

Self-duality of Riemannian manifolds and connections

600M016-4

斎藤 拓己

2002 年 2 月 7 日

概要

向き付けられた 4 次元リーマン多様体 (X^4, g) の曲率テンソル Ω は次の分解をもつ。

$$\Omega = \begin{pmatrix} W^+ & 0 \\ 0 & W^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\tau}{12}I & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{12}I \end{pmatrix}$$

ここで τ はスカラー曲率、 $W^\pm$ は Weyl 共形曲率の 2 成分、 B は Ω におけるそれら以外の部分である。 $W^- = 0$ であるとき (X^4, g) は self-dual であるという。self-duality は共形構造によって定まる性質である。(向き付けを仮定しない 4 次元リーマン多様体の場合は共形構造と向き付けによって定まる性質である。)

さて、上で (X^4, g) に関する self-duality の概念を定義したが、次のように X^4 上の任意の束 P の接続に関しても self-duality の概念が定義される。束 P の接続はその曲率 Ω が Hodge $*$ -operator に関して $*\Omega = \Omega$ を満たすときに、self-dual であるという。

ところで X^4 上の主 $SO(3)$ 束 Λ^2_+ (or Λ^2_-) には g から誘導される接続があり、 X^4 上のスピノ束 V_+ (or V_-) (構造群: $SU(2)$ 、ファイバー: $\mathbb{C}^2$) にも g から誘導される接続があるが、 $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$ であるため両者の self-duality は一致している。しかも Λ^2_+ の induced connection が、即ち V_+ の induced connection が self-dual であることと、 (X^4, g) が Einstein space

であることとは同値であることがわかる。([5] の 6 章 § 3 を参照)

もう少し詳しく述べると、 Λ_+^2 の induced connection の曲率 Ω^+ は

$$\Omega^+ = (W^+) + (B^*) - \left(\frac{\tau}{12}I\right) \in \Gamma(\Lambda^2 \otimes \Lambda_+^2)$$

なる分解をもち、

$$W^+ - \frac{\tau}{12}I \in \Gamma(\Lambda_+^2 \otimes \Lambda_+^2) \quad , \quad B^* \in \Gamma(\Lambda_-^2 \otimes \Lambda_+^2)$$

ゆえ induced connection の self-duality は $B = 0$ で特徴付けられ、これが g の Einstein 条件に他ならないという訳である。同様に Λ_-^2 の induced connection の曲率 Ω^- は

$$\Omega^- = (W^-) + (B) - \left(\frac{\tau}{12}I\right) \in \Gamma(\Lambda^2 \otimes \Lambda_-^2)$$

なる分解をもち、 X^4 上の主 $SO(4)$ 束の induced connection の曲率 Ω は $\Omega = \Omega^+ + \Omega^-$ と考えられることから、 (X^4, g) の Levi-Civita 接続が self-dual であることは、 (X^4, g) が self-dual Einstein space であってスカラー曲率 $\tau = 0$ であることと同値である。

前置きが長くなってしまったが、本論文では向き付けられた 4 次元リーマン多様体 (X^4, g) における上記 2 つの self-duality の概念に関わる 2 つの定理について説明する。

1 つ目は X^4 上の反自己双対スピノルの射影束 $P(V_-)$ の (標準的な) 複素構造が積分可能であることと X^4 が self-dual であることが同値であるという定理。ここで、 $P(V_-)$ とは V_- のファイバー $\mathbb{C}^2$ を射影化した $P^1(\mathbb{C})$ をファイバーとしてもつファイバー束のことである。

2 つ目はある条件を満たす X^4 上の主 G 束 P に関する自己双対接続のモジュライ空間が多様体になるという定理。

1 つ目の定理の証明は A-H-S (Atiyah, Hitchin, Singer) の論文「Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry」の証明の流れに従い、2 つ目の定理の証明は、指数定理を用いてモジュライ空間の次元を計算する部分は「接続の微分幾何とゲージ理論」(小林昭七著)を参考にし、A-H-S complex の 0 次と 2 次のコホモロジーが定理の仮定の下で消えることについてと、モジュライ空間に多様体の構造を入れる部分については、A-H-S の論文の Friedrich による解説書である「Self-dual Riemannian geometry and instantons」の中の「Self-duality of Riemannian manifolds and connections」という章での証明の流れに従った。

1 積分可能性に関わる話

主束において、その上の 1 つの接続に関する水平部分空間が積分可能であることは、接続の曲率が消えることで特徴付けられる。([5] の p.67 ~ 68 参照) 対応するベクトル束の言葉で表現するならば、上記接続に対応するベクトル束の共変微分 ∇ に関して、微分方程式 $\nabla s = 0$ の解たちからなる局所基底が存在することであるともいえる。([5] の p.47 問題 2.1) こうしたことを発想の原点として、本節では少しだけ話を一般化して、ベクトル束 E 上の一般の 1 階線形微分作用素 $\bar{D}$ に関して、微分方程式 $\bar{D}s = 0$ の解たちと、 $\bar{D}$ に関わるあるベクトル束の積分可能性、 E の接続の曲率との絡み、を考察していく。次節では本節の結果をもとに、向き付けられた 4 次元リーマン多様体 X の自己双対性と、反自己双対スピノルの射影バンドル $P(V_-)$ 上の概複素構造の積分可能性との同値性を見る。この事実は $P(V_-)$ の複素構造が X の共形構造にのみ依存していることを示している。さて、それではしばらくは、本節の主命題を得るための準備をしていくことにする。

E を多様体 X 上の実ベクトル束とする。 E の切断 $s \in \Gamma(E)$ は dual 束 E^* 上の関数を次のように duality で定義する。

$$s^\vee(\epsilon_x) := \langle s(x), \epsilon_x \rangle$$

これにより $E^* \setminus 0$ 上の 1-form $ds^\vee$ も定義される。局所的には、 E の局所基底 $(e_1, \dots, e_n)$ とその dual 基底 $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ をとると、 E^* は

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n, x_1, \dots, x_m) \mapsto \sum \lambda_i \epsilon_i(x) \in E^*$$

で parametrize されて、 $s = \sum f_i e_i$ とおけば、

$$s^\vee(\lambda_1, \dots, \lambda_n, x_1, \dots, x_m) = \sum \lambda_i f_i(x)$$

そして

$$ds^\vee = \sum d\lambda_i f_i + \sum \lambda_i df_i$$

となる。

さてここで、 $\bar{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ を 1 階線形微分作用素とし、ベクトル空間

$$I_x := \{ \bar{D}(s)_x; s \in \{x \text{ の周りの全ての局所切断} \} \} \subset F_x$$

を定義しておく。ここで $\overline{D}$ に constant rank の条件 ($x \in X$ に依らずに $\dim I_x$ が一定であること) を仮定しておけば、 $E^* \setminus 0$ 上に次に定義する部分束 $V(\overline{D}) \subset T^*(E^* \setminus 0)$ が定義される。ここに $V(\overline{D})$ の $\epsilon_x \in E_x^*$ でのファイバーは

$$V(\overline{D})_{\epsilon_x} := \{(ds^\vee)_{\epsilon_x}; \overline{D}(s)_x = 0, s \in \{x \text{ の周りの全ての局所切断}\}\}$$

なるベクトル空間である。 $\overline{D}$ の constant rank 条件は $V(\overline{D})$ が $T^*(E^* \setminus 0)$ の部分束になることを保証するものであるが、それを理解するために $V(\overline{D})$ をジェットバンドルの言葉で表し直してみよう。

そのためにまずここで、 E の k ジェットバンドル $J_k(E)$ なるベクトル束について復習しておく。(実際はこれから必要なのは $k = 1$ の場合のみである)

$$J_k(E) := \bigcup_{x \in X} J_k(E)_x$$

であり、 $J_k(E)_x$ は $s \in \Gamma(E)$ の次の同値関係 ($\sim$) による同値類全体のなすベクトル空間である。

$\sim$: k 次以下の x における (座標近傍をとって考える) 微分係数が全て等しければ同値とするような $\Gamma(E)$ における同値関係

$J_1(E)$ の元を $s = \sum f_i e_i \in \Gamma(E)$ を用いて $j_1(s)$ と書き、1 ジェットと呼ぶことにするが、これがどのようなものなのかは局所的に次のような同一視をしておくと捉えやすい。

$$\begin{aligned} J_1(E)_x &\cong \{x\} \times \mathbf{R}^{n(m+1)} \\ j_1(s)(x) &\longleftrightarrow \\ &(f_1(x), \dots, f_n(x), \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x)) \end{aligned}$$

また、次の可換図式により E^* 上のベクトル束 $p^* J_1(E)$ が定義されるが、

$$\begin{array}{ccc} p^* J_1(E) & \longrightarrow & J_1(E) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ E^* & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

その任意の元は $(\epsilon_x = \sum \lambda_i \epsilon_i(x), j_1(s)(x))$ なる形であることに注意すると、先に現れた

$$(ds^\vee)_{\epsilon_x} = \sum_{i=1}^n f_i(x) d\lambda_i + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \lambda_j \right) dx_i$$

により bundle homomorphism $V : p^*J_1(E) \longrightarrow T^*E^*$ が定義されたと思うこともできる。つまり E^* の各点 ϵ_x のファイバー上で V は

$$V(\epsilon_x, j_1(s)(x)) = (ds^\vee)_{\epsilon_x}$$

で定義されている。最も簡単に表すならば

$$V(p^*j_1(s)) = ds^\vee$$

で定義されている bundle homomorphism といえるのである。

さてここで $J_1(E)$ なるベクトル束についてもう少し復習しておこう。 $J_1(E)$ から $J_0(E) \cong E$ の上への bundle homomorphism π_0^{-1} なる map が存在するが、これは局所的には

$$\begin{aligned} J_1(E)_x &\longrightarrow J_0(E)_x \cong E_x \\ (f_1(x), \dots, f_n(x), \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x)) \\ &\longmapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{aligned}$$

で定義される。(きちんと bundle homomorphism として定まっていることは [9] の p.196 ~ 197 参照)

また、 $\text{Ker}\pi_0^{-1}$ は

$$(0, \dots, 0, \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x))$$

なる形の元全体からなる $J_1(E)$ の部分束に他ならない。[9] の p.198 によれば $\text{Ker}\pi_0^{-1}(\subset J_1(E))$ と $E \otimes S^1(\Lambda^1) = E \otimes \Lambda^1$ は変換関数が同じであることがわかり、同型である。よって以後 $E \otimes \Lambda^1 \subset J_1(E)$ などと記す。要は局所的に次のように捉えておけばよい。

$$\begin{aligned} J_1(E)_x &\cong E_x \oplus (E \otimes \Lambda^1)_x \cong \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^{nm} \\ j_1(s)(x) &\cong (\Sigma f_i e_i, \Sigma e_j \otimes df_j) \cong \\ (f_1(x), \dots, f_n(x), \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x)) \end{aligned}$$

これらを踏まえると、先の V を $p^*(E \otimes \Lambda^1) \subset p^*J_1(E)$ へ制限させて考えると

$$V(p^*(\Sigma e_i \otimes df_i)_{\epsilon_x}) = \Sigma \lambda_i df_i (= \Sigma \langle e_i, \epsilon_x \rangle df_i)$$

であるから、 V は $p^*(E \otimes \Lambda^1)$ 上では e_i を λ_i に書き換える map と思ってよいわけである。

さてここで、 k 階線形微分作用素と k ジェットに関する次の命題があることに注意する。

Proposition 1.1

$\Phi \in D(E, F)$ が k 階線形微分作用素

$$\iff (\forall x \in X)(j_k(s)(x) = 0 \implies \Phi(s)(x) = 0) \quad ([9] \text{ の p.206 })$$

上記命題により $\bar{D} \in D_1(E, F)$ を任意の 1 階線形微分作用素とすると、次の図式を可換にするような線形写像 $\bar{D} : J_1(E)_x \longrightarrow F_x$ がただ一つ存在する。

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(E) & \xrightarrow{\bar{D}} & \Gamma(F) & \xrightarrow{ev_x} & F_x \\ & \searrow j_1^x & & \nearrow \bar{D} & \\ & & J_1(E)_x & & \end{array}$$

ここに、 ev_x は $\tau \in \Gamma(F)$ に $\tau(x) \in F_x$ を対応させる写像であり、 j_1^x は $s \in \Gamma(E)$ に $j_1(s)(x) \in J_1(E)_x$ を対応させる写像である。

$\bar{D}$ が bundle homomorphism $\bar{D} : J_1(E) \longrightarrow F$ を定めていることは明らかである。

さてここで、ベクトル束に関して基本的な命題を復習しておくことにする。

Proposition 1.2

ϕ を E から F への bundle homomorphism であるとする。各点 $x_0 \in X$ に対してある近傍 $V(x_0)$ が存在して、 $x \in V(x_0)$ ならば $\text{rank} \phi_x \equiv \text{const}$ が成り立つとする。そのとき

(1) $\text{Im} \phi$ は F の部分束,

(2) $\text{Ker} \phi$ は E の部分束

となる。([9] の p.106 ~ 107)

というものである。ゆえに少し強めではあるが $\bar{D}$ に constant rank の条件を仮定しておけば、命題により $R := \text{Ker} \bar{D}$ は $J_1(E)$ の部分束となる。また、 $V : p^* J_1(E) \longrightarrow T^* E^*$ に関しても明らかに上記命題の仮定を満たすので、いま特に $V(p^* R)$ は $T^*(E^* \setminus 0)$ の部分束になるが、 $V(p^* R)$ が先に定義した $V(\bar{D})$ であることは明らかであろう。

さて、ここで特に $\bar{D}$ が E の接続 $\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E \otimes \Lambda^1)$ である場合に $V(\nabla)$ がどのようなものであるか把握しておこう。局所的に ∇ の connection matrix が ω_{ij} であるとすれば

$$\nabla e_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes e_j$$

よって

$$\nabla s = \nabla \left(\sum_{i=1}^n f_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n (df_i + \sum_{j=1}^n f_j \omega_{ji}) \otimes e_i$$

ゆえに

$$(\nabla s)_x = 0 \iff (df_i)_x = - \sum_{j=1}^n f_j(x) (\omega_{ji})_x$$

このとき

$$\begin{aligned} (ds^\vee)_{\epsilon_x} &= \sum_{i=1}^n (f_i(x) d\lambda_i - \sum_{j=1}^n f_j(x) \omega_{ji} \lambda_i) \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(x) (d\lambda_i - \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \lambda_j) \end{aligned}$$

となるから、 $V(\nabla)$ は

$$\theta_i := d\lambda_i - \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \lambda_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

を局所基底としてもつ $T^*(E^* \setminus 0)$ の部分束であることがわかる。

さてこれ以降は $\bar{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ を 1 階線形微分作用素であって、 $\bar{D} = \sigma \nabla$ なる形のものであるとする。ここで ∇ は E の接続。 $\sigma : E \otimes \Lambda^1 \longrightarrow F$ は bundle homomorphism である。(このとき σ は $\bar{D}$ の symbol に他ならない。) ここで補題を 1 つ。

Lemma 1.1

$S_1 := \text{Ker} \sigma$ とするとき、 $S_1 = R \cap (E \otimes \Lambda^1)$ ($R = \text{Ker} \bar{D}$) が成り立つ。

Proof

$\overline{D} = \sigma \nabla$ は局所的に

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^1 & \cdots & \Phi_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_l^1 & \cdots & \Phi_l^n \end{pmatrix}, \quad \Phi_j^i = \Phi_j^i{}_0 + \sum_{k=1}^m \Phi_j^i{}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

と表すことができる。

$j_1(s)(x)$ ($s = \sum f_i e_i$) が $(R \cap (E \otimes \Lambda^1))_x$ の元であるということは、 $j_1(s)(x)$ が

$$f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 0 \quad \text{and} \quad \overline{D}(s)_x = 0$$

を満たすことに他ならない。これを上記行列を用いて言い換えれば、

$$\sum_{j,k} \Phi_j^i{}_k \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = 0 \quad (1 \leq i \leq l)$$

一方 $j_1(s)(x)$ が $(S_1)_x = \text{Ker} \sigma_x$ の元であることは、

$$\sigma(\overline{D}) \left(\begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_n \end{pmatrix}, x \right) = \begin{pmatrix} \sum_{j,k} \Phi_j^1{}_k \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \sum_{j,k} \Phi_j^l{}_k \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことに他ならない。よって $S_1 = R \cap (E \otimes \Lambda^1)$ が示された。■

本節の重要な命題とその証明を記す前に、更に一つ記号を用意しておく。 $S_2 \subset E \otimes \Lambda^2$ を

$$S_2 := \{ S_1 \text{ に } 1\text{-form を外積した形の元全体} \} \subset S_1 \otimes \Lambda^1$$

であるとする。それでは本節の主命題。

Proposition 1.3

$V(\overline{D}) \subset T^*(E^* \setminus 0)$ が involutive であることと次の 2 条件が成り立つことは同値である。

- (1) $D_1 \Gamma(S_1) \subset \Gamma(S_2)$
- (2) $\Omega \Gamma(E) \subset \Gamma(S_2)$

注意

ここで $D_1 : A^1(E) \longrightarrow A^2(E)$ は ∇ から定まる共変外微分であり、 $\Omega : A^0(E) \longrightarrow A^2(E)$ は ∇ の曲率である。

Proof

まず involutive について思い出しておこう。 $V \subset T^*M$ が involutive であるとは $d\Gamma(V) \subset \Gamma(V_2)$ ($V_2 \subset \Lambda^2$ は V に 1-form を外積した形の元全体) が成り立つことであると考えてよい。「考えてよい」というのは一般的には involutive という言葉は $V^\perp \subset T^*M$ の dual をとった $(V^\perp)^* \subset T^{**}M = TM$ において $\xi, \eta \in \mathfrak{X}((V^\perp)^*) \implies [\xi, \eta] \in \mathfrak{X}((V^\perp)^*)$ が成り立つことを意味するが、これらの定義は同値であることが確かめられるからである。

([8] の §8 参照)

$\overline{D} = \sigma\nabla$ のとき

$$V(\overline{D}) = V(p^*S_1) \oplus V(\nabla)$$

が成り立つ。何故ならば $\overline{D}(s)_x = 0$ を満たす $j_1(s)(x) \in J_1(E)_x$ について考えると、 $(\nabla s)_x$ の段階で $(\nabla s)_x = 0$ となるようなものと σ_x によって 0 になるものがある。ゆえに $V(\overline{D})_x = V(p^*S_1)_x \oplus V(\nabla)_x$ が成り立つからである。 $\oplus$ が本当に直和を意味していることは、 $V(p^*S_1)_x$ は $J_1(E)_x$ における $(E \otimes \Lambda^1)_x$ 成分を p で引き戻して V で移したものであり、 $V(\nabla)_x$ は $J_1(E)_x$ における E_x 成分を p で引き戻して V で移したものであることから理解される。($J_1(E)_x \cong E_x \oplus (E \otimes \Lambda^1)_x$ であった。)

さて、 $V(p^*S_1)$, $V(\nabla)$ はそれぞれ局所的に以下に記すような基底をもつ。

$$\sigma_i^\vee = \sum s_{ijk} \lambda_j dx_k \quad (1 \leq i \leq p)$$

$$\theta_i = d\lambda_i - \sum \omega_{ij} \lambda_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

($\sigma_i = \sum s_{ijk} e_j \otimes dx_k$ ($1 \leq i \leq p$) は S_1 の局所基底とする。)

さて、 $T^*(E^* \setminus 0)$ は $(d\lambda_1, \dots, d\lambda_n, dx_1, \dots, dx_m)$ なる局所基底をもつが、 $(\theta_1, \dots, \theta_n, dx_1, \dots, dx_m)$ もその局所基底たり得ることは簡単にチェックできる。従って $V_2(V(\overline{D}))$ の元に $T^*(E^* \setminus 0)$ の元を外積した形の元全体のこと) は $\theta_i \wedge \theta_j, \theta_i \wedge dx_j, \sigma_i^\vee \wedge dx_j$ なる 2-form たちによって張られる。

注意

$\sigma_i^\vee \wedge \theta_j$ は $\theta_i \wedge dx_j$ たちで表される。

ここで $V(\overline{D}) = V(p^*S_1) \oplus V(\nabla)$ の局所基底であるところの $\sigma_i^\vee$ ($1 \leq i \leq p$) と θ_i ($1 \leq i \leq n$) の外微分を計算しておこう。

$$\begin{aligned} D_1\sigma_i &= D_1(\Sigma s_{ijk}e_j \otimes dx_k) \\ &= \Sigma(s_{ijk}e_l \otimes \omega_{jl} \wedge dx_k + e_j \otimes ds_{ijk} \wedge dx_k) \end{aligned}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} d\sigma_i^\vee &= \Sigma s_{ijk}d\lambda_j \wedge dx_k + \Sigma \lambda_j ds_{ijk} \wedge dx_k \\ &= \Sigma s_{ijk}(\theta_j + \Sigma \omega_{jl}\lambda_l) \wedge dx_k + \Sigma \lambda_j ds_{ijk} \wedge dx_k \\ &= \Sigma s_{ijk}\theta_j \wedge dx_k + \Sigma(s_{ijk}\lambda_l\omega_{jl} \wedge dx_k + \lambda_j ds_{ijk} \wedge dx_k) \\ &= \Sigma s_{ijk}\theta_j \wedge dx_k + (D_1\sigma_i)^\vee \\ d\theta_i &= -\Sigma \lambda_j d\omega_{ij} - \Sigma d\lambda_j \wedge \omega_{ij} \\ &= -\Sigma \lambda_j d\omega_{ij} - \Sigma(\theta_j + \Sigma \omega_{jl}\lambda_l) \wedge \omega_{ij} \\ &= -\Sigma \lambda_l(d\omega_{il} + \Sigma \omega_{jl} \wedge \omega_{ij}) - \Sigma \theta_j \wedge \omega_{ij} \\ &= -\Sigma \lambda_l \Omega_{il} - \Sigma \theta_j \wedge \omega_{ij} \end{aligned}$$

さて、 $\theta_j \wedge dx_k, \theta_j \wedge \omega_{ij} \in \Gamma(V_2)$ であるから、 $V(\overline{D})$ が involutive であるための必要十分条件は $(D_1\sigma_i)^\vee, \Sigma \lambda_l \Omega_{il} \in \Gamma(V_2)$ となることであるが、 $(D_1\sigma_i)^\vee, \Sigma \lambda_l \Omega_{il}$ が $\theta_i \wedge \theta_j, \theta_i \wedge dx_j$ たちで張られることがないのは見れば明らかなので、この条件は更に絞られて $(D_1\sigma_i)^\vee, \Sigma \lambda_l \Omega_{il} \in \Gamma(V(p^*S_2))$ と同値となる。そしてこれらは結局 $D_1\Gamma(S_1) \subset \Gamma(S_2), \Omega\Gamma(E) \subset \Gamma(S_2)$ と同値であるから命題は証明された。

注意

$\overline{D} = \nabla$ (つまり $\sigma = I$) なる特別な場合には $S_1 = 0$ となるから、命題により $V(\nabla)$ が involutive $\iff \nabla$ の曲率 $\Omega = 0$ となる。

以上により本節の内容を終えるが、その前に次節へ向けて 2 点注意しておくべきことがある。

Remark 1.1

これまでの議論ではベクトル束 E は実ベクトル束としてきたが、 E が複素ベクトル束であるときは、 $s^\vee$ は E^* 上の $\mathbb{C}$ 値関数であり、 $ds^\vee$ は $T^*(E^* \setminus 0)$ の複素化された複素ベクトル束 $T_c^*(E^* \setminus 0)$ の切断であり、 $V(\overline{D})$ は $T_c^*(E^* \setminus 0)$ の複素部分束である。また、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ も複素数として扱う。この場合、 ∇ と $\overline{D}$ が E 上の概複素構造 J と可換であるならばやはり

上記命題は成立する。(無論 Λ^1 に関しても複素で議論する場合はその複素化である Λ^1_c を用いる。)

Remark 1.2

一般に多様体 M の余接束 T^*M の複素化 T^*_cM に対し、その複素部分束 $V \subset T^*_cM$ で、 $V \cap \bar{V} = 0$, $V + \bar{V} = T^*_cM$ を満たすものがとれるとき、これを dual で見れば $V^* + \bar{V}^* = T_cM$ であって、 V^* と TM との同型から V^* の概複素構造 $\sqrt{-1}$ が TM の概複素構造 J を誘導する。この J に関して V^* は正則型、つまり $JA = \sqrt{-1}A$ を満たす $A \in T_cM$ の全体、 $\bar{V}^*$ は反正則型、つまり $JA = -\sqrt{-1}A$ を満たす $A \in T_cM$ の全体であるから、 V が involutive 即ち V^* が involutive であるということは J が integrable であることの定義に他ならない。補足であるが、 J が integrable であることの定義を次で定義する (1, 2) テンソル S が消えることであるとしても同値な定義であることが知られている。([8] の p.106 ~ 107 参照)

$$S(\xi, \eta) := [\xi, \eta] + J[J\xi, \eta] + J[\xi, J\eta] - [J\xi, J\eta] \quad (\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M))$$

2 向き付けられた 4 次元リーマン多様体 X 上の反自己双対スピノルの射影束 $P(V_-)$ の概複素構造の積分可能性に関する定理

Theorem 2.1

向き付けられた 4 次元リーマン多様体 X 上の反自己双対スピノルの射影束 $P(V_-)$ 上に標準的に定義される概複素構造は、 X が自己双対であるときまたそのときに限り積分可能である。

Proof

まず、問題は局所的であるので、 V_- 上に標準的に定義される概複素構造について議論すれば十分であることに注意する。また、 X が自己双対であるという概念は X が向き付けられている以上、その共形構造のみに依存するので、以下では X に共形構造の範囲で `metric` を選んでおくこととする。さて、 V_- 上には 2 つの自然な 1 階線形微分作用素が定義されていることに注意しておく。1 つは Dirac operator と呼ばれるもので

$$D : \Gamma(V_-) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(V_- \otimes \Lambda_c^1) \xrightarrow{\sigma} \Gamma(V_+)$$

∇ は X の Levi-Civita 接続から自然な仕方です導される V_- 上の接続であり、 σ は Clifford 積である。2 つ目は twistor operator と呼ばれるもので

$$\bar{D} : \Gamma(V_-) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(V_- \otimes \Lambda_c^1) \xrightarrow{\bar{\sigma}} \Gamma(V_+^\perp)$$

∇ は Dirac operator にでてきたものと同じで、 $\bar{\sigma}$ は $\bar{\sigma} := 1 - \sigma^* \sigma$ で定義される、 $\text{Ker } \sigma$ の上への直行射影である。 $(\sigma^*$ は σ の随伴) (この事実の確認は以下の復習のあとに行う。)

ここで証明の本流からそれるが、上記 operator の中に出てきた Clifford 積とその周辺について簡単に復習しておく。

Λ^1 の複素化 Λ_c^1 は局所的に次のように分解される。

$$\begin{aligned} \Lambda_c^1 &= P \oplus \bar{P} \\ P &:= \left\{ \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2) + \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - ie_4) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C} \right\} \\ \bar{P} &:= \left\{ \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2) + \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + ie_4) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C} \right\} \\ &\quad \left((e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ は } \Lambda^1 \text{ の局所正規直交基底} \right) \end{aligned}$$

P と $\bar{P}$ とは Λ^1 の metric をそのまま複素線形に拡張したものによって互いに双対の関係になっている。つまり $\bar{P} \cong P^*$ 。

さてここで $C(\Lambda^1) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ (Λ^1 の Clifford 代数束の複素化) の、スピノル束 $V = V_+ + V_-$ への作用を具体的に記述したいので V を局所的に $V = \Lambda P$ ($V_+ = \Lambda^+ P$, $V_- = \Lambda^- P$) として定義する。 $C(\Lambda^1) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ の $V = \Lambda P$ への作用は Λ_c^1 の元の $V = \Lambda P$ への作用により定義される。 Λ_c^1 の元 α は、 P 成分と $\bar{P}$ 成分の和に分解されるが、 P 成分は $V = \Lambda P$ に外積により作用させ、 $\bar{P}$ 成分は P^* の元とみなして $V = \Lambda P$ に縮約で作用させることにする。実際は $v \in V = \Lambda P$ に対し、

$$\begin{aligned} c(\beta)v &= \sqrt{2}(\beta \wedge)v \quad , \quad \beta \in P \quad , \\ c(\bar{\beta})v &= -\sqrt{2}i(\bar{\beta})v \quad , \quad \bar{\beta} \in \bar{P} \end{aligned}$$

と係数を補って定義するが、この作用により代数束としての同型 $C(\Lambda^1) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong \text{End}(V)$ を得る。(この辺りは [7] の p.160 ~ 162 参照)

$C(\Lambda^1) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ の V への上記作用を Clifford 積と呼ぶが、それでは実際に Clifford 積なる bundle homomorphism がどのようなものなのかを定義に従った計算により明らかにしておこう。局所的に $V_+ = \Lambda^+ P$, $V_- = \Lambda^- P$ であるから

$$\begin{aligned} V_+ &= \{ \phi = \alpha + \beta \cdot \frac{1}{2}(e_1 - ie_2) \wedge (e_3 - ie_4) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C} \} \quad , \\ V_- &= \{ \psi = \delta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2) + \epsilon \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - ie_4) \mid \delta, \epsilon \in \mathbf{C} \} \end{aligned}$$

と考えることができる。そこで e_i ($1 \leq i \leq 4$) $\in \Lambda_c^1$ の V_+ , V_- への作用を定義に従って計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{cases} e_1 \cdot \phi &= \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2) - \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - ie_4) \\ e_2 \cdot \phi &= i\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2) + i\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - ie_4) \\ e_3 \cdot \phi &= \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2) + \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - ie_4) \\ e_4 \cdot \phi &= -i\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2) + i\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - ie_4) \end{cases} \quad , \\ \begin{cases} e_1 \cdot \psi &= -\delta + \epsilon \cdot \frac{1}{2}(e_1 - ie_2) \wedge (e_3 - ie_4) \\ e_2 \cdot \psi &= i\delta + i\epsilon \cdot \frac{1}{2}(e_1 - ie_2) \wedge (e_3 - ie_4) \\ e_3 \cdot \psi &= -\epsilon - \delta \cdot \frac{1}{2}(e_1 - ie_2) \wedge (e_3 - ie_4) \\ e_4 \cdot \psi &= i\epsilon - i\delta \cdot \frac{1}{2}(e_1 - ie_2) \wedge (e_3 - ie_4) \end{cases} \end{aligned}$$

$V = V_+ + V_-$ の局所基底として

$$\left(1, \frac{1}{2}(e_1 - ie_2) \wedge (e_3 - ie_4), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - ie_4) \right)$$

をとれば、 $\Lambda_c^1 \subset C(\Lambda^1) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ と $\text{End} V$ との対応は次のようになっていることがわかる。

$$\begin{aligned} e_1 &\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right), & e_2 &\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ \hline i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{array} \right) \\ e_3 &\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), & e_4 &\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ \hline 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

以上の復習により $\sigma : \Gamma(V_- \otimes \Lambda_c^1) \longrightarrow \Gamma(V_+)$ の様子がよくわかったので Dirac operator の定義がはっきりとした。次に twistor operator の定義をはっきりさせるために $\bar{\sigma} := 1 - \sigma^* \sigma$ についてしっかりと見ておこう。ここでの σ^* は σ の随伴であると先に述べたが、 σ^* は局所的に

$$\begin{aligned} \sigma^* : \Gamma(V_+) &\longrightarrow \Gamma(V_- \otimes \Lambda_c^1) \\ \psi &\longmapsto -\frac{1}{4} \Sigma e_i \cdot \psi \otimes e_i \end{aligned}$$

のように定義されており、厳密に言えば $\frac{1}{4}\sigma$ の随伴であることが $V_- \otimes \Lambda_c^1$ と V_+ における内積計算をそれぞれ忠実にを行うことにより確かめられる。(即ち正確には σ^* は $(\frac{1}{4}\sigma)^*$ と記すべきであるが、これからも σ^* の表記を用いることにする。)

さて、 $V_+^\perp := \text{Im} \bar{\sigma}$ について、 $V_+^\perp = \text{Ker} \sigma$ であることは確認しておく必要がある。これにより $V_+^\perp$ が複素ベクトル束としてきちんと定まっていることが保証され、前節の命題を適用する際には気を付けておかねばならなかった $\bar{D}$ に関する constant rank の条件も満たされるからである。

$\Sigma\phi_i \otimes e_i \in \Gamma(V_- \otimes \Lambda^1_c)$ に対して

$$\begin{aligned}
\sigma(1 - \sigma^*\sigma)(\Sigma\phi_i \otimes e_i) &= \sigma(\Sigma\phi_i \otimes e_i + \frac{1}{4}\Sigma e_i \cdot (e_j \cdot \phi_j) \otimes e_i) \\
&= \Sigma e_i \cdot \phi_i + \frac{1}{4}\Sigma e_i \cdot e_i \cdot (e_j \cdot \phi_j) \\
&= \Sigma e_i \cdot \phi_i - \Sigma e_j \cdot \phi_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

より $V_+^\perp \subset \text{Ker}\sigma$. 逆に $\Sigma\phi_i \otimes e_i \in \text{Ker}\sigma$ とすると $\Sigma\phi_i \otimes e_i = (1 - \sigma^*\sigma)(\Sigma\phi_i \otimes e_i)$ であるから $\text{Ker}\sigma \subset V_+^\perp$. よって $V_+^\perp := \text{Im}\bar{\sigma} = \text{Ker}\sigma$ となる。

$D, \bar{D}$ がどのような 1 階線形微分作用素として定まっているのかしっかりわかってきたところで再び定理の証明の本流に戻る。 $\bar{D}$ に前節の主命題を適用するのが狙いであるので、まず初めに $S_1 = \text{Ker}\bar{\sigma} \subset V_- \otimes \Lambda^1_c$ を求めたいが、次の補題が成り立つことに注意しよう。

Lemma 2.1

$$\text{Ker}\bar{\sigma} = \text{Im}\sigma^*$$

Proof

$\psi \in V_+$ に対して

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}(\Sigma e_i \cdot \psi \otimes e_i) &= \Sigma e_i \cdot \psi \otimes e_i - \sigma^*(\Sigma e_i \cdot e_i \cdot \psi) \\
&= \Sigma e_i \cdot \psi \otimes e_i - \Sigma e_i \cdot \psi \otimes e_i \\
&= 0
\end{aligned}$$

より $\text{Im}\sigma^* \subset \text{Ker}\bar{\sigma}$. 逆に $\Sigma\phi_i \otimes e_i \in V_- \otimes \Lambda^1_c$ に対して $(1 - \sigma^*\sigma)(\Sigma\phi_i \otimes e_i) = 0$ ならば $\Sigma\phi_i \otimes e_i = \Sigma e_j \cdot (-\frac{1}{4}\Sigma e_i \cdot \phi_i) \otimes e_j$ ($-\frac{1}{4}\Sigma e_i \cdot \phi_i \in V_+$) ゆえに $\text{Ker}\bar{\sigma} \subset \text{Im}\sigma^*$ ■

上記事実より S_1 は複素 2 次元ベクトル束であり、従って $V(p^*S_1)$ も複素 2 次元ベクトル束である。実際に S_1 の局所基底として

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2) \otimes e_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2) \otimes e_2 \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - ie_4) \otimes e_3 + \frac{i}{\sqrt{2}}(e_3 - ie_4) \otimes e_4 \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 = & -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - ie_4) \otimes e_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}(e_3 - ie_4) \otimes e_2 \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2) \otimes e_3 - \frac{i}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2) \otimes e_4\end{aligned}$$

がとれる。また $V(\nabla)$ も複素 2 次元ベクトル束であり、その局所基底として

$$\begin{aligned}\theta_1 &= d\lambda_1 - \sum_{j=1}^2 \omega_{1j} \lambda_j, \\ \theta_2 &= d\lambda_2 - \sum_{j=1}^2 \omega_{2j} \lambda_j\end{aligned}$$

がとれる。以上により $V(\overline{D}) = V(p^*S_1) \oplus V(\nabla)$ ($\subset T_c^*(V_-^* \setminus 0)$) は複素 4 次元部分束であり、実際に局所基底がわかっているので $V(\overline{D}) \cap V(\overline{D}) = 0$ も簡単に確かめられる。よって前節の終わりに記したことにより $V(\overline{D})$ の概複素構造が $T^*V_-^*$ に概複素構造を定義する。symplectically に V_- と V_-^* とを同一視しているのだからこれは T^*V_- に (即ち V_- 上に) 概複素構造を定義するといってもよい。以上を踏まえ、これより $V(\overline{D})$ が involutive であること、即ち V_- 上の概複素構造が integrable であることと、 X の自己双対性とが同値であることを、前節の主命題を適用することにより証明していくことになる。

まず Proposition 1.3 の 1 つ目の条件について見てみる。 $\phi = \sum e_i \cdot \psi \otimes e_i \in \Gamma(S_1)$ について、 $V_- \otimes \Lambda_c^1$ 上に自然に導かれる共変微分 ∇ を施すと、Levi-Civita 接続の metric compatibility より

$$\nabla g = \sum (\nabla e_i \otimes e_i + e_i \otimes \nabla e_i) = 0$$

であることから

$$\begin{aligned}\nabla \phi &= \sum (\nabla e_i \cdot \psi \otimes e_i + e_i \cdot \nabla \psi \otimes e_i + e_i \cdot \psi \otimes \nabla e_i) \\ &= \sum e_i \cdot \nabla \psi \otimes e_i (= \sum e_i \cdot \nabla_j \psi \otimes e_j \otimes e_i)\end{aligned}$$

また、Levi-Civita 接続は torsion free でもあるから $V_- \otimes \Lambda_c^1$ 上での上記共変微分 ∇ と、 V_- 上の共変微分 ∇ から導かれる共変外微分 D_1 との違いは作用後の切断を見たときに、2 つの 1-form が互いにテンソルされているのか外積されているのかの違いだけである。よって

$$D_1 \phi = \sum e_i \cdot \nabla_j \psi \otimes e_j \wedge e_i \in \Gamma(S_2)$$

以上により Proposition 1.3 の 1 つ目の条件は $\overline{D}$ を考えるときには無条件に成り立っていることがわかった。

次に Proposition 1.3 の 2 つ目の条件について見てみる。いま写像

$$V_+ \otimes \Lambda_c^1 \longrightarrow V_- \otimes \Lambda_c^2 \quad ; \quad \psi \otimes \alpha \longmapsto \Sigma e_i \cdot \psi \otimes e_i \wedge \alpha$$

を定義すると、 $\Gamma(S_2)$ はこの写像の Image の切断に他ならない。さて、この写像は単射であることがわかる。何故ならば、 $\Sigma \psi_j \otimes e_j$ がこの写像の Kernel に入っているとすると、 $\Sigma e_i \cdot \psi_j \otimes e_i \wedge e_j = 0$. 従って $e_i \cdot \psi_j = e_j \cdot \psi_i$ ($i \neq j$). 両辺に左から $e_j \cdot e_i$ を作用させることにより $-e_j \cdot \psi_j = e_i \cdot \psi_i$ ($i \neq j$) を得る。つまり例えば $e_1 \cdot \psi_1 = -e_2 \cdot \psi_2$, $e_1 \cdot \psi_1 = -e_3 \cdot \psi_3$, $e_1 \cdot \psi_1 = -e_4 \cdot \psi_4$ が成り立っている。一方 $e_2 \cdot \psi_2 = -e_3 \cdot \psi_3$ も成り立っているからこれらより $e_i \cdot \psi_i = 0$ ($1 \leq i \leq 4$). よって $\psi_i = 0$ ($1 \leq i \leq 4$). よって $\Sigma \psi_j \otimes e_j = 0$.

さて、上記写像の単射性によって $V_+ \otimes \Lambda_c^1 \subset V_- \otimes \Lambda_c^2$ と考えることができるが、ここでこれら 2 つのベクトル束 $V_+ \otimes \Lambda_c^1$ と $V_- \otimes \Lambda_c^2$ を既約成分へ分解することを考える。分解を考えるにあたり、 $SU(2)$ のテンソル積表現の既約分解を与えるクレブッシュゴルドンの定理を思い出しておこう。

Theorem 2.2 (クレブッシュゴルドン)

$SU(2)$ のテンソル積表現は次のように分解される。

$$V_m \otimes V_n = V_{m+n} \oplus V_{m+n-2} \oplus \cdots \oplus V_{|m-n|} \quad (V_m = S^m(\mathbf{C}^2))$$

さて、 $V_+ \otimes \Lambda_c^1$ は

$$\begin{aligned} V_+ \otimes \Lambda_c^1 &\cong V_+ \otimes (V_+^* \otimes V_-) \\ &\cong V_+ \otimes (V_+ \otimes V_-) \quad (\text{symplectically に } V_+ \cong V_+^* \text{ である}) \\ &\cong (V_+ \otimes V_+) \otimes V_- \\ &\cong (S^1 V_+ \otimes S^1 V_+) \otimes V_- \\ &\cong (S^2 V_+ \oplus S^0 V_+) \otimes V_- \quad (\text{クレブッシュゴルドンの定理}) \\ &\cong (S^2 V_+ \otimes V_-) \oplus V_- \end{aligned}$$

のように既約分解される。 $V_- \otimes \Lambda_c^1$ の既約分解を求める前に 1 つ注意。 Λ_{+c}^2 は Clifford 積の計算を実行してみればわかる通り (先に記した行列参

照) traceless な $\text{End}V_+$ の元全体と同一視されるので $\Lambda_{+c}^2 \cong S^2V_+$. 同様に $\Lambda_{-c}^2 \cong S^2V_-$. が成り立つ。よって $V_- \otimes \Lambda_c^1$ は

$$\begin{aligned} V_- \otimes \Lambda_c^2 &\cong V_- \otimes (\Lambda_{+c}^2 \oplus \Lambda_{-c}^2) \\ &\cong V_- \otimes (S^2V_+ \oplus S^2V_-) \\ &\cong (S^2V_+ \otimes V_-) \oplus (S^2V_- \otimes S^1V_-) \quad (V_- = S^1V_- \text{である}) \\ &\cong (S^2V_+ \otimes V_-) \oplus V_- \oplus S^3V_- \quad (\text{クレブッシュゴルダンの定理}) \end{aligned}$$

のように既約分解される。これら 2 つの複素ベクトル束の既約分解により

$$(S^2V_+ \otimes V_-) \oplus V_- = S_2$$

であることがわかり、 $\Omega\Gamma(V_-) \subset \Gamma(S_2)$ なる条件は $\Omega\Gamma(V_-)$ の S^3V_- 成分が消えているということに他ならない。ところで X 上の Levi-Civita 接続の曲率 Ω は $\Gamma(\Lambda^2 \otimes \text{End}(TX))$ の元と考えられると同時に $\text{End}(\Lambda^2)$ の元

$$\Omega = \begin{pmatrix} W^+ & 0 \\ 0 & W^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\tau}{12}I & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{12}I \end{pmatrix}$$

とも考えられるのであった。(第 1 項は Weyl 共形曲率、第 3 項の τ はスカラー曲率)

一方 V_- 上に誘導される接続の曲率 Ω は $\Gamma(\Lambda^2 \otimes \text{End}(V_-))$ の元と考えられ、次で与えられることがわかっている。

$$\Omega = (W^-) + (B) - \left(\frac{\tau}{12}I\right) \quad (\text{これについては [4] or [5] を参照})$$

注意

上記の Ω 、 W^- などは、正確には $\psi : \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ なる標準的な同型写像 ψ を用いて $\psi(\Omega)$ 、 $\psi(W^-)$ などとかくところを略記している。

さて、

$$W^- \in S^4V_- \quad , \quad B \in S^2V_+ \otimes S^2V_- \quad , \quad \frac{\tau}{12}I \in S^0V_-$$

であることと、再びクレブッシュゴルダンの定理により

$$\begin{aligned} \Lambda^2 \otimes \text{End}(V_-) &\cong V_-^* \otimes V_- \otimes (\Lambda_{+c}^2 \oplus \Lambda_{-c}^2) \\ &\cong S^1V_- \otimes S^1V_- \otimes (S^2V_+ \oplus S^2V_-) \\ &\cong S^1V_- \otimes ((S^1V_- \otimes S^2V_+) \oplus S^1V_- \oplus S^3V_-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cong ((S^2V_- \oplus S^0V_-) \otimes S^2V_+) \oplus (S^2V_- \oplus S^0V_-) \oplus (S^4V_- \oplus S^2V_-) \\
&\cong ((S^2V_- \otimes S^2V_+) \oplus S^2V_+) \oplus (S^2V_- \oplus S^0V_-) \oplus (S^4V_- \oplus S^2V_-)
\end{aligned}$$

であることに注意すると、 $\Omega\Gamma(V_-)$ の S^3V_- 成分が消えるということと $W^- = 0$ が成り立つことは同値であることがわかる。以上により Proposition 1.3 の 2 つ目の条件が成り立つための必要十分条件は X が自己双対であることだとわかった。

これをもって Theorem 2.1 の証明は完結した。 ■

3 特定の条件下における自己双対接続のモジュライ空間の考察

初めに自己双対接続のモジュライ空間について簡単に復習しておく。 (P, π, X^4, G) を、向き付けられた 4 次元リーマン多様体上の主 G 束とする。 P 上の接続 ω が irreducible であるとは、 ω が G の閉部分群 H に reduce され得ないことである。以後 P 上の irreducible, self-dual connection 全体の集合を $\mathcal{A}^+$ 、ゲージ変換群を $\mathcal{G}$ と表すことにする。 $\mathcal{G}$ は $\mathcal{A}^+$ に、ゲージ変換による form の引き戻しにより作用している。(つまり irreducibility, self-duality は変換により保たれる。) 従ってゲージ変換で互いに移り合う接続は本質的に同じものであるとみなし、商空間 $\mathcal{M}^+ := \mathcal{A}^+/\mathcal{G}$ を考え、自己双対接続のモジュライ空間 (moduli space of self-dual connections) と呼ぶのであった。自己双対接続のモジュライ空間を思い出したところで本節の主定理。

Theorem 3.1

X^4 を向き付けられた、コンパクト 4 次元リーマン多様体で、自己双対であり、更にスカラー曲率 $\tau \geq 0$ かつどこかで $\tau > 0$ であるとする。また G をコンパクトで semi-simple なリー群、 P を X^4 上の G を構造群とする主ファイバー束であるとする。このとき P 上の自己双対接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}^+ = \mathcal{A}^+/\mathcal{G}$ は空集合であるか、或いは次元が

$$\dim \mathcal{M}^+ = 2p_1(\mathfrak{g}_p) - \frac{1}{2} \dim G \cdot (\chi(X^4) - \sigma(X^4))$$

で与えられる多様体になる。ここで $\mathfrak{g}_p := P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ 、 $p_1(\mathfrak{g}_p) (= -c_2(\mathfrak{g}_p \otimes \mathbb{C}))$ は $\mathfrak{g}_p$ の Pontrjagin 数、 $\chi(X^4)$ は X^4 の Euler 数、 $\sigma(X^4)$ は X^4 の符号数である。

さて定理の中には大きく分けて 2 つ、証明すべきことが含まれている。1 つは $\mathcal{M}^+$ の次元の決定を行う部分、もう 1 つは $\mathcal{M}^+$ に多様体の構造を入れる部分である。本節では初めに前者、即ち $\mathcal{M}^+$ の次元が上記のように計算されることを証明し、最後に $\mathcal{M}^+$ に多様体の構造をどのように入れるのかの概要 (証明のスケッチ) を述べることにする。

モジュライ空間 $\mathcal{M}^+$ の次元を求めるために $\mathcal{A}^+$ の接空間と $\mathcal{G}$ の軌道の接空間を決定する。 $\mathcal{A}^+$ は空集合ではないとし、 $\omega \in \mathcal{A}^+$ を 1 つ固定する。そして ω_t を $\mathcal{A}^+$ 内の曲線で $\omega = \omega_0$ とする。 ω の曲率を Ω 、 ω_t の曲率を Ω_t とする。 $\alpha_t := \omega_t - \omega \in \Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ とおくと、 $\alpha := \frac{d}{dt} \alpha_t \Big|_{t=0} \in \Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$

は曲線 $\omega_t \in \mathcal{A}^+$ の $t = 0$ における接ベクトルであると考えられる。ここで

$$\Omega_t = d\omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t \wedge \omega_t] = \Omega + D^\omega \alpha_t + \frac{1}{2}[\alpha_t \wedge \alpha_t]$$

(D^ω は ω が定める P 上の共変外微分を表す) であることに注意すると、 ω_t は self-dual であるから $p_- \Omega_t = p_- (D^\omega \alpha_t + \frac{1}{2}[\alpha_t \wedge \alpha_t]) = 0$ である。(ここに $p_- : \Lambda^2 \otimes \mathfrak{g}_p \longrightarrow \Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p$: 射影) . よって上式を t で微分し $t = 0$ における値を考えると、 $\alpha_0 = 0$ により $p_- D\alpha = 0$ となる。以上により $\Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ を $\mathcal{A}$ の ω における接空間 $T_\omega(\mathcal{A})$ と考えたとき、 $\mathcal{A}^+$ の接空間は

$$T_\omega(\mathcal{A}^+) = \{\alpha \in \Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p) ; p_- D^\omega \alpha = 0\}$$

で与えられることがわかる。次に ω を通る $\mathcal{G}$ の軌道 $\mathcal{G}(\omega)$ の接空間 $T_\omega(\mathcal{G}(\omega))$ を求めよう。 f_t を $\mathcal{G}$ 内の曲線で $f_0 = \text{Id}$ とする。 $\beta_t := f_t^* \omega - \omega \in \Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ とおくと、 $\beta := \frac{d}{dt} \beta_t \Big|_{t=0} \in \Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ は曲線 $f_t^* \omega \in \mathcal{G}(\omega)$ の $t = 0$ における接ベクトルと考えられる。ここで f_t は P 上のゲージ変換であることに注意すると、各 $p \in P$, $t \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma(p, t) \in G$ が存在して $f_t(p) = p \cdot \gamma(p, t)$ である。 $f_0 = \text{Id}$ より $\gamma(p, t)$ は $t = 0$ で G の単位元を通るから、 $\dot{f}(p) := \frac{\partial}{\partial t} \gamma(p, t) \Big|_{t=0}$ により滑らかな関数 $\dot{f} : P \longrightarrow \mathfrak{g}$ が定義できる。 $\dot{f}(p \cdot g) = \text{Ad}(g^{-1}) \cdot \dot{f}(p)$ が成り立つことはすぐに確かめられるので、 $\dot{f} \in \Gamma(\mathfrak{g}_p)$. 以上を踏まえると

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{d}{dt}(f_t^* \omega - \omega) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\gamma(\cdot, t)^{-1} \cdot (d(\gamma(\cdot, t)) + [\omega \wedge \gamma(\cdot, t)]) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \gamma(\cdot, t) \Big|_{t=0} + [\omega \wedge \frac{d}{dt} \gamma(\cdot, t) \Big|_{t=0}] \right) = \dot{f} + [\omega \wedge \dot{f}] = \nabla^\omega \dot{f} \end{aligned}$$

(∇^ω は ω が定める P 上の共変微分) となる。ゆえに接空間 $T_\omega(\mathcal{G}(\omega))$ は

$$T_\omega(\mathcal{G}(\omega)) = \{\nabla^\omega \xi \in \Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p) ; \xi \in \Gamma(\mathfrak{g}_p)\}$$

で与えられることがわかる。以上により $\omega \in \mathcal{A}^+$ により代表される $\mathcal{M}^+$ の元 $[\omega]$ における $\mathcal{M}^+$ の接空間は

$$\begin{aligned} T_{[\omega]} \mathcal{M}^+ &= T_\omega \mathcal{A}^+ / T_\omega(\mathcal{G}(\omega)) \\ &= \{\alpha \in \Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p) ; p_- D^\omega \alpha = 0\} / \{\nabla^\omega \xi \in \Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p) ; \xi \in \Gamma(\mathfrak{g}_p)\} \end{aligned}$$

で与えられることがわかるが、この空間は以下に示す複体の言葉で表現することができる。

$\omega \in \mathcal{A}^+$ を 1 つ固定すると次のような 1 階線形微分作用素の複体 ”Atiyah-Hitchin-Singer complex” (以下 A-H-S complex と記す) を考えることができる。

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{g}_p) \xrightarrow{d_0} \Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p) \xrightarrow{d_1} \Gamma(\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p) \longrightarrow 0$$

$$d_0 = \nabla^\omega, \quad d_1 = p_- D^\omega$$

(上記 sequence が複体であることは $\omega \in \mathcal{A}^+$ により $d_1 d_0 = p_- D^\omega \nabla^\omega = p_- \Omega = 0$ となることから確定する。)

A-H-S complex においては 3 つのコホモロジー H^0, H^1, H^2 が通常どおり定義されるが、先に議論した $\mathcal{M}^+$ の $[\omega] \in \mathcal{M}^+$ における接空間は $T_{[\omega]} \mathcal{M}^+ = H^1 = \text{Ker} d_1 / \text{Im} d_0$ に他ならない。よって我々の目標は A-H-S complex の第 1 コホモロジーの次元 $h^1 := \dim H^1$ を計算することである。そのためにまずここで、A-H-S complex が楕円複体であることを見ておく。このことは後に h^1 の計算をするときに Atiyah-Singer index theorem を用いるための前提条件として必要であるばかりでなく、 $h^2 := \dim H^2$ を計算するとき等にも必要だからである。

Proposition 3.1

A-H-S complex は楕円複体である。

Proof

$\forall x \in X, \forall v (\neq 0) \in \Lambda^1_x$ に対し、 x 上のファイバーからなる A-H-S complex の表象系列

$$0 \longrightarrow (\mathfrak{g}_p)_x \xrightarrow{\sigma(d_0)} (\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)_x \xrightarrow{\sigma(d_1)} (\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p)_x \longrightarrow 0$$

$$\sigma(d_0)A = v \otimes A, \quad \sigma(d_1)(w \otimes A) = p_-(v \wedge w) \otimes A$$

が完全であることを見ればよいが、これは次の系列の完全性を見れば十分である。

$$0 \longrightarrow \Lambda^0_x \xrightarrow{\sigma_0} \Lambda^1_x \xrightarrow{\sigma_1} (\Lambda^2_-)_x \longrightarrow 0, \quad \sigma_0(t) = tv, \quad \sigma_1(w) = p_-(v \wedge w)$$

$v \neq 0$ より σ_0 が単射であることは明らかである。

$\text{Im} \sigma_0 \subset \text{Ker} \sigma_1$ が成り立っていることは明らかである。いま、 $e_1 = v$ であるような Λ^1_x の正規直交基底 (e_1, e_2, e_3, e_4) をとる。 $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 +$

$\lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 \in \text{Ker} \sigma_1$ であるとする、 $p_-(\lambda_2 e_1 \wedge e_2 + \lambda_3 e_1 \wedge e_3 + \lambda_4 e_1 \wedge e_4) = \frac{1}{2} \{ \lambda_2 (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) + \lambda_3 (e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) + \lambda_4 (e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) \} = 0$ より $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ を得る。従って $x = \lambda_1 v \in \text{Im} \sigma_0$. よって $\text{Im} \sigma_0 = \text{Ker} \sigma_1$.

により $\dim \text{Ker} \sigma_1 = 1$. また $\dim \Lambda^1_x = 4, \dim(\Lambda^2_-)_x = 3$ であるから、線形写像の次元考察により σ_1 が全射であることもわかる。 ■

さて、 $h^1 = \dim H^1$ を index theorem を用いて計算するためには、あらかじめ $h^0 = \dim H^0$, $h^2 = \dim H^2$ を調べておかなければならないが、Theorem 3.1 の仮定部分が以下で示すように見事に生かされて、 $h^0 = 0$, $h^2 = 0$ であることが結論されるのである。

Proposition 3.2

$$h^0 = 0$$

Proof

初めに、 $h^0 = 0$ なる結論に本質的に寄与しているのは、A-H-S complex を定める P 上の接続 ω が irreducible であることと、 P の構造群 G が semi-simple であるという仮定であることを強調しておこう。

$H^0 \cong \text{Ker} d_0 = \{ \xi \in \Gamma(\mathfrak{g}_P) ; \nabla^\omega \xi = 0 \}$ であるが、 $\xi \in \Gamma(\mathfrak{g}_P)$ は滑らかな関数 $\xi : P \rightarrow \mathfrak{g}$ であって、 $\xi(p \cdot g) = \text{Ad}(g^{-1}) \cdot \xi(p)$ を満たすものと同一視されるので、 $\nabla^\omega \xi = 0$ はこの同一視で見れば $d\xi(X) = 0$ ($\forall X \in T_h P : P$ 上の水平ベクトル) に他ならないことに注意して、 $\xi \in \text{Ker} d_0$ とする。さていま、 $p_0 \in P$ を固定し、

$$\begin{aligned} H(p_0) &:= \{ g \in G ; \text{Ad}(g^{-1})\xi(p_0) = \xi(p_0) \} , \\ Q(p_0) &:= \{ p \in P ; \xi(p) = \xi(p_0) \} \end{aligned}$$

と定義すると、 $H(p_0)$ は G の閉部分群であり、 $Q(p_0)$ に単純推移的に (即ち $\pi(\dot{p}) = \pi(p)$ のとき $\exists! g \in H(p_0)$ で $\dot{p} = pg$ となるということ) 作用することが簡単に確かめられるので、 $(Q(p_0), \pi|_{Q(p_0)}, X^4, H(p_0))$ は主 $H(p_0)$ 束である。いま、 $p_0 \in Q(p_0)$ を通る P 内の水平曲線 $\gamma(t)$ ($\gamma(0) = p_0$) について見てみよう。 $\xi \in \text{Ker} d_0$ より $(d\xi)_{\gamma(t)} \left(\frac{d}{dt} \gamma(t) \right) = 0$. これは $\frac{d}{ds} \xi(\gamma(s)) \Big|_{s=t} = 0$ に同じである。よって $\xi(\gamma(t)) = \xi(\gamma(0)) = \xi(p_0)$ となるから $\gamma(t)$ は実は $Q(p_0)$ 内であったことがわかる。これは $\forall p \in Q(p_0)$ のとき $T_h P|_p \subset TQ|_p$ が成り立つことを意味する。これにより P の接続 ω は単に $Q(p_0)$ に制限することで $Q(p_0)$ 上の接続に reduce される。ところで ω は irreducible であったから $H(p_0) = G$. よって $\text{Ad}(g^{-1})\xi(p_0) = \xi(p_0)$ ($\forall g \in G$). これは微

分したレベルで見れば $[Y, \xi(p_0)] = 0$ ($\forall Y \in \mathfrak{g}$) に他ならないが、 G : semi-simple より $\mathfrak{g}$: semi-simple なので $\xi(p_0) = 0$ ができる。任意の $p_0 \in P$ についてこのように議論できて $\xi(p_0) = 0$ であったのだから結局 $\xi = 0$ 。従って $\text{Ker} d_0 = 0$ 。よって $h^0 = 0$ が示された。 ■

Proposition 3.3

$$h^2 = 0$$

ここでも証明を始める前に一言強調しておこう。 $h^2 = 0$ に本質的に寄与しているのは X^4 の self-duality と $\tau \geq 0$ かつどこかで $\tau > 0$ なる仮定の部分である。さて、A-H-S complex が楕円複体であることは前に述べたが、楕円複体の一般論により $H^2 = \Gamma(\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p) / \text{Im} d_1$ と $\text{Ker} \Delta_2$ ($\Delta_2 := d_1 d_1^*$ は (第2) ラプラス作用素と呼ばれる) とは線形同型であるので、ラプラス作用素 $d_1 d_1^*$ について考察していくことにする。 i_- で包含写像 $i_- : \Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p \longrightarrow \Lambda^2 \otimes \mathfrak{g}_p$ を表すことにすれば $d_1 d_1^* = p_- D^\omega (D^\omega)^* i_-$ である。さて一方で $\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p$ 上の共変微分 $\nabla^{\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p}$ が以下のように定義されることに注意しておこう。まず Λ_-^2 上の共変微分 $\nabla^{\Lambda_-^2}$ は底空間 X^4 の Levi-Civita 接続から Λ^2 に誘導される共変微分 ∇^{Λ^2} ($\nabla^{\Lambda^2}(\alpha \wedge \beta) = \nabla \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \nabla \beta$) を用いて $\nabla^{\Lambda_-^2} := p_- \nabla^{\Lambda^2} i_-$ で定義されることに注意しておく。また $\mathfrak{g}_p$ 上には先程から A-H-S complex を定めるべく 1 つ固定された P 上の接続 $\omega \in \mathcal{A}^+$ による共変微分 ∇^ω があるので、 $\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p$ 上の共変微分は

$$\nabla^{\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p}(\alpha \otimes s) = \nabla^{\Lambda_-^2} \alpha \otimes s + \alpha \otimes \nabla^\omega s$$

で定まる。さて、ここで次のような $\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p$ 上の作用素 $\Delta^{\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p}$ を考えてみよう。

$$\Delta^{\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p} = - \sum_{i=1}^4 \nabla_{s_i}^{\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p} \nabla_{s_i}^{\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p} - \sum_{i=1}^4 \text{div}(s_i) \nabla_{s_i}^{\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p}$$

($(s_1, \dots, s_4)$ は TX^4 の局所基底であるとする。)

すると実は次のような等式が成り立つことが証明される。

$$2d_1 d_1^* = \Delta^{\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p} + \frac{\tau}{3} \quad (1)$$

(τ は X^4 上の Levi-Civita 接続のスカラー曲率) (1) が成り立つと次の等式が成り立つことがわかる。

Proposition 3.4

$$2 \int_{X^4} (d_1 d_1^* u, u) = \int_{X^4} |\nabla_{s_i}^{\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p} u|^2 + \int_{X^4} \frac{\tau}{3} |u|^2$$

Proof

ここでは (1) が成り立つとしているので、一般に

$$\int_{X^4} (\Delta^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v) = \int_{X^4} (\nabla^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, \nabla^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} v) \quad (2)$$

が成り立つことを示せば十分である。さて、 ∇^{Λ^2-} は Levi-Civita 接続から誘導されたので内積を保つことは明らかであるが、 ∇^ω も内積を保つことに注意しておこう。何故なら G のコンパクト性により $\mathfrak{g}$ に $\text{Ad}(G)$ 不変な内積を定めることができ、 $\mathfrak{g}_p$ の内積はその内積を採用するからである。よって $\nabla^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p}$ は内積を保つ共変微分であるから、

$$s_i(\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v) = (\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} \nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v) + (\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, \nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} v) \quad (3)$$

が成り立つ。また $\Delta^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p}$ の定義より

$$(\Delta^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v) = -\sum (\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} \nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v) - \sum \text{div}(s_i)(\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v) \quad (4)$$

(3), (4) より

$$\begin{aligned} (\Delta^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v) &= \sum (\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, \nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} v) \\ &\quad - \sum s_i(\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v) - \sum \text{div}(s_i)(\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v) \end{aligned} \quad (5)$$

一方、 $\text{div}(fX) = Xf + f\text{div}X$ より

$$\text{div}\{(\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v)s_i\} = s_i(\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v) + (\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v)\text{div}(s_i) \quad (6)$$

(5), (6) より

$$(\Delta^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v) = \sum (\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, \nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} v) - \sum \text{div}\{(\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v)s_i\} \quad (7)$$

(7) 式の両辺を X^4 上で積分するとストークスの定理より

$$\int_{X^4} \text{div}\{(\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v)s_i\} dV = \int_{X^4} d\{(\nabla_{s_i}^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} u, v)s_i \lrcorner (dV)\} = 0$$

(ここで dV : 体積要素、 $\lrcorner$: 縮約を表す) であるから、(2) を得る。

ここで $\tau \geq 0$ かつどこかで $\tau > 0$ の仮定を用いれば Proposition 3.4 より $h^2 = \dim \text{Ker}(d_1 d_1^*) = 0$ となることは直ちにわかる。よってあとは (1) を証明すれば Proposition 3.3 の証明は完結するが、(1) の証明は次のように 2 段階に分けて与えよう。第 1 段階では $2d_1 d_1^* - \Delta^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p}$ が $\Lambda^2 \otimes \mathfrak{g}_p$ 上の bundle homomorphism であることを示し、第 2 段階で各局所基底について等式 $2d_1 d_1^* = \Delta^{\Lambda^2-\otimes \mathfrak{g}_p} + \frac{\tau}{3}$ が成り立つことを示すのである。

第 1 段階 初めに 2 つほど補題を用意しておこう。

Lemma 3.1

$f, h \in C^\infty(X^4)$, $s \in \Gamma(\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p)$ のとき

$$p_-(dh \wedge (\text{grad} f \lrcorner s) + df \wedge (\text{grad} h \lrcorner s)) = \langle \text{grad} f, \text{grad} h \rangle s$$

($\lrcorner$ は縮約を表す) が成り立つ。

Proof

局所正規直交基底をとって忠実に計算すれば容易に確かめられる。 ■

Lemma 3.2

$f \in C^\infty(X^4)$, $s \in \Gamma(\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p)$ のとき

$$H(f, s) := p_-(df \wedge (D^\omega)^*(s) - D^\omega(\text{grad} f \lrcorner s)) + \nabla_{\text{grad} f}^{\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p} s - \frac{1}{2} \Delta(f)s = 0$$

が成り立つ。

Proof

初めに $*(dh \wedge s) = -\text{grad} h \lrcorner s$ ($h \in C^\infty(X^4)$, $s \in \Gamma(\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p)$) が成り立つことに注意する (これも局所正規直交基底をとって忠実に計算すればすぐに確かめられる。) と、

$$(D^\omega)^*(hs) = -\text{grad} h \lrcorner s + h(D^\omega)^*(s)$$

が成り立ち、また

$$D^\omega(hs) = dh \wedge s + hD^\omega s$$

であるから、

$$\begin{aligned} H(f, hs) &= p_-\{df \wedge (\text{grad} h \lrcorner s + h(D^\omega)^*(s)) \\ &\quad - dh \wedge (\text{grad} f \lrcorner s) - hD^\omega(\text{grad} f \lrcorner s)\} \\ &\quad + (dh)(\text{grad} f)s + h(\nabla_{\text{grad} f}^{\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p} s - \frac{1}{2} \Delta(f)s) \\ &= -\langle \text{grad} f, \text{grad} h \rangle s + (dh)(\text{grad} f)s \\ &\quad + h\{p_-(df \wedge (D^\omega)^*(s) - D^\omega(\text{grad} f \lrcorner s)) \\ &\quad + \nabla_{\text{grad} f}^{\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p} s - \frac{1}{2} \Delta(f)s\} \quad (\text{Lemma 3.1}) \\ &= hH(f, s) \end{aligned}$$

が成り立つ。さて、 $x \in X^4$ を固定し、 $s_i \in \Gamma(TX^4)$ を $\nabla s_i(x) = 0$ を満たす局所正規直交基底、 $g_j \in \Gamma(\mathfrak{g}_p)$ を $\nabla^\omega g_j(x) = 0$ を満たす局所正規直交基底としてとっておく。 s_i の dual 局所正規直交基底 e_i から通常どおりに作られる Λ^2_- の局所正規直交基底を f_i^- とするとき、上で見た $H(f, \cdot)$ の性質より $H(f, f_i^- \otimes g_j)(x) = 0$ を確かめれば Lemma 3.2 の証明は完結する。ところで s_i, g_j の選び方から

$$\nabla^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p}(f_i^- \otimes g_j)(x) = 0, \quad (D^\omega)^*(f_i^- \otimes g_j)(x) = 0$$

であるので

$$\begin{aligned} H(f, f_i^- \otimes g_j)(x) &= -p_- D^\omega((\text{grad} f \lrcorner f_i^-) \otimes g_j)(x) - \frac{1}{2} \Delta(f)(f_i^- \otimes g_j)(x) \\ &= -p_- d(\text{grad} f \lrcorner f_i^-) \otimes g_j(x) - \frac{1}{2} \Delta(f)(f_i^- \otimes g_j)(x) \end{aligned}$$

よってあとは

$$p_- d(\text{grad} f \lrcorner f_i^-)(x) = -\frac{1}{2} \Delta(f) f_i^-(x) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8)$$

を示せばよい。しかしこれは例えば $i = 1$, $\text{grad} f = \xi s_1$, $(d\xi = \Sigma \xi_i e_i)$ のときを確認すれば十分であろう。 $0 = d(df) = d(\xi e_1) = d\xi \wedge e_1 + \xi de_1$ を $x \in X^4$ で見れば $(de_1)_x = 0$ より $(d\xi)_x \wedge (e_1)_x = 0$. つまり $(d\xi)_x = \xi_1(x)(e_1)_x$ であることがわかる。あとは簡単な計算により $p_- d(\text{grad} f \lrcorner f_1^-)(x) = -\frac{1}{2} \Delta(f) f_1^-(x) = \frac{1}{2} \xi_1(x)$ であることが示される。これにて Lemma 3.2 の証明終了。 ■

Proposition 3.5

$2d_1 d_1^* - \Delta^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p}$ は $\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p$ 上の bundle homomorphism である

Proof

初めに簡単な計算により確かめられることであるが、

$$\sum \{ \text{div}(s_i) \langle s_i, \text{grad} f \rangle + d \langle s_i, \text{grad} f \rangle (s_i) \} = -\Delta(f) \quad (9)$$

が成り立つことを注意しておく、

$$\begin{aligned}
(2d_1 d_1^* - \Delta^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p})(fs) &= 2p_- D^\omega (D^\omega)^* i_-(fs) - \Delta^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p}(fs) \\
&= 2p_- D^\omega (-\text{grad} f \lrcorner s + f(D^\omega)^*(s)) - \Delta^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p}(fs) \\
&= 2p_- (df \wedge (D^\omega)^*(s) - D^\omega(\text{grad} f \lrcorner s)) + f \cdot 2d_1 d_1^*(s) \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 \nabla_{s_i}^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p} \nabla_{s_i}^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p} (fs) + \sum_{i=1}^4 \text{div}(s_i) \nabla_{s_i}^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p} (fs) \\
&= 2p_- (df \wedge (D^\omega)^*(s) - D^\omega(\text{grad} f \lrcorner s)) + f \cdot 2d_1 d_1^*(s) \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 \nabla_{s_i}^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p} (\langle s_i, \text{grad} f \rangle s + f \nabla_{s_i}^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p} s) \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 \text{div}(s_i) (\langle s_i, \text{grad} f \rangle s + f \nabla_{s_i}^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p} s) \\
&= 2p_- (df \wedge (D^\omega)^*(s) - D^\omega(\text{grad} f \lrcorner s)) + f \cdot 2d_1 d_1^*(s) \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 d\langle s_i, \text{grad} f \rangle(s_i) s + 2 \sum_{i=1}^4 \langle s_i, \text{grad} f \rangle \nabla_{s_i}^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p} s \\
&\quad + f \sum_{i=1}^4 \nabla_{s_i}^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p} \nabla_{s_i}^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p} s + \sum_{i=1}^4 \text{div}(s_i) \langle s_i, \text{grad} f \rangle s \\
&\quad + f \sum_{i=1}^4 \text{div}(s_i) \nabla_{s_i}^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p} s \\
&= \{2p_- (df \wedge (D^\omega)^*(s) - D^\omega(\text{grad} f \lrcorner s)) + 2\nabla_{\text{grad} f}^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p} s - \Delta(f)s\} \\
&\quad + f(2d_1 d_1^* - \Delta^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p})(s) \quad ((9) \text{ より }) \\
&= f(2d_1 d_1^* - \Delta^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p})(s) \quad (\text{Lemma 3.2})
\end{aligned}$$

となり題意は示された。 ■

第2段階

Proposition 3.6

$\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p$ の各局所基底について

$$2d_1 d_1^* = \Delta^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p} + \frac{\tau}{3}$$

が成り立つ。

Proof

$x \in X^4$ を固定し、 $s_i \in \Gamma(TX^4)$ を $\nabla s_i(x) = 0$ を満たす局所正規直交基底、 $g_j \in \Gamma(\mathfrak{g}_p)$ を $\nabla^\omega g_j(x) = 0$ を満たす局所基底とする。(e_i は s_i の dual 局所正規直交基底。仮定より $de_i(x) = 0$ も成り立っていることに注意しておく。) また Levi-Civita 接続の接続 1-形式を ω_j^i 、即ち $\nabla s_j = \Sigma \omega_j^i \cdot s_i$ とし、 $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i e_k$, $d\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jkl}^i e_l$ などとする。同様に ∇^ω の接続 1-形式を A_j^i 、即ち $\nabla^\omega g_j = A_j^i \cdot g_i$ とし、 $A_j^i = a_{jk}^i e_k$, $da_{jk}^i = a_{jkl}^i e_l$ などとする。これらの記号のもとで、 $x \in X^4$ において $(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1 \in \Gamma(\Lambda_-^2 \otimes \mathfrak{g}_p)$ なる局所基底について題意の等式が成り立つことを見れば十分であろう。それではこれよりしばらくの間、題意の等式の左辺について、底空間 X^4 の self-duality について、全空間 P 上の接続 ω の self-duality について計算で突き詰めていこう。ただし以下の計算においてはポイントを表す x と Σ 記号は見た目の煩雑さを避けるために省くことにする。

$$\begin{aligned}
(2d_1 d_1^*)((e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1) &= (2d_1 * D^\omega)((e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1) \\
&= (2d_1 *) \left(d(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1 + (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \wedge \nabla^\omega g_1 \right) \\
&= (2d_1 *) \left((-\omega_j^1 \wedge e_j \wedge e_2 + e_1 \wedge \omega_j^2 \wedge e_j + \omega_j^3 \wedge e_j \wedge e_4 \right. \\
&\quad \left. - e_3 \wedge \omega_j^4 \wedge e_j) \otimes g_1 + (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \wedge A_1^j \otimes g_j \right) \\
&= (2d_1 *) \left((-\Gamma_{jk}^1 e_k \wedge e_j \wedge e_2 + \Gamma_{jk}^2 e_1 \wedge e_k \wedge e_j \right. \\
&\quad \left. + \Gamma_{jk}^3 e_k \wedge e_j \wedge e_4 - \Gamma_{jk}^4 e_3 \wedge e_k \wedge e_j) \otimes g_1 \right. \\
&\quad \left. + (a_{13}^j e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + a_{14}^j e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \right. \\
&\quad \left. - a_{11}^j e_3 \wedge e_4 \wedge e_1 - a_{12}^j e_3 \wedge e_4 \wedge e_2) \otimes g_j \right) \\
&= (2d_1 *) \left(\left((-\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{13}^1) e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 + (-\Gamma_{41}^1 + \Gamma_{14}^1) e_1 \wedge e_4 \wedge e_2 \right. \right. \\
&\quad \left. + (-\Gamma_{43}^1 + \Gamma_{34}^1) e_3 \wedge e_4 \wedge e_2 + (\Gamma_{32}^2 - \Gamma_{23}^2) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \right. \\
&\quad \left. + (\Gamma_{42}^2 - \Gamma_{24}^2) e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + (\Gamma_{43}^2 - \Gamma_{34}^2) e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \right. \\
&\quad \left. + (\Gamma_{21}^3 - \Gamma_{12}^3) e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + (\Gamma_{31}^3 - \Gamma_{13}^3) e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \right. \\
&\quad \left. + (\Gamma_{32}^3 - \Gamma_{23}^3) e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + (-\Gamma_{21}^4 + \Gamma_{12}^4) e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 \right. \\
&\quad \left. + (-\Gamma_{41}^4 + \Gamma_{14}^4) e_3 \wedge e_1 \wedge e_4 + (-\Gamma_{42}^4 + \Gamma_{24}^4) e_3 \wedge e_2 \wedge e_4 \right) \otimes g_1 \\
&\quad \left. + (a_{13}^j e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + a_{14}^j e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \right. \\
&\quad \left. - a_{11}^j e_3 \wedge e_4 \wedge e_1 - a_{12}^j e_3 \wedge e_4 \wedge e_2) \otimes g_j \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2d_1*) \left(\left((\Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{32} - \Gamma^4_{21} + \Gamma^4_{12}) \otimes e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \right. \right. \\
&\quad + (\Gamma^1_{41} + \Gamma^2_{42} + \Gamma^3_{21} - \Gamma^3_{12}) \otimes e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \\
&\quad + (\Gamma^3_{43} - \Gamma^2_{34} - \Gamma^3_{13} - \Gamma^4_{14}) \otimes e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \\
&\quad \left. + (-\Gamma^1_{43} + \Gamma^1_{34} - \Gamma^3_{23} - \Gamma^4_{24}) \otimes e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \right) \otimes g_1 \\
&\quad + (a^j_{13}e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + a^j_{14}e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \\
&\quad - a^j_{11}e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 - a^j_{12}e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \otimes g_j \Big) \quad (\Gamma^i_{ij} = 0) \\
&= (2d_1) \left(\left((\Gamma^1_{43} - \Gamma^1_{34} + \Gamma^3_{23} + \Gamma^4_{24})e_1 + (\Gamma^2_{43} - \Gamma^2_{34} - \Gamma^3_{13} - \Gamma^4_{14})e_2 \right. \right. \\
&\quad + (-\Gamma^1_{41} - \Gamma^2_{42} - \Gamma^3_{21} + \Gamma^3_{12})e_3 + (\Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{32} - \Gamma^4_{21} + \Gamma^4_{12})e_4 \Big) \otimes g_1 \\
&\quad \left. + (a^j_{12}e_1 - a^j_{11}e_2 - a^j_{14}e_3 + a^j_{13}e_4) \otimes g_j \right) \\
&= (2p_-) \left(\left((\Gamma^1_{43k} - \Gamma^1_{34k} + \Gamma^3_{23k} + \Gamma^4_{24k})e_k \wedge e_1 \right. \right. \\
&\quad + (\Gamma^2_{43k} - \Gamma^2_{34k} - \Gamma^3_{13k} - \Gamma^4_{14k})e_k \wedge e_2 \\
&\quad + (-\Gamma^1_{41k} - \Gamma^2_{42k} - \Gamma^3_{21k} + \Gamma^3_{12k})e_k \wedge e_3 \\
&\quad \left. + (\Gamma^1_{31k} + \Gamma^2_{32k} - \Gamma^4_{21k} + \Gamma^4_{11k})e_k \wedge e_4 \right) \otimes g_1 \\
&\quad + (a^j_{12k}e_k \wedge e_1 - a^j_{11k}e_k \wedge e_2 - a^j_{14k}e_k \wedge e_3 + a^j_{13k}e_k \wedge e_4) \otimes g_j \Big) \\
&= \left((\Gamma^2_{431} - \Gamma^2_{341} - \Gamma^3_{131} - \Gamma^4_{141} - \Gamma^1_{432} + \Gamma^1_{342} - \Gamma^3_{232} - \Gamma^4_{242} - \Gamma^1_{313} \right. \\
&\quad - \Gamma^2_{323} + \Gamma^4_{213} - \Gamma^4_{123} - \Gamma^1_{414} - \Gamma^2_{424} - \Gamma^3_{214} + \Gamma^3_{124})(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \\
&\quad + (-\Gamma^1_{411} - \Gamma^2_{421} - \Gamma^3_{211} + \Gamma^3_{121} - \Gamma^1_{433} + \Gamma^1_{343} - \Gamma^3_{233} - \Gamma^4_{243} + \Gamma^1_{312} \\
&\quad + \Gamma^2_{322} - \Gamma^4_{212} + \Gamma^4_{122} - \Gamma^2_{434} + \Gamma^2_{344} + \Gamma^3_{134} + \Gamma^4_{144})(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) \\
&\quad + (\Gamma^1_{311} + \Gamma^2_{321} - \Gamma^4_{211} + \Gamma^4_{121} - \Gamma^1_{434} + \Gamma^1_{344} - \Gamma^3_{234} - \Gamma^4_{244} + \Gamma^1_{412} \\
&\quad + \Gamma^2_{422} + \Gamma^3_{212} - \Gamma^3_{122} + \Gamma^2_{433} - \Gamma^2_{343} - \Gamma^3_{133} - \Gamma^4_{143})(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) \Big) \\
&\quad \otimes g_1 \\
&\quad + \left((-a^j_{111} - a^j_{122} - a^j_{133} - a^j_{144})(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \right. \\
&\quad + (-a^j_{141} - a^j_{123} + a^j_{132} + a^j_{114})(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) \\
&\quad \left. + (a^j_{131} - a^j_{124} + a^j_{142} - a^j_{113})(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) \right) \\
&\quad \otimes g_j
\end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned}
& \nabla^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p} \left((e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1 \right) \\
&= p_- \left((\nabla e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge \nabla e_2 - \nabla e_3 \wedge e_4 - e_3 \wedge \nabla e_4) \otimes g_1 \right. \\
&\quad \left. + (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes \nabla^\omega g_1 \right) \\
&= p_- \left(\left((-\Gamma^1_{jk} e_k \otimes e_j) \wedge e_2 + e_1 \wedge (-\Gamma^2_{jk} e_k \otimes e_j) - (-\Gamma^3_{jk} e_k \otimes e_j) \wedge e_4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e_3 \wedge (-\Gamma^4_{jk} e_k \otimes e_j) \right) \otimes g_1 + a^j_{1k} (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes e_k \otimes g_j \right)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
& \nabla^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p}_{s_i} \left((e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1 \right) \\
&= p_- \left((-\Gamma^1_{ji} e_j \wedge e_2 - \Gamma^2_{ji} e_1 \wedge e_j + \Gamma^3_{ji} e_j \wedge e_4 + \Gamma^4_{ji} e_3 \wedge e_j) \otimes g_1 \right. \\
&\quad \left. + a^j_{1i} (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_j \right) \\
&= \frac{1}{2} \left((-\Gamma^1_{1i} - \Gamma^2_{2i} - \Gamma^3_{3i} - \Gamma^4_{4i}) (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \right. \\
&\quad \left. + (-\Gamma^2_{3i} - \Gamma^4_{1i} + \Gamma^1_{4i} + \Gamma^3_{2i}) (e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) \right. \\
&\quad \left. + (-\Gamma^2_{4i} + \Gamma^3_{1i} - \Gamma^1_{3i} + \Gamma^4_{2i}) (e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) \right) \otimes g_1 \\
&\quad + a^j_{1i} (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_j \\
&= \left((\Gamma^3_{2i} + \Gamma^1_{4i}) (e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) \right. \\
&\quad \left. + (\Gamma^4_{2i} + \Gamma^3_{1i}) (e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) \right) \otimes g_j \\
&\quad + a^j_{1i} (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_j \quad (\Gamma^i_{jk} = -\Gamma^j_{ik})
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
& \nabla^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p}_{s_i} \nabla^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p}_{s_i} \left((e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1 \right) \\
&= \left((\Gamma^3_{2ii} + \Gamma^1_{4ii}) (e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) \right. \\
&\quad \left. + (\Gamma^4_{2ii} + \Gamma^3_{1ii}) (e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) \right) \otimes g_j \\
&\quad + a^j_{1ii} (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_j
\end{aligned}$$

また、

$$(div(s_i) \nabla^{\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p}_{s_i}) \left((e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1 \right)$$

は、 $x \in X^4$ において $(\text{div}(s_i))(x) = 0$ であるから消える。以上により

$$\begin{aligned} & \Delta^{\Lambda^2 \otimes \mathfrak{g}_P} \left((e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1 \right) \\ &= \left((\Gamma^3_{2ii} + \Gamma^1_{4ii})(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) \right. \\ & \quad \left. + (\Gamma^4_{2ii} + \Gamma^3_{1ii})(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) \right) \otimes g_j \\ & \quad + a^j_{1ii}(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_j \end{aligned}$$

さて、ここで P 上の接続 ω が self-dual であることを関数 a^i_{jkl} で書き表しておこう。(無論、ポイント $x \in X^4$ における議論である)

$$\begin{aligned} p_-(D^\omega \nabla^\omega g_i) &= p_- D^\omega (a^j_{ik} e_k \otimes g_j) \\ &= p_-(da^j_{ik} \wedge e_k \otimes g_j) \\ &= p_-(a^j_{ikl} e_l \wedge e_k \otimes g_j) \\ &= p_- \left((a^j_{i21} - a^j_{i12}) e_1 \wedge e_2 + (a^j_{i43} - a^j_{i34}) e_3 \wedge e_4 \right. \\ & \quad \left. + (a^j_{i31} - a^j_{i13}) e_1 \wedge e_3 + (a^j_{i42} - a^j_{i24}) e_2 \wedge e_4 \right. \\ & \quad \left. + (a^j_{i41} - a^j_{i14}) e_1 \wedge e_4 + (a^j_{i32} - a^j_{i23}) e_2 \wedge e_3 \right) \otimes g_j \\ &= \frac{1}{2} \left((a^j_{i21} - a^j_{i12} - a^j_{i43} + a^j_{i34})(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \right. \\ & \quad \left. + (a^j_{i31} - a^j_{i13} + a^j_{i42} - a^j_{i24})(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) \right. \\ & \quad \left. + (a^j_{i41} - a^j_{i14} - a^j_{i32} + a^j_{i23})(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) \right) \otimes g_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{cases} a^j_{i21} - a^j_{i12} - a^j_{i43} + a^j_{i34} = 0 \\ a^j_{i31} - a^j_{i13} + a^j_{i42} - a^j_{i24} = 0 \\ a^j_{i41} - a^j_{i14} - a^j_{i32} + a^j_{i23} = 0 \end{cases}$$

次に、こんどは X^4 が self-dual であることを Γ^i_{jkl} で書きたいので、その前に R_{ijkl} と Γ^i_{jkl} との関係を調べる。

$$\nabla_{s_i} s_j = (\omega_j^k \otimes s_k)(s_i) = (\Gamma^k_{jl} e_l \otimes s_k)(s_i) = \Gamma^k_{ji} s_k$$

により、

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= g(R(s_i, s_j)s_k, s_l) \\
&= g(\nabla_{s_i}\nabla_{s_j}s_k - \nabla_{s_j}\nabla_{s_i}s_k - \nabla_{[s_i, s_j]}s_k, s_l) \\
&= g(\nabla_{s_i}(\Gamma^m_{kj}s_m) - \nabla_{s_j}(\Gamma^m_{ki}s_m), s_l) \\
&= g((d\Gamma^m_{kj})(s_i)s_m - (d\Gamma^m_{ki})(s_j)s_m, s_l) \\
&= g((\Gamma^m_{kji} - \Gamma^m_{kij})s_m, s_l) \\
&= \Gamma^l_{kji} - \Gamma^l_{kij}
\end{aligned}$$

これを踏まえると Bianchi の式 $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$ は

$$\Gamma^l_{kji} - \Gamma^l_{kij} + \Gamma^l_{ikj} - \Gamma^l_{ijk} + \Gamma^l_{jik} - \Gamma^l_{jki} = 0 \quad (10)$$

となり、 $R_{ijkl} = R_{klij}$ は

$$\Gamma^l_{kji} - \Gamma^l_{kij} = \Gamma^j_{ilk} - \Gamma^j_{ikl} \quad (11)$$

となることがわかる。さて、[2] の § 1 を参照すればわかる通り、 X^4 が self-dual であることの必要十分条件は以下の 5 本の式により与えられていた。(R_{ij} はリッチ曲率)

$$R_{1212} - 2R_{1234} + R_{3434} = -\frac{\tau}{6} \quad (12)$$

$$R_{1313} - 2R_{2413} + R_{2424} = -\frac{\tau}{6} \quad (13)$$

$$R_{23} + R_{14} = 2(R_{1231} + R_{3143}) \quad (14)$$

$$R_{24} + R_{31} = 2(R_{1241} + R_{2312}) \quad (15)$$

$$R_{21} + R_{34} = 2(R_{4214} + R_{1341}) \quad (16)$$

これを Γ^i_{jkl} で書き表すと

$$\Gamma^2_{121} - \Gamma^2_{112} - 2(\Gamma^4_{321} - \Gamma^4_{312}) + \Gamma^4_{343} - \Gamma^4_{334} = -\frac{\tau}{6} \quad (17)$$

$$\Gamma^3_{131} - \Gamma^3_{113} + 2(\Gamma^3_{142} - \Gamma^3_{124}) + \Gamma^4_{242} - \Gamma^4_{224} = -\frac{\tau}{6} \quad (18)$$

$$\Gamma^3_{121} - \Gamma^3_{112} + \Gamma^3_{442} - \Gamma^3_{424} + \Gamma^4_{221} - \Gamma^4_{212} + \Gamma^4_{313} - \Gamma^4_{331} = 0 \quad (19)$$

$$\Gamma^4_{121} - \Gamma^4_{112} + \Gamma^4_{332} - \Gamma^4_{323} + \Gamma^1_{232} - \Gamma^1_{223} + \Gamma^1_{443} - \Gamma^1_{434} = 0 \quad (20)$$

$$\Gamma^1_{332} - \Gamma^1_{323} + \Gamma^1_{424} - \Gamma^1_{442} + \Gamma^4_{131} - \Gamma^4_{113} + \Gamma^4_{223} - \Gamma^4_{232} = 0 \quad (21)$$

となる。

ここまでで Proposition 3.6 を証明するために必要な式はほぼ出揃ったのであるが、便宜上、既出の式 (12), (13) を辺々加えた式と τ の定義式とを合わせるにより得られる次の式が有用なのでここに記しておく。

$$R_{1414} + 2(R_{1234} - R_{2413}) + R_{2323} = -\frac{\tau}{6} \quad (22)$$

これを Γ^i_{jkl} で書くと

$$\begin{aligned} \Gamma^4_{141} - \Gamma^4_{114} + 2(\Gamma^4_{321} - \Gamma^4_{312} - \Gamma^3_{142} + \Gamma^3_{124}) \\ + \Gamma^3_{232} - \Gamma^3_{223} = -\frac{\tau}{6} \end{aligned} \quad (23)$$

ようやく準備も整ったので $x \in X^4$ における等式

$$\begin{aligned} (2d_1d_1^* - \Delta^{\Lambda^2-\otimes\mathfrak{g}_p})((e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1) \\ = \frac{\tau}{3}((e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1) \end{aligned} \quad (24)$$

を証明しよう。まず初めに、 ω の self-duality を表す、 a^i_{jkl} で書かれた 3 本の式 (2 ページ前) により、 $(2d_1d_1^* - \Delta^{\Lambda^2-\otimes\mathfrak{g}_p})((e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1)$ には a^i_{jkl} を含む項は残らないことがわかる。したがってあと示すべきは

- (1) $(2d_1d_1^* - \Delta^{\Lambda^2-\otimes\mathfrak{g}_p})((e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1)$ における $(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1$ の係数が $\frac{\tau}{3}$ に等しい
- (2) $(2d_1d_1^* - \Delta^{\Lambda^2-\otimes\mathfrak{g}_p})((e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes g_1)$ における $(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) \otimes g_1, (e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) \otimes g_1$ の係数が 0

の 2 つのみである。

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Gamma^2_{431} - \Gamma^2_{341} - \Gamma^3_{131} - \Gamma^4_{141} - \Gamma^1_{432} + \Gamma^1_{342} - \Gamma^3_{232} - \Gamma^4_{242} \\ & - \Gamma^1_{313} - \Gamma^2_{323} + \Gamma^4_{213} - \Gamma^4_{123} - \Gamma^1_{414} - \Gamma^2_{424} - \Gamma^3_{214} + \Gamma^3_{124} \\ & = \frac{\tau}{6} + (\Gamma^3_{142} - \Gamma^3_{124}) \text{ (棒線部に (18) を適用)} \\ & \quad + \Gamma^2_{431} - \Gamma^2_{341} - \Gamma^4_{141} - \Gamma^1_{432} - \Gamma^3_{232} \\ & \quad - \Gamma^2_{323} + \Gamma^4_{213} - \Gamma^4_{123} - \Gamma^1_{414} - \Gamma^3_{214} \\ & = \frac{\tau}{6} + (\Gamma^4_{231} - \Gamma^4_{213}) + \Gamma^2_{431} + \Gamma^4_{213} \quad (() \text{ 内に (11) を適用}) \\ & \quad + \frac{\tau}{6} + 2(\Gamma^4_{321} - \Gamma^4_{312} - \Gamma^3_{142} + \Gamma^3_{124}) \text{ (棒線部に (23) を適用)} \\ & \quad - \Gamma^2_{341} - \Gamma^1_{432} - \Gamma^4_{123} - \Gamma^3_{214} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tau}{3} + (\Gamma_{321}^4 - \Gamma_{312}^4 + \Gamma_{124}^3 - \Gamma_{142}^3 + \Gamma_{314}^2 - \Gamma_{341}^2) \\
&\quad + (\Gamma_{321}^4 - \Gamma_{312}^4 + \Gamma_{124}^3 - \Gamma_{142}^3 + \Gamma_{423}^1 - \Gamma_{432}^1) (\Gamma_{jkl}^i = -\Gamma_{ikl}^j) \\
&= \frac{\tau}{3} + (\Gamma_{143}^2 - \Gamma_{134}^2 + \Gamma_{431}^2 - \Gamma_{413}^2 + \Gamma_{314}^2 - \Gamma_{341}^2) + \\
&\quad (-\Gamma_{243}^1 + \Gamma_{234}^1 - \Gamma_{324}^1 + \Gamma_{342}^1 + \Gamma_{423}^1 - \Gamma_{432}^1) ((11) \text{ と } \Gamma_{jkl}^i = -\Gamma_{ikl}^j) \\
&= \frac{\tau}{3} \quad ((10) \text{ より})
\end{aligned}$$

(2) $(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) \otimes g_1$ の係数は

$$\begin{aligned}
&-\Gamma_{421}^2 + \Gamma_{121}^3 + \Gamma_{343}^1 - \Gamma_{243}^4 + \Gamma_{312}^1 - \Gamma_{212}^4 - \Gamma_{434}^2 + \Gamma_{134}^3 \\
&= (\Gamma_{121}^3 - \Gamma_{112}^3) + (\Gamma_{442}^3 - \Gamma_{424}^3) \\
&\quad + (\Gamma_{221}^4 - \Gamma_{212}^4) + (\Gamma_{313}^4 - \Gamma_{331}^4) ((11) \text{ と } \Gamma_{jkl}^i = -\Gamma_{ikl}^j) \\
&= 0 \quad ((19) \text{ より})
\end{aligned}$$

$(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) \otimes g_1$ の係数についても同様。

以上により Proposition 3.6 の証明は完結した。(これで $h^2 = 0$ の証明も完結した。) ■

ここからは A-H-S complex に Atiyah-Singer index theorem を適用して $h^1 = \dim H^1$ の計算をする。一般に n 次元コンパクト多様体 X 上に複素ベクトル束 $E_0, E_1, \dots, E_m$ 及び微分作用素 $D : \Gamma(E_i) \longrightarrow \Gamma(E_{i+1})$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$) が与えられていて

$$0 \longrightarrow \Gamma(E_0) \xrightarrow{D_0} \Gamma(E_1) \xrightarrow{D_1} \dots \xrightarrow{D_{m-1}} \Gamma(E_m) \longrightarrow 0$$

が楕円複体とする。 $H^p = \text{Ker } D_p / \text{Im } D_{p-1}$ と定義したとき、 $\dim H^p < \infty$ で、

$$\sum (-1)^p \dim H^p = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{ch(\sum (-1)^i E_i) td(TX \otimes \mathbf{C})}{e(TX)} [X]$$

が index theorem である。ここで Todd 類 $td(TX \otimes \mathbf{C})$ とは $TX \otimes \mathbf{C}$ の Chern 類 $c(TX \otimes \mathbf{C})$ により次のように表されるものである。

$$c(TX \otimes \mathbf{C}) = 1 + c_1 + \dots + c_n \quad (\text{但し } c_i = c_i(TX \otimes \mathbf{C}))$$

を形式的に

$$c(TX \otimes \mathbf{C}) = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n)$$

と分解したときに

$$td(TX \otimes \mathbf{C}) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}} = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \cdots$$

と定義する。このように index theorem を適用するには A-H-S complex を複素化しておかねばならない。そこで

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_p^C = P \times_{Ad} (\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}) & , \quad \Lambda^j = \Lambda^j(T^*X \otimes \mathbf{C}) \\ \Lambda_{\pm}^2 = \Lambda_{\pm}^2(T^*X \otimes \mathbf{C}) \end{cases}$$

のような記号を用いることにすれば A-H-S complex の複素化は

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{g}_p^C) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{g}_p^C \otimes \Lambda^1) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{g}_p^C \otimes \Lambda_{-}^2) \longrightarrow 0$$

となる。よって A-H-S complex に $h^0 = 0$, $h^2 = 0$ を考慮して index theorem を適用すると

$$\dim H^1 = - \frac{ch(\mathfrak{g}_p^C) ch(\Lambda^0 - \Lambda^1 + \Lambda_{-}^2) td(TX^4 \otimes \mathbf{C})}{e(TX^4)} [X^4] \quad (25)$$

まず $ch(\Lambda^0 - \Lambda^1 + \Lambda_{-}^2)$ を計算するために Hodge * 作用素を少し改良した

$$\tau := -i^{p(p-1)} * : \Lambda^p \longrightarrow \Lambda^{4-p}$$

なる作用素を考える。 τ は Λ^p 上で $\tau^2 = 1$ を満たすことに注意しておく。ここで

$$\begin{cases} \Lambda^* := \Lambda^0 + \Lambda^1 + \Lambda^2 + \Lambda^3 + \Lambda^4 & , \quad \Lambda_{-1}^* := \Lambda^0 - \Lambda^1 + \Lambda^2 - \Lambda^3 + \Lambda^4 \\ \Lambda^+ := \{\xi \in \Lambda^* ; \tau(\xi) = \xi\} & , \quad \Lambda^- := \{\xi \in \Lambda^* ; \tau(\xi) = -\xi\} \end{cases}$$

とおけば

$$\begin{aligned} \Lambda^+ &= \Lambda^+ \cap (\Lambda^0 + \Lambda^4) + \Lambda^+ \cap (\Lambda^1 + \Lambda^3) + \Lambda_{+}^2 \\ \Lambda^- &= \Lambda^- \cap (\Lambda^0 + \Lambda^4) + \Lambda^- \cap (\Lambda^1 + \Lambda^3) + \Lambda_{-}^2 \end{aligned}$$

である。ここで対応 $\xi + \tau(\xi) \longleftrightarrow \xi - \tau(\xi)$ により同型対応

$$\begin{aligned} \Lambda^+ \cap (\Lambda^0 + \Lambda^4) &\longleftrightarrow \Lambda^- \cap (\Lambda^0 + \Lambda^4) \\ \Lambda^+ \cap (\Lambda^1 + \Lambda^3) &\longleftrightarrow \Lambda^- \cap (\Lambda^1 + \Lambda^3) \end{aligned}$$

が得られ、対応 $\xi \longleftrightarrow \tau(\xi)$ により同型対応

$$\Lambda^0 \longleftrightarrow \Lambda^4, \quad \Lambda^1 \longleftrightarrow \Lambda^3$$

が得られることに注意。以上を踏まえると

$$\begin{aligned} & \Lambda^- - \Lambda^+ + \Lambda_{-1}^* \\ &= \left(\Lambda^- \cap (\Lambda^0 + \Lambda^4) - \Lambda^+ \cap (\Lambda^0 + \Lambda^4) \right) \\ & \quad + \left(\Lambda^- \cap (\Lambda^1 + \Lambda^3) - \Lambda^+ \cap (\Lambda^1 + \Lambda^3) \right) \\ & \quad + (\Lambda_-^2 - \Lambda_+^2) + (\Lambda^0 + \Lambda^4) - (\Lambda^1 + \Lambda^3) + (\Lambda_+^2 + \Lambda_-^2) \\ &= 2 \Lambda^- \cap (\Lambda^0 + \Lambda^4) - 2 \Lambda^+ \cap (\Lambda^1 + \Lambda^3) + 2 \Lambda_-^2 \\ &\cong \Lambda^+ \cap (\Lambda^0 + \Lambda^4) + \Lambda^- \cap (\Lambda^0 + \Lambda^4) \\ & \quad - \Lambda^+ \cap (\Lambda^1 + \Lambda^3) - \Lambda^- \cap (\Lambda^1 + \Lambda^3) + 2 \Lambda_-^2 \\ &= (\Lambda^0 + \Lambda^4) - (\Lambda^1 + \Lambda^3) + 2 \Lambda_-^2 \\ &\cong 2 (\Lambda^0 - \Lambda^1 + \Lambda_-^2) \end{aligned}$$

なる同型対応が得られる。これを (25) に代入すると

$$\dim H^1 = -\frac{1}{2} \frac{ch(\mathfrak{g}_p^C) ch(\Lambda^- - \Lambda^+ + \Lambda_{-1}^*) td(TX^4 \otimes \mathbf{C})}{e(TX^4)} [X^4] \quad (26)$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} ch(\mathfrak{g}_p^C) &= ch_0(\mathfrak{g}_p^C) + ch_1(\mathfrak{g}_p^C) + ch_2(\mathfrak{g}_p^C) \\ &= \dim \mathfrak{g} + c_1(\mathfrak{g}_p^C) + \frac{1}{2}(c_1(\mathfrak{g}_p^C)^2 - 2c_2(\mathfrak{g}_p^C)) \quad ([5] \text{ の } p.148 \text{ 参照}) \\ &= \dim \mathfrak{g} + p_1(\mathfrak{g}_p) \quad (c_1(\mathfrak{g}_p^C) = 0, \quad c_2(\mathfrak{g}_p^C) = -p_1(\mathfrak{g}_p) \text{ より}) \end{aligned}$$

de Rham 複体の場合の index theorem ([3] 参照)

$$\frac{ch(\Lambda_{-1}^*) td(TX^4 \otimes \mathbf{C})}{e(TX^4)} = e(TX^4)$$

Hirzebruch の index theorem ([3] 参照)

$$\frac{ch(\Lambda^+ - \Lambda^-) td(TX^4 \otimes \mathbf{C})}{e(TX^4)} = 4 + \frac{1}{3} p_1(X^4)$$

により (26) の右辺は

$$\frac{1}{2} (\dim \mathfrak{g} + p_1(\mathfrak{g}_p)) (4 - e(TX^4) + \frac{1}{3} p_1(TX^4))$$

を X^4 上で積分したものである。以上により

$$\int_{X^4} \frac{1}{3} p_1(X^4) = \sigma(X^4) \quad , \quad \int_{X^4} e(X^4) = \chi(X^4)$$

をも用いると (26) は

$$\dim H^1 = 2p_1(\mathfrak{g}_p) - \frac{1}{2} \dim G \cdot (\chi(X^4) - \sigma(X^4))$$

但しここで $\mathfrak{g}_p$ の第 1 Pontrjagin 類 $p_1(\mathfrak{g}_p)$ の X^4 上での積分、即ち $\mathfrak{g}_p$ の Pontrjagin 数も同じ記号 $p_1(\mathfrak{g}_p)$ で記した。以上で $\mathcal{M}^+$ の次元の計算に関する証明を終えるが、ここで 1 つ自己双対接続のモジュライ空間の次元計算の具体例を見ておこう。

$X^4 = S^4$, $G = SU(2)$ の場合を考える。 X^4 上の主 $SU(2)$ 束 P は、 $SU(2)$ の $\mathbb{C}^2$ への自然な作用による相伴束 $E = P \times_G \mathbb{C}^2$ と、 $SU(2)$ の $\mathfrak{su}(2)$ への adjoint 作用による相伴束 $\mathfrak{g}_p = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ (相伴束) をもち、 $\mathfrak{g}_p$ の第 1 Pontrjagin 類は E の第 2 Chern 類によって次のように表される。

$$p_1(\mathfrak{g}_p) = -4c_2(E) \quad ([5] \text{ の } p.154 \text{ 問題 } 5.1 \text{ 参照})$$

よって、 $k := -c_2(E) > 0$ ($c_2(E)$: 正確には $c_2(E)$ を X^4 上で積分したもの) となるような E に対しては

$$2p_1(\mathfrak{g}_p) = 8k$$

$\chi(S^4) = 2$, $\sigma(S^4) = 0$ により

$$\mathcal{M}^+ = \dim H^1 = 8k - 3$$

と計算できる。

最後に $\mathcal{M}^+ = \mathcal{A}^+/\mathcal{G}$ に多様体の構造が入ることの概要を述べる。まず $\omega \in \mathcal{A}^+$ を固定する。そして次のような $\Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ の部分集合 A を定義しておこう。

$$A := \{ \tau \in \Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p) ; p_-(D^\omega \tau + \frac{1}{2}[\tau \wedge \tau]) = 0, d_0^* \tau = 0 \} \subset \Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$$

(ここで $[\cdot \wedge \cdot]$ は $\mathfrak{g}_p$ における括弧積計算と 1-form の外積計算を同時に行うことを意味する。)

実は A の 0 における近傍と第 1 コホモロジー $H^1(\mathfrak{g}_p)$ の 0 における近傍とが微分同相であることが知られているのだが、その概要を知るために少し準備をしよう。 ω に関する A-H-S complex

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{g}_p) \xrightarrow{d_0} \Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p) \xrightarrow{d_1} \Gamma(\Lambda^2_- \otimes \mathfrak{g}_p) \longrightarrow 0$$

には 3 つのラプラス作用素 $\Delta_0 = d_0^* d_0$, $\Delta_1 = d_1^* d_1 + d_0 d_0^*$, $\Delta_2 = d_1 d_1^*$ が定義され、それぞれに関して調和射影 H_i ($i = 0, 1, 2$)、グリーン作用素 G_i ($i = 0, 1, 2$) が定義されるが、それらの間には基本的な関係

$$\text{Id} = H_i + G_i \Delta_i \quad (i = 0, 1, 2) \quad (27)$$

があるのであった。それからラプラス作用素と可換な作用素はグリーン作用素 G とも可換なのであった。(ここら辺については de Rham 複体の場合についての [5] の p.125 ~ 127 を参照)

また、 $h^0 = h^2 = 0$ より調和射影に関しては $H_0 = H_2 = 0$ であることに注意しておく。(これは楕円複体の一般論により $H^0(\mathfrak{g}_p) \cong \text{Ker} \Delta_0$, $H^2(\mathfrak{g}_p) \cong \text{Ker} \Delta_2$ であったためである。)

さてここで $\Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ から $\Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ への写像 κ を、

$$\kappa(\tau) := \tau + G_1 d_1^* \{\tau, \tau\} \quad (\text{ここに } \{\tau, \tau\} := \frac{1}{2} p_- [\tau \wedge \tau].)$$

により定義すると κ は次の性質をもつ。(κ は倉西写像と呼ばれる)

Lemma 3.3

$$\kappa(\tau) \in \text{Ker} \Delta_1 \iff \tau \in A$$

Proof

$$\begin{aligned} d_1 \kappa(\tau) &= d_1 \tau + d_1 G_1 d_1^* \{\tau, \tau\} \\ &= d_1 \tau + G_2 d_1 d_1^* \{\tau, \tau\} \quad (d_1 G_1 = G_2 d_1 \text{ より}) \\ &= d_1 \tau + G_2 \Delta_2 \{\tau, \tau\} \\ &= d_1 \tau + \{\tau, \tau\} - H_2 \{\tau, \tau\} \quad ((27) \text{ より}) \\ &= d_1 \tau + \{\tau, \tau\} \quad (H_2 = 0 \text{ より}) \\ d_0^* \kappa(\tau) &= d_0^* \tau + d_0^* G_1 d_1^* \{\tau, \tau\} \\ &= d_0^* \tau + d_0^* G_1 d_1^* (H_2 \{\tau, \tau\} + G_2 \Delta_2 \{\tau, \tau\}) \quad ((27) \text{ より}) \\ &= d_0^* \tau + d_0^* G_1 d_1^* G_2 \Delta_2 \{\tau, \tau\} \quad (H_2 = 0 \text{ より}) \\ &= d_0^* \tau + d_0^* d_1^* G_2 G_2 \Delta_2 \{\tau, \tau\} \quad (G_1 d_1^* = d_1^* G_2 \text{ より}) \\ &= d_0^* \tau \quad (d_0^* d_1^* = 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

上記 2 式により題意は示された。 ■

さて、 κ は $\Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ を Sobolev ノルムで完備化した $H^K(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ から $H^K(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ への可微分写像に延び、 $\tau = 0$ におけるその微分写像は identity であることが知られている。従って κ は $\tau = 0$ の近傍で微分同相であり、上記補題と $\text{Ker} \Delta_1 \cong H^1(\mathfrak{g}_p)$ により A の 0 における近傍と $H^1(\mathfrak{g}_p)$ の 0 における近傍とが微分同相になるというわけである。 A についての大まかな理解ができたところで、 $\mathcal{M}^+$ に多様体の構造を入れる話に戻ろう。

$\forall \omega^v \in \mathcal{A}^+$ に対して $\tau := \omega^v - \omega \in \Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ を対応させることにより $\mathcal{A}^+$ を $\Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ に埋め込んで考え、 $\Gamma(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ を Sobolev ノルムで完備化した $H^K(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_p)$ の位相を $\mathcal{A}^+$ に入れる。よって $\mathcal{M}^+ = \mathcal{A}^+/\mathcal{G}$ には $\mathcal{A}^+$ の位相を $\mathcal{G} = \Gamma(P \times_{Ad} G)$ の通常の位相で割った商位相を入れることができるので、 $\mathcal{M}^+$ を位相空間として捉えることができるわけである。次に $\forall \tau \in A$ に対し、 $\omega^v := \omega + \tau \in \mathcal{A}$ を対応させると、 ω の曲率 Ω 、 ω^v の曲率 Ω^v としたとき $\Omega^v - \Omega = D^\omega \tau + \frac{1}{2}[\tau \wedge \tau]$ なる関係がある。もっといえば $p_-(\Omega^v) - p_-(\Omega) = p_-(D^\omega \tau + \frac{1}{2}[\tau \wedge \tau])$ であるから、 $\omega \in \mathcal{A}^+$ 、 $\tau \in A$ により $p_-(\Omega^v) = 0$ 、即ち $\omega^v \in \mathcal{A}^+$ である。実はこの対応

$$A \ni \tau \longrightarrow [\omega^v] \in \mathcal{M}^+$$

が $\tau = 0$ の近傍で同相となることが知られており、 A は先に見たように $\tau = 0$ の近傍で $H^1(\mathfrak{g}_p)$ における 0 の近傍と微分同相であったから、結局 $\forall [\omega] \in \mathcal{M}^+$ についてその近傍と $H^1(\mathfrak{g}_p)$ なるベクトル空間の開部分集合とが同相となるわけで、 $\mathcal{M}^+$ に多様体の構造が入ったことになる。以上をもって $\mathcal{A}^+ \neq \phi$ のときに $\mathcal{M}^+$ に多様体の構造が入ることの概要の説明を終えるが、ここで触れなかった $\mathcal{M}^+$ の Hausdorff 性については [5] の p.217 ~ 218 を参照するとよい。

謝辞

以上のように、本論文は私が主に修士課程に入ってから勉強してきた 4 次元リーマン多様体の 2 つの self-duality の概念に関わるいくつかの話題の中でとくに重要だと思われる 2 つの定理についてまとめたものであります。しかし一言でまとめるといってもこの 2 つの定理は私にとっては相当に難解で、とても独力で理解できるものではありませんでした。私がなんとか理解に達することができたのは、郡 敏昭先生、助手の鈴木 達夫さん、本間 泰史さんがゼミの時間、そうでない時間に関わらず沢山の

時間を割いて私に数学を教えて下さったお蔭です。また助手の御二方は私の $\text{p}\text{L}\text{A}\text{T}\text{E}\text{X } 2_{\varepsilon}$ の原稿にミスはないか、或いはより洗練すべきところはないかを時間をかけて検証して下さいました。そのお蔭で本論文の見栄えが格段によくなり、また以後大いに役立つと思われる $\text{p}\text{L}\text{A}\text{T}\text{E}\text{X } 2_{\varepsilon}$ の技術を習得することもできました。最後になりますが、先生、助手の御二方、本当に沢山のことを教えて下さり、私をここまでお導き下さり、有難うございました。

参考文献

- [1] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin and I. M. Singer : *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. R. S. London, A **362**, 1978, 425-461.
- [2] T. Freidrich : *Self-dual Riemannian geometry and instantons*, Teubner, 1981, 56-104
- [3] P. Shanahan : *The Atiyah-Singer index theorem*, Springer, Lect. Note, 1978
- [4] Y. Homma : *Dirac operators, Clifford algebras, and their generalization doctral dissertation at Waseda University*, 2001
- [5] 小林昭七 : 接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房, 1989.
- [6] 茂木勇, 伊藤光弘 : 微分幾何学とゲージ理論, 共立出版, 1986
- [7] 吉田朋好 : ディラック作用素の指数定理, 共立出版, 1998
- [8] 松島与三 : 多様体入門, 裳華房, 1965
- [9] 志賀浩二 : 多様体論, 岩波書店, 1990