

KIRILLOV ノート ——— 1 章

coadjoint orbit の幾何

郡 敏昭 (Tosiaki Kori)

Kirillov のテキスト第 1 章を読んで、わかりにくいところ、証明のないところ、計算が省略されたところや セミナー参加者の予備知識が足りない部分について解説を補い、またセミナー中に気づいたり参加者に教えていただいたテキストの解説の背後の意味を記す。それらだけを書くとわからなくなるので、ふつうの定義や解説も書いておく。

cotangent bundle の接空間 $T_{(g,F)}T^*G$ の自明化において Kirillov によると cotangent bundle の fibering が $T^*G \ni gF \xrightarrow{\pi} g^{-1} \in G$ となっているので、 $T_{(g,F)}T^*G \xrightarrow{\pi_*} T_gG$ の vertical tangent を $T_{g^{-1}}^*G$ と考えることになり、不自然だと思うので書き直した。

具体的な群 $GL(n, \mathbb{R})$ その他を例にとった計算は (それこそ大切であるが) この部分には書いてない。第 2 章以下のノートも作られるはずでそのあたりにまとめた例集がつく予定である。

1 coadjoint orbit の symplectic 構造

coadjoint orbit 上の symplectic 構造を 3 つの方法で解説する。

1. winding number や vorticity, helicity の公式の類似。Theorem 1.
2. $\mathcal{G}^*$ の Poisson 構造の orbit への制限。Theorem 2.
3. cotangent bundle T^*G の正準構造の reduction. Theorem 3(2 節).

1.1

G : A Lie group, $\mathcal{G} = \text{Lie } G$: G のリー環.

Ex.

$G = GL(n, \mathbb{R})$, $\mathcal{G} = \text{Mat}(n, \mathbb{R})$.

- G の線形表現 (π, V) :

$$\begin{aligned} \pi &: G \longrightarrow \text{End}(V); \\ \pi(g_1 g_2)v &= \pi(g_1)(\pi(g_2)v), \quad \pi(e)v = \text{Id } v = v, \quad \pi(g^{-1})v = \pi(g)^{-1}v \end{aligned}$$

- (π, V) に対して dual linear representation (π^*, V^*) :

$$\pi^* : G \longrightarrow \text{End}(V^*), \quad V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}).$$

が

$$\pi^*(g) = \pi(g^{-1})^*,$$

すなわち、 $\langle \pi^*(g)f, v \rangle = \langle f, \pi(g^{-1}v) \rangle$, $f \in V^*$, $v \in V$, で定義される .

$$\pi^*(g_1 g_2) = \pi^*(g_1) \pi^*(g_2).$$

- 表現の Trace:

$A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ に対して

$$(A, B) = \text{Trace}(AB) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji}.$$

$(\cdot, \cdot)$ は bilinear ,

$$\text{non-degenerate} \quad (A, B) = 0 \quad \forall B, \implies A = 0.$$

内積および trace は conjugation で不変 :

$$(gAg^{-1}, gBg^{-1}) = (A, B).$$

1.2

- 内部自己同形:

$g \in G$ による G から G へ同形写像 ;

$$A(g) : G \ni h \longrightarrow ghg^{-1}.$$

とくに $A(e) = e$.

写像 $A(g)$ の $e \in G$ での微分 (derivation) :

$$\text{Ad}(g) = (A(g)_*)_e : \mathcal{G} = T_e G \longrightarrow T_e G = \mathcal{G}.$$

- Adjoint 表現 :

$$G \ni g \longrightarrow (\text{Ad}(g) : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}).$$

Ex.

G が matrix group (行列を元とする群) ($GL(n, \mathbb{R})$ の部分群) のとき

$$\text{Ad}(g)X = gXg^{-1}, \quad \forall X \in \mathcal{G}.$$

- Coadjoint 表現 (この綴りはロシアでは K で始まる)

$$K(g) = \text{Ad}^*(g) = (\text{Ad}(g^{-1}))^* \in \text{End}(\mathcal{G}^*). \quad (1)$$

$K(g)$ の無限小表現 (微分表現) $K_*(X)$, $X \in \mathcal{G}$, は

$$\langle K_*(X)F, Y \rangle = \langle F, -ad(X)Y \rangle = \langle F, [Y, X] \rangle, \quad F \in \mathcal{G}^*, X, Y \in \mathcal{G}.$$

- $F \in \mathcal{G}^*$ に対して、

$$B_F(X, Y) = \langle F, [X, Y] \rangle, \quad X, Y \in \mathcal{G},$$

とおく .

B_F は歪対称双 1 次形式である : $B_F \in \Lambda^2 \mathcal{G}^*$.

$$\ker B_F = \{X \in \mathcal{G} \mid B_F(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathcal{G}\}$$

とおく .

coadjoint な作用による安定部分群、安定部分環を

$$Stab(F) = \{g \in G : K(g)F = F\},$$

$$stab(F) = \{X \in \mathcal{G} : K_*(X)F = 0\}.$$

で定義する .

- $\ker B_F = stab(F)$.

$$B_F(X, Y) = \langle F, [X, Y] \rangle = \langle F, ad(X)Y \rangle = - \langle K_*(X)F, Y \rangle. \quad (2)$$

よりわかる .

- $\varphi \in \Lambda^2 \mathcal{G}^*$ への $g \in G$ の作用は式 (1) と同様に

$$(K(g)\varphi)(X, Y) = \varphi(Ad(g^{-1})X, Ad(g^{-1})Y) \quad (3)$$

で定義される . とくに

$$(K(g)B_F)(X, Y) = B_F(Ad(g^{-1})X, Ad(g^{-1})Y).$$

これは

$$\begin{aligned} (K(g)B_F)(X, Y) &= \langle F, [Ad(g^{-1})X, Ad(g^{-1})Y] \rangle = \langle F, Ad(g^{-1})[X, Y] \rangle \\ &= \langle K(g)F, [X, Y] \rangle = B_{K(g)F}(X, Y) \end{aligned}$$

に等しい .

- B_F は $Stab(F)$ 不変である .
上の式より、 $g \in Stab(F)$ なら

$$(K(g)B_F)(X, Y) = \langle K(g)F, [X, Y] \rangle = \langle F, [X, Y] \rangle = B_F(X, Y).$$

1.3 coadjoint orbit 上の symplectic 構造

$\mathcal{G}^*$ への G の coadjoint action $K(g)$, $g \in G$, の軌道を *coadjoint orbit* という .

$$\Omega_F = F \in \mathcal{G}^* \text{ を通る coadjoint orbit} = \{K(g)F; g \in G\} \subset \mathcal{G}^*.$$

Ω_F の $g \cdot F = K(g)F$ での接空間は

$$T_{g \cdot F} \Omega_F = \{K_*(X)(g \cdot F) \in \mathcal{G}^*; X \in \mathcal{G}\}.$$

• coadjoint orbit space $\Omega_F = \{K(g)F : g \in G\}$ は fiber bundle

$$G \xrightarrow{p_F} \Omega_F \simeq G/Stab(F), \quad p_F(g) = K(g)F$$

と考えられる .

F における接空間は

$$0 \longrightarrow T_e Stab(F) = stab(F) \hookrightarrow T_e G = \mathcal{G} \xrightarrow{(p_F)^*} T_F \Omega \longrightarrow 0.$$

$$T_F \Omega \simeq \mathcal{G}/stab(F).$$

.

定理 1 coadjoint orbit $\Omega = \Omega_F$ 上に 2 次微分形式 σ_Ω を

$$\sigma_\Omega(K_*(X)F, K_*(Y)F) = B_F(X, Y) \quad (4)$$

で定義する . σ_Ω は G 不変、非退化な閉形式である . すなわち (Ω, σ_Ω) は *symplectic space* になる .

$X, X' \in \mathcal{G}$ に対し $K_*(X)F = K_*(X')F$ であれば、式 (2) より $B_F(X, Y) = B_F(X', Y)$, $\forall Y \in \mathcal{G}$. したがって σ_Ω は G 上 well defined で、さらに、 $X \in stab(F)$ なら $X \in \ker B_F$ より σ_Ω は Ω_F 上で well defined .

B_F が歪対称だから σ_Ω は Ω_F 上の 2 次微分形式である .

σ_Ω は G 不変 :

実際 $g \in G$ の σ_Ω への作用は式 (3) で定義され、

$$\begin{aligned} (K(g) \sigma_\Omega)_F (K_*(X)F, K_*(Y)F) &= (\sigma_\Omega)_F (K_*(Ad(g^{-1}X)F), K_*(Ad(g^{-1}Y)F)) \\ &= B_F(Ad(g^{-1}X), Ad(g^{-1}Y)) = (K(g)B_F)(X, Y) \\ &= B_{K(g)F}(X, Y) = (\sigma_\Omega)_{K(g)F} (K_*(X)F, K_*(Y)F). \end{aligned}$$

ゆえに $(g^* \sigma_\Omega)_F = (\sigma_\Omega)_{K(g)F}$.

以上より σ_Ω は Ω_F 上の G 不変 2 次微分形式である .

$\ker B_F = stab(F)$, より σ_Ω は非退化 .

$d\sigma_\Omega = 0$ を示そう . G 不変なので $F \in \Omega$ において示せばよい .

$\xi, \eta, \zeta \in T_F \Omega$ すなわち

$$\xi(F) = K_*(X)F, \eta(F) = K_*(Y), \zeta(F) = K_*(Z)$$

としよう .

$$\begin{aligned} d\sigma(\xi, \eta, \zeta) &= \xi \sigma(\eta, \zeta) + \eta \sigma(\zeta, \xi) + \zeta \sigma(\xi, \eta) \\ &- \sigma([\xi, \eta], \zeta) - \sigma([\eta, \zeta], \xi) - \sigma([\zeta, \xi], \eta) \end{aligned}$$

だが

$$\sigma(\eta, \zeta) = \langle F, [Y, Z] \rangle, \quad \xi \sigma(\eta, \zeta) = \langle K_*(X)F, [y, z] \rangle = - \langle F, [X, [Y, Z]] \rangle,$$

$K_* : \mathcal{G} \longrightarrow \text{End}(\mathcal{G}^*)$ はリー環の表現だから

$$[\xi, \eta] = -K_*([X, Y])F.$$

これらを代入し Jacobi の恒等式より $d\sigma = 0$.

1.4

- Maurer-Cartan form.
 $g \in G$ による left translation を

$$L_g : G \ni h \longrightarrow L_g h = gh \in G.$$

その微分を

$$(L_g)_{*,h} : T_h G \longrightarrow T_{gh} G$$

とする .

とくに

$$\theta_g = (L_{g^{-1}})_{*,g} : T_g G \longrightarrow T_e G = \mathcal{G} \quad (5)$$

が重要である .

$$X \in T_g G \longrightarrow \theta_g(X) \in \mathcal{G}$$

は G 上の $\mathcal{G}$ に値をとる 1 次微分形式 θ と考えられる .

$\theta_e = (L_e)_{*,e} = \text{Id}_{\mathcal{G}}$ である .

G 上の Maurer-Cartan 1-form θ とは, G 上の 1 次微分形式で $\theta_e(X) = X$, $\forall X \in \mathcal{G}$, を満たすものをいう .

G が matrices のリー環のときには, 行列 g^{-1} の左からの積

$$\theta_g(X) = g^{-1}X$$

になる . このため

$$\theta = g^{-1}dg$$

と書くことが多い .

θ は左不変である .

実際、

$$(L_a)_g^*, T_{ag}^* G \longrightarrow T_g^* G,$$

は

$$\langle (L_a)_g^* F, X \rangle = \langle F, (L_a)_{*,g} X \rangle, \quad F \in T_{ag}^* G, X \in T_g G.$$

で定義されることに注意すると, $X \in T_g G$ に対して

$$\begin{aligned}(L_a)_g^* \theta_{ag}(X) &= \theta_{ag}((L_a)_{*,g} X) = (L_{(ag)^{-1}})_{*,ag} (L_a)_{*,g} X \\ &= (L_{g^{-1}})_{*,g} (L_{a^{-1}})_{*,ag} (L_a)_{*,g} X = (L_{g^{-1}})_{*,g} X = \theta_g(X)\end{aligned}$$

• Ω_F 上の closed 2-form σ の引き戻しとして G 上の G 不変な closed 2-form $(p_F)^* \sigma$ が得られる.

$((p_F)^* \sigma)_e = B_F$ である.

G が単連結なら $(p_F)^* \sigma$ は G 上の exact form になる. G が単連結でなくともこれが成り立つことを見よう.

θ を Maurer-Cartan form, $F \in \mathcal{G}^*$ として G 上の $\mathbb{R}$ 値 1 次形式

$$\theta_F = - \langle F, \theta \rangle,$$

$$(\theta_F)_g(X) = - \langle F, \theta_g(X) \rangle, \quad X \in T_g G, g \in G$$

を考える.

•

$$(p_F)^* \sigma = d\theta_F \tag{6}$$

なぜなら、 X, Y を G 上の left-invariant vector fields とすると、

$$\begin{aligned}d\theta_F(X, Y) &= X\theta_F(Y) - Y\theta_F(X) - \theta_F([X, Y]) = -\theta_F([X, Y]) = \langle F, \theta([X, Y]) \rangle \\ &= \langle F, [X(e), Y(e)] \rangle = B_F(X(e), Y(e)) = (p_F)^*(\sigma)(X, Y).\end{aligned}$$

1.5 $\mathcal{G}^*$ の symplectic leaves と coadjoint orbits の対応

• Poisson manifolds.

$(P, \{, \})$: Poisson manifold $\iff$

1. $(C^\infty(P), \{, \})$: Lie algebra.
2. $(C^\infty(P), \{, \})$: Differential algebra.

Ex.

Symplectic manifold は Poisson manifold.

$\{f, g\}$ は f, g の一階微分 (線形部分) にのみ依存して定まる. このことに注意して次のように定義することもできる.

• (P, c) : Poisson manifold $\iff$

$$\exists c : \text{ a bivector fields on } P \text{ such that } [c, c]_{\text{Schatten}} = 0.$$

二つの定義の関係は :

$$\{f, g\}(z) = c_z(df(z), dg(z)), \quad f, g \in C^\infty(P).$$

$c \in \Gamma(\wedge^2 T^*P = \wedge_2 TP)$, bivector field, とは smooth contravariant anti-symmetric 2-tensor field のことで、局所座標で

$$c = \sum_{i,j} c^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\{x^i, x^j\} = c^{ij}(x) = -c^{ji}(x), \quad \{f, g\} = \sum_{i,j} c^{ij} \partial_i f \partial_j g.$$

上で $[\cdot, \cdot]_{Schatten}$ は Schatten bracket で contravariant anti-symmetric tensor field 上定義された Jacobi bracket の拡張 .

Ex.

Symplectic manifold (M, ω) は, $c = \omega^{-1}$ として Poisson manifold (M, c) を与える.

Ex.

Lie algebra $\mathcal{G}$ の構造定数を c_k^{ij} ; すなわち基底 $T_1, T_2, \dots, T_m$ に対して $[T_i, T_j] = \sum_k c_k^{ij} T^k$ とするとき、bivector field

$$c = \sum_{i,j} \left(\sum_k c_k^{ij} X^k \right) \partial_i \wedge \partial_j$$

により $(\mathcal{G}, c)$ が Poisson manifold になる . ここに X^k は $\mathcal{G}$ 上の座標関数 .
 $f, g \in C^\infty(\mathcal{G})$ に対して

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \left(\sum_k c_k^{ij} X^k \right) \partial_i f \partial_j g.$$

例

$\mathcal{G} = so(3) \simeq \mathbb{R}^3$: ただし

$$so(3) \ni \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

$$\text{構造定数 } c_k^{ij} = \epsilon_k^{ij} = \begin{cases} 1, & \{i, j, k\} \text{ 偶置換のとき} \\ -1, & \{i, j, k\} \text{ 奇置換のとき} \end{cases}$$

で

$$\{f, g\}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\nabla f \times \nabla g).$$

例.

Lie algebra $\mathcal{G}$ に対して dual of a Lie algebra $\mathcal{G}^*$ は Poisson manifold になる .

より一般に

- V を vector space, $X^1, X^2, \dots, X^m$ を座標関数とし、bivector field

$$c = \sum_{i,j} \left(\sum_k c_k^{ij} X^k \right) \partial_i \wedge \partial_j, \quad c_k^{ij} = -c_k^{ji}$$

が与えられたとき次の二つは同値 :

1. (P, c) は Poisson algebra;

($\sum_k c_k^{ij} X^k = -\sum_k c_k^{ji} X^k$ は仮定されているので、Jacobi identity、または Schatten bracket=0, が満たされるということ.)

2. $\mathcal{G} = V^*$ は c_k^{ij} を構造定数とするリー代数になる.

proof

$(V, \{\cdot, \cdot\})$ を Poisson manifold とする. $f, g \in C^\infty(V)$ に対して $\{f, g\}$ は V 上の linear function だから $\{f, g\} \in V^*$ 、すなわち V^* は $\{\cdot, \cdot\}$ で閉じている. また $\{\cdot, \cdot\}$ は Lie bracket を与えているから V^* は $(C^\infty(V), \{\cdot, \cdot\})$ の Lie subalgebra. 座標関数 $X_k, k = 1, 2, \dots$ は $V \ni X \rightarrow X_k$ と見て V^* の基底となり $\{X_i, X_j\} = \sum_k c_k^{ij} X_k$ より c_k^{ij} は $\mathcal{G} = V^*$ の構造定数.

逆に $\mathcal{G} = V^*$ が c_k^{ij} を構造定数とするリー代数とすると V^* の元, すなわち V 上の linear function に対しては Jacobi Identity より

$$\{l_1, l_2\} + \{l_2, l_3\} + \{l_3, l_1\} = 0$$

が成り立ち、一般な C^∞ 関数に対しては $\{f, g\}$ が f, g の一階の項 (linear part) にしか依存しないことから $\{f, g\} + \{g, h\} + \{h, f\} = 0$ が成り立つ. ゆえに $(V, \{\cdot, \cdot\})$ は Poisson algebra.

• $(P, \{\cdot, \cdot\})$; Poisson manifold に対して

$$C^\infty(P) \ni H \rightarrow \{\cdot, H\}$$

は微分 (Leibnitz 則を満たす写像) だから、 P 上のベクトル場 X_H があり

$$X_H F = \{F, H\}, \quad \forall F. \quad (7)$$

X_H をハミルトンベクトル場という.

$C^\infty(V), \{\cdot, \cdot\} \ni H \rightarrow X_H \in Vect(P)$ は Lie algebra anti-homomorphism:

$$X_{[H, K]} = -[X_H, X_K]. \quad (8)$$

Poisson manifold の 2 点 z_1, z_2 が同じ symplectic leaf 上にあるとは、 z_1 と z_2 を結ぶ P 内の piecewise smooth curve $\gamma = \gamma(t)$ で接ベクトル $\dot{\gamma}$ が Hamilton vector field となっていることをいう.

これは同値関係を与え、 $z \in P$ と同値な点全体を

• z を通る symplectic leaf Σ_z という.

有限次元の Poisson manifold は symplectic leaves の disjoint sum になり、各 leaf Σ は P の部分多様体で、その symplectic 構造は

$$(\omega_\Sigma)_z(X_F|_\Sigma, X_G|_\Sigma) = \{F, G\}(z)$$

で与えられる. ここに F, G は Σ のある近傍で定義された C^∞ 関数.

これは、式 (8) よりハミルトンベクトル場全体が可積分条件をみたすことと、Frobenius の定理より従う.

定理 2 *Poisson manifold* $(\mathcal{G}^*, \{, \})$ の *symplectic leaves* 全体と $\mathcal{G}^*$ の *coadjoint orbits* 全体とは *bijective* に対応している .

proof

定義より symplectic leaf の接ベクトルはハミルトンベクトル場であり、leaf 上の symplectic 構造は Poisson 構造を leaf に制限したものである . また式 (7) より $(\mathcal{G}^*, \{, \})$ の Poisson 構造 に付随したハミルトンベクトル場は

$$X_f = \sum_i \left(\sum_{j,k} c_k^{ij} X^k \partial_j f \right) \partial_i$$

の形をしている . ここに $\partial_i, i = 1, 2, \dots$ は $(\mathcal{G}$ の基底 . したがって $X \in \mathcal{G}^*$ を通る symplectic leaf L_X の接空間は, X のまわりの局所基底を $X^1, \dots, X^n$, として、

$$T_X L_X = \text{Linear span} \left\{ \sum_{i,k} c_k^{ij} X^k \partial_i; \quad j = 1, 2, \dots \right\}$$

一方

$$\langle K_*(\partial_i)X, \partial_j \rangle = \langle X, [\partial_j, \partial_i] \rangle = \sum_k c_k^{ij} X^k$$

だから $K_*(\partial_i)X = \sum_{j,k} c_k^{ij} X^k \partial_j$. ゆえに

$$\begin{aligned} T_X L_X &= \text{Linear span} \{ K_*(\partial_i)X; \quad i = 1, 2, \dots, n \} \\ &= T_X \Omega_X. \end{aligned}$$

したがって X を通る symplectic leaf と coadjoint orbit の接空間が一致するから その積分多様体 L_X と Ω_X は一致する .

2 coadjoint orbit $\subset$ ハミルトニアン G space T^*G

2.1 T^*G

- ベクトル空間の間の線形写像 $f : V \longrightarrow W$ に対して、その双対線形写像 (dual map)

$$f^* : W^* \longrightarrow V^*$$

は

$$\langle f^*b, v \rangle = \langle b, fv \rangle$$

で定義される .

- $R_g : G \ni h \longrightarrow hg \in G$; 右移動 . その微分は

$$(R_g)_*h : T_hG \longrightarrow T_{hg}G,$$

とくに

$$(R_{g^{-1}})_{*g} : T_gG \longrightarrow \mathcal{G}.$$

$(R_{g^{-1}})_{*g}$ の dual map は

$$(R_{g^{-1}})_g^* : \mathcal{G}^* \longrightarrow T_g^*G.$$

$$\langle (R_{g^{-1}})_g^*F, \Xi \rangle = \langle F, (R_{g^{-1}})_{*g}\Xi \rangle, \quad \Xi \in T_gG.$$

- cotangent bundle T^*G の自明化 (trivialization):
自明化 $T^*G \xrightarrow{\simeq} G \times \mathcal{G}^*$ を

$$(R_g)_e^* : T_g^*G \xrightarrow{\simeq} \mathcal{G}^*$$

を用いて次のように与える .

$F \in \mathcal{G}^*$ として

$$(R_g)_e^* : T_g^*G \ni (R_{g^{-1}})_g^*F \longrightarrow (R_g)_e^*(R_{g^{-1}})_g^*F = F \in \mathcal{G}^*$$

となっている .

簡単のため $Fg^{-1} = (R_{g^{-1}})_g^*F$ と書く . G が行列からなるときはこうなる .

$T^*G \xrightarrow{\pi} G$ の $g \in G$ 上の fiber T_g^*G の点は Fg^{-1} , $F \in \mathcal{G}^*$, であった . この対応により (右) 自明化は

$$T^*G \ni (g, Fg^{-1}) \longrightarrow (g, F) \in G \times \mathcal{G}^*$$

となる .

- 接空間 $T(T^*G)$ も自明化される .
 $T^*G \simeq G \times \mathcal{G}^*$ より, Fg^{-1} での T^*G への接空間は

$$T_{Fg^{-1}}(T^*G) \simeq T_gG \oplus \mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*.$$

ゆえに

$$T(T^*G) \simeq T^*G \times (\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*) \simeq (G \times \mathcal{G}^*) \times (\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*) \quad (9)$$

$$T(T^*G) \ni (g, Fg^{-1}, (R_g)_*X \oplus F'g^{-1}) \longrightarrow (g, F, X \oplus F') \in (G \times \mathcal{G}^*) \times (\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*).$$

• 一般に cotangent bundle $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ 上には次のように標準的な 1 次形式 θ が定義される：

$$T_\alpha(T^*M) \ni \mathbf{v}, \quad \alpha \in T_{\pi\alpha}^*M$$

としよう．

$$T_\alpha(T^*M) \xrightarrow{\pi_*} T_{\pi\alpha}M$$

による像を $\pi_*\mathbf{v} \in T_{\pi\alpha}M$ とする． $\mathbf{v}$ に $\alpha(\pi_*\mathbf{v})$ を対応させることにより T^*M 上の 1 次形式が定義される：

$$\theta_\alpha(\mathbf{v}) = \alpha(\pi_*\mathbf{v}).$$

以上を cotangent bundle T^*G に適用して， T^*G 上の canonical 1-form

$$\theta_{Fg^{-1}}(\mathbf{v}) = \langle Fg^{-1}, (R_g)_*X \rangle$$

が定まる．ここに

$$\mathbf{v}(g) = ((R_g)_*X \oplus F'g^{-1}) \in T_{Fg^{-1}}(T^*G), \quad \forall X \in \mathcal{G}, F' \in \mathcal{G}^*.$$

あるいは自明化 (9) により $\mathbf{v} = (X \oplus F')$ と略記するほうがわかりやすい ($\mathbf{v}$ は right invariant vector field.) この右辺は

$$\langle (R_{g^{-1}})_g^*F, (R_g)_*X \rangle = \langle F, (R_{g^{-1}})_*g(R_g)_*X \rangle = \langle F, X \rangle$$

だから canonical 1-form θ は, $\forall \mathbf{v} = (X \oplus F') \in (\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*)$ に対して

$$\theta_{Fg^{-1}}(\mathbf{v}) = \langle F, X \rangle \quad (10)$$

で与えられる．

• $\sigma = d\theta$ を T^*G 上の canonical symplectic form という．

外微分の公式より right invariant vector fields $\mathbf{v}_i, i = 1, 2$, に対して

$$d\sigma(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1\theta(\mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_2\theta(\mathbf{v}_1) - \theta([\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]).$$

定理 3 *The canonical symplectic form on T^*G を trivialization $T^*G \simeq G \times \mathcal{G}^*$ により $G \times \mathcal{G}^*$ 上の形式として書くと次のようになる．*

$$\begin{aligned} \sigma_{(g,F)}(X_1 \oplus F_1, X_2 \oplus F_2) \\ = \langle F_1, X_2 \rangle - \langle F_2, X_1 \rangle - \langle F, [X_1, X_2] \rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

Proof

上の外微分の公式で right invariant vector field $\mathbf{v}_i$ を $(e, 0) \in G \times \mathcal{G}^*$ を initial value

$$\mathbf{v}_i(e, 0) = X_i \oplus F_i$$

により定め, $(g, Fg^{-1}) \in T^*G$ での σ の値を計算するかわりに $(e, 0)$ ですなわち自明化 $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ において計算する. Lie algebra $T_{(e,0)}(T^*G) = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ の構造がわからねばならない. 次の節でそれを述べる. その結果によれば

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]((e, 0)) = ([X_1, X_2], K_*(X_1)F_2 - K_*(X_2)F_1)$$

となる. 式 (10) より

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1\theta(\mathbf{v}_2)((g, g^{-1}F)) &= \mathbf{v}_1(\langle F, X_2 \rangle) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\langle F + tF_1, X_2 \rangle - \langle F, X_2 \rangle) = \langle F_1, X_2 \rangle. \end{aligned}$$

同様に

$$\mathbf{v}_2\theta(\mathbf{v}_1)((g, F)) = \langle F_2, X_1 \rangle.$$

また

$$\theta_{(g,F)}([\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]) = \langle F, [X_1, X_2] \rangle$$

以上を外微分の公式に代入して定理 3 が証明される.

2.2 Lie group T^*G と Lie algebra $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$

T^*G の自明化 $T^*G \simeq G \times \mathcal{G}^*$ を見た. ここに Lie 群の構造を定義しよう. Lie 群 G の vector space $\mathcal{G}^*$ への表現 $K: G \rightarrow \text{End}(\mathcal{G}^*)$ による abelian extension を定義する.

$G \times \mathcal{G}^*$ に次の積を定義する.

$$(g_1, F_1) \cdot (g_2, F_2) = (g_1g_2, K(g_2^{-1})F_1 + F_2). \quad (12)$$

この積により $G \times \mathcal{G}^*$ はリー群になる.

$$(g, F)^{-1} = (g^{-1}, -K(g)F).$$

$$G \ni g \longrightarrow (g, 0) \in G \times \mathcal{G}^*$$

$$\mathcal{G}^* \longrightarrow (e, F) \in G \times \mathcal{G}^*$$

により $G, \mathcal{G}^*$ は部分群になる.

$T^*G \ni Fg^{-1}$ と $(g, 0) \cdot (e, F) = (g, F) \in G \times \mathcal{G}^*$ により これまでの記法と両立する (逆準同形になっているが).

• $\text{Lie}(G \times \mathcal{G}^*)$.

$\gamma(t) \subset G \times \mathcal{G}^*$ を

$$\dot{\gamma}(0) = (X, F) \in \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*, \quad \gamma(0) = (e, 0)$$

なる曲線 $\gamma(t) = (e^{tX}, tF)$ とすると、

$$\begin{aligned} [(X, F), (Y, G)]_{\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (e^{sX}, sF)(e^{tY}, tY)(e^{sX}, sF)^{-1}(e^{tY}, tY)^{-1} \\ &= \left([X, Y], \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} K(e^{sX})G - \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} K(e^{tY})F \right) = ([X, Y], K_*(X)G - K_*(Y)F) \end{aligned}$$

2.3 Symplectic reduction

• 多様体 M に Lie 群 G が作用しているとき $\xi \in \mathcal{G} = \text{Lie}G$ による infinitesimal generator とは

$$\xi_M(m) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp t\xi) m$$

なる M 上のベクトル場 ξ_M のことである .

$\mathcal{G} \ni \xi \longrightarrow \xi_M \in \text{Vect}(M)$ は Lie algebra anti-homomorphism なる :

$$([\xi, \eta])_M = -[\xi_M, \eta_M].$$

symplectic 多様体 (M, ω) に Lie 群 G が symplectic に作用するとする :
すなわち

$$g^* \omega = \omega, \quad \forall g \in G.$$

が満たされる .

関数 $f \in C^\infty(M)$ に対するハミルトンベクトル場 X_f ; (Kirillov text では symplectic gradient $s; \text{grad } f$)、とは

$$\begin{aligned} \omega_m(\cdot, X_f) &= df_m(\cdot) \\ \omega_m(\cdot, s \text{grad } f) &= df_m(\cdot) \end{aligned} \tag{13}$$

を満たすベクトル場 $X_f = s \text{grad } f$ のことをいう .

• $\xi \in \mathcal{G}$ に対する infinitesimal generator ξ_M が, ある $j^\xi \in C^\infty(M)$ のハミルトンベクトル場になり、すなわち

$$\omega_m(\cdot, \xi_M) = dj_m^\xi(\cdot)$$

となり、対応 $\xi \longrightarrow j^\xi \in C^\infty(M)$ が Lie alg. homo. となるとき ; すなわち

$$j^{[\xi, \eta]} = \{ j^\xi, j^\eta \}$$

が成り立つとき、

G の (M, ω) への作用はハミルトン作用であるという . ここに

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = X_g(f)$$

は Poisson bracket である .
 このとき写像

$$J : M \ni m \longrightarrow (\xi \longrightarrow j^\xi(m)) \in \mathcal{G}^* \quad (14)$$

を G の symplectic 作用の *moment map* という .

例. $G = O(3)$ は symplectic manifold ($M = T^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^6$, $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$) に symplectic に作用する. この moment map を求める .

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in o(3) = \mathcal{G}.$$

$$\exp tE_3 \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$(E_3)_M = \frac{d}{dt} \exp tE_3 = -q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

これをハミルトンベクトル場とするハミルトニアンは canonical 1-form θ を使って容易に求まり

$$\theta((E_3)_M) = -p_1 q_2 + p_2 q_1 = M_3.$$

実際

$$\omega(\cdot, (E_3)_M) = (d\theta)(\cdot, (E_3)_M) = d(-p_1 q_2 + p_2 q_1).$$

E_1, E_2 の infinitesimal 作用に対しても同様に, 結局
 $\xi = \sum c_i E_i \in \mathcal{G}$ の作用での j^ξ は

$$j^\xi = \sum c_i M_i.$$

ここに

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

は角運動量ベクトル . モーメント写像は

$$J(q, p) = \left(\xi = \sum c_i E_i \longrightarrow \sum c_i M_i \right).$$

すなわち角運動量ベクトル (= 物理のテキストの moment map)

$$J = (M_1, M_2, M_3) = \mathbf{M}$$

にほかならない．

- moment map

$$J: M \longrightarrow \mathcal{G}^*$$

により値 $F \in \mathcal{G}^*$ を取る点の全体 $J^{-1}(F) \subset M$ にも G は symplectic に作用している．この作用が free なら商空間

$$J^{-1}(F)/G$$

は多様体となり symplectic 構造が induce される． $J^{-1}(F)/G$ を G の M への作用による *symplectic reduction* という．

2.4 coadjoint orbit = T^*G の symplectic reduction

T^*G への G の左作用、右作用、両側作用のそれぞれについてモーメント写像を計算し、それらの symplectic reduction が coadjoint orbit になることを示す．
計算は自明化

$$T^*G \simeq G \times \mathcal{G}^*$$

により行う．

- G 上の右作用による基本ベクトル場：
 $\xi \in \mathcal{G}$ による G 上の基本ベクトル場は

$$\xi_L(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g \cdot \exp t\xi) = (L_g)_* \xi$$

でこれは左不変なベクトル場である： $\xi_L(e) = \xi$ ．

- G 上の左作用による基本ベクトル場：
 $\xi \in \mathcal{G}$ による G 上の基本ベクトル場は

$$\xi_R(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp t\xi \cdot g) = (R_g)_* \xi$$

でこれは右不変なベクトル場である： $\xi_R(e) = \xi$ ．

注 Maurer-Cartan form $\theta_g = (L_{g^{-1}})_* g$ に対して

$$\theta_g(\xi_L(g)) = \xi, \quad \theta_g(\xi_R(g)) = \text{Ad}_{g^{-1}} \xi.$$

- $T^*G \simeq G \times \mathcal{G}^*$ に持ち上げ．

右作用、左作用の持ち上げは両側作用の持ち上げの特別な場合なので両側作用をしらべる．

両側作用 $(G \times G) \times T^*G \longrightarrow T^*G$ を

trivialization $T^*G \xrightarrow{\text{Id} \times (L_g)_e^*} G \times \mathcal{G}^*$ を用いて

$$\text{両側作用 } (G \times G) \times (G \times \mathcal{G}^*) \longrightarrow G \times \mathcal{G}^*$$

として定義する．

それは

$$(g_1, g_2) \cdot (h, F) = (g_1 h g_2^{-1}, K(g_2)F)$$

で与えられる.

したがって 左作用は

$$g \cdot (h, F) = (gh, F)$$

右作用は

$$(h, F) \cdot g = (hg^{-1}, K(g)F).$$

- $T^*G \simeq G \times \mathcal{G}^*$ 上の infinitesimal left shift の基本ベクトル場 :

$\xi \in \mathcal{G}$ に対して (自明化 $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ 上のベクトル場として)

$$\begin{aligned} \xi_R^{T^*G}((g, F)) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\exp t\xi, e) \cdot (g, F) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\exp t\xi g, F) \\ &= (\xi_R(g), 0). \end{aligned}$$

ここで自明化 $(R_{g^{-1}})_{*g} : T_g G \longrightarrow \mathcal{G}$ により $\xi_R(g)\xi = (R_g)_{*g}\xi \in T_g G$ は $(R_{g^{-1}})_{*g}(R_g)_{*g}\xi = \xi$ に移ることに注意すると、

$$\xi_R^{T^*G}((g, F)) = (\xi, 0).$$

- $T^*G \simeq G \times \mathcal{G}^*$ 上の infinitesimal right shift の基本ベクトル場 :

$\xi \in \mathcal{G}$ に対して

$$\begin{aligned} \xi_L^{T^*G}((g, F)) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (g, F) \cdot \exp t\xi = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (g \cdot \exp(-t\xi), K(\exp t\xi)F) \\ &= (-\xi_L(g), K_*(\xi)F). \end{aligned}$$

ここで自明化 $(R_{g^{-1}})_{*g} : T_g G \longrightarrow \mathcal{G}$ により $-\xi_L(g)\xi = -(L_g)_{*g}\xi \in T_g G$ は $-(R_{g^{-1}})_{*g}(L_g)_{*g}\xi = Ad_{g^{-1}}\xi$ に移ることに注意すると、

$$\xi_L^{T^*G}((g, F)) = (Ad_{g^{-1}}\xi, K_*(\xi)F).$$

T^*G への作用のモーメント写像は以下のように求める .

- 左推移作用のモーメント写像: $J_R((g, F)) = F$.

これを確かめよう . $\langle J_R((g, F)), \xi \rangle = \langle F, \xi \rangle$, $\xi \in \mathcal{G}$, のハミルトンベクトル場が (自明化 $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ で $\xi_R^{T^*G}$ に対応した) $(\xi, 0)$ と一致するといえはよい .

$\langle F, \xi \rangle$ の外微分は G 上の接ベクトル方向と $\mathcal{G}^*$ 方向とにするので、

$$\begin{aligned} (d \langle F, \xi \rangle)_{(g, F)}(X_1 \oplus F_1) &= \langle \cdot, \xi \rangle \text{ の } F \text{ における } F_1 \text{ 方向微分} - \langle F, L_{X_1}\xi \rangle \\ &= \langle F_1, \xi \rangle - \langle F, [X_1, \xi] \rangle. \end{aligned}$$

$$\sigma_{(g,F)}(X_1 \oplus F_1, \xi \oplus 0) = \langle F_1, \xi \rangle - \langle F, [X_1, \xi] \rangle.$$

これらの右辺はたしかに一致する:

$$(d \langle F, \xi \rangle)_{(g,F)} = \sigma_{(g,F)}(\cdot, \xi \oplus 0)$$

から $\langle F, \xi \rangle$ のハミルトンベクトル場は ξ_R .

• 右推移作用のモーメント写像: $J_L((g, F)) = K(g)F$.

これを確かめよう. $\langle J_L((g, F)), \xi \rangle = \langle K(g)F, \xi \rangle$, $\xi \in \mathcal{G}$, のハミルトンベクトル場が $\xi_L^{T^*G}$ と一致するといえはよい. $\xi_L^{T^*G}((g, F)) = (Ad_{g^{-1}}\xi, K_*(\xi)F)$ であった.

$$\sigma_{(g,F)}(X_1 \oplus F_1, Ad_{g^{-1}}\xi \oplus K_*(\xi)F) = \langle F_1, Ad_{g^{-1}}\xi \rangle - \langle K_*(\xi)F, X_1 \rangle - \langle F, [X_1, Ad_{g^{-1}}\xi] \rangle.$$

また

$$d \langle K(g)F, \xi \rangle_{(g,F)}(X_1 \oplus F_1) = \langle K(g)F_1, \xi \rangle + \langle K_*(X_1)F, \xi \rangle + \langle F, [Ad_{g^{-1}}\xi, X_1] \rangle$$

第3項についてよく理解してないが $\langle K(g)F, \xi \rangle_{(g,F)}$ の g についての微分において, $K(g)$ の g における X_1 方向微分 $\langle K_*(X_1)F, \xi \rangle$, (第2項), と, 写像 $\langle K(g)F, \xi \rangle(\cdot, F)$ の X_1 方向微分

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\langle K(g)F, \xi \rangle(g + tX_1, F) - \langle K(g)F, \xi \rangle(g, F)) = L_{X_1}(\langle F, Ad_{g^{-1}}\xi \rangle) = \langle F, [Ad_{g^{-1}}\xi, X_1] \rangle$$

の二つの寄与から こうなるのだろう.

第1項: $\langle K(g)F_1, \xi \rangle = \langle F, Ad_{g^{-1}}\xi \rangle$ は定義より.

第2項: $\langle K_*(\xi)F, X_1 \rangle = \langle F, [X_1, \xi] \rangle = - \langle K_*(X_1)F, \xi \rangle$.
であるから

$$d \langle K(g)F, \xi \rangle_{(g,F)}(X_1 \oplus F_1) = \sigma_{(g,F)}(X_1 \oplus F_1, Ad_{g^{-1}}\xi \oplus K_*(\xi)F),$$

補題 4 $G \times G$ の T^*G への両側作用によるモーメント写像は

$$J: G \times \mathcal{G}^* \ni (g, F) \longrightarrow \{\mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \ni (\xi \oplus \eta) \longrightarrow \langle F, \xi \rangle + \langle K(g)F, \eta \rangle\} \in \mathcal{G}^*.$$

以上の計算より G の作用による T^*G の symplectic reduction は次のようになる.

1. G の T^*G への左作用による symplectic reduction :

$$J((g, F)) = F \text{ より } J^{-1}(F) = G \times \{F\} \in G \times \mathcal{G}^* \text{ だから}$$

$$J^{-1}(F)/Stab(F) = G \times \{F\}/Stab(F) = G/Stab(F) \simeq \Omega_F.$$

2. G の T^*G への右作用による symplectic reduction:

$$J((g, F)) = K(g)F \text{ より}$$

$$J^{-1}(\Omega_F) = \{(g, F) \in G \times \mathcal{G}^*; K(g)F \in \Omega_F\} = G \times \Omega_F.$$

また右作用は $(f, F)g = (fg^{-1}, K(g)F)$ だったから $Stab(F) = G \times \{F\} \simeq G$. ゆえに

$$J^{-1}(F)/Stab(F) = G \times \Omega_F/G \simeq \Omega_F.$$

どちらの場合も symplectic reduction は F を通る coadjoint orbit である.

3 Pre-quantization

3.1 幾何的準量子化

次の命題は良く知られていると思う、と どのテキストにも書いてあり始めて学ぶ人は大変困ると思う .

- 定理

G を simply connected Lie group とするとき、次は同値である :

1. $\Omega \subset \mathcal{G}^*$ は整数的 (integral) である : Ω の任意の 2-cycle C に対して

$$\int_C \sigma \in \mathbf{Z}.$$

2. $\exists$ a G -equivariant hermitian line bundle with connection;

$$(L, \nabla)$$

such that

$$F_{\nabla} = 2\pi i \sigma,$$

F_{∇} は ∇ の曲率 .

3. 各 $F \in \Omega$ に対して connected Lie group $Stab^0(F)$ の 1 次元 unitary 表現 χ で

$$\chi(\exp X) = e^{2\pi i \langle F, X \rangle}$$

で与えられるものがある .

Ω 上の line bundle L があると、開被覆 U_{α} と L の U_{α} 上の自明化を与える non-vanishing section s_{α} が存在して、 $c_{\alpha\beta} = s_{\beta}(s_{\alpha})^{-1}$ は cocycle condition

$$c_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma}c_{\gamma\alpha} = 1 \tag{15}$$

を満たすので $c_1(L) = [c_{\alpha\beta}] \in H^1(\Omega, \mathbf{C}^*)$ が定まる (1st Chern class of L). L の任意の section s は,

$$f_{\beta} = c_{\beta\alpha} f_{\alpha}, \quad \text{on } U_{\alpha} \cap U_{\beta}$$

を満たす cochain $\{f_{\alpha}\}_{\alpha} \in C^{\infty}(\{U_{\alpha}\}, \mathbf{C})$ により $s|_{U_{\alpha}} = f_{\alpha} s_{\alpha}$ として定まる .
exp-exact 列

$$0 \longrightarrow 2\pi i \mathbf{Z} \longrightarrow \underline{\mathbf{C}}_{\Omega} \xrightarrow{\exp} \underline{\mathbf{C}}_{\Omega}^* \longrightarrow 0$$

より $H^1(\Omega, \mathbf{C}^*) \simeq H^2(\Omega, 2\pi i \mathbf{Z})$ この同形による $c_1(L)$ を表す $2\pi i \mathbf{Z}$ 値 Cech cocycle は (式 (15) より) 次のように定まる :

$\log c_{\alpha\beta}$ の $U_{\alpha\beta}$ 上の枝をとり

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \log c_{\alpha\beta} + \log c_{\beta\gamma} + \log c_{\gamma\alpha} \in Z^2(\{U_{\alpha}\}_{\alpha}, 2\pi i \mathbf{Z})$$

とおけば、 $c_1(L) = [c_{\alpha\beta\gamma}] \in H^2(\Omega, 2\pi i \mathbb{Z})$. こうして Ω 上の C^∞ complex line bundles の isomorphism class とその Chern 類全体 $\in H^2(\Omega, 2\pi i \mathbb{Z})$ とは bijective に対応する (実は群同型) .

すべての complex line bundle (over a paracompact space) は hermitian metric を持つことがわかっている : $H^1(M, \mathbb{C}^*) \simeq H^1(M, U(1))$.

L 上の connection ∇ より $\{U_\alpha\}_\alpha$ 上の 1 次微分形式の族

$$\nabla|_{U_\alpha} s_\alpha = \theta'_\alpha,$$

が定まり ,

$$\theta'_\beta = \theta'_\alpha + c_{\alpha\beta}^{-1} dc_{\alpha\beta}$$

を満たす . 逆にこの関係を満たす 1 次微分形式の族 $\{\theta'_\alpha\}_\alpha$ により

$$\nabla s|_{U_\alpha} = \nabla|_{U_\alpha} (\sum f_\alpha s_\alpha) = df_\alpha \otimes s_\alpha + f_\alpha \theta'_\alpha \otimes s_\alpha$$

により L 上の connection ∇ が定まる . この connection の curvature は

$$\Theta = d\theta'_\alpha$$

により Ω 上で global に与えられる : $\Theta \in \Gamma(\Omega, \Lambda^2 T^* \Omega)$.

$$d\Theta = 0 \quad \text{Bianchi.}$$

さて、 L の hermitian metric を取り、non-vanishing section s_α を $(s_\alpha, s_\alpha) = 1$ と normalize する . connection が hermitian metric と compatible;

$$d(s, s) = (s, \nabla s) + (\nabla s, s),$$

である条件は $\theta'_\alpha = -\overline{\theta'_\alpha}$, すなわち θ'_α は純虚数 1 次形式ととれるので、書き直して実 1 次形式 θ_α を取り、 $\theta'_\alpha = 2\pi i \theta_\alpha$ を L の connection とする . このとき、 $[\Theta = 2\pi i d\theta_\alpha] \in H^2(\Omega, 2\pi i \mathbb{R})$ だが、さらに次がわかる .

De Rham cohomology と Čech cohomology の同型対応

$$H_{DR}^2(\Omega, \mathbb{C}) \simeq H_{Čech}^2(\{U_\alpha\}, \mathbb{C})$$

において、 $[\Theta] \in H^2(\Omega, \mathbb{C})$ に対応する Čech-cocycle は

$$\Theta = d\theta'_\alpha,$$

$$\theta'_\beta - \theta'_\alpha = d \log c_{\alpha\beta},$$

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \log c_{\alpha\beta} + \log c_{\beta\gamma} + \log c_{\gamma\alpha}$$

なる列をたどって ($c_{\alpha\beta}$ が line bundle に対応していようがいまいが)

$$[c_{\alpha\beta\gamma}] \in H_{Čech}^2(\{U_\alpha\}, \mathbb{C}).$$

で与えられる . いまは $c_{\alpha\beta}$ が line bundle の推移関数であるから、上に見たように $[c_{\alpha\beta\gamma}] \in H^2(\Omega, 2\pi i \mathbb{Z})$ である . したがって $[\Theta] \in H^2(\Omega, \mathbb{C})$ は

$H^2(\Omega, 2\pi i \mathbf{Z}) \longrightarrow H^2(\Omega, \mathbf{C})$ の image に入っていることがわかる; $[\Theta] \in H^2(\Omega, 2\pi i \mathbf{Z})$

である . $\Theta = F_{\nabla} = 2\pi i \sigma$ が満たされていれば $[\sigma] \in H^2(\Omega, \mathbf{Z})$ すなわち σ は整数的である .

逆に $[\sigma] \in H^2(\Omega, \mathbf{C})$ が整数的、すなわち $H^2(\Omega, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^2(\Omega, \mathbf{C})$ の image に入っていれば、対応する Čech cycle について $[c_{\alpha\beta\gamma}] \in H^2(\Omega, 2\pi i \mathbf{Z})$. したがって $c_{\alpha\beta}$ が cocycle condition (15) を満たし a complex line bundle の推移関数となる . 以上が (1) $\iff$ (2) の (よく知られていると思う) 説明・証明である .

(3) $\Leftarrow$ (1)

$Stab(F)$ の単位元の connected component を $Stab^0(F)$ とし可換群 $A = Stab^0(F)/[Stab^0(F), Stab^0(F)]$ を考える . $g = \exp X \in A$, $X \in stab(F)$, と書ける .

$$A \ni \exp X \longrightarrow e^{2\pi i \langle F, X \rangle} \in U(1) \quad (16)$$

は well defined である . 実際、 $stab(F) = \ker B_F$, $B_F(X, Y) = \langle F, [X, Y] \rangle$, であつたから、 $\exp [X, Y] \in [Stab^0(F), Stab^0(F)]$, $X, Y \in stab(F)$, に対して

$$\chi(\exp [X, Y]) = e^{2\pi i \langle F, [X, Y] \rangle} = 1.$$

となり、写像 χ は定義される . $U(1)$ 値として定義されることを云うには、可換群 A のアーベル分解 $A \simeq \mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^l$ により、 k 次元格子 $\Lambda = \exp^{-1}(e) \subset \mathbf{T}^k$ 上で $\langle F, X \rangle$ が整数値をとればよい . $X \in \Lambda$ とし区間 $[0, X] \subset stab(F)$ の像である $Stab^0(F)$ 内の曲線を $\gamma = (g_t = \exp tX)$ とする . γ は $Stab^0(F)$ 内の閉曲線 ($g_0 = g_1 = e$) である . G の Maurer-Cartan form $\theta_F = g^{-1}dg$ に対して、 $\theta_F = \langle F, \theta \rangle$ は G 上の 1 次微分形式で

$$p_F^* \sigma = d\theta_F,$$

ただし、 $p_F : G \longrightarrow \Omega_F$ 、であつた (1.4) .

$$\int_{\gamma} \theta_F = \int_{\gamma} \langle F, \theta \rangle = \int_0^1 \langle F, \theta_{g_t}(\dot{g}_t) \rangle dt$$

$\theta_{g_t}(\dot{g}_t) = X$ だから

$$= \int_0^1 \langle F, X \rangle dt = \langle F, X \rangle .$$

一方 G は単連結なので γ はある面 Δ の境界である .

[ホモトピー完全列

$$0 = \pi_1(G) \longrightarrow \pi_1(Stab(F)) \longrightarrow \pi_2(\Omega) \longrightarrow \pi_2(G) = 0$$

より

$$\gamma \in \pi_1(Stab(F)) \xrightarrow{\simeq} p_F(\Delta) \in \pi_2(\Omega)$$

と対応している .]

$$\int_{\gamma} \theta_F = \int_{\Delta} d\theta = \int_{p_F(\Delta)} \sigma \in \mathbf{Z}$$

ゆえに k 次元格子 $\Lambda = \exp^{-1}(e) \subset \mathbf{T}^k$ 上で $\langle F, X \rangle$ は整数値をとる .

3.2 Polarization

Symplectic 多様体 (M, σ) の real Polarization とは接空間の可積分な部分多様体 $P \subset TM$ で各 fiber P_m が symplectic space $T_m M$ 内の maximally isotropic subspace となっている ($\sigma_m(X, Y) = 0, \forall X, Y \in P_m$) となるもののことである .

P : integrable $\iff M$ は leaves の disjoint union (foliation) で, 各点 $m \in M$ で m を通る leaf への接空間が $P(m)$ と一致する .

$Vect_P(M) := \forall m \in M$ に対して $X(m) \in P_m$ なるベクトル場全体 .

$\Omega_P(M) := \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = 0, \xi \in Vect_P(M), i = 1, 2, \dots, k$ となる 1-form 全体 .

と置く .

Frobenius Integrability Criterion.

1. $P \subset TM$ は可積分 .
2. $Vect_P(M)$ は $Vect(M)$ の Lie subalgebra.
3. $\Omega_P(M)$ が $\Omega(M)$ の differential ideal:

$$\alpha^p \wedge \omega^k(\xi_1, \dots, \xi_{p+k}) = 0, \quad \xi \in Vect_P(M),$$

$$\alpha \in \Omega^p(M), \omega \in \Omega_P^k(M)\}.$$

4. この条件の下に $M \longrightarrow B, B = \{the leaves = \text{Lagrangean submanifolds of } M\}$.

$$C_P^\infty(M) = \{f \in C^\infty(M) : \xi f = 0 \forall \xi \in Vect_P(M)\}.$$

- $P \subset M; \frac{1}{2} \dim M = \dim P$ とする . このとき

$P; Polarization \iff C_P^\infty(M) : \text{maximal abelian subalgebra of } (C^\infty(M), \{, \})$.

なぜなら、 $f \in C_P^\infty(M)$ とすると $df \in \Omega_P(M)$. したがって

$$\sigma_m(s \text{grad } f, Y) = df(m)(Y) = 0, \forall Y \in Vect_P(M).$$

すなわち $s \text{grad } f$ は σ -orthogonal to P . P は polarization で σ -orthogonal to P な部分空間のなかで maximal だから $s \text{grad } f \in P$. ゆえに

$$\{f_1, f_2\} = \sigma(s \text{grad } f_1, s \text{grad } f_2) = (s \text{grad } f_1)(f_2) = 0.$$

$C_P^\infty(M)$ は abelian subalgebra of $C^\infty(M)$.

さらに $(s \text{grad } f)g = 0, \forall g \in C_P^\infty(M)$ とすると maximality より $s \text{grad } f(m) \in P(m)$ ゆえ $\forall g$ に対し、 $s \text{grad } g(f) = 0$ (f は fiber に沿って constant. で $f \in C_P^\infty(M)$). 以上より $C_P^\infty(M)$ は maximal abelian subalgebra.

逆も同様で $\{s \text{grad } f; f \in C_P^\infty(M)\}$ が TM の isotropic subspace を張ることからわかる .

- subalgebra $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ が admissible real algebraic polarization of $F \in \mathcal{G}^*$ とは

1. $F|_{[\mathcal{H}, \mathcal{H}]} = 0$.
2. $\mathcal{H} \ni X \longrightarrow \langle F, X \rangle$ が $\mathcal{H}$ の 1 次元表現.
3. $\text{codim}_{\mathcal{G}} \mathcal{H} = \frac{1}{2} \text{rank} B_F$. これより $\mathcal{H}$ は maximal で $\dim \mathcal{H} = \frac{1}{2}(\dim \mathcal{G} + \text{rank} \mathcal{G})$.
4. $\mathcal{H}$ は $\text{Stab}(F)$ の作用で不変

$X \in \text{stab}(F)$ なら $0 = \langle K_*(X), Y \rangle = \langle F, [Y, X] \rangle$ より $\text{stab}(F)$ は $\mathcal{H}$ の Lie subalgebra. したがって $\text{Stab}^0(F) \ni g$ の coadjoint action $K(g)$ により $\mathcal{H}$ は不変はわかっているので、最後の条件は $\mathcal{H}$ がさらに $\text{Stab}(F)$ の作用で不変を云う.

real G -invariant polarizations always exist for nilpotent and completely solvable Lie algebras. と書いてある. また $G = SU(2)$ には $\mathfrak{su}(2)$ の 2 次元 subalgebra がないので polarization がない.

$G \xrightarrow{p_F} \Omega$ の微分を $\mathcal{G} \xrightarrow{p_F^*} T_F \Omega$ とする.

定理 5 G invariant real polarization: $P \subset T\Omega$ の全体と
admissible real algebraic polarization: $\mathcal{H} = (p_F)_*^{-1}(P_F)$ の全体
とは bijective に対応している.

補題 6 $M = G/K$ を等質空間とする.

1. G -invariant subbundles $P \subset TM$ 全体と
 K -invariant subspaces $\mathcal{H}$ で $\text{Lie}(K) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ なるものの全体
とは bijective に対応している.

2.

$$P : \text{integrable} \iff \mathcal{H} : \text{subalgebra}.$$

(a)

G -invariant subbundle $P \subset TM$ が与えられたとしよう. P の持ち上げ;
 G -invariant subbundle $Q \subset TG$, を次のようにつくる.

$m_0 \in M$ をとり projection $G \xrightarrow{p} M$ を $p(g) = g \cdot m_0$ で定義. p_{*g} を $g \in G$ における微分写像とし

$$Q_g \subset p_{*g}^{-1}(P_{g \cdot m_0})$$

により subbundle $Q \subset TM$ を定義する. 次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccccccc} Q_e = \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{(L_g)_* e} & T_g G & \longleftarrow & Q_g \\ p_{*e} \downarrow & & p_{*e} \downarrow & & \downarrow p_{*g} & & \downarrow p_{*g} \\ P_{m_0} & \longrightarrow & T_{m_0} M & \xrightarrow{(g \cdot)_* m_0} & T_{g \cdot m_0} & \longleftarrow & P_{g \cdot m_0} \end{array}$$

$Q_e = \mathcal{H}$ とおけば $\ker p_{*e} = \text{Lie}(K) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ である. $Q \subset TG$ の left-invariant subbundle.

逆に、 $Lie(K) \subset \mathcal{H} = Q(e) \subset T_e G = \mathcal{G}$ なる left-invariant subbundle $Q \subset TG$ が与えられたとして、 $g \cdot m_0 \in M$ における fiber $P_{g \cdot m_0} = p_{*g} Q_g$ とする G -invariant subbundle $P \subset TM$ がつくれる。

(b)

G -invariant subbundle $P \subset TM$ は G -invariant vector fields $\tilde{X} = (L_g)_{*e} X$, $X \in p_{*e}^{-1}(P_{m_0}) = \mathcal{H}$, で生成される。 P が integrable だから Frobenius より $Vect_P(M)$ は Lie subalgebra. すなわち $\mathcal{H}$ は $\mathcal{G} = T_e G$ の Lie subalgebra. 逆もまた正しい。

定理の証明

$P \subset T\Omega$ に対して $Q_g = (p_F)_{*g}^{-1}(P_{K(g)F})$, $\mathcal{H} = Q_e = (p_F)_{*e}^{-1}(P_F)$, とおく ($m_0 = F$, $M = \Omega$, $p = p_F$ と対応). $(p_F)_e^*(\sigma) = B_F$ であった, 式 (4). したがって P_F が σ に関して maximally isotropic であることと $\mathcal{H}$ が B_F に関して maximally isotropic であることと同値. 定理は補題 6 よりしたがう。