ツイスター方程式と幾何構造

長友康行
九州大学大学院数理学研究院

1. Introduction

Atiyah-Hitchin-Singer の論文 [1] において、彼らは Penrose によるツイスター作用素をディラック作用素を用いて紹介している。このツイスター作用素が使用されている場面としてもっとも有名なものは、Penrose twistor 空間の概複素構造の積分可能性を証明するところ, および AHS 複体内の微分作用素として利用されている箇所であろう。とくに前者の場合には、ツイスター作用素は (反) 自己双対スピノール束の切断に作用する。いま、このツイスター方程式をみたす切断の零点集合に着目することにする。しかしながら、たとえばこの切断が零切断と横断的に交わるとすれば、(反) 自己双対スピノール束の (複素) 階数は 2 であるから、零点集合は孤立した点の集合となる。これでは微分幾何学の立場からは、興味深い部分多様体が出現したとは言い難い。

ところが 4 次元のスピン構造とは四元数構造に他ならない。するとツイスター作用素を四元数幾何学の立場から、超ケーラー多様体および四元数ケーラー多様体上で高次元化することは自然であると思われる。[4, 5]。高次元化された場合でも、もっとも標準的なツイスター作用素は複素階数 2 のベクトル束の切断に作用する。したがって、ツイスター方程式をみたす切断 (ツイスター切断) で零切断と横断的に交わるものの零点集合は実余次元が 4 の部分多様体となる。例を挙げよう。四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の同次座標を $[q_0; q_1; \cdots ; q_n]$ とする。このとき、たとえば q_0 をツイスター方程式をみたす切断とみなすことが可能である。もちろん、その零点集合は四元数部分多様体 $\mathbb{H}P^{n-1}$ である。この事実はつぎのように一般化される。(ただし、記号の意味は後述する。)

定理 **1.1**. 超ケーラー多様体、(もしくは四元数ケーラー多様体) 上の接続をもった複素ベクトル束 F が (局所的には)$V \otimes \mathbb{H}$ なるベクトル束とゲージ同値であるとする。ただし、ベクトル束 V は (局所的に定義された) ＡＳＤ束である。このとき、F の切断 s が零切断と横断的に交わり、かつツイスター方程式をみたすならば、その零点集合 $S := s^{-1}(0)$ は超ケーラー、(もしくは四元数ケーラー) 部分多様体となる。

注意. 「横断性」の条件は、もっと弱い条件に置き換えることが可能であり、この弱い仮定の下、構成される具体例が存在する。

つぎに問題としたいのは、ツイスター切断の零点集合の「補集合」である。上の四元数射影空間の例にもどる。(この例では V は自明束である。) 当然「補集合」は位相的には $\mathbb{H}^n$ と同一視される。しかし、Salamon の結果 [5, Theorem 6.2] を用いると、「補集合」はツイスター切断から定義される Hypercomplex 構造をもつことがわかる。つまり、Hypercomplex 多様体として、「補集合」は $\mathbb{H}^n$ と同一視されるわけである。するとつぎの疑問がわいてくる。すなわ

ち、すべての四元数ケーラー多様体はこのような分解 (–Hypercomplex 多様体+四元数ケーラー部分多様体–) を許容するのか？この疑問にたいする解答として、筆者と Salamon によるつぎの定理を紹介する。

定理 **1.2**. (Na.+Salamon) 超ケーラー多様体、もしくは四元数ケーラー多様体 M 上のベクトル束 $\mathbb{H}$ のツイスター切断が M の開集合 U 上で零点を持たないと仮定する。このとき、U 上に実階数が 4 である完全積分可能な接分布が存在する。その積分多様体は、M のスカラー曲率の正、0、負に応じて、それぞれ標準的な計量をもつ４次元球面、実４次元ベクトル空間、４次元双曲型空間に局所等長である。

2. 準備

この節では、超ケーラー多様体、四元数ケーラー多様体における反自己双対性とツイスター作用素を定義する。

定義 **2.1**. 超ケーラー多様体、四元数ケーラー多様体上の複素ベクトル束 V がエルミート計量をもち、V の接続 ∇ が計量を保つ接続であるとする。接続 ∇ の曲率 2 形式 R^{∇} が以下の方程式をみたすとき、∇ をＡＳＤ接続という。

$$R^{\nabla}(IX, IY) = R^{\nabla}(JX, JY) = R^{\nabla}(KX, KY) = R^{\nabla}(X, Y)$$

また、ＡＳＤ接続をもつベクトル束をＡＳＤ（ベクトル）束、もしくはインスタントンとよぶ。

注意. 以上の定義によるＡＳＤ接続は、Tian [6] による一般化されたＡＳＤインスタントンの一例を与えている。

つぎにまず、四元数ケーラー多様体 M にたいして、その定義から orthonormal frame bundle の rededced bundle としてその構造群が $\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$ である主束 $P \to M$ が存在する。このとき、M のある開集合 U 上で、主束 P の持ち上げ $\tilde{P} \to M$ でその構造群が $\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{Sp}(1)$ なる主束が存在する。

超ケーラー多様体 M の場合では、その定義から orthonormal frame bundle の rededced bundle としてその構造群が $\mathrm{Sp}(n)$ である主束 $P \to M$ が存在する。このとき、$\mathrm{Sp}(n)$ を $\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{Sp}(1)$ の部分群と考えることにより、構造群が $\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{Sp}(1)$ である主束 $\tilde{P} \to M$ を考えることができる。

どちらにしろ、構造群が $\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{Sp}(1)$ である主束 $\tilde{P} \to M$ が (局所的に) 存在して、その同伴ベクトル束 $\tilde{P} \times_{\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{Sp}(1)} \mathfrak{sp}(1)$ が四元数構造を定めていると考えられるので、以後両者を区別せずに議論する。

$\mathrm{Sp}(1)$ の標準表現 $\mathbb{C}^2$ と $\mathrm{Sp}(n)$ の標準表現 $\mathbb{C}^{2n}$ を用いることにより、$\tilde{P} \to M$ に同伴するふたつのベクトル束を考えることができる。

$$\mathbb{H} := \tilde{P} \times_{\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{Sp}(1)} \mathbb{C}^2, \quad \mathbb{E} := \tilde{P} \times_{\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{Sp}(1)} \mathbb{C}^{2n}.$$

多様体 M が４次元のときには、それぞれ自己双対スピノール束、反自己双対スピノール束である。またわれわれの定義から、

$$(T^*M)^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{E}$$

なる同型が存在することに注意する。ここで $(T^*M)^{\mathbb{C}}$ は M の余接ベクトル束の複素化である。また、$S^2\mathbb{H} = \tilde{P} \times_{\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{Sp}(1)} \mathfrak{sp}(1)^{\mathbb{C}}$ である。

Clebsch-Gordan の公式 $S^m\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}\cong S^{m-1}\mathbb{H}\oplus S^{m+1}\mathbb{H}$ を用いると、つぎのふたつの射影を考えることができる。

$$p : S^m\mathbb{H}\otimes\wedge^i\mathbb{E}\otimes\mathbb{H}\otimes\mathbb{E}\longrightarrow S^{m-1}\mathbb{H}\otimes\wedge^{i+1}\mathbb{E},$$
$$q : S^m\mathbb{H}\otimes\wedge^i\mathbb{E}\otimes\mathbb{H}\otimes\mathbb{E}\longrightarrow S^{m+1}\mathbb{H}\otimes\wedge^{i+1}\mathbb{E}.$$

この射影 p, q を用いて、つぎの微分作用素を定義する [5]。

定義 **2.2.**

$$D_m := p\circ\nabla : \Gamma(V\otimes S^m\mathbb{H}\otimes\wedge^i\mathbb{E})\longrightarrow\Gamma(V\otimes S^{m-1}\mathbb{H}\otimes\wedge^{i+1}\mathbb{E}),$$
$$\mathcal{D}_m := q\circ\nabla : \Gamma(V\otimes S^m\mathbb{H}\otimes\wedge^i\mathbb{E})\longrightarrow\Gamma(V\otimes S^{m+1}\mathbb{H}\otimes\wedge^{i+1}\mathbb{E})$$

ただし、V はＡＳＤ束であり、接続 ∇ はＡＳＤ接続と Levi-Civita 接続から導入された接続である。D_m を四元数 Dirac 作用素、$\mathcal{D}_m$ をツイスター作用素と呼ぶ。

注意. 名前が示唆するとおり、４次元においては D_m は通常の Dirac 作用素に、$\mathcal{D}_m$ はツイスター作用素に一致する。

3. 零点集合の補集合

この節では、定理 1.2 の証明の概略と序論で述べた疑問にたいする部分的な解答を与えることにする。

そのために、まず定理 1.1 の応用例を与えておくことにする。

例. • $\mathbb{H}P^k\subset\mathbb{H}P^n\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$
- $Gr_2(\mathbb{C}^{k+2})\subset Gr_2(\mathbb{C}^{n+2})\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$
- $Gr_4(\mathbb{R}^{k+4})\subset Gr_4(\mathbb{R}^{n+4})\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$
- $\mathbb{H}P^k\subset Gr_2(\mathbb{C}^{n+2})\ (k=0,1,\cdots,[\frac{n}{2}])$
- $\mathbb{C}P^2\subset G_2/\mathrm{SO}(4)$
- $G_2/\mathrm{SO}(4)\subset Gr_4(\mathbb{R}^7)$
- $Gr_4(\mathbb{R}^7)\subset Gr_4(\mathbb{R}^8)$
- $Gr_4(\mathbb{R}^7)\subset Gr_4(\mathbb{R}^9)$
- $G_2/\mathrm{SO}(4)\subset Gr_4(\mathbb{R}^{10})$
- $Gr_4(\mathbb{R}^8)\subset F_4/\mathrm{Sp}(1)\cdot\mathrm{Sp}(3)$
- $F_4/\mathrm{Sp}(1)\cdot\mathrm{Sp}(3)\subset E_6/\mathrm{Sp}(1)\cdot\mathrm{SU}(6)$
- $E_6/\mathrm{Sp}(1)\cdot\mathrm{SU}(6)\subset E_7/\mathrm{Sp}(1)\cdot\mathrm{Spin}(12)$?

これらの例で使用されるベクトル束 F(定理 1.1 参照) は、等質ベクトル束であり、その接続は標準接続といわれるものである。最後の例で?がついているのはまだ証明できていないためであるが、ほぼ間違いないであろう。

なお、下記の関係も知られているが、ツイスター切断の零点集合として求まるものかどうかはわかっていない。少なくとも、F として既約等質ベクトル束をとったのではうまくいかない。
- $E_7/\mathrm{Sp}(1)\cdot\mathrm{Spin}(12)\subset E_8/\mathrm{Sp}(1)\cdot E_7$

定理 1.2 の仮定の下、$s\in\Gamma(\mathbb{H})$ をツイスター切断であるとする。(この s を純ツイスター切断という。) まず、

$$h_1 := \frac{s}{|s|},\quad h_2 := j_{\mathbb{H}}h_1$$

と定義する。ここで $j_{\mathbb{H}}$ は $\mathbb{H}$ の四元数構造である。すると、われわれは 3 つの $S^2\mathbb{H}$ の切断を得る。

$$I := \sqrt{-1}h_1 \cdot h_2, \quad J := h_1^2 + h_2^2, \quad K := -\sqrt{-1}(h_1^2 - h_2^2)$$

命名から察せられるように、I, J, K は四元数関係式をみたす。このとき、つぎの Salamon の定理が成立する。

定理 **3.1**. [5, Theorem 6.2] I, J, K は積分可能である。したがって、われわれの記号では、U は $Hypercomplex$ 多様体である。

さて、

$$\nabla s \in \Gamma(T^*M \otimes \mathbb{H}) \cong \Gamma(\mathbb{H} \otimes \mathbb{E} \otimes \mathbb{H}) \cong \Gamma\left(\mathbb{E} \oplus (\mathbb{S}^2\mathbb{H} \otimes \mathbb{E})\right)$$

であるから、四元数 Dirac 作用素およびツイスター作用素の定義から

$$\nabla s = Ds + \mathcal{D}s$$

である。仮定から、$\nabla s = Ds \in \Gamma(\mathbb{E})$ とみなすことができる。するとリーマン計量を経て、4 つのベクトル場を得る。

$$\begin{aligned}
X_0 &= d\left(|s|^2\right) = s \otimes j_{\mathbb{E}}Ds - j_{\mathbb{H}}s \otimes Ds, \\
X_1 &= \sqrt{-1}\left(s \otimes j_{\mathbb{E}}Ds + j_{\mathbb{H}}s \otimes Ds\right) \\
X_2 &= s \otimes Ds + j_{\mathbb{H}}s \otimes j_{\mathbb{E}}Ds \\
X_3 &= -\sqrt{-1}\left(s \otimes Ds - j_{\mathbb{H}}s \otimes j_{\mathbb{E}}Ds\right)
\end{aligned}$$

ここで、$j_{\mathbb{E}}$ は $\mathbb{E}$ の四元数構造である。この 4 つのベクトル場はつぎの関係式をみたす。

$$X_1 = IX_0, \quad X_2 = JX_0, \quad X_3 = KX_0.$$

$\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ から生成される接分布が定理 1.2 の完全積分可能な接分布である。

最後に定理 1.2 の系を述べることにする。

系 **3.2**. 複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ は局所的にさえ、非自明な純ツイスター切断を許容しない。

Proof. $\mathbb{C}P^2$ 内の開集合 U で、$\mathbb{H}$ が定義されているとする。s を非自明な純ツイスター切断であるとすると、定理 1.2 から U は S^4 と局所等長となり、矛盾する。 □

系 **3.3**. 四元数射影空間以外のコンパクト四元数対称空間は局所的にさえ、非自明な純ツイスター切断を許容しない。

Proof. やはり U を $\mathbb{H}$ が定義されるような開集合であるとして、s を非自明な純ツイスター切断であるとする。たとえば、上記「例」を参考にすれば U 内の任意の点にたいして、その点を通る四元数部分多様体 $\mathbb{C}P^2$ を見出すことができる。純ツイスター切断 s をこの $\mathbb{C}P^2$ (内の開集合) に制限すると、$\mathbb{C}P^2$ の非自明な純ツイスター切断が得られる。これは系 3.2 に矛盾する。 □

Salamon 氏の結果 (定理 3.1) を考慮すると、四元数射影空間以外のコンパクト四元数対称空間内の開集合においては、純ツイスター切断を経由することによって Hypercomplex 構造を定めることは不可能であることがわかる。

また、つぎのよく知られた定理の別証明が得られる。

系 3.4. 四元数射影空間は四元数射影空間以外の四元数部分多様体を許容しない。

Proof. 四元数部分多様体は全測地的部分多様体であるので、問題の四元数部分多様体はコンパクト四元数対称空間 (の開集合) となる。序論で例をあげておいたように、四元数射影空間は非自明な純ツイスター切断を許容する。この純ツイスター切断を制限すると系 3.3 と矛盾する結果が得られる。 □

References

[1] M.F.Atiyah,N.J.Hitchin and I.M.Singer, Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, **362** (1978), 425–461

[2] N. Bourbaki, "Groupes et algèbres de Lie", Hermann, Paris (1975)

[3] Y.Nagatomo, Instantons, the twistor equation and quaternionic submanifolds a preprint

[4] S.M.Salamon, Quaternionic Kähler Manifolds, Invent.Math. **67** (1982), 143–171

[5] S.M.Salamon, Differential geometry of quaternionic manifolds, Ann. SC. Ec. Norm. Sup. **19** (1986), 31–55

[6] G.Tian, Gauge Theory and calibrated geometry, I, Ann. of Math. **151** (2000), 193–268

[7] J.A.Wolf, Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces, J.Math.Mech. **14** (1965), 1033–1047