

流体力学、対称性、位相不変量 (Clebsch parametrization, Helicity)

郡 敏昭

1

筆者は長年 渦糸の方程式と橋本変換による非線形シュレーディンガー方程式を幾何学として理解したいと思っている。これは Langer-Perline はじめ、大阪や東京の流体物理工学者グループにより答えられていると思っても良いのだろうが、筆者には十分”しかけ”がわかった気がしない (Brylinski のテキストがよくわかるがもうちょっとくわしく知りたい)。そのために流体の vortex 記述をあれやこれや (少しづつ) 学習してみた。ゴタゴタの知識を整理するため、解析力学の講義をしてテキスト (文献) も出版した。

一方、筆者は 4 次元 Chern-Simons ゲージ理論の幾何的量子化 (2 次元は Atiyah-Bott) を試みていた。かなり いい線を行っただけで大垣の symplectic 幾何シンポジウムでも話したが、どうも 4 次元接続の空間の symplectic reduction がうまく行っていないらしく行きづまってしまった。ちょうどそのとき、Jackiw の本 (文献) を見てなにかヒントになるのでは、と読んだ (読む試みをした)。

Jackiw の本は数学の素養で育った人には大変読みにくい。私は、このあたりの研究を鈴木達夫君等とも一緒に始めるために、私と彼らがとっかかりまで行くための準備を供する報告を作ることにした。おおすじで Marsden-Weinstein の有名な論文の (部分的) 紹介だが、この論文は大変簡潔なので、勉強しにくいと思う。この報告は Marsden-Weinstein のていねいな学習ノートでもある。こんなものは、そのうちそのうちと放っておくのがつねだが、今回、応用解析研究会と沼津 Poisson シンポジウムで話すことで我が身に圧力をかけてなんとかできた。いいこともあるもので、沼津から帰って、

ハミルトン力学系のゲージ変換群は、それを記述する Poisson 多様体には (対称性により隠されているため) 現れず、Clebsch parametrization により陽的に姿を現す
ことに気づいた。

応用解析研究会では 1 節から 5、8 節、沼津では 1～4 節と 6～8 節を話したつもりです。

応用解析研究会の大谷 光春氏と沼津の待田 芳徳氏に感謝します。

2 ハミルトン力学系の段階的抽象化

2.1

• ハミルトンの運動方程式は

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)) \\ \frac{d}{dt}p_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t), p(t)) \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

と書かれる。

• (1) は、また、ハミルトンベクトル場

$$X_H = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \quad (2)$$

の積分曲線；

$$\varphi^H(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$$

である。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(t) &= X_H(\varphi(t)) \\ \varphi(0) &= z \end{aligned} \quad (3)$$

•

$$P = T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n},$$

上の非退化な閉2次形式

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 \cdots + dp_n \wedge dq_n$$

と、ハミルトニアン

$$H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

により、(3) は、

$$\omega(\cdot, X_H) = dH(\cdot) \quad (4)$$

なる形に書ける。

この形式にすることにより、ハミルトン運動方程式は、より一般的な偶数次元多様体においても述べることができる。

定義 1 $2n$ 次元多様体 P と、 P 上の非退化、閉 2 次形式 ω , $d\omega = 0$, の組 (P, ω) を **シンプレクティック多様体** という

ここで思想的な飛躍がある。実現される ひとつひとつの運動の軌道を考えるのではなく、蓋然的な軌道の全体を空間としてとらえるのである。それを相空間と呼び、数学の対象としては symplectic 多様体として確定している。

2.2

シンプレクティック多様体とハミルトンベクトル場の例：

例 0.

$$(\mathbb{R}^{2n}, dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 \cdots + dp_n \wedge dq_n)$$

$$X_H = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right)$$

例 1. symplectic vector space

V を vector space、 V' をその dual vector space とする。

$(Z = V \times V', \omega)$ は次の symplectic 形式を与えると、symplectic vector space になる。

$$\omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \langle \alpha_2, v_1 \rangle - \langle \alpha_1, v_2 \rangle$$

下の空間は 1 点で微分はないから $d\omega = 0$ は自動的。

$F = F(v, \alpha) \in C^\infty(Z)$ に対して $\frac{\delta F}{\delta v} \in V'$ を

$$D_1 F(v, \alpha)u \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(v + \epsilon u, \alpha) - F(v, \alpha)}{\epsilon} = \left\langle \frac{\delta F}{\delta v}, u \right\rangle$$

で定義。

$\frac{\delta F}{\delta \alpha} \in V$ を

$$D_2 F(v, \alpha)\beta \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(v, \alpha + \epsilon \beta) - F(v, \alpha)}{\epsilon} = \left\langle \beta, \frac{\delta F}{\delta \alpha} \right\rangle$$

で定義。

ハミルトンベクトル場 $X_F \in Z$ は

$$X_F = \left(\frac{\delta F}{\delta \alpha}, \frac{\delta F}{\delta v} \right)$$

となる。

$$dF(u, \beta) = \omega(X_F, (u, \beta)) = \left\langle \beta, \frac{\delta F}{\delta \alpha} \right\rangle - \left\langle \frac{\delta F}{\delta v}, u \right\rangle.$$

例 2. $F = C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{R}_c$ = compact support Radon measure.

$Z = F \times \mathcal{R}_c$ は次の symplectic 形式を与えると、symplectic vector space;

$$\omega((\phi_1, \mu_1), (\phi_2, \mu_2)) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1 \mu_2 - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_2 \mu_1.$$

$H \in C(Z)$ ($F \times \mathcal{R}_c$ の Functional) の Frechet 微分 $\frac{\delta H}{\delta \phi} \in \mathcal{R}_c$ を

$$D_1 H(\phi, \mu)\xi \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(\phi + \epsilon \xi, \mu) - F(\phi, \mu)}{\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^3} \xi \frac{\delta H}{\delta \phi}$$

で定義。おなじく

$\frac{\delta H}{\delta \mu} \in F$ を

$$D_2 H(\phi, \mu) \lambda \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(\phi, \mu + \epsilon \lambda) - F(\phi, \mu)}{\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta H}{\delta \mu} \lambda$$

で定義。

ハミルトンベクトル場は

$$X_H = \left(\frac{\delta H}{\delta \mu}, -\frac{\delta H}{\delta \phi} \right)$$

で与えられる。

例 3. S^2 には symplectic form を定義できる； $\frac{1}{1+p^2+q^2}(dp_1 \wedge dq_1 + dp_2)$ を北半球面、南半球面でつなぐ、が

$S^n, n \geq 3$, には symplectic form を定義できない。

例 4. 多様体 M の余接束 T^*M ,
ハミルトンベクトル場は局所的に (2) の式。

2.3

$$P = \mathbb{R}^{2n}, \omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 \cdots + dp_n \wedge dq_n.$$

上で考えよう。

$F, H \in C^\infty(P)$ に対して、

$$\begin{aligned} \{F, H\} &\equiv \omega(X_F, X_H) \\ &= (dp_i \wedge dq_i) \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k}, \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial}{\partial q_l} - \frac{\partial H}{\partial q_l} \frac{\partial}{\partial p_l} \right) \\ &= \sum_i \left(-\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

これは良く知られた Poisson 括弧式である。

定義 2 多様体 P 上の関数 $C^\infty(P)$ に対して、次の条件を満たす双一次形式 $\{, \}$ が定義されているとき、 P を *Poisson* 多様体という。

1. $(C^\infty(P), \{, \})$ はリー環である；

$$\{aF + bG, H\} = a\{F, H\} + b\{G, H\},$$

$$\{H, aF + bG\} = a\{H, F\} + b\{H, G\}.$$

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0$$

2. $\{, \}$ は *Leipnitz* の式を満たす；

$$\{FG, H\} = \{F, H\}G + F\{G, H\}$$

• Symplectic 多様体は poisson 多様体である。

• $F = C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{R}_c = \text{compact support Radon measure}$ として、シンプレクティック多様体

$$Z = F \times \mathcal{R}_c, \quad \omega((\phi_1, \mu_1), (\phi_2, \mu_2)) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1 \mu_2 - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_2 \mu_1.$$

上の Poisson 括弧式は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \omega\left(\left(\frac{\delta F}{\delta \mu}, -\frac{\delta F}{\delta \phi}\right), \left(\frac{\delta G}{\delta \mu}, -\frac{\delta G}{\delta \phi}\right)\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\delta G}{\delta \mu} \frac{\delta F}{\delta \phi} - \frac{\delta F}{\delta \mu} \frac{\delta G}{\delta \phi}\right) \end{aligned}$$

Poisson 多様体 $(X, \{, \})$ において $H \in C^\infty(X)$ をハミルトニアンとする運動方程式は

$$\{F, H\}(x(t)) = \frac{d}{dt}F(x(t)), \quad \forall F \in C^\infty(X) \quad (6)$$

あるいは 略して

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

と定義される。

$P = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 \cdots + dp_n \wedge dq_n$. のとき、(1) と (5) より、たしかに

$$\begin{aligned} &\{H, F\}(q(t), p(t)) \\ &= \sum_i \left(-\frac{\partial F}{\partial q_i}(q(t), p(t)) \frac{d}{dt}q_i(t) - \frac{\partial F}{\partial p_i}(q(t), p(t)) \frac{d}{dt}p_i(t) \right) \\ &= -\frac{d}{dt}F(q(t), p(t)) \end{aligned}$$

2.4

•

$P = (\mathbb{R}^{2n}, \{, \})$ においては交換関係

$$\{q_i, p_j\} = -\delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

がある。

物理では、与えられた（天下りの）交換関係を持つ代数として、力学系を考えることが多い。天下りと言っても任意でなく、Lagrangean $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ の中の変数 q と その双対変数 $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ が満たしているように解釈できる代数を、はじめに仮定して出発する。

このように直感を離れ、代数として力学系を見ることを提案したのはハイゼンベルグである。量子力学の初期に、解釈はあともわしにしても いろいろ実行できるというのですぐに広まったが、De Broille-Schrodinger の波動方程式が、ふたたび直感的理解の鍵を提供し、ふたつが同値であることもわかった、という話は有名である。

2.5

以上のようにハミルトン力学系の定式化が進化・抽象化されてきた。この各段階は、真の一般化になっている。

• シンプレクティック多様体でない Poisson 多様体も重要な力学系を与える。次節以降を見よ。

• Poisson 多様体は、シンプレクティック多様体の leaves で foliate されている。この構造はずいぶん調べられた。(Lie, Souriau, Berezin, Kostant, Arnold, Marsden-Weinstein, Guillemin-Sternberg その他 による reduction の研究)

• 一般的な Poisson 多様体上で symplectic 座標は取れない。⇒ **Clebsch variable の導入へ**

この観点は古い歴史を持つ（らしい）にもかかわらず、数学として これまでほとんど議論されなかった（らしい）。

• すべての $F \in C^\infty(P)$ と可換 $[F, H] = 0$, な $H \in C^\infty(P)$ を Casimir 元という。Casimir 元は運動の保存量であるが、系の情報を引き出すのに役に立たない。しかし、Casimir 元は重要で、おそらく背後の位相的性質を反映している、すべてがでなくとも、そのような Casimir 元があるのだろう。

3 シンプレクティックでない Poisson 多様体

3.1 $SO(3)$ あるいは剛体の運動

$F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^3 = so(3)^*)$ 、

$$\{F, G\}_-(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} \cdot (\nabla F \times \nabla G), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (7)$$

● 剛体のオイラー方程式
ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{I_1} + \frac{x_2^2}{I_2} + \frac{x_3^2}{I_3} \right)$$

に対する、ハミルトンの運動方程式

$$\{F, H\}(\mathbf{x}) = \dot{F}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

は次の剛体のオイラーの方程式となる。

$$\dot{x}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} x_2 x_3, \quad \dot{x}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} x_3 x_1, \quad \dot{x}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} x_1 x_2. \quad (9)$$

$(\nabla F(\mathbf{x}) \times \nabla G(\mathbf{x}))$ の第一成分は

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_3} - \frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{x_3}{I_3} - \frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{x_2}{I_2}.$$

等より

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\nabla F(\mathbf{x}) \times \nabla G(\mathbf{x})) &= x_1 \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{x_3}{I_3} - \frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{x_2}{I_2} \right) + x_2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{x_1}{I_1} - \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{x_3}{I_3} \right) \\ &\quad + x_3 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{x_2}{I_2} - \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{x_1}{I_1} \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \left(\frac{x_2 x_3}{I_2} - \frac{x_2 x_3}{I_3} \right) + \frac{\partial F}{\partial x_2} \left(\frac{x_3 x_1}{I_3} - \frac{x_3 x_1}{I_1} \right) + \\ &\quad \frac{\partial F}{\partial x_3} \left(\frac{x_1 x_3}{I_2} - \frac{x_2 x_3}{I_3} \right) \end{aligned}$$

一方

$$\dot{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \dot{x}_3$$

だから、この2つを較べて、あるいは $F = x_1, F = x_2, F = x_3$ を代入して、運動方程式の形になる。

3.2 $Diff_{vol}$ あるいは 非圧縮性流体の運動

$B \subset \mathbb{R}^3$

B を B に移す体積を変えない微分同相写像の全体 $Diff_{vol}(B)$ は群になる。
このリー群のリー環は

$$Vect_{div, \partial}(B) = \{\mathbf{v} \in Vect(B); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial B} = 0\}$$

であると考えられる。

実際 vol を体積要素, $X \in \text{Vect}(B)$ の流れを φ_t とすると

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \text{vol} - \text{vol}}{t} = L_X \text{vol} = d(i_X \text{vol}) = (\text{div} X) \text{vol}$$

また

$$\int_{B \cap V} (\text{div} \mathbf{v}) d\text{vol} = \int_{\partial B \cap V} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma$$

となる。

$\mathcal{G} = \text{Vect}_{\text{div}, \partial}(B) \ni \mathbf{v}, \mathbf{u}$ の bracket を与えて次の (無限次元) リー環を定義する。

$$[\mathbf{v}, \mathbf{u}] = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

左辺はベクトル場 $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ で右辺はベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ 。

- 汎関数微分 $\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \in \mathcal{G}$ を

$$DF(\mathbf{v}) \delta \mathbf{v} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{v} + \epsilon \delta \mathbf{v}) - F(\mathbf{v})}{\epsilon} = \int_B \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \delta \mathbf{v} dx^3$$

で定義する。

$F, G \in C^\infty(\mathcal{G})$, $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$, に対して、

$$\{F, G\}_\pm(\mathbf{v}) = \pm \int_B \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}), \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \right] dx^3. \quad (10)$$

とおくと、 $(\mathcal{G}, \{\cdot, \cdot\}_\pm)$ は Poisson 多様体となる。

- [オイラーの方程式]

$$H(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_B \mathbf{v} \mathbf{v} dx^3$$

とおく。

$\frac{\delta H}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ となるので、Hamilton 運動方程式

$$\frac{d}{dt} F(\mathbf{v}(t)) = \{H, F\}_-(\mathbf{v})$$

は

$$\int_B \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \cdot \dot{\mathbf{v}} dx^3 = - \int_B \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \right] dx^3$$

$\text{Vect}_{\text{div}, \partial}(B) \ni \mathbf{v}$ の満たす条件を使い、ベクトル解析を行うと、これは次の形に書けることがわかる。

$$\int_B \left\{ \dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \right) \right\} \cdot \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) dx^3 = 0, \quad \forall F \quad (11)$$

任意の $\mathbf{u} = \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \in \mathcal{G}$ に直交するのは ∇q の形,
 ($\mathcal{G} \ni \mathbf{u}$ は $\text{div} \mathbf{u} = 0$ で, ∂B に接する)
 だから、運動方程式

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \right) = -\nabla q \quad (12)$$

が得られる。 $p = q + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2$ とおいて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p &= 0 \\ \text{div} \mathbf{v} &= 0 \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\partial B} = 0 \\ \Delta p &= \text{div}((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} &= -((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

3.3 Euler 方程式の vortex 表示

$\text{div} \mathbf{a} = \text{div} \mathbf{b} = 0$ なら $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \equiv (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. を使うと、

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{\pm}(\mathbf{v}) &= \pm \int_B \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}), \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \right] dx^3 \\ &= \mp \int_B \mathbf{v} \cdot \left(\nabla \times \left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \times \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \right) \right) d^3x \\ &= \mp \int_B (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \times \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \right) dx^3 \end{aligned}$$

$\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ を vorticity(渦度) という。

この右辺の表示の Poisson 括弧式でハミルトンの運動方程式を書くと

$$\int_B \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} d^3x = \int_B \omega \cdot \left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \times \mathbf{v} \right) d^3x = \int_B \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v} \times \omega) d^3x$$

となる。ここで $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ を使った。

$$\int_B (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v} \times \omega) \cdot \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} d^3x = 0, \quad \forall F$$

より

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \omega + \nabla q.$$

したがって

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \nabla \times \dot{\mathbf{v}} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) + \nabla \times \nabla q \\ &= (\omega \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega - (\text{div} \mathbf{v}) \omega + (\text{div} \omega) \mathbf{v} \\ &= (\omega \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega. \end{aligned}$$

Euler equation in vorticity formula

$$\dot{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0. \quad (13)$$

$$\dot{\omega} = \text{curl}(\omega \times \mathbf{v})$$

の書き方が多い。

4 様々な非線形方程式の Poisson 括弧式

このように Poisson 多様体と、その上のハミルトニアンを与え、様々な方程式を、ハミルトン運動方程式

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

で解釈することができる。(文献 Ratiu-Marsden)

単に方程式を導くのではなく、シンプレクティック幾何の一般論(群の作用による reduction)を適用し、軌道の幾何まで示す。

1970-1980年代の non-canonical Hamiltonian structures の流行。

(解の存在の解析学は Ebin-Marsden がほとんどやっている)

(Maxwell-Ylasov については、鵜飼さんが解析を行い解の存在を示しているのをどこかの引用文献で見た)

以下で計算を行う空間の双対が重要だが、双対の取り方は無限遠方での減衰や境界条件で異なってくる。なにがふさわしいかは問題ごとに考える必要があるがここではそれを考えず形式的な議論しかしていない。

•Maxwell (1).

$$P = \{(\mathbf{E}, \mathbf{B}) : \mathbf{E}, \mathbf{B}; \text{vector fields on } \mathbb{R}^3, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0\}$$

$F = F(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ に対して $\frac{\delta F}{\delta \mathbf{E}}, \frac{\delta F}{\delta \mathbf{B}}$ は divergence free vector fields として次の式で定義される:

$$dF(\mathbf{E}, \mathbf{B})\delta \mathbf{E} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{E} + \epsilon \delta \mathbf{E}, \mathbf{B}) - F(\mathbf{E}, \mathbf{B})}{\epsilon} = \int \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\delta F}{\delta \mathbf{E}} d^3x$$

$\frac{\delta F}{\delta \mathbf{B}}$ も同様。

poisson bracket は

$$\{F, G\} = \int \left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{E}} \cdot (\nabla \times \frac{\delta G}{\delta \mathbf{B}}) - \frac{\delta G}{\delta \mathbf{E}} \cdot (\nabla \times \frac{\delta F}{\delta \mathbf{B}}) \right) d^3x. \quad (14)$$

ハミルトニアンを

$$H = \int |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2 d^3x$$

として、マクスウェルの方程式

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (15)$$

を得る。

•Maxwell (2)

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{V}; \text{vector fields on } \mathbb{R}^3\}$$

$R = T^*\mathcal{V} = \text{cotangent bundle of } \mathcal{V}$ の symplectic form は、

$$(\mathbf{A}, \mathbf{Y}) \in R$$

に対して

$$\omega((\mathbf{A}_1, \mathbf{Y}_1), (\mathbf{A}_2, \mathbf{Y}_2)) = \int (\mathbf{Y}_2 \mathbf{A}_1 - \mathbf{Y}_1 \mathbf{A}_2) d^3x$$

で与えられる。

その Poisson 括弧式は

$$\{F, G\} = \int \left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}} \frac{\delta G}{\delta \mathbf{Y}} - \frac{\delta F}{\delta \mathbf{Y}} \frac{\delta G}{\delta \mathbf{A}} \right) d^3x \quad (16)$$

Hamiltonian

$$H(\mathbf{A}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \int |\mathbf{Y}|^2 d^3x + \frac{1}{2} \int |\nabla \times \mathbf{A}|^2 d^3x \quad (17)$$

により方程式

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

は

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}), \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{Y}$$

あるいは $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と $\mathbf{E} = -\mathbf{Y}$ とおいて、マクスウェルの方程式

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (18)$$

になる。

• ここで対応

$$\mathbf{J}: (\mathbf{A}, \mathbf{Y}) \longrightarrow (\mathbf{E} = -\mathbf{Y}, \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A})$$

は、

$$\{F \circ \mathbf{J}, F \circ \mathbf{J}\} = \{F, G\} \circ \mathbf{J}$$

を満たす。すなわち、symplectic 多様体 (R, ω) から Poisson 多様体 $(P, \{, \})$ への Poisson map を与えている。このような写像を Clebsch parametrization といい、このノートはそれを理解するためにつくられている。

•Lie-Poisson bracket

Lie 環 $\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]$ があると その双対 $\mathfrak{g}^*$ は次により Poisson 多様体となる：

$$\{F, G\}_{\pm}(\mu) = \pm \left\langle \mu, \left[\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta G}{\delta \mu} \right] \right\rangle \quad (19)$$

ここに $\frac{\delta F}{\delta \mu} \in \mathfrak{g}$ は

$$dF(\mu)\delta\mu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\mu + \epsilon\delta\mu) - F(\mu)}{\epsilon} = \left\langle \delta\mu, \frac{\delta F}{\delta \mu} \right\rangle$$

●Poisson-Vlasov

$(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$,
 $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ 空間の正準変換 (正準形式 $\sum_i dp_i \wedge dx_i$ を不変にする微分同相) の
 全体 $Diff_{can}(\mathbb{R}^6)$ は無限次元リー群で、そのリー環 (無限小正準変換) $\mathfrak{g}$ は
 $\mathbb{R}^6$ 上のハミルトンベクトル場であり、 $C^\infty(\mathbb{R}^6)$ と思える。さらに $\mathbf{p}$ 方向に緩
 増加なものにかぎって考える。 $\mathfrak{g}$ のリー括弧式は

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

をあたえる。

この dual のリー環 ($\mathbf{p}$ 方向に 急減少の distribution) を $\mathfrak{g}^*$ とする。

$\mathfrak{g}^*$ は上に述べたように Poisson 多様体になる：

$$\{F, G\}(f) = \int_{\mathbb{R}^6} f \left[\frac{\delta F}{\delta f}, \frac{\delta G}{\delta f} \right] d\mathbf{x} d\mathbf{p}$$

ハミルトニアン

$$H(f) = \int \frac{1}{2} |\mathbf{p}|^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{p}$$

に対してハミルトンの運動方程式

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

は Poisson-Vlasov 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (20)$$

を与える。ここに

$$\Delta \phi_f = -e \int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}.$$

●Maxwell-Vlasov プラズマ方程式

Poisson 多様体として、上の 2 つの直積

$$\mathfrak{g}^* \times \text{cotangent bundle of } \mathcal{A} \ni (f, \mathbf{A}, \mathbf{Y})$$

$$\{\{F, G\}\}(f, \mathbf{A}, \mathbf{Y}) = \int_{\mathbb{R}^6} f \left[\frac{\delta F}{\delta f}, \frac{\delta G}{\delta f} \right] d\mathbf{x} d\mathbf{p} + \int \left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}} \frac{\delta G}{\delta \mathbf{Y}} - \frac{\delta F}{\delta \mathbf{Y}} \frac{\delta G}{\delta \mathbf{A}} \right) d^3x \quad (21)$$

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{A}; \quad \text{vector fields on } \mathbb{R}^3 \}$$

$P = \text{cotangent bundle of } \mathcal{A}$

$$P \ni (\mathbf{A}, \mathbf{Y})$$

Hamiltonian として

$$H(f, \mathbf{A}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \int |\mathbf{p} - \mathbf{A}(\mathbf{x})|^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} d\mathbf{p} + \frac{1}{2} \int (|\mathbf{Y}|^2 + |\nabla \times \mathbf{A}|^2) d\mathbf{x} \quad (22)$$

ハミルトンの運動方程式

$$\dot{F} = \{\{F, H\}\}$$

は Maxwell-Vlasov 方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{E} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{B} - \frac{e}{c} \int \mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (23)$$

•Toda lattice

$$P = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid a^i > 0, i = 1, \dots, n\}$$

$$\{F, G\}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left({}^t \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \right), {}^t \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{b}} \right) \right) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{a}} \\ \frac{\partial G}{\partial \mathbf{b}} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a^1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & a^n \end{pmatrix}$$

•KdV 等々

5 Clebsch parametrization

5.1

すでに言ったように Poisson 多様体上のハミルトンの運動方程式

$$\dot{F} = [F, H]$$

は正準な形 (1) に書けない。symplectic leaf 上の部分正準座標では、(1) の形になるが。そこで、少し無駄な情報を入れていいから、正準形に書こうと思う (のだろう)。

定義 3 $(P, \{, \}_P) : \text{Poisson manifold}$ に対して $(R, \omega) : \text{Symplectic manifold}$ から $(P, \{, \}_P)$ への *Poisson map*

$$\psi : R \longrightarrow P,$$

$$\{F \circ \psi, G \circ \psi\}_P = \{F, G\}_R \circ \psi$$

を *Clebsch parametrization* という。

● R にリー群 G が作用し、 $P = \mathcal{G}^*$ のときは $\psi : R \longrightarrow \mathcal{G}^*$ は moment map に他ならない。

● ハミルトニアン $H \in C^\infty(P)$ のハミルトンベクトル場 $X_H \in \text{Vect}(P)$;

$$\{F, H\}_P = X_H F$$

とする。

ハミルトニアン $H \circ \psi \in C^\infty(R)$ のハミルトンベクトル場 $X_{H \circ \psi} \in \text{Vect}(R)$ は X_H へ移される:

$$\psi_* X_{H \circ \psi} = X_H.$$

したがって $H \circ \psi$ の積分曲線も X_H の積分曲線に移される。

こうして Poisson 多様体上の方程式が、 R 上の symplectic Hamiltonian 型の方程式になおる。それは当然、正準形式 (1) で書けている。したがって、なんとなくわかった形になった気がする。また、正準交換関係が見えるので、その系の代数がわかる。

以下に Clebsch parametrization をいくつか計算しようと思うが、モーメント写像を知らない読者も多いから まずそれを例を挙げて解説する。

6 附: モーメント写像は運動量、角運動量の数学表現

シンプレクティック多様体 (P, ω) に Lie 群 G が作用しているとしよう; $P \times G \ni (x, g) \longrightarrow g \cdot x$.

Lie 群 G の Lie 環 $\text{Lie}G$ の infinitesimal な作用により各 $\xi \in \text{Lie}G$ について P 上のベクトル場 ξ_P が定まる (標準ベクトル場という):

$$\xi_P(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp t\xi \cdot x.$$

ξ_P をハミルトンベクトル場とするようなハミルトニアンがあるとはかぎらないが、もしある $J_\xi \in C^\infty(P)$ に対して

$$X_{J_\xi} = \xi_P$$

すなわち

$$dJ_\xi = \omega(\cdot, \xi_P)$$

となるなら、

1. G の P への作用はハミルトニアン作用であるといい、
2. ξ に $J_\xi(x)$ を対応させる写像を $\mathbf{J}(x) \in (\text{Lie}G)^*$ として、

$$\begin{aligned} \mathbf{J} : P \ni x &\longrightarrow \mathbf{J}(x) \in (\text{Lie}G)^* \\ \langle \mathbf{J}(x), \xi \rangle &= J_\xi(x) \end{aligned}$$

をモーメント写像という。

用意に Poisson 多様体にも一般化できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{J} : P \ni x &\longrightarrow \mathbf{J}(x) \in (\text{Lie}G)^* \\ \langle \mathbf{J}(x), \xi \rangle &= J_\xi(x) \\ \{F, J_\xi\} &= \xi_P(F), \quad \forall F \end{aligned}$$

6.1 いくつかの運動量写像の計算

6.1.1 例.1. 平行移動群

平行移動群 $T \simeq (\mathbb{R}^3, +)$ は $\mathbb{R}^3$ に

$$T \times \mathbb{R}^3 \ni (a, x) \longrightarrow x + a \in \mathbb{R}^3$$

により作用する。成分ごとに書けば、

$$T \times \mathbb{R}^3 \ni \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \\ x_3 + a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

T の作用は、さらに $P = T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ にまで持ち上げられる。すなわち

$$T \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \ni (a, q, p) \longrightarrow \begin{pmatrix} q + a \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

により余ベクトル p には $+0$ として作用させる。

T のリー環を $\mathcal{T}$ としよう。

$\xi \in \mathcal{T}$ に対して $P = T^*\mathbb{R}^3$ 上の無限小ベクトル場 (ξ 方向への平行移動の generator) は;

$$\begin{aligned}\xi_P\left(\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\right) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\begin{pmatrix} q + t\xi \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^3 \xi_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^3 0 \frac{\partial}{\partial p_j} = \sum_{j=1}^3 \xi_j \frac{\partial}{\partial q_j}\end{aligned}$$

これを Hamilton ベクトル場とする Hamiltonian $J_\xi(q, p) \in C^\infty(P)$;

$$X_{J_\xi} = \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

を探す.

$$J_\xi = \sum_{i=1}^3 p_i \xi_i$$

と置こう。

$$\begin{aligned}\omega(\cdot, \xi_P) &= \sum_{i=1}^3 dp_i \wedge dq_i(\cdot, \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial}{\partial q_i}) = \sum_{i=1}^3 \xi_i dp_i \\ &= dJ_\xi\end{aligned}$$

より、 ξ_P は J_ξ のハミルトンベクトル場となる。

モーメント写像は

$$J(q, p) : \mathcal{T} \ni \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ x i_2 \\ x i_3 \end{pmatrix} \longrightarrow J_\xi((q, p)) = \sum_{i=1}^3 p_i \xi_i = \xi \cdot \mathbf{p}$$

より

$$J : P \ni (q, p) \longrightarrow J((q, p)) = \mathbf{p} \in \mathcal{G}^*.$$

たしかに momentum map は momentum $\mathbf{p}$ を表している。

6.1.2 例.2. 回転群 $SO(3)$

回転群 $SO(3)$ は $\mathbb{R}^3$ に作用する。この作用は運動量相空間 (余接束 $T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ に持ち上げられる。(すぐあとで x_3 - 軸を中心とした回転の場合で具体的に作用を書く。) $\mathbb{R}^6$ は

$$\omega = \sum_{i=1}^3 dp_i \wedge dq_i$$

によりシンプレクティックであった。

まず x_3 - 軸を中心とした無限小回転 $\in so(3)$ の標準ベクトル場を見よう；

x_3 - 軸を中心とした無限小回転；

$$\mathcal{G} \ni E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が生成する x_3 - 軸を中心とした回転は

$$\exp tE_3 = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で、

$$\exp tE_3 \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & & \\ \sin t & \cos t & 0 & & O \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & O & & \cos t & -\sin t & 0 \\ & & & \sin t & \cos t & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

により作用する。

これより x_3 - 軸を中心とした標準ベクトル場 (回転の generator) は

$$X_3 = (E_3)_P = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp tE_3 = -q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

$$X_{J_{E_3}} = (E_3)_P$$

となる関数 $J_{E_3} \in C^\infty(P)$ を求めよう。

$$J_{E_3}(q, p) = -p_1 q_2 + p_2 q_1$$

と置く。

$$\begin{aligned} \omega(\cdot, X_3) &= \sum_{i=1}^3 dp_i \wedge dq_i \left(\cdot, -q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} \right) \\ &= (-q_2 dp_1 + q_1 dp_2) - (-p_2 dq_1 + p_1 dq_2) = dJ_{E_3} \end{aligned}$$

より、たしかに $X_{J_{E_3}} = X_3$.

$\mathbf{J}((q, p))$ は E_3 に $J_{E_3}(q, p) = -p_1 q_2 + p_2 q_1 = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ の第3成分, を対応させる。

より一般に

$$\mathbf{J}(q, p) : \xi = \sum c_i E_i \longrightarrow \sum c_i M_i = \mathbf{M} \cdot \mathbf{c}$$

ここに M_i は x_i -軸を中心とする回転の角運動量ベクトルである：

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$$

$$\mathbf{J}(q, p) = (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot .$$

以上より $SO(3)$ のシンプレクティック多様体 $\mathbf{R}^6$ への作用のモーメント写像は angular momentum $\mathbf{M}$ である。

6.2 余接束の場合

Lie 群 G が多様体 M に作用すると、その作用は M の余接束 T^*M へ持ち上がる。例 1 で平行移動群の $\mathbf{R}^3$ への作用が $\mathbf{R}^6$ に持ち上がることを見たと同じである。

このときモーメント写像 $\mathbf{J} : P = T^*M \longrightarrow (LieG)^*$ は

$$\langle \mathbf{J}(z), \xi \rangle = \theta(\xi_M)(x), \quad z \in T_x^*M$$

で与えられる。ここに

$$\xi_M(x) = \frac{d}{dt} \exp t\xi \cdot x$$

で、 θ は canonical 1-form, すなわち $\omega = d\theta$ となる 1-form である。 $M = \mathbf{R}^3$ なら $\theta = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3$ 。

だから $\xi_M = \xi_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial q_3}$ とするなら、

$$\langle \mathbf{J}(z), \xi \rangle = p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3. \quad \forall \xi \in LieG.$$

6.3 Maxwell 方程式

3 節の Maxwell (2) における symplectic 多様体 $R = T^*\mathcal{A}$ には $U(1)$ -gauge 変換群 $K = C^\infty(\mathbf{R}^3, U(1))$ が作用する：

$$(\mathbf{A}, \mathbf{Y}) \longrightarrow e^{if} \cdot (\mathbf{A}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{A} + \nabla f, \mathbf{Y}).$$

この標準ベクトル場 f_R は

$$f_R = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} e^{itf} \cdot (\mathbf{A}, \mathbf{Y}) = (\nabla f, 0).$$

$$\left(-\frac{\delta J_f}{\delta Y}, \frac{\delta J_f}{\delta A} \right) = (\nabla f, 0)$$

から、 $J_f((\mathbf{A}, \mathbf{Y}) = \nabla \cdot \mathbf{Y} f$ で、 $U(1)$ -gauge 変換群のモーメント写像 $\mathbf{J}_K : T^*\mathcal{A} \longrightarrow Lie U(1)^* = \mathbf{R}$ は

$$\mathbf{J}_K = -\operatorname{div} \mathbf{Y} = \operatorname{div} \mathbf{E} \quad (25)$$

となることがわかった。

$\text{div} \mathbf{E} = \rho$, constant, は Poisson 多様体 P の symplectic leaf であり、運動はこの上に reduced または constrained. こうして Maxwell 方程式の残り一つ
条件

$$\text{div} \mathbf{E} = \rho$$

の解釈がつく。

6.4 Kelvin 郷の circulation theorem

B 上の体積保存微分同相の群 $\text{Diff}_{\text{vol.}}(B)$ はその Lie 環 $\text{Vect}_{\text{div}, \partial}(B)$ に adjoint に作用する。この説明をしよう。 $\eta \in \text{Diff}_{\text{vol.}}(B)$ の点 $\mathbf{x} \in B$ への作用は $\eta \cdot \mathbf{x}$ である。 $\eta \in \text{Diff}_{\text{vol.}}(B)$ の $\mathbf{v} \in \text{Vect}_{\text{div}, \partial}(B)$ への作用は、点 $\mathbf{x} \in B$ での接ベクトル $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ を点 $\eta^{-1}\mathbf{x} \in B$ での接ベクトル $\mathbf{v}(\eta^{-1}\mathbf{x})$ に持っていき、それを η の微分写像

$$(d\eta)_{\eta^{-1}\mathbf{x}} : T_{\eta^{-1}\mathbf{x}}B \longrightarrow T_{\mathbf{x}}B$$

で、ふたたび点 $\mathbf{x} \in B$ での接ベクトルにもどしたものである。これは $\mathbf{v}$ の push forward $\eta_*\mathbf{v}$ にほかならない。

この双対として、 $\eta \in \text{Diff}_{\text{vol.}}(B)$ の $\mathbf{v} \in \text{Vect}_{\text{div}, \partial}(B)^* \simeq \text{Diff}_{\text{vol.}}(B)$ への作用 (coadjoint 作用) が、 $\mathbf{v}$ の pullback $\eta^*\mathbf{v}$ になる。

一方、vortex 表示の Euler 方程式 (13) の解は、Euler 方程式 (12) の解 $\mathbf{v}(t)$ の流れ曲線 $\varphi(t)$, (Poisson map), による引き戻し、

$$\omega(t) = \varphi(t)^*\omega(0)$$

になる。

したがって、 $\omega(t)$ は $\text{Diff}_{\text{vol.}}(B)$ の $\text{Vect}_{\text{div}, \partial}(B)^* \simeq \text{Diff}_{\text{vol.}}(B)$ への coadjoint 作用で得られる。

すなわち、vortex (渦) は、はじめひとつの流れの上であれば、その流れにはずれることなく、流れていく (ケルヴィン郷の定理)。。流れの上の岩に坐って眺めるとおりである。

7 Clebsch parametrization の計算

7.1 剛体

$$P = \mathbb{R}^3, \{ \cdot \}_-$$

symplectic space

$$\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2, \omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 = \frac{1}{2i}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2)$$

に $SU(2)$ が symplectic に作用している； $g^*\omega = \omega, \forall g \in SU(2)$ 。 $SU(2)$ のリー環は $su(2) \simeq so(3) \simeq \mathbb{R}^3 = P$ 。この作用の moment map

$$J : R \longrightarrow so(3)^* = P$$

は, Poisson map であるから、Clebsch parametrization $J : R^4 \longrightarrow P$ ができた。これを Cayley-Klein parameters という。

計算してみると

$$J : \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} q_1 p_2 - q_2 p_1 \\ q_1 q_2 + p_1 p_2 \\ \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2 + p_1^2 - p_2^2) \end{pmatrix}, \quad \cdot \right\rangle \quad (26)$$

実際、 $\xi = \frac{i}{2}\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in su(2)$ の $\mathbb{R}^4$ への infinitesimal 作用に対して、

$$\begin{aligned} \xi_P \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} &= \left(\frac{i}{2}\sigma_2\right)_{\mathbb{R}^4} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp t \begin{pmatrix} 0 & 1 & O \\ -1 & 0 & O \\ O & 0 & 1 \\ O & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &= -q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} \end{aligned}$$

だから

$$\omega(\xi, \cdot) = d(q_1 p_2 - q_2 p_1).$$

すなわち

$$J_\xi(q, p) = q_1 p_2 - q_2 p_1$$

等。

この変数変換により

$$\{F \circ J, G \circ J\}_{\mathbb{R}^4} = \{F, G\}_-$$

が成り立つことを直接確かめられる。剛体のオイラー方程式が $H' = H \circ J \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ によりハミルトンの運動方程式

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H'}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H'}{\partial \mathbf{q}}$$

に書けることも計算できる。

(24) の J は **Hopf 写像** $S^3 \longrightarrow S^2$ である。

7.2 incompressible flow

$$P = Vect_{div, \partial}(B) = \{\mathbf{v} \in Vect(B); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial B} = 0\}$$

$$\{F, G\}_{\pm}(\mathbf{v}) = \pm \int_B \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}), \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \right] dx^3.$$

の Clebsch parametrization を求める。

1.2 節の symplectic space $Z = F \times \mathcal{R}_c$ を考える。

$$\omega((\mu_1, \phi_1), (\mu_2, \phi_2)) = \int_B \mu_2 \phi_1 - \mu_1 \phi_2$$

B 上の体積を保存する微分同相の Lie 群を $Diff_{vol}(B)$ とすると, $Diff_{vol}(B)$ の Lie 環は $\mathcal{G} = Vect_{div, \partial}(B)$ である。

$Diff_{vol}(B)$ は F に左から作用する; $\eta \cdot \phi = \phi \circ \eta^{-1}$, $\phi \in F$.

その infinitesimal generator は, ϕ の $\mathbf{v}$ によるリ-微分

$$\mathbf{v}_F = \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi(\exp -t\mathbf{v} \cdot) = -L_{\mathbf{v}}\phi$$

である。

$Diff_{vol}(B)$ の作用は $Z = T^*F$ に持ち上がり、symplectic である: $\eta^*\omega = \omega$.
この作用のモーメント写像

$$\mathbf{J}: Z \longrightarrow \mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G} = P$$

が Clebsch parametrization を与える。

それは 5.1.3 より

$$\langle \mathbf{J}(\phi, \mu), \mathbf{v} \rangle = \int_B \mu \cdot \mathbf{v}_F(\phi) dx, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{G}$$

で与えられるから, $\mu \in T_{\phi}^*F \simeq F$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}(\phi, \mu), \mathbf{v} \rangle &= \int_B \mu \cdot (-L_{\mathbf{v}}\phi) dx = \int_B (L_{\mathbf{v}}\mu) \cdot \phi dx \\ &= \int_B \phi \nabla \mu \cdot \mathbf{v} dx. \end{aligned}$$

すなわち

$$\mathbf{J}(\phi, \mu) = \phi \nabla \mu \cdot \cdot \quad (27)$$

最後の式で $\phi \nabla \mu$ を $\phi \nabla \mu + \nabla \theta$ としても変わらない。ただし $\phi \nabla \mu + \nabla \theta \in \mathcal{G}$ のため、 $\theta \in F$ は

$$\Delta \theta = -\operatorname{div}(\phi \nabla \mu)$$

となるよう取らねばならない。

以上より、incompressible flow の Clebsch parametrization $Z \longrightarrow P$ は

$$\mathbf{v} = \phi \nabla \mu + \nabla \theta$$

で与えられる。

incompressible flow のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2} \int_B \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d^3x$$

に対して Z 上のハミルトニアンは

$$H' = H \circ J = \frac{1}{2} \int_B (\phi \nabla \mu) \cdot \mathbf{v} d^3x = -\frac{1}{2} \int_B (\mu \nabla \phi) \cdot \mathbf{v} d^3x$$

であるから、ハミルトンベクトル場は

$$\left(\frac{\partial H'}{\partial \mu} = -\nabla \phi \cdot \mathbf{v}, \quad -\frac{\partial H'}{\partial \phi} = -\nabla \mu \cdot \mathbf{v} \right)$$

運動方程式は

$$\dot{\phi} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \phi \quad (28)$$

$$\dot{\mu} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mu. \quad (29)$$

7.3 Maxwell 方程式

すでに 3 節で見たように、対応

$$\mathbf{J} : (\mathbf{A}, \mathbf{Y}) \longrightarrow (\mathbf{E} = -\mathbf{Y}, \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A})$$

は、

$$\{F \circ \mathbf{J}, F \circ \mathbf{J}\} = \{F, G\} \circ \mathbf{J}$$

を満たす。すなわち、symplectic 多様体 (R, ω) から Poisson 多様体 $(P, \{, \})$ への Clebsch parametrization である。

8 Clebsch parametrization に付随するゲージ変換群

定義 4 $\psi : R \longrightarrow P$ を Poisson 多様体 P の Clebsch parametrization とする。Clebsch parametrization に付随するゲージ変換とは symplectic diffeomorphism $\phi : R \longrightarrow R$ で $\psi \circ \phi = \psi$ をみたすものを云う。

8.1 剛体

剛体の運動の Poisson 多様体 $(P = \mathbb{R}^3 \simeq so(3)^*, \{, \})$ の Clebsch parametrization $R = \mathbb{C}^2 \longrightarrow so(3)^* = P$ において、 $U(1)$ はゲージ変換群である。実際、 $U(1)$ は $\mathbb{C}^2$ に作用し、(26) の Poisson map $J : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ は、 $z_i = q_i + ip_i$, $i = 1, 2$, として

$$J : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} \text{Im}.z_2\bar{z}_1 \\ \text{Re}.z_2\bar{z}_1 \\ \frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2) \end{pmatrix}, \cdot \right\rangle$$

と書けるが、これは $U(1)$ の作用で不変。

8.2 Maxwell equation

3 節の Maxwell 方程式 (2) において、Maxwell 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

の Clebsch parametrization $\mathbf{J} : T^*\mathcal{A} \longrightarrow P$ が

$$\mathbf{E} = -\mathbf{Y}, \quad \mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$$

で与えられることを見た。

よく知られているように vector potentials の空間 $\mathcal{A}$ には $U(1)$ -gauge transformation group $\text{Aut}_0(\mathbb{R}^3 \times U(1)) = C^\infty(\mathbb{R}^3, U(1))$ が

$$\mathbf{A} \longrightarrow e^{i\phi} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} + \nabla\phi,$$

により作用する。これは $T^*\mathcal{A}$ に持ち上がる：

$$(\mathbf{A}, \mathbf{Y}) \longrightarrow e^{i\phi} \cdot (\mathbf{A}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{A} + \nabla\phi, \mathbf{Y}).$$

あきらかに

$$\mathbf{J} \circ \phi = \mathbf{J}.$$

である。

8.3 incompressible flow のゲージ変換群

$Sp(2, \mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^2$ の正準変換全体の群とする。

$Sp(2, \mathbb{R})$ は定義により 1.2 節の例 1、2 の symplectic form ω を不変にする。

$Sp(2, \mathbb{R}) \ni g$ は (symplectic vector space として) $Z = T^*F$ に作用し、あきらかに、(27) の J に対して、 $J \circ g = J$ となるので、ゲージ変換になる。

9 Helicity

9.1 流束の Helicity

$$\omega \in \mathcal{G} = Vect_{div, \partial}(B) = \{\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v}; \text{tg. to } \partial B\}$$

に対して

$$H(\omega) = \int_B \mathbf{v} \cdot \omega \, d^3x, \quad \omega = \nabla \times \mathbf{v} \quad (30)$$

を Helicity という。
 $\mathcal{G}$ において

$$\operatorname{curl} : \mathcal{G} \ni \mathbf{v} \longrightarrow \omega = \operatorname{curl} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} \in \mathcal{G}$$

は onto. で、

$$\ker \operatorname{curl} = \{\mathbf{v} = \nabla g; g \in C^\infty(B)\}$$

だから $H(\omega)$ の定義は $\omega = \operatorname{curl} \mathbf{v}$ の $\mathbf{v}$ の取り方に独立：

$$\int_B \omega \cdot \nabla f \, dx^3 = \int_B f \operatorname{div} \omega \, d^3x + \int_{\partial B} f \omega \, d\sigma = 0$$

• Helicity は流れ場の位相不変量で、流れ場のエネルギーの下界を与えている。

$$E(\omega) \equiv \int_B \omega \cdot \omega \geq \operatorname{const} H(\omega) \quad (31)$$

• $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ 上のベクトル場

$$\mathbf{v} = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

を Hopf vector field という。

$$\operatorname{curl}^{-1}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}.$$

$\frac{1}{2}$ は curl^{-1} の最大固有値。

$$\begin{aligned} E(\mathbf{v}) \geq H(\mathbf{v}) &= \int_{S^3} \mathbf{v} \cdot \operatorname{curl}^{-1} \mathbf{v} \, d\operatorname{vol} \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, d\operatorname{vol} = \frac{1}{2} \int_{S^3} d\operatorname{vol} = \pi^2 \end{aligned}$$

Hopf ベクトル場のエネルギーは π^2 より大きい。
 (Arnold: Topological methods in hydrodynamics, pp.124,128)

• Clebsch variables で Helicity を表すと

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \nabla \theta + \nabla \times (\phi \nabla \mu) = \nabla \phi \times \nabla \mu$$

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\nabla\theta + \phi\nabla\mu) \cdot (\nabla\phi \times \nabla\mu) = \text{div}(\theta\boldsymbol{\omega})$$

より

$$H(\boldsymbol{\omega}) = \int_B \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3x = \int_B \text{div}(\theta\boldsymbol{\omega}) d^3x = \int_{\partial B} (\theta\boldsymbol{\omega}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

すなわち境界 ∂B を通過する渦量の θ で加減したものである。

9.2 磁束の Helicity

Maxwell 方程式の Clebsch parametrization は symplectic space

$$R = \{(\mathbf{A}, \mathbf{Y}) : (\mathbf{A}, \mathbf{Y}; \text{ vector fields on } \mathbb{R}^3)\}$$

から Poisson 多様体

$$P = \{(\mathbf{E}, \mathbf{B}) : \mathbf{E}, \mathbf{B}; \text{ vector fields on } \mathbb{R}^3, \text{div}\mathbf{B} = 0\}$$

への Poisson map

$$\mathbf{E} = -\mathbf{Y}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

で与えられた。3節,

この Helicity は

$$H(\mathbf{B}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3x, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (32)$$

で定義される。これは $\mathbf{A}$ の取り方に依存しないが、同じ理由で $U(1)$ -gauge 変換, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f$, にも依存しない。

vector potential $\mathbf{a} = A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と 1-form $A = A_i dx_i$ の対応により $\mathbf{B} = \text{curl} \mathbf{a}$ には 2-form dA が対応するが、このとき

$$H(\mathbf{B}) = \int_{\mathbb{R}^3} A \wedge dA$$

となり、これは $U(1)$ -Chern-Simonds form に他ならない。

このことに注目して非アーベル流体を考察しようというのが、R.Jackiw の提案で、その Text を読めるように、流体の直感的および数学的な理解を提供するのが、この Note であった。

● このノートを書いていて気が付いたが、Clebsch parametrization の変数 $\mathbf{Y} = -\mathbf{E}$ についても

$$\check{H}(\mathbf{Y}) = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \times \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{Y} d^3x$$

を考えることができ、 P 内の symplectic leaf $\{(\mathbf{E}, \mathbf{B}); \text{div}\mathbf{E} = \rho\}$ 上では変換 $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y} + \nabla f$ で不変である。

これは電束の Helicity だが、Marsdenn などにも書いてないが、ことさら言わなくていいことだからだろうか。 $\mathbf{Y}$ は 2-form Y と思うべきで、

$$\delta Y = *d*Y = (\text{curl}\mathbf{Y})_i dx_i,$$

$$\check{H}(\mathbf{Y}) = \int_{\mathbf{R}^3} \delta Y \wedge Y,$$

となる。

● ここにおいて、Maxwell から Yang-Mills に移行することはむづかしくない。すでに、J. Arms; J. Math. Phys., vol.20-3(1979),pp445. でしたことになってるが、読んでわからない。上に書いた方法を 3 次元 $SU(2)$ ゲージ理論としてたどればいだろう。すなわち 4 次元 $SU(2)$ Yang-Mills 理論で、Maxwell の曲率 $F = dA$ を電場 $\mathbf{E}$, 磁場 $\mathbf{B}$ に分けたとおなじことをするのだが、ゲージポテンシャルの時間項 1-form が $A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$ と、 $Y = -\frac{\partial A_i}{\partial t} dx_i$ を独立変数として取り、

$$T_A \mathcal{A} = \Omega^1(\mathbf{R}^3, su(2)) \in a, \quad T_A^* \mathcal{A} = \Omega^2(\mathbf{R}^3, su(2)) \in y$$

$$\omega_A((a_1, y_1), (a_2, y_2)) = \int y_2 a_1 - y_1 a_2$$

なる symplectic 構造を考えればよい。

● これを平行に incompressible flows へ持っていくと**非アーベル流体** というのが Jackiw のアイデアらしく、彼は成功していなくて、Higgs 場の spontaneous symmetric breaking を説明した 昔の Horvathy や Rawnsley の $SU(N)$ の $U(1)$ 部分の取り出しにともなう位相不変量 (Taubes?) の方法に似たことをやって 迂回路でなにかやっている。よくわからない。

講演中、浅田先生から pure gauge の巻き数 $(g^{-1}dg)^3$ の divergence formula ... というコメントがあったが、さすがと思った。

10 結論と主張

● 運動方程式のハミルトン正準な表現は、Poisson 多様体上へと一般化され、拘束 (constrain) のある力学系はモーメント写像による symplectic reduction として扱われるようになる。

● その際、正準交換関係の代数 (運動の量子化) は symplectic leaves と垂直な方向では隠されて (消えて) しまう。言い換えれば、Poisson 構造のみに依存する保存量 (相空間上の Casimir 関数) は力学系の完全可積分可能性に貢献しない。

● Casimir 関数のうち位相不変量として現れるものに興味がある。

● 対象とする力学系の対称性 (ゲージ変換群) は、正準座標をとるための Clebsch parametrization において (その任意性において) 現れる。

● したがって Clebsch parametrization は、たとえば正準形式を見て理解しようとするような恣意的なものでなく、力学系に本質的に付随してるものである。この力学系の相空間に対称性 (ハミルトニアンの不変性) として作用し

ているゲージ変換群の作用は Clebsch パラメータ空間において陽的に見えてくる。

- Casimir 関数を Clebsch variables で表現すると divergence form が見える。これは Chern-Simons 不変量のような位相不変量の力学系への現れ方を見るのに役立つだろう。

文献

Marsden-Ratiu :(text) Introduction to mechanics and symmetry, Springer.

Marsden-Weinstein: Coadjoint orbits, vortices and Clebsch variables for incompressible fields, Physics 7D(1983)

V. Arnold Topological methods in fluid dynamics, Springer

R. Jackiw: Lectures on fluid dynamics, A particle theorist's view of supersymmetric, non-abelian, non-commutative fluid mechanics and d-branes, CRM Ser. in Math. Phys. Springer (誰かがなんでも入ってるな と言っていた)

郡 敏昭：解析力学、対称性

(Home page からとるか、冊子を請求してください、無料)