgn}\lambda_i m_i} e^{R_N(m)} \quad (12)$$

となる。ただし m_i は λ_i の重複度である。 $R_N(m)$ も正確にかけ 曲がった空間」での determinant bundel の構成に使われるが省略する ([2])。

6 組 $\{H, G\}$ と $W^{k, \natural}$

H を $\mathbb{K}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$, または $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間 G を H に働く正值 Schatten 級作用素で その ζ -関数 $\zeta(G, s) = \text{tr} G^s$ が $s = 0$ で正則なものとする (Schatten 級作用素については [29] 参照)。 G の固有値 固有 vector は $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots > 0, e_1, e_2, \dots; G e_n = \mu_n e_n, \|e_n\| = 1$ とし固定する。 $x \in H$ の座標は $(x_1, x_2, \dots); x = \sum_n x_n e_n$ とする。

このような組を考えるのは Connes の spectral triple ([13],[19]) と似ているが この方が 一般性はすくないが具体的な計算には便利である。

以下 $\zeta(G, 0) = \nu$, $\zeta(G, s)$ の最初の極の位置 d , $c = \text{Res}_{s=d}\zeta(G, s)$ とする。 $H = L^2(M, E)$, G は E の切断に働く楕円形作用素の Green 作用素の時 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ だから n が十分大きければ $\lambda_n/2 < \lambda_n + m < 2\lambda_n$ となる。従って d は m に無関係に決まる。

H の内積を (x, y) で表し Sobolev k -内積 $(x, y)_k$ を (x, y) に対し $G^{-k/2}$ が定義できるとき $(G^{-k/2}x, G^{-k/2}y)$ で定義する。この内積と H から得られる Sobolev 空間を W^k とかく。 $H = W^0$ である。 W^k の正規直交系は $e_{1,k}, e_{2,k}, \dots, e_{n,k} = \mu_n^{k/2} e_n$ である。定義から

$$G^{(k-l)/2} : W^l \cong W^k, \quad W^0 = H, \quad (13)$$

である。集合としては $W^k \subset W^l$, $k > l$ となる。

$$W^{k-0} = \bigcap_{l < k} W^l, \quad H^- = \bigcap_{l < 0} W^l, \quad W^{k+0} = \bigcup_{l > k} W^l, \quad H^+ = \bigcup_{l > 0} W^l, \quad (14)$$

と置く。 W^{k-0} の点列 $x_1, x_2, \dots$ は総ての W^l , $l < k$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ となる時 x に収束する とする。また W^{k+0} の点列 $x_1, x_2, \dots$ はある W^l , $l > k$ にふくまれ そこで x に収束するとき x に収束すると定める。

なお $W^{-\infty} = \bigcup_l W^l$, $W^\infty = \bigcap_l W^l$ とする。位相は $W^{k \pm 0}$ と同様に定める。

$e_{n,l} = \mu_n^{(l-k)/2} e_{n,k}$ だから $x = \sum_n x_n e_{n,l} \in W^l$ は $\sum_n \mu_n^{(l-k)/2} x_n e_{n,k}$ と書ける。従って $x \in W^{k-0}$ は $\sum_n x_n e_{n,k}$ と書ける。ただし $\sum_n |x_n|^2$ は発散することもある。この意味で

$$x_{\infty,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{d/2} e_{n,k} \in W^{k-0}, \quad x_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{d/2} e_n \in H^- \quad (15)$$

である。 x_∞ ($x_{\infty,k}$) は $e_1, e_2, \dots$ の並び方に関係する。従って e_∞ を指定するのは $\{H, G\}$ に 更に構造を与えることになる。

$$W^{k,\sharp} = W^k \oplus \mathbb{K}e_{\infty,k} \subset W^{k-0}, \quad H^\sharp = H \oplus \mathbb{K}e_\infty \subset H^- \quad (16)$$

で 空間 $W^{k,\sharp}$, $H^\sharp$ を定義する。 W^k , H に付け加えられる 1-次元空間 $\mathbb{K}e_{\infty,k}$, $\mathbb{K}e_\infty$ は determinat bundle (の fibre) と解釈できるが この議論は省略する ([2],[5],[20],[21],[25])。

定義から $x \in W^{k,\sharp}$ は

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n,f} + t \mu_n^{d/2}) e_{n,k} = x_f + t e_{\infty,k}, \quad x_f \in W^k, \quad (17)$$

と一意的に書ける。 $W^{k,\sharp}$ は Hilbert 空間ではないが 内積を

$$\langle x_f + te_{\infty,k}, y_f + ue_{\infty,k} \rangle_k = \lim_{s \downarrow 0} (x_f + \sqrt{s}te_{\infty,k}, y_f + \sqrt{s}ue_{\infty,k})_{k-s}, \quad (18)$$

で定義すれば Hilbert 空間 $W^{k,\natural}$ になる。定義から Hilbert 空間として $W^{k,\natural} = W^k \oplus \mathbb{K}e_{\infty,k}$ である。正規直交系間の内積は

$$\langle e_{n,k}, e_{m,k} \rangle_k = \delta_{n,m}, \quad \langle e_{n,k}, e_{\infty,k} \rangle_k = 0, \quad \langle e_{\infty,k}, e_{\infty,k} \rangle_k = c$$

となる。

正則化無限次元積分の議論は H ではなく $H^\sharp$ で展開される。また正則化 Laplacian の固有値問題などは H で考えると有限次元から類推される固有値・固有関数しか得られないが $H^\sharp$ で考えると有限次元からは類推されない固有値・固有関数があらわれる。このように無限次元の解析学では意味の有る結果を得るためには元の Hilbert 空間に 1 次元付け加えることが必要になることが多い ([16] 参照)。この理由を探るのは今後の課題である。

注意。 $\zeta(G, s)$ が $k+l$ で正則なら $e_{\infty,k}$ と $e_{\infty,l}$ の正則化内積を

$$(G^{s/2}e_{\infty,k}, G^{s/2}e_{\infty,l})|_{s=0} = \zeta(G, s+l),$$

で定義できる。この意味で $e_{\infty,k}$ と $e_{\infty,-k}$ の正則化内積は ν だから $\nu \neq 0$ なら $W^{k,\natural}$ の Sobolev 双対は $W^{-k,\natural}$ と考えてよい。

$x \in H^\natural$ の座標を $(x_1, x_2, \dots, x_\infty)$, $H^\sharp$ での座標を $(y_1, y_2, \dots)$ とすると $y_n = x_n + x_\infty \mu_n^{d/2}$, $n = 1, 2, \dots$ である。従って

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_n} &= \frac{\partial}{\partial y_n}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \frac{\partial}{\partial x_\infty} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{d/2} \frac{\partial}{\partial y_n} \end{aligned}$$

となり $H^\natural$ の開集合 D 上の関数 f が全微分可能であれば df は D から H への連続写像を定義するが必ずしも W^k , $k > 0$ への写像を定義しない。 f を $H^\sharp$ の開集合上の関数と考えたときは f の全微分可能性は f がある W^k , $k < 0$ の開集合の関数に拡張されそこで全微分可能と定義するのが妥当だからある $k < 0$ にたいし W^k への写像を定義する。従って $H^\natural$ の関数と考えての全微分可能性と $H^\sharp$ の関数と考えての全微分可能性には違いがある。

H を実 Hilbert 空間とすれば その極座標は $\|x\| = r$ として

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1, \quad x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \dots, \\ x_n &= r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-1} \cos \theta_n, \dots, \quad 0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

で与えられる。この座標は緯度だけがあって、経度がない。また緯度は独立でなく制約

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_n = 0 \quad (19)$$

を満たさなければならない。この制約をはずし緯度が独立として 変数 $t_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_n = \prod_{n=1}^{\infty} \sin \theta_n$ を導入し「経度」 ϕ ; $0 \leq \phi < 2\pi$ と 変数 $y, z, y - rt_\infty \cos \phi, z = rt_\infty \sin \phi$ を H に付け加えた空間を

$$\hat{H} = \{(x, y, z) | x \in H\} \cong H \oplus \mathbb{R}^2, \quad (20)$$

$$\tilde{H} = \{(x, y, z) | \phi = 0, \pi\} \cong H \oplus \mathbb{R}, \quad (21)$$

とする。

$k > 0$ のとき $e_{\infty, k} \in H$ であり $\|e_{\infty, k}\| = \sqrt{\zeta(d+k)}$, 緯度は $\cos \alpha_{n, k} = \mu_n^{(d+k)/2} / \sqrt{\zeta(d+k)}$ となるから写像 $\rho: H^\natural \rightarrow \hat{H}$ を

$$\rho(x, te_\infty) = (x, t\sqrt{c}t_\infty),$$

で定義すれば $\rho: H^\natural \cong \hat{H}$ である。また e_∞ の極座標は $(\sqrt{c}, \pi/2, \pi/2, \dots)$ となる。

7 正則化対称関数

$x = (x_1, x_2, \dots) \in H$ に対し左辺が収束するとき

$$\sigma_k(x) = \sum_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

とおく。これは無限和だから一般には発散する。是に対し

$$: \sigma_k(x) :_G = \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu_{i_1}^s \cdots \mu_{i_k}^s x_{i_1} \cdots x_{i_k} |_{s=0}$$

を G に関する 正則化対称関数とよぶ。例えば $\mu_n = n^{-1}$ の時 $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x_n = n^{-c}$, $c > 1/2$ であれば $\sigma_1(x) = \sum_n n^{-c}$ は $c > 1$ でしか収束しないが $: \sigma_1(x) : = \zeta(c)$ は $c \neq 1$ であれば $c > 1/2$ で有限の値をとる。

注意. この定義では k は有限だから 無限積になる $\sigma_\infty(x) = \prod_n x_n$ の議論は含まれない。 $\prod_n x_n$ の正則化は次節で扱う。

定義から両辺が収束すれば $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_k(x) t^k$ である。また

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \mu_n^s tx_n) |_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} : \sigma_k(x) : t^k$$

となる。一方

$$\begin{aligned}\log\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mu_n^s tx_n)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\log(1+\mu_n^s tx_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}t^k}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^{ks}x_n^k\end{aligned}$$

であり $\sum_n x_n^k, k \geq 2$ は収束するから $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mu_n^s tx_n)|_{s=0}$ は $:\sigma_1(x):$ が存在すれば存在する。よって

命題 1 $x \in H$ であれば $:\sigma_1(x):$ が存在すれば $:\sigma_k(x):, k \geq 2$ は存在する。

$I_x; I_x e_n = x_n e_n$ で scaling 作用素 I_x を定義すれば

$$:\sigma_1(x):_G =: \sum_{n=1}^{\infty} x_n :_G = \text{tr}(G^s I_x)|_{s=0} \quad (22)$$

だから $:\sigma_1(x):$ は I_x の Paicha の ζ -正則化 trace (renormalized trace) である。

G が compact 多様体上の Laplacian (+定数項) の Green 作用素であれば 微分作用素 D に対し $\text{tr}(G^s d)$ は全平面に有利型に解析接続され極は D が m 階のとき $(m+n)/2, (m+n-1)/2, \dots$ にしかないから $\text{Res}_{s=0}\text{Tr}(G^s D) = 0$ であれば D の G に関する正則化 trace が存在する ([19],[31])。特に $DG = GD$ であり D が soectre 分解できれば $D = I_x$ となり この $x = \text{Spec}(D)$ については $:\sigma_1(x):$ が存在する。よって命題 1 により すべての k について $:\sigma_k(x):$ が存在する。

$x \in W^k$ の時ば $x = G^{k/2}y; y \in H$ だから $:\sigma_1(x): = \text{tr}(G^{s+k/2}I_y)|_{s=0}$ と書ける。

注意. 関数によっては H では意味がないが $H^\sharp$ では意味がある物がある。例えば $\prod_n \sin cm_n \pi \mu_n^{-d/2} x_n, c \neq 0$ は H では 0 になるが $H^\sharp$ では

$$\lim_{m \rightarrow \infty} n_m = n_\infty \in \mathbb{N},$$

が存在すれば 意味のある関数になる。一般に 数列 $\{n_m\}$ について同じ仮定で $f_n(x_n) = \sin cn_m \pi \mu_n^{-d/2} x_n$, または $\cos cn_m \pi \mu_n^{-d/2} x_n$ のとき $\prod_n f_n(x_n)$ は有限個の $f_n(x_n)$ を除いて総て $\sin cn_\infty \pi \mu_n^{-d/2} x_n$, または $\cos cn_\infty \pi \mu_n^{-d/2} x_n$ の時に限って $H^\sharp$ で恒等的には 0 でない関数になる。

$x = x_f + te_\infty \in H^\sharp$ とすれば

$$:\sum_{n=1}^{\infty}(x_{f,n} t \mu_n^{d/2}): =: \sum_{n=1}^{\infty} x_{f,n} + t \zeta(G, \frac{d}{2}),$$

だから $\zeta(G, s)$ が $s = d/2$ で正則なときには $:\sigma_1(x_f):_G$ が存在すれば $:\sigma_1(x):_G$ が存在する。しかし $\zeta(G, s)$ は $s = d$ で極を持つから $t \neq 0$ であれば 一般には $:\sigma_2 x:_G$ は存在しない。

$\zeta(G, s)$ の (最初の) 極 $s = d$ での Laurent 展開の定数部分

$$\lim_{s \downarrow d} \left(\zeta(G, s) - \frac{c}{s-d} \right),$$

は意味がある。例えば $\zeta(G, s)$ が Riemann ζ -関数になるときは この値は Euler 数 γ ; $\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} (\sum_{n=1}^N n^{-1} - \log N)$ となり

$$\begin{aligned} & \log\left(\frac{d}{dx}\right)(\log x)^n \\ &= -((\log x)^{n+1} + \gamma(\log x)^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \frac{n! \zeta(n-k+1)}{k!} (\log x)^k) \end{aligned}$$

となる ([6])。この例は $\zetaeta(G, s)$ の極での Laurent 展開の定数項を「第 2 正則化」として使える 可能性があることを示している。

8 正則化無限積

数列 $x_1, x_2, \dots$ が Agmon 角 θ ; $\theta - 2\pi + \epsilon < \text{Arg} x_n < \theta + \epsilon$ を持つとき $x_1, x_2, \dots$ の (G と θ に関する) 正則化無限積: $\prod_{n=1}^{\infty} x_n :_{G, \theta}$ ($=: \prod_{n=1}^{\infty} x_n :_G := \prod_{n=1}^{\infty} x_n :$) を

$$:\prod_{n=1}^{\infty} x_n := \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{\mu_n^s}|_{s=0}, \quad x_n^{\mu_n^s} = |x_n|^{\mu_n^s} e^{\mu_n^s \text{Arg} x_n}, \quad (23)$$

($\theta_2\pi < \text{Arg} x_n < \theta$) で定義する。

$x_n = \mu_n^k$ であれば

$$:\prod_{n=1}^{\infty} \mu_n^k :_G = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n^{k\mu_n^s}|_{s=0} = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\mu_n^s} \right)^k|_{s=0} = (\det G)^k$$

となる。ただし $\det G$ は G の Ray-Singer 行列式 $\exp(\zeta'(G, 0))$ である。特に G が楕円形作用素 D の Green 作用素なら $\det_G D = \text{dt} D$ となる。

定義から $\prod_n x_n :$ は各変数について線形で

$$| : \prod_{n=1}^{\infty} x_n : | =: \prod_{n=1}^{\infty} |x_n| :, \quad (24)$$

$$: \prod_{n=1}^{\infty} (x_n y_n) :=: \prod_{n=1}^{\infty} x_n : \cdot : \prod_{n=1}^{\infty} y_n : \quad (25)$$

である。

$(x_1, x_2, \dots)$ を H や $H^\sharp$ の元の座標と思えば: $\prod_n x_n$: は H や $H^\sharp$ の適当な部分集合で定義された関数である。 $x = \sum_n x_n e_n \in H^\sharp$ のとき $x = x_f + t e_\infty$, $t \neq 0$ とし $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_{f,n}}{t \mu_n^{d/2}} \right| < \infty$ であれば

$$\begin{aligned} : \prod_{n=1}^{\infty} x_n : &= \prod_{n=1}^{\infty} (x_{f,n} + t \mu_n^{d/2})^{\mu_n^s} |_{s=0} \\ &= t^{\zeta(G,s)} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\mu_n^s} \right)^{d/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x_{f,n}}{t \mu_n^{d/2}} \right)^{\mu_n^s} |_{s=0} \\ &= t^\nu (\det G)^{d/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x_{f,n}}{t \mu_n^{d/2}} \right) \end{aligned}$$

となる。従って $\ell^{1,c} = \{ \sum_n x_n e_n \mid \sum_n \mu_n^{-c} |x_n| < \infty \}$ とすれば: $\prod_n x_n$: は $\ell^{d/2} \oplus \mathbb{K}^\times e_\infty$ で定義される。この関数は ν が整数の時に限り一価である。

$x = x_f + t e_\infty \in H^\sharp$ に対し $\check{x} = \bar{t} e_\infty - x_f$ をつくれば: $\prod_{n=1}^{\infty} x_n : \cdot : \prod_{n=1}^{\infty} \check{x}_n$: は $x_f \in W^d$ で存在する。従って: $\prod_n x_n$: は $W^d \oplus \mathbb{K}^\times e_\infty$ で解析的である。

同様に $(x_1, x_2, \dots)$ を $x \in W^{k,\sharp}$ の座標と考えれば 正則化無限積は $\ell^{1,(d+k)/2} \oplus \mathbb{K}^\times e_{\infty,k}$ で定義され $W^{(k+d)} \oplus \mathbb{K}^\times e_{\infty,k}$ で解析的である。 $k = -d$ と取れば この操作は $x \in H$ (または $x \in \ell^1$) に

$$: \prod_{n=1}^{\infty} (t + x_n) := t^\nu \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x_n}{t} \right),$$

の計算をしていることになる。これから ν が正の整数であれば

$$\text{p.f.} : \prod_{n=1}^{\infty} x_n :=: \sigma_\nu(x) : \quad (26)$$

で $x \in H$ (または $x \in \ell^1$) の (座標の) 正則化無限積の有限部分が定義できる。

$x \in W^k$ の時は $x = G^{k/2} y$; $y \in H$ として: $\prod_n x_n$: の有限部分は

$$\text{p.f.} : \prod_{n=1}^{\infty} x_n := (\det G)^{k/2} : \sigma_\nu(y) : \quad (27)$$

となる。

9 正則化行列式

$x = (x_1, x_2, \dots)$ のとき $\log x = (\log x_1, \log x_2, \dots)$, $\log I_x = I_{\log x}$ とすれば

$$: \prod_{n=1}^{\infty} x_n :_G = e^{\text{tr}(G^s \log I_x)|_{s=0}} \quad (28)$$

である。一般に作用素 T に 対数 $S = \log T$; $\exp(S) = T$ が存在するとき

$$\det_G T = e^{\text{tr}(G^s S)|_{s=0}} \quad (29)$$

を T の (G に関する) 正則化行列式 と定義する。 $\text{tr}(G^s S)|_{s=0}$ は Paycha の意味の正則化 (renormalize) trace である ([12],[24])。従って 正則化行列式は正則化 trace の応用と解釈できる。

G が compact 多様体の Laplacian $(+mI)$ の Green 作用素 D が微分作用素であれば D の熱核 $\exp(-tD)$ は $\text{tr}(DG^s)$ が $s = 0$ で正則;

$$\text{Res}_{s=0} \text{tr}(DG^s) = 0,$$

の時 $\det_G e^{-tD}$ をもつ。

$\log T$ は一意でないから $\det_G T$ は一意ではない。しかし T が正のときは $\log T$ を実の作用素とすれば一意である。また $T = I + U$, U は trace class とすれば $|s|$ が小さいとき

$$\log(I + sU) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} s^n U^n,$$

と定めれば $\det_G(I + sU)$ は $\det(I + sU)$ と一致するから解析接続して $\det_G T$ は通常の T の行列式と一致する。

$T_1 T_2 = T_2 T_1$, $\log T_1 \log T_2 = \log T_2 \log T_1$ であれば T_1, T_2 の正則化行列式が存在するとき

$$\det_G(T_1 T_2) = \det_G T_1 \det_G T_2,$$

となる。特に

$$\det_G(tT) = t^\nu \det_G T, \quad (30)$$

が成立する。

補題 1。 $T_1 = \exp S_1$, $T_2 = \exp S_2$ がともに正則化行列式を持ち T_1^t, T_2^t に対し Campbell-Hausdorff の公式が成立し $G^s S_2 = S_2 G^s$, $s \in \mathbb{R}$ であれば $\det_G(T_1 T_2) = \det_G T_1 \det_G T_2$ である。

証明 仮定から任意の H に対し

$$\mathrm{tr} G^s S_2 H = \mathrm{tr} S_2 G^s H = \mathrm{tr} G^s H S_2,$$

だから $\mathrm{tr} G^s [S_2, H] = 0$ となる。また Campbell-Hausdorff の公式から $|t|$ が小さいとき

$$T_1^t T_2^t = e^{tS_1} e^{tS_2} = e^{t(S_1+S_2)+[S_2, f(t, S_1, S_2)]},$$

となる。従って

$$\begin{aligned} \det_G(T_1^t T_2^t) &= e^{\mathrm{tr}(G^s \log(T_1^t T_2^t))|_{s=0}} = e^{\mathrm{tr}(G^s(t(S_1+S_2)+[S_2, f(t, S_1, S_2)]))|_{s=0}} \\ &= e^{\mathrm{tr}(G^s(t(S_1+S_2)))|_{s=0}} = e^{\mathrm{tr}(G^s(tS_1+S_2))|_{s=0}} \\ &= e^{\mathrm{tr}(tG^s S_1)|_{s=0}} e^{\mathrm{tr}(tG^s S_2)|_{s=0}} = \det_G T_1^t \det_G T_2^t \end{aligned}$$

となって t について解析接続して補題がえられる。

$\det_G PTP^{-1} = \det_{P^{-1}GP} T$ だが $\det_G PTP^{-1} = \det_G T$ は必ずしも成立しない。例えば

$$\begin{cases} Ge_{2n-1} = \frac{1}{2}e_{2n-1}, \\ Ge_{2n} = \frac{1}{n+1}e_{2n}, \end{cases} \quad \begin{cases} Te_{2n-1} = 3e_{2n-1}, \\ Te_{2n} = 2e_{2n}, \end{cases} \quad \begin{cases} Pe_{2n-1} = e_{2n}, \\ Pe_{2n} = e_{2n-1}, \end{cases}$$

とすれば

$$\det_G T = 3^{\zeta(s)} 2^{\zeta(s)-1}|_{s=0} = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad \det_G PTP^{-1} = 2^{\zeta(s)} 3^{\zeta(s)-1} = \frac{1}{3\sqrt{6}},$$

となって値が異なる。

$T \in GL(n, \mathbb{K})$ であれば T が $\mathbb{K}^n = \{\sum_{i=1}^n x_n e_n\} \subset H$ とし $T^\sharp = T \oplus P_{\mathbb{K}^n, \perp}$ とすれば $\det_G S = \det_G T^{-1} S T$ が成立する。 $\det_G S$ は S について norm 位相で連続だから $T = I + K$, K は compact, のとき

$$\det_G S = \det_G T^{-1} S T,$$

が成立する。また $TG = GT$ であってもこの式は成立する。従って $\mathcal{K}$ を $I + K$, K は compact の形の逆をもつ作用素の群、 $\mathcal{C}_G$ を G と可換な逆を持つ作用素の群とすれば $\mathcal{K} \cdot \mathcal{C}_G$ が正則化行列式を保存する群の候補になる。しかし $\mathcal{C}_G$ の元は必ずしも $H^\sharp$ を $H^\sharp$ に写さないので 正則化行列式を保存する群としては $\mathcal{C}_G$ の適当な部分群を選ぶ必要がある。また G^s 等が 正則化無限次元積分との関係で 正則化行列式を保存する変換として重要なので、正則化行列式を保存する変換を有界作用素に限るのは適切でない。正則化行列式の対称性の群を確定するのは今後の課題である。

10 G の対数と $\zeta(G, s)$ の高階導関数

$t > 0$ であれば $\lim_{h \rightarrow 0} \|G^{t+h} - G^t\| = 0$ だが $t = 0$ では

$$\lim_{h \downarrow 0} \|G^h x - x\| = 0,$$

しか成立しない。半群 $\{G^t | t > 0\}$ の生成作用素 $A = \log G$ は

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{G^h x - x}{h} = Ax,$$

が $x \in H^+$ で成立するので、 H^+ で定義された作用素である。ただし G が微分作用素 D の Green 作用素であっても $\log G$ は擬微分作用素ではない ([25])。

群 $\{G^t | t \in \mathbb{R}\}$ または $\{G^t | t \in \mathbb{C}\}$ は W^∞ で定義され 生成作用素は $A = \log G$ である。

定義から W^∞ の作用素として

$$\frac{d^m}{dt^m} G^t = (\log G)^m G^t, \quad (31)$$

である。

$\log G$ から 作用素 $\exp(t(\log G)^k G^m)$, $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{C}$, $\zeta(G, s)$ は $s = m$ で 正則、を

$$e^{t(\log G)^k G^m} e_n = e^{t(\log \mu_n)^k \mu_n^m} e_n,$$

で定義する。 $\Re m > 0$ であれば $\exp(t(\log G)^k G^k)$ は H の有界作用素になる。また $m = 0$ であれば $k \cong 0 \pmod{2}$, $t \geq 0$, または $k \cong 1 \pmod{2}$, $t \leq 0$ の時 H の有界作用素になる。しかし それ以外の場合は非有界作用素である。

命題 2. $\zeta(G, s)$ が $s = m$ で正則であれば

$$\det_G e^{t(\log G)^k G^m} = e^{t\zeta^{(k)}(G, m)} \quad (32)$$

である。

証明。 $\frac{d}{ds} \text{tr} G^{m+s} = \text{tr} \left(\frac{d}{ds} G^{m+s} \right)$ だから

$$\begin{aligned} e^{t\zeta^{(k)}(G, m+s)}|_{s=0} &= e^{t \frac{d^k}{ds^k} (\text{tr} G^{m+s})}|_{s=0} = e^{t \text{tr} \left(\frac{d^k}{ds^k} G^{m+s} \right)}|_{s=0} \\ &= e^{t \text{tr} ((\log G)^k G^{m+s})}|_{s=0} = \det_G e^{t(\log G)^k G^m}, \end{aligned}$$

となって 命題が成立する。

特に 方程式

$$\frac{dU}{dt} = G^m U, \quad U(0) = I,$$

の解 $U = \exp(tG^m)$ については

$$\det_G e^{tG^m} = e^{t\zeta(G,m)},$$

である。これから $\zeta(G, m) = 0$ であれば $\det_G \exp tG^m$ は t に関係せず常に値が 1 である。同じ方程式の初期条件 $U(0) = C$ に関する解 $U(t) = (\exp(tG^m))C$ については補題 1 から $C = \exp S$, $SG^s = G^s S$ であり C が正則化行列式をもてば

$$\det_G U(t) = e^{t\zeta(G,m)} \det_G C,$$

である。

$$e^{t(\log G)^k G^m} = G^{t(\log G)^{k-1} G^m} \text{ だから (32) は}$$

$$\det_G D^{t(\log G)^{k-1} G^m} = e^{t\zeta^{(k)}(G,m)}, \quad (33)$$

とも書ける。

命題 2 から $\sum_n |x_n| < \infty$ の時

$$: \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n^{t(\log \mu_n)^{k-1} \mu_n^m} (1 + x_n) :_G = e^{t\zeta^{(k)} \zeta(G,m)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x_n), \quad (34)$$

である。

11 正則化無限次元積分

H は実 Hilbert 空間、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots)$ は $H^\sharp$ の元 (の座標) で $a_n < b_n$, $n = 1, 2, \dots$, または $a_n = -\infty$, $b_n = \infty$, とし

$$\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H^\sharp | a_n \leq x_n \leq b_n\} \subset H^\sharp,$$

と置く。ただし すべての n について $a_n = -\infty, b_n = \infty$ であれば $\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = H^\sharp$, 等とする。また $\mathbb{R}^N = \{\sum_{n=1}^N x_n e_n\} \subset H^\sharp$ とし

$$\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^N = \{x = \sum_{n=1}^N x_n e_n \in \mathbb{R}^N | a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_N \leq x_N \leq b_N\},$$

とする。また $* = (c_1, c_2, \dots) \in \mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ にたいし $* = (c_1, \dots, c_N, *N)$ とする。

定義 1. f が $\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ の関数のとき その $\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ での G に関する正則化無限次元積分 $\int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}} f : d^\infty x :_G$ を

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}} f(x_1, x_2, \dots) : d^\infty :_G \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^N} f(x_1, \dots, x_N, *N) d(x_1^{\mu_1^s}) \cdots d(x_N^{\mu_N^s})|_{s=0} \quad (35) \end{aligned}$$

で定義する。 $*$, $*'$ がともに $\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ に属するとき f が $(H^\sharp)$ の関数として全微分可能なら

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} |f(x_1, \dots, x_N, *N) - f(x_1, \dots, x_N, *'_N)| \\ & \leq \lim_{N \rightarrow \infty} |(df(x_1, \dots, x_N, *N), *N - *'_N)| + o(\|*N - *'_N\|) = 0, \end{aligned}$$

だから $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^N} f(x_1, \dots, x_N, *N) d(x_1^{\mu_1^s}) \cdots d(x_N^{\mu_N^s})$ が存在すれば その値は $*$ に関係しない。

I_ξ , $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ を scaling 変換 $I_\xi e_n = \xi_n e_n$ とする。以下では $\xi_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$ とする。このときは (定義域、値域を適当に取れば) $\xi^{-1} = (\xi_1^{-1}, \xi_2^{-1}, \dots)$ である。 f が $I_\xi(\mathcal{D})$ 上の関数の時 $\mathcal{D}$ 上の関数 $I_\xi^*(f)$ を $I_\xi^* f(x) = f(I_\xi x)$ で定義する。このとき $y = \xi x$ であれば

$$\int_a^b f(x) d(x^{\mu^s}) = \int_{\xi a}^{\xi b} f\left(\frac{y}{\xi}\right) \xi^{\mu^s} d(y^{\mu^s}) = \int_{|[\xi a, \xi b]|} f\left(\frac{y}{\xi}\right) |\xi|^{\mu_n^s} d(y^{\mu_n^s}),$$

だから $y_n = \xi_n x_n$, $\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^N \subset H^\sharp$ として

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^N} f(x_1, \dots, x_N) d(x_1^{\mu_1^s}) \cdots d(x_N^{\mu_N^s}) \\ &= \int_{I_\xi(\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^N)} f\left(\frac{y_1}{\xi_1}, \dots, \frac{y_N}{\xi_N}\right) \prod_{n=1}^N \xi_n^{\mu_n^s} d(y_1^{\mu_1^s}) \cdots d(y_N^{\mu_N^s}) \end{aligned}$$

によって

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}} f(x) : d^\infty x := \int_{I_\xi(\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}})} I_\xi^{-1, *} f(y) : \prod_{n=1}^\infty \xi_n : d^\infty y :, \quad (36)$$

となる。この式は 積分の (領域についての) 符号を考えて

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}} f(x) : d^\infty x := \int_{|I_\xi(\mathcal{D}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}})} |\det_G I_\xi| I_\xi^{-1, *} f(y) : d^\infty y :, \quad (37)$$

と書いても良い ([3])。なお (36) から $W^{k,\sharp}$ の部分集合での積分を $G^{k/2}\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset H^\sharp$ として 定義できる。このとき

$$\int_{G^{k/2}\mathcal{D}} f : d^\infty x := \int_{\mathcal{D}} (\det_G G)^{k/2} G^{-k/2,\sharp} f : d^\infty y : \quad (38)$$

である。

命題 2 $f(x) = \prod_{n=1}^\infty f_n(x_n)$ であれば

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}} f(x) : d^\infty x :_G =: \prod_{n=1}^\infty \int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n :_G, \quad (39)$$

である。

証明 $\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n = \xi_n$ とし $y_n = \xi_n x_n$ と変数変換すれば (36) から命題が成り立つ。

$H = L^2(X, E)$ で G が楕円形作用素 D の Green 作用素のとき $(x, Dx) = (G^{-1/2}x, G^{-1/2}x)$ から 関数 $\exp(-\pi(x, Dx))$ は $W^{1/2}$ で定義され $W^{1/2,\sharp}$ の関数に拡張される。従って

$$\int_{W^{1,\sharp}} e^{-\pi(x, Dx)} : d^\infty x := \frac{1}{\sqrt{\det_G D}},$$

となる。従って 命題 2 は Gauss 型経路積分の公式 ([17])

$$\int_H e^{-\pi(x, Dx)} \mathcal{D}x = \frac{1}{\sqrt{\det D}},$$

の数学的正当化を与える。

命題 2 から $\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ の正則化体積は $\prod_n (b_n - a_n) :$ である。このことを使って正則化無限次元積分を Riemann 式に定義できないかは今後の問題である。なお $\varnothing = 0$ の時 分数冪積分

$$I_x^\mu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f(t) dt,$$

を使うと $\prod_n \Gamma(\mu_n^s)|_{s=0} = 1$ により

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_{x_1}^{\mu_1^s} \cdots I_{x_N}^{\mu_N^s} f(x_1, \dots, x_N, *_N)|_{s=0},$$

とも書ける。また弱収束の意味で 正則化因子を入れた

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}} \left(\frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_N^{\mu_N^s} f(x_1, \dots, x_N, *_N) d^N x \right) |_{s=0},$$

で定義しても良い。 $g(x) = f(x^2)$, $g(0) = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$ とし $h(x_1, \dots, x_N) \prod_{n \geq N} g(x_n)$, $h \in W^1(\mathbb{R}^N)$ で生成された空間の $W^1(\mathbb{R}^\infty)$ の弱位相の意味で

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} : \prod_{n=1}^{\infty} x_n := 1, \quad (40)$$

が成立するから $f \in W^1(\mathbb{R}^\infty)$ の時も 正則化無限次元積分が定義できる。

12 極座標での正則化無限次元積分

$\mathbb{R}^N = \{\sum_{n=1}^N x_n e_n\} \subset H$ とする。 $\mathbb{R}^N$ の極座標で

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_N^{\mu_N^s} \right) f(x) d^N x \\ &= \int_0^\infty \int_{S^{N-1}} r^{\mu_1^s + \cdots + \mu_N^s - N} \times \\ & \quad \times \sin^{\mu_2^s + \cdots + \mu_N^s - N + 1} \theta_1 \cdots \sin^{\mu_{N-1}^s + \mu_N^s} \theta_{N-2} F_N(x; s) f(x) \times \\ & \quad \times r^{N-1} \sin^{N-2} \theta_1 \cdots \sin \theta_{N-2} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{N-2} d\phi \\ &= \int_0^\infty r^{\mu_1^s + \cdots + \mu_N^s - 1} dr \int_{S^{N-1}} F_N(x; s) f(x) \times \\ & \quad \times \sin^{\mu_2^s + \cdots + \mu_N^s - 1} \theta_1 d\theta_1 \cdots \sin^{\mu_{N-1}^s + \mu_N^s - 1} \theta_{N-2} d\theta_{N-2} d\phi, \\ & \quad F_N(x; s) = \mathcal{F}_N(|\cos \theta_1|, \dots, |\cos \theta_{N-2}|, |\cos \phi|, |\sin \phi|; s), \\ & \quad \mathcal{F}_N(x; s) = \frac{\partial^N}{\partial x_1 \cos \partial x_N} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_N^{\mu_N^s}, \end{aligned}$$

だから $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(x; s)|_{\phi=0, \pi} = F(\theta_1, \theta_2, \dots; s)$ と置いて

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_N^{\mu_N^s} \right) f(x) d^N x|_{s=0} \\ &= \int_0^\infty r^{\nu-1} dr \int_{S^\infty} F(\theta_1, \theta_2, \dots; s)|_{s=0} \prod_{n=1}^{\infty} \sin^{\nu-n-1} \theta_n d\theta_n, \end{aligned}$$

となる。 $f \in W^1(\mathbb{R}^\infty)$ の時 (40) から $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{F}_N(x; s)|_{s=0} = 1$ だから $F(\theta_1, \theta_2, \dots; s)|_{s=0} = 1$ である。 一方 $\theta_1, \theta_2, \dots$ は独立だから $\mathbb{R}^N$ の極限は H ではなく $\hat{H}$ であり S^∞ は H の球面ではなく $\hat{H}$ の球面 $\hat{S}^\infty$ である。 よって $H^\sharp$ の正則化体積要素を $:d^\infty x:_G$ と書けば

$$\rho^*(:d^\infty x:_G) = r^{\nu-1} dr d^\infty \omega, \quad d^\infty \omega = \prod_{n=1}^{\infty} \sin^{\nu-n-1} \theta_n d\theta_n, \quad (41)$$

となる ([4])。 (19) から $d^\infty\omega$ は H の球面では定義できないが $\hat{S}^\infty$ では定義でき それによる $\hat{S}^\infty$ の正則化体積は

$$\int_{\hat{H}} e^{-\pi\|x\|^2} d^\infty x = \int_0^\infty e^{-\pi r^2} dr \int_{\hat{S}^\infty} F(\theta_1, \theta_2, \dots; s) d^\infty \omega|_{s=0},$$

により

$$\text{vol}(\hat{S}^\infty) = \frac{2\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})},$$

となる ([4])。

従って 正則化次元 ν の空間での正則化無限次元積分は 次元 ν の空間での積分に近い。 G が D の Green 作用素のとき $D + mI$ の Green 作用素を G_m , $\zeta(G_m, 0) = \nu(m)$ とすれば $\nu(m)$ は m の多項式だから 有限次元での次元正則化は 正則化無限次元積分に移ることが出来れば m に関する摂動になる。

13 Cauchy 核と Fourier 展開

H を複素 Hilbert 空間とし $\mathbb{C}^N = \{\sum_{n=1}^N z_n e_n\} \subset H$ とする。 また

$$T_r^{\infty, k} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} z_n e_{n, k} \in W^{k, \sharp} \mid |z_{n, k}| = \mu_n^{d/2} r \right\},$$

とする。 また $T_r^{n, k} = T_r^{\infty, k} \cap \mathbb{C}^n$ と置き

$$D_r^{n, k} = \left\{ \sum_{j=1}^n z_j e_j \mid |z_j| \leq r \mu_j^k \right\},$$

とする。 特に $k = -d/2$, $r = 1$ の時は k, r を省略する。

写像 $w = z^a$ によって $\{z = e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ は $\{w = e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi \leq 2a\pi\}$ に写されるから

$$\frac{(2\pi i)^{a-1}}{a} \int_{|z|=1} \frac{d(z^a)}{z^a} = (2\pi i)^a, \quad \int_{|z|=1} dz = \int_0^{2\pi} i e^{i\theta} d\theta,$$

である。 よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T^n} \left(\frac{(2\pi i)^{\mu_1^s - 1}}{\mu_1^s} \frac{d(z_1^{\mu_1^s})}{z_1^{\mu_1^s}} \cdots \frac{(2\pi i)^{\mu_n^s - 1}}{\mu_n^s} \frac{d(z_n^{\mu_n^s})}{z_n^{\mu_n^s}} \right) \Big|_{s=0} = (2\pi i)^\nu, \quad (42)$$

$$T^n = \{e^{\theta_1 i} \mid 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi\} \times \cdots \times \{e^{\theta_n i} \mid 0 \leq \theta_n \leq 2\pi\},$$

である。ここで ν が整数であれば

$$T^\infty = \{e^{\theta_1 i} | 0 \leq \theta_1 < 2\pi\} \times \{e^{\theta_2 i} | 0 \leq \theta_2 < 2\pi\} \times \cdots,$$

として

$$\int_{T^\infty} \frac{:d^\infty z : |_{T^\infty}}{:\prod_{n=1}^\infty z_n :_G}, \quad :d^\infty x :_{T^\infty} = \prod_{n=1}^\infty \left(\frac{(2\pi i)^{\mu_n^s - 1}}{\mu_n^s} d(z_n^{\mu_n^s}) \right) |_{s=0}, \quad (43)$$

となる。これから $D^\infty = \{\sum_n z_n e_n | |z_n| < \mu_n^{d/2}\}$ とすれば $f(z)$ が D^∞ で z_n について Taylor 展開可能;

$$f(z) = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} z_1^{i_1} \cdots z_k^{i_k}, \quad |z_1| < \mu_1^{d/2}, \dots, |z_k| < \mu_k^{d/2},$$

であれば ν が整数のとき

$$f(\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^\nu} \int_{T^\infty} f(z) \frac{:d^\infty z : |_{T^\infty}}{:\prod_{n=1}^\infty (z_n - \zeta_n) :} \quad (44)$$

が成立する ([5])。

$:\prod_{n=1}^\infty z_n :$ は D^∞ で解析的だが Taylor 展開可能ではない。是に対しては

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^\nu} \int_{T^\infty} \frac{:d^\infty z : |_{T^\infty}}{:\prod_{n=1}^\infty (z_n - c_n) :} &= 0, \quad |c_n| < \mu_n^{d/2}, \\ \frac{1}{(2\pi i)^\nu} \int_{T^\infty} \frac{:d^\infty z : |_{T^\infty}}{:\prod_{n=1}^\infty (z_n - c_n) :} &= : \prod_{n=1}^\infty c_n :, \quad |c_n| > \mu_n^{d/2}, \end{aligned}$$

が成立する。よって $D_R^\infty \subset H^\sharp$ と見たとき そこでの解析関数 $f(z)$ については

$$D_{R,r}^\infty = \left\{ \sum_{n=1}^\infty z_n e_n \in H^\sharp | \mu_n^{d/2} r \leq |z_n| \leq \mu_n^{d/2} R \right\}, \quad 0 < r < R,$$

として $D_{R,r}^\infty$ では

$$f(\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^\nu} \int_{T_R^\infty - T_r^\infty} f(z) \frac{:d^\infty z : |_{T^\infty}}{:\prod_{n=1}^\infty (z_n - \zeta_n) :}, \quad (45)$$

と積分表示される ([5])。

正則化 Cauchy 核が存在することは T^∞ の正則化体積要素が存在することを示している。これを実形式で書けば正則化 Fourier 展開ができる。以下 それについて説明する。

H が実 Hilbert 空間のとき $\mu_n^{d/2} e_n, n = 1, 2, \dots$ で生成された H の部分群 (自由 Abel 群) を $\mathbb{Z}^\infty$, その $H^\sharp$ での closure を $\hat{\mathbb{Z}}^\infty$ とする。加群として

$$\hat{\mathbb{Z}}^\infty = \mathbb{Z}^\infty \oplus \mathbb{Z}e_\infty,$$

である。 $\mathbb{T}^\infty = H/\mathbb{Z}^\infty$, $\hat{\mathbb{T}}^\infty = H^\sharp/\hat{\mathbb{T}}^\infty$ と置けば

$$\hat{\mathbb{T}}^\infty \cong \mathbb{T}^\infty \times S^1, \quad S^1 \cong \mathbb{R}e_\infty/\mathbb{Z}e_\infty,$$

である。 $\hat{\mathbb{T}}^\infty$ の基本領域 $\hat{\mathcal{D}}^\infty$ は

$$\hat{\mathcal{D}}^\infty = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \mid 0 \leq x_n \leq \mu_n^{d/2} \right\} = \mathcal{D}_{0, \mu^{d/2}},$$

$0 = (0, 0, \dots)$, $\mu^{d/2} = (\mu_1^{d/2}, \mu_2^{d/2}, \dots)$ となる。

$f_n(x_n) = \sin(2n_i \pi \mu_n^{-d/2} x_n)$ または $\cos(2n_i \pi \mu_n^{-d/2} x_n)$ とすれば $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(x_n)$ が $\hat{\mathcal{D}}^\infty$ で恒等的に 0 でないとき $f_n(x_n)$ は有限個を除いて $\sin(2n\pi \mu_n^{-d/2} x_n)$ か $\cos(2n\pi \mu_n^{-d/2} x_n)$ である。ただし $n = 0$ のときは $\sin 2n\pi \mu_n - -d/2 x_n = 0$ だから これを除いて $\cos(2n\pi \mu_n^{-d/2} x_n) = 1$ だけを考える。この形の関数 $f(x), g(x)$ について 命題 2 から

$$\int_{\hat{\mathcal{D}}^\infty} f(x)g(x) : d^\infty x := 0, \quad f(x) \neq g(x), \quad (46)$$

$$\int_{\hat{\mathcal{D}}^\infty} (f(x))^2 : d^\infty x := \epsilon_f, \quad (47)$$

$$\epsilon_f = \begin{cases} \frac{1}{2^k} (\det G)^{d/2} & f_n(x_n) \neq 1 \text{ except } n \in \{n_1, \dots, n_k\}, \\ \frac{1}{2^{\nu-k}} (\det G)^{d/2} & f_n(x_n) = 1 \text{ except } n \in \{n_1, \dots, n_k\} \end{cases} \quad (48)$$

が成立する ([6])。 (46), (48) により $\hat{\mathbb{T}}^\infty$ の関数の Fourier 展開が計算できる。 $\hat{\mathbb{T}}^\infty = \mathbb{T}^\infty \times S^1$ により $\hat{\mathbb{T}}^\infty$ の全微分可能な C^1 -級関数の空間 $C_b^1(\hat{\mathbb{T}}^\infty)$ で $p_1^*(C_b^1(\mathbb{T}^\infty)) \times p_\infty^*(C^1(S^1))$ は稠密である。

$C_b^1(\mathbb{T}^\infty)$ の関数は $\sin(2m\pi \mu_n^{-d/2} x_n), \cos(2m\pi \mu_n^{-d/2} x_n)$ の有限積の また $C^1(S^1)$ の関数は $\rho : H^\sharp \cong \hat{H}$ から同じ関数の無限積の 級数に展開される。従って $C_b^1(\hat{\mathbb{T}}^\infty)$ の関数は Fourier 展開可能である。また Fourier 展開可能な関数から $L^2(\hat{\mathbb{T}}^\infty)$ も定義でき $C_b^1(\hat{\mathbb{T}}^\infty)$ は $L^2(\hat{\mathbb{T}}^\infty)$ で稠密である ([6])。

14 正則化 Laplacian の固有値問題

始めに H の Laplacian Δ の正則化 $:\Delta:$ を定義した。この節では前節での Fourier 展開の応用として $:\Delta:$ の周期的境界条件

$$f(x)|_{x_n=0} = f(x)|_{x_n=\mu_n^{d/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{x_n=0} = \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{x_n=\mu_n^{d/2}}, \quad (49)$$

に関する固有値問題を扱う。ここで $\Delta :$ は $H^\sharp$ で定義されているとする。
従って この境界条件を満たす関数は $\hat{\mathbb{T}}^\infty$ の関数と思う。

この境界条件に関する $\Delta(s)$ の固有関数が $f_s(x) = \prod_{n=1}^\infty f_{n,s}(x_n)$ となれば

$$f_{n,s}(x_n) = A_n \sin(2m_n \pi \mu_n^{s-d/2} x_n) + B_n \cos(2m_n \pi \mu_n^{s-d/2} x_n),$$

である。 $f_s(x)$ が存在し 0 でない為には $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = m_\infty$ が存在しなければならない。 $A_n = 0$ または $B_n = 0$ とすれば $f_s(x)$ は有限個を除いて

$$\sin(2m_\infty \pi \mu_n^{s-d/2} x_n), \text{ or } \cos(2m_\infty \pi \mu_n^{s-d/2} x_n),$$

の積である。このとき

$$\Delta(s)f_s(x) = -(m_\infty^2 \zeta(G, 2s-d) + \sum_{n=1}^N (m_n^2 - m_\infty^2) \mu_n^{2s-d}) f_s(x),$$

だから $s = 0$ まで解析接続すれば $f(x) = f_s(x)|_{s=0}$ は

$$\sin(2m_\infty \pi \mu_n^{-d/2} x_n), \text{ or } \cos(2m_\infty \pi \mu_n^{-d/2} x_n), \quad (50)$$

の無限積 $\prod_{n=1}^\infty f_n(x_n)$ であり、 $\zeta(G, s)$ が $s = -d$ で正則のとき $f(x)$ は

$$: \Delta : f(x) = -(m_\infty^2 \zeta(G, -d) + \sum_{n=1}^N (m_n^2 - m_\infty^2) \mu_n^{-d}) f(x), \quad (51)$$

を満たす。 $L^2(\hat{\mathbb{T}}^\infty)$ は ここで現われた $f(x)$ を完備直交系としてもつから

定理 1. $\zeta(G, s)$ が $s = -d$ で正則なら正則化 Laplasian $: \Delta :$ の境界条件 (49) に関する固有値は $H^\sharp$ では

$$\{-m^2 \zeta(G, -d) + \sum_{n=1}^N (m_n^2 - m^2) \mu_n^{-d} | m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

であり それに属する固有関数は $\prod_{n=1}^\infty f_n(x_n)$, $f_n(x_n)$ は (50) の形の無限積で $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = m$ となり n が充分大きければ $f_n(x_n)$ は 総て $\sin(2m \pi \mu_n^{-d/2} x_n)$, $m \geq 1$, または $\cos(2m \pi \mu_n^{-d/2} x_n)$, $m \geq 0$ となるものである。

H での境界条件 (49) に関する固有値・固有関数は このうち $m = 0$ となるものである ([6],[7])。

注意. 境界条件を

$$f(x)|_{x_n=0} = f(x)|_{x_n=\mu_n^{(d+k)/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{x_n=0} = \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{x_n=\mu_n^{(d+k)/2}},$$

と とると $\zeta(G, s)$ が $s = -(d+k)$ で正則のとき $\Delta :$ は $\zeta(G, -(d+k))$ を固有値としてもつ。しかし この場合 $\Delta :$ は H でなく W^k で定義されていると考えた方がよい。

なお $\zeta(G, s)$ が $s = -d$ で極を持つときは (G が楕円形作用素 D の Green 作用素のとき

$$\Delta(s)(sf_s)|_{s=0} = \text{Res}_{s=-d}\zeta(G, s)f(x),$$

であるが この意味付けは今の所出来ていない。

$\Delta :$ は H の極座標で

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\nu-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Lambda[\nu], \\ \Lambda[\nu] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{n-1}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_n^2} + (\nu - n - 1) \frac{\cos \theta_n}{\sin \theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta_n} \right), \end{aligned}$$

と表示される。 $\Lambda[\nu]$ は正則化球面 Laplacian と見られる。これを $\hat{S}^\infty$ で考えると ν が整数のとき 固有値は $l_n(l_n + \nu - n - 2)$, $l_n \in \mathbb{N}$, $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq 0$ で これに属する固有関数は Gegenbauer 多項式の有限積と

$$\int_0^{\theta_n} \sin^{n+1-\nu-2l_\infty} \theta_n d\theta_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} = l_\infty,$$

の無限積である。ただしこの後者は $\Lambda[\nu]$ を S^∞ で考えたときには現われない。 $\hat{S}^\infty$ の正則化体積要素によるこれらの固有関数の (正則化)norm の計算は課題である。

有限次元では $\Delta f = -\delta df$ と書ける。この表示を無限次元で行うために W^k の p -次微分形式を $\Lambda^p W^{-k}$ への関数、 $(\infty - p)$ -次微分形式を $\Lambda^p W^k$ への関数とし $(\infty - p)$ -次微分形式 f を $W^k \otimes \dots \otimes W^k$ への交代関数と見て その外微分 df を

$$df(x; x_1, \dots, x_{p-1}) = (-1)^{p-1} \text{tr}(\hat{d}f(x; x_1, \dots, x_{p-1}, x)),$$

で定義する。ただし $\hat{d}f$ は f の Fréchet 微分である。定義から f は各変数について微分可能で偏導関数が連続でも外微分可能ではない。例えば球面の形式的体積要素 $\omega = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} d^{\infty - \{n\}} x$ は外微分可能でない。しかし正則化外微分 $d :$ を

$$d : f(x; x_1, \dots, x_{p-1}) = (-1)^{p-1} \text{tr}(G^s \hat{d}f(x; x_1, \dots, x_{p-1}, x))|_{s=0},$$

で定義すれば $d : \omega = \nu d^\infty x$ となり ω は正則化外微分可能である。正則化外微分を使えば $\Delta : f d^\infty x = d : df$ と書ける。

$(\infty - p)$ -次微分形式については外微分可能なら大域的に完全形式になるなど有限次微分形式とかなり違っていて de Rham cohomology などは意味がない。しかし球面や torus に正則化体積要素が存在することはこれらの空間に Poincaré 双対が成立する de Rham 型 cohomology が存在することを示している。これらと正則化外微分、正則化体積要素 との関係調べるのは課題である。また 無限次元の cyclic cohomology, entire cyclic cohomology, ([14]) との関係を探るのも問題だろう。

注意. $(\infty - p)$ -次微分形式や 正則化外微分 d : は 写像空間などの「曲がった」空間でも定義できる ([2])。

15 G が $\mathcal{D}$ の Green 作用素の場合

G が Dirac 作用素 $\mathcal{D}$ の Green 作用素であれば G の固有値は D !/ の正固有値の二乗の逆数 $\mu_{+,1} \geq \mu_{+,2} \geq \dots > 0$ と負固有値の二乗の逆数 $\mu_{-,1} \geq \mu_{-,2} \geq \dots > 0$ に分かれる。固有 Vector を $e_{\pm,n}$; $Ge_{\pm,n} = \mu_{\pm,n}e_{\pm,n}$, とし (H^- の中で) $e_{\pm,\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\pm,n}e_{\pm,n}$,

$$H^{\sharp,2} = H \oplus \mathbb{K}^2, \quad \mathbb{K}^2 = \{ae_{+,\infty} + be_{-,\infty} | a, b \in \mathbb{K}\}, \quad (52)$$

とする ($H^{\sharp,2}$ は $\{H, G\}$ だけでは決まらない)。また $\mathcal{D}$ の正固有空間を H_+ , 負固有空間を H_- , $H_{\pm}^{\sharp} = H_{\pm} \oplus \mathbb{K}e_{\pm,\infty}$ とする。定義から

$$H^{\sharp,2} = H_+^{\sharp} \oplus H_-^{\sharp},$$

である。 $W^{k,\sharp,2}$, $W_{\pm}^{k,\sharp}$ 等も同様に定義する。

以下 H を実 Hilbert 空間とする。 H_+ から H_- への等距離作用素 F を固定し $Fe_{+,n} = e_{-,n}$ とする。 $\mu_{\pm,n} = \lambda_{\pm,n}^{-2}$; $\mathcal{D}e_{-,n} = -\lambda_{+,n}e_{-,n}$ と取れなければ F は G と可換にはとれない。しかし F によって

$$Je_{+,n} = e_{-,n}, \quad Je_{-,n} = -e_{+,n}, \quad Je_{+,\infty} = e_{-,\infty}, \quad Je_{-,\infty} = -e_{+,\infty},$$

で $H^{\sharp,2}$ に $\sqrt{-1}$ -作用素 J が導入され $H^{\sharp,2}$ に複素構造が入る。この複素構造は F によってさだまるので、 $H^{\sharp,2}$ に対して一意ではない。また $\mu_{+,n} = \mu_{-,n}$, $n = 1, 2, \dots$, でないと F は $H_+^{\sharp}$ から $H_-^{\sharp}$ の写像に拡張できない。

$H_{\pm}$ での正則化体積要素を $d^{\pm,\infty}x$: とすれば

$$F^*(:d^{\pm,\infty}x:) = :d^{\mp,\infty}x:, \quad |:d^{\infty}x:| = |:d^{+,\infty}x:|, \quad (53)$$

である。この 2 番目の式は $H^{\sharp,2}$ の符号を無視したものだが符号についての議論は省略する。なおこの式から $H^{\sharp,2}$ の上では $:d^{\pm,\infty}:$ と書くより $:d^{\mp,\infty/2}:$ と書くほうが適切である。

$H^{\sharp,2}$ では整数列 $n_{\pm,i}$ が 極限 $\lim_{i \rightarrow \infty} n_{\pm,i} = n_{\pm,\infty}$ をもつとき 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} f_{+,n}(x_{+,n}) f_{-,n}(x_{-,n}), f_{\pm,n}(x_{\pm,n})$ は

$$f_{\pm,n}(x_{\pm,n}) = \sin(2n_{\pm,i}\pi\mu_{\pm,n}^{-(d/2)}x_{\pm,n}), \text{ or } \cos(2n_{\pm,j}\pi\mu_{\pm,n}^{-(d/2)}x_{\pm,n}),$$

の形で それぞれの添え字 $\pm,n$ について有限個を除いて 総て

$$\begin{aligned} f_{+,n}(x_{+,n}) &= \sin(c_{+,n}x_{+,n}), & f_{-,n}(x_{-,n}) &= \cos(c_{-,n}x_{-,n}), \text{ or} \\ f_{+,n}(x_{+,n}) &= \cos(c_{+,n}x_{+,n}), & f_{-,n}(x_{-,n}) &= \sin(c_{-,n}x_{-,n}), \end{aligned}$$

となれば意味がある。命題 2 と (53) から $\hat{D}_{\pm}^{\infty} \subset H_{\pm}^{\sharp}$ を $\hat{D}^{\infty}$ と 同様に定義したとき

$$\begin{aligned} &\int_{\hat{D}_{+}^{\infty} \times \hat{D}_{-}^{\infty}} \prod_n f_{+,n}(x_{+,n}) \prod_n f_{-,n}(x_{-,n}) \times \\ &\times \prod_n g_{+,n}(x_{+,n}) \prod_n g_{-,n}(x_{-,n}) : d^{+, \infty/2} x : \cdots : d^{-, \infty/2} x :, \end{aligned}$$

は命題 1 により計算できるから $H^{\sharp,2}$ でも Fourier 展開ができる。とくに $F : H_{+}^{\sharp} \rightarrow H_{-}^{\sharp}$ が定義できれば Fourier 展開された関数は複素 torus 上の関数とおもえ 種々の応用が期待できる。

$H^{\sharp,2}$ での Fourier 展開は $\zeta(D_{\pm}, s)$ が $s = -d$ で正則のとき 正則化 Laplacian: $\Delta : H^{\sharp,2}$ で境界条件 (49) を与えた時の固有関数である。この時の固有値は

$$\begin{aligned} &-((m_{+}\zeta(D_{+}, -d) + \sum_{n=1}^{N_{+}}(m_{+,n}^2 - m_{+}^2)\mu_{n,+}^{-d}) + \\ &+ (m_{-}\zeta(D_{-}, -d) + \sum_{n=1}^{N_{-}}(m_{-,n}^2 - m_{-}^2))), \end{aligned}$$

となる。

注意。 G が正定値のときは「曲がった空間」に 今までの議論を拡張するのは容易だが G が $\mathcal{D}$ の Green 作用素のような場合は空間が parallelisable なことが必要になる ([2],[5])。

写像空間 $Map(X, M)$ では G として X の正值楕円形作用素 D をとり $D \otimes I_N, N = \dim M$ を取れば 今までの議論の拡張が出来るが この場合 G の固有値は重複度 N (以上) と成るので それに対応して W^k に N -個の vector $e_{1,\infty,k}, \dots, e_{N,\infty,k}$ を付け加えた空間 $W^{k,\infty,N}$ を $W^{2,\infty,k}$ と同様に構成する必要がある。

参考文献

- [1] Asada, A.: Remarks on the zeta-regularized determinant of differential operators, Proc. Conf. Moshé Flato II, eds. Dito. G. Stenheimer, 25-36. Kluwer, 2000.
- [2] Asada, A.: Regularized Calculus: An application of zeta regularization to infinite dimensional geometry and analysis, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 1(2004), 107-157.
- [3] Asada, A.: Zeta-regularization and calculus on infinite-dimensional spaces, AIP Conf. Proc. 729 (2004), 71-83.
浅田 明.: スケーリング変換のヤコビアン の正則化, 「力学系と微分幾何」数理研講究録 1408(2004), 20-39.
- [4] Asada, A.: Regularized volume form of the Hilbert space with the determinant bundle, Differential Geometry and Its Applications, 397-409, matfyzpress, 2004.
- [5] Asada, A.: Fractional calculus and regularized residue of infinite dimensional space, Mathematical Methods in Engineering, eds. Tas, K. et al. 3-11, Springer, 2007.
浅田 明.: 正則化無限積と正則化行列式, 「力学系と微分幾何」数理研講究録 1500(2006), 1-25.
- [6] Asada, A.: Regularized integral and Fourier expansion of functions on infinite dimensional tori, preprint.
Asada, A.: Note on fractional calculus, preprint.
- [7] Asada, A. Tanabe, N.: Regularized Hilbert space Laplacian and longitude of Hilbert space, BSG Proc. 6 ed. Tsagas, G., 1-10, Bucharest, 2002, Regularization of differential operators of a Hilbert space and meanings of zeta-regularization, Rev. Bull. Calcutta Math. Soc., 11(2003), 45-52.
- [8] Atiyah, M.F.: Global aspects of the theory of elliptic differential operators, Proc. ICM Moscow, 57-64. Moscow, 1968.
- [9] Atiyah, M.F. Patodi, V.K. Singer, I.M.: Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I, II, III, Proc. Cambridge Philos. Soc. 77(1975), 43-69, 78(1975) 405-432, 79(1976), 71-99.
- [10] Booss-Bavenik, B. Wojciechowski, K.: Elliptic Boundary Problems for Dirac Operators, Boston, 1993.
- [11] Burghelea, D. Friedlander, L. Kappeler, T.: Relative torsion, Commun. Contemp. Math. 3(2001), 15-85.
- [12] Cardona, A. Ducourtioux, C. Paycha, S.: From tracial anomalies to anomalies in quantum field theory, Commun. Math. Phys., 242(2002), 31-65.
- [13] Connes, A.: Noncommutative Geometry, Academic, 1994.

- [14] Cuntz, J.: Cyclic Theory, Bivariant K -Theory and the Bivariant Chern-Connes Character, EMS121. Cyclic Homology in Non-Commutative Geometry, eds. Cuntz, J. et al. 1-71. Springer 2001.
- [15] Elizalde, E. Odintsov, S.D. Romeo, A. Bytsenko, A. Zerbini, S.: Zeta Regularization Techniques with Applications, World Sci. 1994.
- [16] Fujii, K.: Standard and non-standard quantum models: A non-commutative version of the classical system of $SU(2)$ and $SU(1,1)$ arising from quantum optics, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 2(2005), 783-821.
- [17] Hawking, S.W.: Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime, Commun. Math. Phys. 55 (1977), 133-148.
- [18] Gilkey, P.: The residue of the global η function at the origin, Adv. Math. 40(1981), 290-307.
Gilkey, P.: The Geometry of Spherical Space Forms, World Sci., 1989.
- [19] Higson, N.: The local index formula in noncommutative geometry, ICTP Lect. Notes 15, eds. Karoubi, M. et al, 447-536, ICTP 2003.
- [20] Kontsevitch, S. Vishik, S.: Geometry of determinant of elliptic operators, Functional Analysis in the Eve of 21th Century, Progr. Math., 131(1993), 173-197.
- [21] Kori, T.: Index of the Dirac operator on S^4 and the infinite dimensional Grassmannian on S^3 , Japan J. Math. 22 (1996), 1-36.
- [22] Merlose, R. B.: The Atiyah-Patodi-Singer Index Theorem, ISBN 1568810024, Free online textbook.
内山康一訳.: 境界付き多様体のディラック作用素-Atiyah-Patodi-Singer の指数定理、スプリングァーフェアラーク東京 2004.
- [23] Okikiolu, K.: The Campbell-Hausdorff theorem for elliptic operators and a related trace formula, The multiplicative anomaly for determinant of elliptic operators, Duke Math. J., 79(1995), 682-722, 723-750.
- [24] Paycha, S.: Renormalized traces as a looking glass into infinite dimensional geometry, Infin. Dimens. Anal. Quantum Prob. Relat. Top. 4(2001), 221-266.
- [25] Radul, A.O.: Lie algebra of differential operators, their central extensions, and W -algebras, Funct. Anal. Appl. 25(1991), 25-39.
- [26] Ray, D. Singer, I.M.: R -torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds, Adv. Math. 7(1971), 145-210.
- [27] Scott, S.G. Wojciechowski, K.: The ζ -determinant and the Quillen determinant for a Dirac operator on a manifold with boundary, GAFA, Geom. Funct. Anal. 10(2000), 1202-1236.

- [28] Seeley, R.T.: Complex powers of an elliptic operator, Proc. Sympos. Pure Math. A.M.S. 10(1967), 288-307.
- [29] Simon, B.: Trace Ideals and Their Applications, Cambridge, 1979.
- [30] Wodzicki, M. Local invariants and spectral asymmetry, Inv. Math. 75(1984), 143-178.
- [31] Wodzicki, M.: Noncommutative residue. I. K -theory, arithmetic and geometry, Lect. Notes in Math., 1289, 320-399, Springer, 1987.
- [32] Wojciechowski, K.: The ζ -determinant and the additivity of the η -invariant on the smooth self-adjoint Grassmannian, Commun. Math. Phys., 201(1999), 423-444.