数理解析研究所講究録 1408号 (2004), 110-122

Yang-Mills 方程式のハミルトン形式

郡　敏昭 (Tosiaki Kori)

早稲田大学理工学部 (Waseda University)

ここでは、4次元 Yang-Mills 方程式を時間方向を定めて3次元空間の運動方程式（ハミルトン形式）で書くことにより、Maxwell 方程式のように磁界と電界に対応する場が見えるようにする。 また、非圧縮性流体の方程式、Maxwell 方程式に共通の Poisson 幾何としての諸概念を Yang-Mills 方程式にも拡張する。すなわち、Symplectic reduction として charge や current を捉え、Helicity, Clebsch parametrization の議論をする。 Helicity は Chern-Simons 不変量に他ならないことを見た。講演の際、vorticity, vorticity 表示についてくわしくない方が多かったので、非圧縮性流体の Euler 方程式、Maxwell 方程式について知られていることをまとめておいた。いくつかの観点は新しいと思う。

1 Yang-Mills 方程式

1.1 Maxwell の方程式: $U(1)-$YM 方程式

R^4 上の 1 次微分形式 $\hat{A} = A_1dx^1 + A_2dx^2 + A_3dx^3 + A_0dt$ の微分 $F = d\hat{A}$ を,

$F = B+Edt = B_1dx^2\wedge dx^3+B_2dx^3\wedge dx^1+B_3dx^1\wedge dx^2+(E_1dx^1+E_2dx^2+E_3dx^3)\wedge dt,$

と分解する。ここに

$$B_i = \frac{\partial}{\partial x^j}A_k - \frac{\partial}{\partial x^k}A_j, \qquad E_i = \frac{\partial}{\partial x^i}A_0 - \frac{\partial}{\partial t}A_i$$

である。

$dF = ddA = 0$ より

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}B_i = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j}E_k - \frac{\partial}{\partial x^k}E_j + \frac{\partial}{\partial t}B_i = 0$$

となる。あるいは R^3 の微分 $d' = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}dx^i$ により

$$d'B = 0, \qquad d'E + \frac{\partial}{\partial t}B = 0, \tag{1}$$

ベクトル解析の記号で

$$divB = 0, \qquad \nabla \times E + \frac{\partial}{\partial t} B = 0.$$

一方、与えられた2次形式 $\mathbf{j} = j_1 dx^2 \wedge dx^3 + j_2 dx^3 \wedge dx^1 + j_3 dx^1 \wedge dx^2$ と 3 次形式 $\rho dx^1 dx^2 dx^3$ に対して $d \star F = \mathbf{j} \wedge dt + \rho$ を書けば、($\star$ は4次元 Hodge 作用素、$*$ は 3 次元 Hodge 作用素を表す)

$$d' * E = \rho dx^! \wedge dx^2 \wedge dx^3, \qquad d' * B + * \frac{\partial E}{\partial t} = \mathbf{j}, \tag{2}$$

ベクトル解析の記号で

$$divE = \rho, \qquad \nabla \times B + \frac{\partial}{\partial t} E = \mathbf{j}$$

となる。ここでは $\mathbf{j}$, B, E をベクトル場と見ている。以上 (1), (2) が順に磁気単極子の非存在、ファラデイの電磁誘導の法則、電荷が ρ のときのガウスの法則、カレントが $\mathbf{j}$ のアンペールの法則を示している。

1.2 4次元 Yang-Mills 方程式 と 3 次元 Yang-Mills-Higgs 方程式

$M = \mathrm{R}^4$ 上の Yang-Mills 接続は、作用積分 $\frac{1}{2}\int_M |F_{\hat{A}}|^2 dV$ の臨界点となる接続 $\hat{A}$ で、Yang-Mills 方程式

$$d^\star_{\hat{A}} F_{\hat{A}} = 0, \qquad d_{\hat{A}} F_{\hat{A}} = 0,$$

を満たす。 第2式は Bianchi の恒等式である。

$$\hat{A} = A + \phi dt = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3 + \phi dt,$$

とすると

$$\begin{aligned}
F_{\hat{A}} &= B + Edt, \\
B &\equiv F_A = \epsilon_{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k, \qquad B_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} + [A_j\, A_k], \\
E &= d_A \phi - \dot{A} = E_i dx^i, \qquad E_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + [A_i,\, \phi] - \frac{\partial A_i}{\partial t}.
\end{aligned}$$

と書ける。

$d^\star_{\hat{A}} F_{\hat{A}} = 0$ は

$$d^*_A B + [\phi,\, E] - \dot{E} = 0, \qquad d^*_A E = 0. \tag{3}$$

と書き換えられる。

実際、$\star F_{\hat{A}} = *B \wedge dt + *E$, $d_{\hat{A}} = d_A + (\frac{\partial}{\partial t} - [\phi, \cdot])dt$ より、

$$\begin{aligned} 0 &= d^{\star}_{\hat{A}} F_{\hat{A}} = \star d_{\hat{A}} \star F_{\hat{A}} = \star \Big(d_A * Bdt + d_A * E + (*\dot{E} - [\phi, *E])dt \Big) \\ &= (d^{*}_A B + [\phi,\, E] - \dot{E}) + d^{*}_A E\, dt. \end{aligned}$$

$d_{\hat{A}} F_{\hat{A}} = 0$ の方は

$$d_A E + [\phi,\, B] - \dot{B} = 0, \qquad d_A B = 0. \tag{4}$$

となる。
(3), (4) を 3 次元ベクトル解析で書くこともできる (実行せよ)。

1.3 反自己双対 (ASD) な解 $\hat{A}$ の 3 次元表現

とくに、$\hat{A}$ が Y-M 方程式の反自己双対 (ASD) な解のときの 3 次元表現を書いて見よう。

• static な（時間に依存しない）ASD 解 $\star F_{\hat{A}} = -F_{\hat{A}}$ に対応する方程式は

$$B = - * d_A \phi \tag{5}$$

となる．これが（3）の static 解

$$d^{*}_A B + [\phi,\, d_A \phi] = 0,$$

となっていることがわかる（計算せよ）。　(5) を Bogomolnyi 方程式（モノポール方程式）という（$\nabla \mathbf{B} \neq 0$ だから)。

$M = \mathrm{R}^4$ でなくとも、M 内の 3 次元部分多様体 N^3 の法線方向を特別扱いして同様の議論が展開できる。

• もう一方は $\phi = 0$ のときの ASD 解；　$\star F_{\hat{A}} = -F_{\hat{A}}$ に対応する方程式は $E = - * B$. だが、いま $E = -\dot{A}$ だから

$$\dot{A} = *B. \tag{6}$$

右辺は Chern-Simons functional

$$CS(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_Y Tr\left(AB - \frac{1}{3} A^3 \right), \qquad B = F_A$$

の gradient$\times 8\pi^2$ になっている：

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} CS(A + ta) = \frac{1}{8\pi^2} \int_Y Tr(B \wedge a) = (a\,,\, \frac{1}{8\pi^2} * B).$$

ここに積分域 Y は infinitesimal な議論（かつ motivation を伝えるだけ）なのでいいかげんにしている。

以上から 4 次元 Yang-Mills の ASD 解と（3 次元 境界上の）Chern-Simons functional の gradient flow が対応していることがわかる。これは 4 次元 instanton のモジュライと 3 次元多様体の Floer ホモロジーの関係の基礎的事実である。

1.4 ゲージ変換

$\hat{A} = A + \phi dt$ に 4 次元のゲージ変換群 $\hat{\mathcal{G}}$ は

$$\hat{g} \cdot \hat{A} = \hat{g}^{-1} \hat{A} \hat{g} + \hat{g}^{-1} d\hat{g}$$

で右作用する。

$$\hat{g} \cdot \hat{A} = g^{-1} A g + g^{-1} dg + g^{-1} (\phi + \dot{g} g^{-1}) g \, dt$$

より、パラメータ t の 3 次元のゲージ変換 $g = g(t)$ と見た作用は、

$$g \cdot (A, \phi) == \big(g \cdot A,\ Ad_{g^{-1}} (\phi + \dot{g} g^{-1})\big)$$

となる。とくに static な場合、3 次元の接続とヒグス場のゲージ変換は

$$g \cdot (A, \phi) = (g \cdot A, Ad_{g^{-1}} \phi).$$

2 3 次元 Yang-Mills 方程式の Poisson manifold

方程式 (3), (4) を N^3 上の（接続＋ヒグス場）のモジュライ空間のシンプレクティク構造のハミルトン方程式として書きたいが、まだできないのでヒグス場がない、$\phi = 0$、の場合に 3 次元 Yang-Mills 方程式の時間発展のハミルトン方程式を書く；

$$d_A^* B - \dot{E} = 0, \qquad d_A^* E = 0. \tag{7}$$

$$d_A E - \dot{B} = 0, \qquad d_A B = 0. \tag{8}$$

Poisson 多様体と、その上のハミルトニアンを与えて様々な方程式を、ハミルトン運動方程式

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

で解釈することができる。1980 年ころに Marsden 等が Maxwell 方程式、Maxwell-Vlasov プラズマ方程式、オイラー方程式 $\cdots$ を導いた。YM 方程式については、あらすじを書いてるが、式変形の途中で「以下はマクスウェルに $\cdot\cdot$ 」等としているし、J.Arms; J.Math.Phys.20(1979) では重力場もふくめて書いてあると Marsden は言っているが、数学として読めない。

2.1 3次元YM 方程式 (3) or (7) の ハミルトン形式

$M = M^3$ を3次元 compact リーマン多様体, $P \longrightarrow M$ を M 上の G 主束, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_3$ をその接続全体とする。$\mathcal{A}$ は $\Omega^1(M, adP)$ を線形モデルとするアフィン空間である。$A \in \mathcal{A}$ での接空間は $T_A\mathcal{A} = \Omega^1(M, adP)$.

$\alpha,\, \beta \in \Omega^k(M, adP)$ の内積を

$$(\alpha, \beta)_k = \int_M < \alpha, \beta > dx$$

とする。ここに $<,>$ はリーマン計量と $Lie\, G$ 上の内積で定義される。 $R = T\mathcal{A}$ 上の symplectic 形式を、$R = T\mathcal{A} \ni (A, p),\, p \in T_A\mathcal{A},$ に対して

$$\begin{aligned} \omega_{(A,p)}((a,x),\,(b,y)) &= (b,x)_1 - (a,y)_1, \\ (a,x),(b,y) \in T_{(A,p)}R &= \Omega^1(M, adP) \times \Omega^1(M, adP) \end{aligned} \tag{9}$$

で定める。

R 上の関数の ((a,x) 方向) 微分は、

$$\delta H_{(A,p)} \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}(H(A+ta, p+tx) - H(A,p))$$

である。また

$$\delta H_{(A,p)} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\delta H}{\delta A}, a \right)_1$$

$$\delta H_{(A,p)} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \left(\frac{\delta H}{\delta p}, x \right)_1$$

により偏微分 $\frac{\delta H}{\delta A},\, \frac{\delta H}{\delta p} \in \Omega^1(M, adP)$ が定義される。

ハミルトニアンとして

$$H(A,p) = \frac{1}{2}(F_A, F_A)_2 + \frac{1}{2}(p,p)_1 \tag{10}$$

を取る。 $F_{A+ta} = F_A + td_Aa + O(t^2)$ を使って

$$\begin{aligned} \delta H_{(A,p)} \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} &= (d_Aa, F_A)_2 + (p,x)_1 = (a, d_A^*F_A)_1 + (p,x)_1 \\ &= \omega_{(A,p)}((a,x),\,(p, -d_A^*F_A)). \end{aligned}$$

がわかる。 すなわち

$$\frac{\delta H}{\delta A} = d_A^*F_A, \qquad \frac{\delta H}{\delta p} = p,$$

であり、ハミルトンベクトル場 X_H は

$$(X_H)_{(A,p)} = \begin{pmatrix} p \\ -d_A^*F_A \end{pmatrix} = p\frac{\partial}{\partial A} - d_A^*F_A\frac{\partial}{\partial p}. \tag{11}$$

ハミルトンの運動方程式は

$$\begin{aligned}\dot{A} &= p \qquad (12)\\ \dot{p} &= -d_A^* F_A \qquad (13)\end{aligned}$$

これが $\phi = 0$ のときの方程式 (3), あるいは方程式 (7) の前半である. 1.2 節のヒグス場 $\phi = 0$ としているので：$p = \dot{A} = -E$.

2.2 3 次元 YM の Poisson 多様体

R 上の関数の Poisson 括弧式は

$$\{F, G\}_R = \omega(X_G, X_F) = \left(\frac{\delta F}{\delta A}, \frac{\delta G}{\delta p}\right)_1 - \left(\frac{\delta G}{\delta A}, \frac{\delta F}{\delta p}\right)_1 \qquad (14)$$

で与えられる。

$\frac{\delta H}{\delta A} = d_A^* F_A$, $\frac{\delta H}{\delta p} = p$ より, ハミルトニアン $H == \frac{1}{2}(F_A, F_A) + \frac{1}{2}(p, p)$ のハミルトン運動方程式は

$$\begin{aligned}\{G, H\}_R &= \left(\frac{\delta G}{\delta A}, p\right)_1 - \left(d_A^* F_A, \frac{\delta G}{\delta p}\right)_1\\ &= \left(\frac{\delta G}{\delta A}, \dot{A}\right)_1 + \left(\dot{p}, \frac{\delta G}{\delta p}\right)_1 = \dot{G}\end{aligned}$$

となる。 すなわち、YM-方程式 (7) の解はハミルトニアン (10) の gradient ベクトル場の積分曲線である。

2.3 ゲージ変換群の作用

シンプレクティク多様体 (R, ω) にはゲージ変換群

$$\mathcal{G} = Aut_0(P) = \Omega^0(M, AdP)$$

が

$$g \cdot (A, p) = (A + g^{-1} d_A g,\ g^{-1} p g), \qquad g \in \mathcal{G} \qquad (15)$$

により（右）作用する。この作用でハミルトニアン H は不変である。

この作用によるモーメント写像を求めよう。

$Lie\mathcal{G} = \Omega^0(M, adP)$ である。$\xi \in Lie\mathcal{G}$ に対応する R 上の基本ベクトル場 ξ_R は

$$\xi_R(A, p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ (\exp t\xi \cdot A, \exp t\xi \cdot p) = (d_A \xi, -ad_\xi p)$$

となる。

R 上の関数 J^ξ を $(dJ^\xi)_{(A,p)} = \omega_{(A,p)}(\cdot, \xi_R)$ となるように求めたい。それは

$$J^\xi((A, p)) = (d_A^* p, \xi)_0 \qquad (16)$$

で与えられる。
　実際

$$
\begin{aligned}
(dJ^\xi)_{(A,p)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}\left((d^*_{A+ta}p,\xi)_0-(d^*_Ap,\xi)_0\right)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}(p,\, d_{A+ta}\xi-d_A\xi)_1 \\
&= (p,[a,\xi])_1=(a,[\xi,p])_1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(dJ^\xi)_{(A,p)}\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}\left((d^*_A(p+tx),\xi)_0-(d^*_Ap,\xi)_0\right)= \\
&= (d^*_Ax,\xi)_0=(x,d_A\xi)_1.
\end{aligned}
$$

より

$$
(dJ^\xi)_{(A,p)}\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix}=(d_A\xi,x)_1-(a,-ad_\xi p)_1=\omega_{(A,p)}((a,x),(d_A\xi,-ad_\xi p)).
$$

あるいは

$$
\frac{\delta J^\xi}{\delta A}=d_A\xi,\qquad \frac{\delta J^\xi}{\delta p}=-ad_\xi p
$$

となり (16) が求める関数 J^ξ であることがわかった。
　モーメント写像 $\mathbf{J}:\, R\longrightarrow(Lie\mathcal{G})^*\simeq Lie\,\mathcal{G}$ は

$$
\mathbf{J}((A,p))=\left\{\xi\longrightarrow J^\xi(A,p)=(d^*_Ap,\xi)_0\right\}
$$

すなわち

$$
\mathbf{J}(A,p)=d^*_Ap \tag{17}
$$

で与えられる。
　さて、今後は $\mathcal{A}$ の irreducible connections よりなる部分空間のみで考える。このとき $0\in Lie\mathcal{G}$ は $\mathbf{J}$ の regular value となり、

$$
\mathcal{A}_0=\{(A,p);\quad A\in\mathcal{A}^{\rm irred};\ \mathbf{J}(A,p)=0\}=\{(A,p);\quad A\in\mathcal{A}^{\rm irred};\ d^*_Ap=0\}
$$

は $\mathcal{A}^{\rm irred}$ の submanifold になる。さらに $(\mathcal{A}_0,\omega)$ は $\mathcal{G}$ invariant coisotropic submanifold になり、$\mathcal{G}$ は $(\mathcal{A}_0,\omega)$ に locally free に作用し、$\mathcal{G}$-orbit が null-foliation の leaves となっている。
　$(\mathcal{A}_0/\mathcal{G},\,\omega)$ は reduced symplectic manifold となる（Marsden-Weinstein の reduction theorem).
　YM-方程式 (3), (7) の後半 $d^*_AE=0$ は、A がモーメント写像の値を 0 とする接続であることを言っている。このことより $(Lie\mathcal{G})^*$ を current（charge) の空間 $\{\mathbf{j},\rho\}$ に対応するものと思えることがわかる。

3 Vorticity 表示、Clebsh parametrization etc.

orbit space ($\mathcal{A}_0/\mathcal{G}$, ω) において運動が実現されていると考えるのが自然であろう. （ここではゲージ同値類 (orbit) を見るので対称性が見えていない）。
運動が実現されている 空間を、このように、対称性が見える背後の空間をゲージ変換群で商を取った空間として書くのでなく、所与の空間として記述すれば、それが目に見える運動が実現される空間というおもむきがよりわかった気になる。 このような状況は、剛体のオイラー方程式、非圧縮性流体のオイラー方程式、マクスウェル方程式に共通に見ることができる。[K]

3.1 Maxwell の方程式のvorticity表示＝ Clebsh parametrization

.

$$P = \left\{(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \in \Omega^1(M) \times \Omega^2(M) : \qquad d\mathbf{B} = 0\right\}$$

$\Phi = \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ に対して $\frac{\delta\Phi}{\delta\mathbf{E}}$ は、1-form として、次の式で定義される：

$$d\Phi(\mathbf{E}, \mathbf{B})a = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{E} + \epsilon a, \mathbf{B}) - \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{B})}{\epsilon} = \left(a, \frac{\delta\Phi}{\delta\mathbf{E}}\right)_1$$

$\frac{\delta\Phi}{\delta\mathbf{B}} \in \Omega^2(M)$ も同様。
poisson bracket は

$$\{\Phi, \Psi\}_{vor} = \left(\frac{\delta\Phi}{\delta\mathbf{E}}, d^*(\frac{\delta\Psi}{\delta\mathbf{B}})\right)_1 - \left(\frac{\delta\Psi}{\delta\mathbf{E}}, d^*(\frac{\delta\Phi}{\delta\mathbf{B}})\right)_1 \tag{18}$$

ハミルトニアンを

$$H = \frac{1}{2}\left((\mathbf{E}, \mathbf{E})_1 + (\mathbf{B}, \mathbf{B})_2\right)$$

で定義すると、この Poissson 多様体でのハミルトンの運動方程式 $\dot{\Phi} = \{H, \Phi\}$ は、マクスウェルの方程式

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -d^*\mathbf{B}, \qquad \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = d\mathbf{E} \tag{19}$$

になる。

一方、

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{A}; \text{connections on } M\}$$

の cotangent bundle $R = T^*\mathcal{A} \simeq T\mathcal{A}$ の symplectic form は、2.1 節の (9) で与えられた。

その Poisson 括弧式 $\{\,,\,\}_R$ は 2.2 節の (14) で与えられ, ハミルトニアンは

$$H(\mathbf{A},p)=\frac{1}{2}(d\mathbf{A},d\mathbf{A})_2+\frac{1}{2}(p,p)_1$$

である.

これより方程式

$$\dot{\Phi}=\{H,\Phi\}$$

は

$$\dot{\mathbf{A}}=p, \qquad \dot{p}=-d^*F_{\mathbf{A}} \tag{20}$$

を与える. 対応 $\mathbf{E}=-p$, $\mathbf{B}=F_{\mathbf{A}}$ よりマクスウェル方程式 $\dot{\mathbf{E}}=-d^*\mathbf{B}$ が従う.
式 (12, 13) を導いたのと同じことをくりかえした。

- 対応

$$\psi:(\mathbf{A},p)\longrightarrow(\mathbf{E}=-p,\ \mathbf{B}=F_{\mathbf{A}}) \tag{21}$$

は、

$$\{\Psi\circ\psi,\ \Phi\circ\psi\}_{vor}=\{\Psi,\Phi\}_R\circ\psi \tag{22}$$

を満たす。 すなわち、symplectic 多様体 (R,ω) から Poisson 多様体 $(P,\{\,,\,\}_{vor})$ への Poisson map を与えている。

symplectic 多様体 $R=T^*\mathcal{A}$ には $U(1)-$gauge 変換群 $K=C^\infty(\mathrm{R}^3,U(1))$ が作用する：

$$(\mathbf{A},p)\longrightarrow e^{i\phi}\cdot(\mathbf{A},p)=(\mathbf{A}+d\phi,p).$$

この標準ベクトル場 ϕ_R は

$$\phi_R=\frac{d}{dt}|_{t=0}e^{it\phi}\cdot(\mathbf{A},p)=(d\phi,0).$$

条件 $(dJ_\phi)_{(\mathbf{A},p)}=\omega_{(\mathbf{A},p)}(\cdot,\phi_R)$ より $J_\phi(\mathbf{A},p)=(p,d\phi)_1=(d^*p,\phi)_1$ で、モーメント写像 $\mathbf{J}_K:R\longrightarrow Lie\,U(1)^*=\mathrm{R}$ は

$$\mathbf{J}_K=-d^*p=d^*\mathbf{E} \tag{23}$$

となることがわかった。

(22), (23) より (R,ω) のモーメント写像 $\mathbf{J}_K$ による Marsden-Weinstein reduction が

$$\left(\mathbf{J}_K^{-1}(\rho)/K,\omega\right)\simeq(P,\{\,,\,\}_{vor})$$

であることがわかった。

こうして $d^*\mathbf{E}=\rho$, constant, の条件は Poisson 多様体 P の symplectic leaf を表しており、運動はこの上に reduced または constrained. こうして Maxwell 方程式の残り一つの条件

$$d^*\mathbf{E}=\rho$$

の解釈がつく。 このことは, Y-M 方程式に対して前節ですでに説明した。

所与の Poisson 多様体に対し、symplectic reduction が、この Poisson 多様体の一つの symplectic leaf と Poisson 同値になるような symplectic 多様体を見つけることを **Clebsch Parametrization** という。(R,ω) は $(P,\{\,,\,\}_{vor})$ の Clebsch parametrization である。 **Clebsch Parametrization** は無数にあるが、どれか一つを見つけるのは大変難しい.

3.2 incompressible flow の Euler 方程式

$B \subset \mathrm{R}^3$ を B に移す体積を変えない微分同相写像の全体 $Diff_{vol}(B)$ は群になる。このリー群のリー環は

$$Vect_{\mathrm{div},\partial}(B) = \{\mathbf{v} \in Vect(B);\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0,\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\partial B} = 0\}$$

である.

$\mathcal{G} = Vect_{\mathrm{div},\partial}(B) \ni \mathbf{v}, \mathbf{u}$ の bracket を次の式で与えると（無限次元）リー環を得る；

$$[\mathbf{v},\mathbf{u}] = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}$$

左辺はベクトル場 $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ で右辺はベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$。

- 汎関数微分 $\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \in \mathcal{G}$ を

$$DF(\mathbf{v})\delta\mathbf{v} = \lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \frac{F(\mathbf{v}+\epsilon\delta\mathbf{v}) - F(\mathbf{v})}{\epsilon} = \int_B \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v})\delta\mathbf{v}dx^3$$

で定義する.

$F, G \in C^\infty(\mathcal{G})$, $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$, に対して、

$$\{F,G\}_\pm(\mathbf{v}) = \pm\int_B \mathbf{v}\cdot\left[\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}(\mathbf{v}), \frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}}(\mathbf{v})\right]dx^3. \qquad (24)$$

とおくと、$(\mathcal{G}, \{\cdot,\cdot\}_\pm)$ は Poisson 多様体となる・

$$H(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int_B \mathbf{v}\mathbf{v}dx^3$$

とおく。

$\frac{\delta H}{\delta\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ となるので、Hamilton 運動方程式

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{v}(t)) = \{H,F\}_-(\mathbf{v})$$

は

$$\int_B \frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}(\mathbf{v})\cdot\dot{\mathbf{v}}dx^3 = -\int_B \mathbf{v}\cdot\left[\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}(\mathbf{v}), \mathbf{v}\right]dx^3$$

$Vect_{\mathrm{div},\partial}(B) \ni \mathbf{v}$ の満たす条件を使い、ベクトル解析を行うと、これは次の形に書けることがわかる。

$$\int_B \left\{\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla(\frac{1}{2}||\mathbf{v}||^2)\right\}\cdot\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}(\mathbf{v})dx^3 = 0, \qquad \forall F \qquad (25)$$

任意の $\mathbf{u} = \frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}} \in \mathcal{G}$ に直交するベクトルは ∇q と書けるから、運動方程式

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla(\frac{1}{2}||\mathbf{v}||^2 = -\nabla q \qquad (26)$$

が得られる。$p = q + \frac{1}{2}||\mathbf{v}||^2$ とおいて

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p = 0\\ &div\mathbf{v} = 0\\ &\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|_{\partial B} = 0\end{aligned}$$

これを非圧縮性流体のオイラー方程式という。

オイラー方程式の解となるベクトル場 $\mathbf{v}$ に対して $\omega = \nabla\times\mathbf{v}$ を vorticity (渦度) という。

渦度 $\omega = \nabla\times\mathbf{v}$ に対して　**Helicity** を

$$H(\omega) = \int_B \mathbf{v}\cdot\omega d^3x$$

と定義する。Hlicity は vorticity ω により定まり、ω を表す $\mathbf{v}+\nabla f \in Vect_{\mathrm{div},\partial}(B)$ の取り方に依存しない；

$$\int_B \nabla f\cdot\omega d^3x = 0.$$

$H(\omega)$ はベクトル場の位相不変量である。微分形式で書くなら、$\mathbf{v}$ に対応する 1 次微分形式を v とするとき

$$\int_B v\, dv \tag{27}$$

である。

例 Hopf vector field.

$S^3 = \{\mathbf{x}\in \mathrm{R}^4;\quad |\mathbf{x}| = 1\}$ 上の vector field

$$\omega = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_4\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_4}$$

を *Hopf vector field* という。$\omega\cdot\omega = 1$ である。

$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\omega$ とおくと

$$\nabla\times\mathbf{v} = \omega$$

となるので Helicity は

$$\int_{S^3}\omega\cdot\mathbf{v}\, dvol = \frac{1}{2}\int_{S^3}\omega\cdot\omega\, dvol = \frac{1}{2}\int_{S^3} dvol = \pi^2$$

•vorticity 表示
Poisson 括弧 $\{\,,\,\}_{\pm}$ は

$$\begin{aligned}
\{F, G\}_{\pm}(\mathbf{v}) &= \pm \int_B \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}), \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v})\right] dx^3 \\
&= \mp \int_B \mathbf{v} \cdot \left(\nabla \times \left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \times \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v})\right)\right) d^3x \\
&= \mp \int_B (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \times \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v})\right) dx^3
\end{aligned}$$

と変形される。 ハミルトンの運動方程式を、Poisson 括弧 $\{\,,\,\}_{-}$ のこの右辺の表示をもちいて書くと、$\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ とおいて、

$$\int_B \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} d^3x = \int_B \omega \cdot \left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \times \mathbf{v}\right) d^3x = \int_B \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v} \times \omega) d^3x$$

となる。 ゆえに

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \omega + \nabla q.$$

したがって

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= \nabla \times \dot{\mathbf{v}} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) + \nabla \times \nabla q \\
&\quad = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega - (div\mathbf{v})\omega + (div\omega)\mathbf{v} \\
&= (\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega.
\end{aligned}$$

Euler equation in vorticity formula

$$\dot{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0. \tag{28}$$

Euler 方程式の Clebsch parametrization については略する. それにともなうゲージ変換群は $Sp(2, \mathrm{R})$ である ([M-W2], [K])。

4 磁束のHelicity=Chern-Simonsと電束のHelicity, discusion

方程式 (27) の vorticity 表示が (29) であるように、Maxwell 方程式 (20) の vorticity 表示が Maxwell 方程式 (19) になっていると思うことができる。すると Maxwell 方程式に対する Helicity(磁束の Helicity) は, 式 (28) に対応して

$$H(B) = \int_M A \wedge dA = \int_M A\, B, \qquad B = F_A = dA$$

になるであろう。 実際 $d(A + d\phi) = dA$, $dB = 0$ より $H(B)$ は $B = dA$ となる $A \in \mathcal{A}$ に依存しない。これは $U(1)-$ ゲージに対する Chern-Simons 形式である。

同じように考えて、Yang-Mills 方程式 (7) (8) に対する**磁束の Helicity** を Chern-Simons 形式

$$H(F_A) = \int_M Tr\left(AdA + \frac{1}{3}A^3\right) = \int_M Tr\left(AF_A - \frac{2}{3}A^3\right) \tag{29}$$

で定義する。　これはゲージ変換群 $\mathcal{G}$ で不変であるから、$\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の関数として定義される。　すなわち　vorticity 表示にともなう不変量であると思える。

一方　**電束の Helicity** を

$$H(E) = \int_M Tr(E \wedge d_A E) \tag{30}$$

で定義する。$E = -p$ は $g \in \mathcal{G}$ により $p \longrightarrow g^{-1}pg$ と変換した (2,3 節)。$H(E)$ はゲージ変換で不変であるから、orbit space $\mathcal{A}_0/\mathcal{G}$ 上に定義され、同じく vorticity 表示にともなう量である。

しかし Maxwel 方程式や流体の Euler 方程式の場合とちがって、Yang-Mills 方程式に対して、我々は、Vorticity 表示、すなわち orbit space と Poisson 同型な"所与の"Poisson 多様体、を与えることができなかった。このことは Yang-Mills 方程式 (8) の $\dot{B} = d_A^* E$ をポアソン-ハミルトン形式で表すことができないことと同じ問題である。

すなわち

「　$B = F_A$ の属する空間 $\mathcal{B} \subset \Omega^2(M, ad\,P)$ を接続 $A \in \mathcal{A}$ に因らず記述すること 」ができないので困っている。

さて、　流体の Euler 方程式の Helicity の類似から　電磁場の Maxwell 方程式の Hellicity を定義し、それが $U(1)$Chern-Simons 位相不変量であることに注目して、Yang-Mills 方程式の場合に (非アーベル)Chern-Simons 形式を Hellicity として定義した. R. Jackiw は 、この逆を取り、Chern-Simons に類似の Helicity を持つであろう流体力学 (非アーベル流体力学) を建設することを提案している。

[M-W]. Marsden-Weinstein: The Hamiltonian struture of the Maxwell-Vlasov equations, Physica 4D(1982),394-406.

[M-W2]. Marsden-Weinstein: Coadjoint orbits, vortices and Clebsch variables for incompressible fluids, Physica 7D(1983),305-323.

[A-K]. Arnold-Khesin: Topological methods in hydrodynamics, App. Math. Ser.125, Springer.

[K]. 郡　敏昭: 流体力学、対称性、位相不変量 (Clebsch parametrization, Hellicity), 講義ノート (http://www.math.waseda.ac.jp/ kori/から取れる)

[J], R. Jackiw: Lectures in fluid dynamics, A particle theorists view of supersymmetric, non-abelian, non-commutative fluid mechanics and d-branes. CRM Ser in Math. Phys. Springer