ディラック作用素とクリフォード解析*

本間 泰史 (早稲田大学 理工学部) †

1 序論

クリフォード解析学とは, 一言で言えば一変数関数論のディラック作用素を用いた一般化である (特に, 調和解析学の視点から) . 次のように, 関数論の様々な結果が一般化される.

一変数関数論	クリフォード解析
$\Omega \subset \mathbf{C}$	$\Omega \subset \mathbf{R}^n$
コーシーリーマン作用素 $\partial/\partial\bar{z}$ (or $\partial/\partial z$)	ディラック作用素 D
$-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \Delta_2$	$D^2 = \Delta_n$
正則関数 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$	調和スピノール $D\psi = 0$
正則多項式 $\{z^m\}$	調和スピノール多項式 $\{\psi_m^{\lambda(m)}(x)\}$
テーラー展開 $f(z) = \sum a_m z^m$	テーラー展開 $\psi(x) = \sum_m \sum_{\lambda(m)} a_m^{\lambda(m)} \psi_m^{\lambda(m)}(x)$
コーシー積分公式 $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$	コーシー積分公式 $\psi(y) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega} \frac{x-y}{\lvert x-y\rvert^n} d\sigma(x)\psi(x)$
極分解 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = e^{i\theta}(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}(-i\frac{\partial}{\partial \theta}))$	極分解 $D = \frac{x}{r}(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}B)$
正則関数に対する一致の定理	調和スピノールに対する一致の定理
対称性の群 $U(1) = Spin(2)$	対称性の群 $Spin(n)$
多様体へ リーマン面	多様体へ スピン多様体
リーマンロッホの定理	Atiyah-Singer 指数定理

上の表について, 少し説明を加えておく.

1. 調和スピノール多項式とは, 多項式関数で調和スピノールとなるもの. spherical monogenics ともいわれる. 一変数関数論では, m 次調和スピノール多項式の空間は 1 次元で, 基底は z^m である. 一般には, m 次調和スピノール多項式の空間は 1 次元ではのないので, 基底を $\{\psi_m^{\lambda(m)}\}_{\lambda(m)}$ と書いている.

*科学研究費 (奨励研究 A 課題番号 13740120) の援助を受けています

†e-mail: homma@gm.math.waseda.ac.jp

2. コーシー積分公式の導き方について. ラプラス作用素 Δ_n の基本解は $\Psi(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}|x|^{2-n}$ である (ω_n は正規化のための定数). $D^2 = \Delta_n$ により, $D\Psi(x) = \frac{1}{\omega_n}\frac{x}{|x|^n}$ が D の基本解となる. ここで $\frac{x}{|x|^n}$ の x はクリフォード作用 $x = \sum x_i e_i \cdot$. この基本解からコーシー積分公式を得る.
3. 極分解における B は, $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ 上のディラック作用素 ($+$定数).
4. 対称性の群 G とはディラック作用素が G 不変であることを意味する.

以上は, クリフォード解析学のほんの一部であり, より解析的な議論が展開される. 詳しくは [Bo-Wo], [DSS], [GiMu] などを参照.

Remark 1.1. クリフォード解析学では, 通常のディラック作用素だけでなく, $d + d^*$ などのディラック型作用素も考える.

この小論では, 調和スピノール多項式およびその一般化について, いくつかの考察を行う.

調和スピノール多項式とは, $\mathbf{R}^n$ 上のスピノール値多項式 $\psi(x)$ で $D\psi = 0$ となるものである. $\Delta\psi = D(D\psi) = 0$ であるので ψ の各成分は調和多項式である. そこで H^q を $\mathbf{R}^n$ 上 q 次 (球面) 調和多項式, W_n をスピノール空間とすれば, $\psi \in \sum_q H^q \otimes W_n$ となる. q 次調和スピノール多項式といえば, $\psi \in H^q \otimes W_n$ かつ $D\psi = 0$ となるものを指す. この調和スピノール多項式を次のように一般化する. スピノール空間 W_n を $Spin(n)$ の既約表現空間 V_ρ に変え, $H^q \otimes V_\rho$ を考える. このときディラック作用素 D を, 別の不変作用素にする必要がある. 例えば, 微分形式値調和多項式上の外微分 d や余微分 d^* である. 一般には, 高スピンディラック作用素というものを用いる. つまり, 高スピンディラック作用素を用いてクリフォード解析学の一般化を考えるのである. しかし, 現在のところ高スピンディラック作用素クリフォード解析学に対して得られている結果はほんの少しである [Bu], [Hom4]. コーシー積分公式, 極分解公式, 楕円型境界値問題などを今後考える必要があろう (高スピンディラック作用素のいくつかは楕円型になるが, 一般にディラック型作用素でないことに注意).

以下で述べる結果に対して証明の概略のみ述べてある. 詳細は, [Hom0]-[Hom5], [Bu], [T] などを参照.

2 球面調和多項式

S^q を $\mathbf{R}^n$ 上 q 次多項式の空間, Δ を $\mathbf{R}^n$ 上ラプラス作用素

$$\Delta = -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{2.1}$$

とする. $\psi \in S^q$ かつ $\Delta\psi = 0$ となるものを q 次 (球面) 調和多項式といい, その全体を H^q で表す. この調和多項式について, 次の事実が成り立つ.

1. 多項式空間には次の内積が入る.

$$(f(x), h(x)) = (\sum f^\alpha x_\alpha, \sum h^\beta x_\beta) := \sum \alpha! f^\alpha \overline{h^\alpha}. \tag{2.2}$$

とくに, 微分作用素 $\partial/\partial x_i$ の随伴作用素は代数的作用素 x_i.
2. 多項式空間は, $(g \cdot f)(x) := f(g^{-1}x)$ $(g \in SO(n))$ により $SO(n)$ (or $Spin(n)$) の表現空間となる.
3. 多項式の次数を区別するには, 次のオイラー作用素を使う.

$$r\frac{\partial}{\partial r} = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{where } r = (\sum x_i^2)^{1/2} \ . \tag{2.3}$$

この作用素は S^q 上定数 q で作用する.
4. $S^q = \oplus_{0 \le k \le [q/2]} r^{2k} H^{q-2k}$. この分解には $-r^2\Delta$ を用いる. この作用素は $r^{2k}H^{q-2k}$ 上 $k(2q-2k+n-2)$ で作用する (上で入れた内積に関して非負の作用素) . 特に, ゼロ固有空間が q 次調和多項式空間 H^q である. この $-r^2\Delta$ による固有分解は既約分解であり, H^q の highest weight は $h^q = (q, 0, \cdots, 0)$.
5. $S^q = H^q \oplus r^2 S^{q-2}$ であり, $r^2 : S^{q-2} \to S^q$ は単射である. よって

$$\dim H^q = \dim S^q - \dim S^{q-2} = \frac{(n+q-3)!}{q!(n-2)!}(n+2q-2). \tag{2.4}$$

6. 調和多項式の空間と $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ 上の関数空間は同一視できる.

$$L^2(S^{n-1}, \mathbf{C}) \simeq \sum_{q \ge 0} H^q. \tag{2.5}$$

$n-1$ 次元球面 S^{n-1} は対称空間として $SO(n)/SO(n-1)$ または $Spin(n)/Spin(n-1)$ であり, 上の同型は $SO(n)$ の表現空間としての同型.

Remark 2.1. 表現空間を分解するには, 上のように不変作用素 Δ, r, $r\frac{\partial}{\partial r}$, $-r^2\Delta$ などを用いるのが一つの方法である. また, 「微分 $\partial/\partial x_i \rightleftarrows$ 代数的作用 x_i」という操作で, 不変作用素らは関係している:

$$\Delta = -\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \xrightarrow{\partial_i \to x_i} r\frac{\partial}{\partial r} = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \xrightarrow{\partial_i \to x_i} r^2 = \sum x_i^2. \tag{2.6}$$

今後考える不変作用素に対しても同様の操作を行う.

3 調和スピノール多項式

3.1 スピノール複体

Trautman によるスピノール複体について述べる. $Spin(n)$ の表現空間であるスピノール空間を W_n または V_Δ で表す. スピノール値多項式 $\sum_q S^q \otimes W_n$, スピノール

値調和多項式 $\sum_q H^q \otimes W_n$ を解析する道具として次の $Spin(n)$ 不変作用素を使う.

$$D = \sum e_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad x = \sum e_i x_i. \tag{3.1}$$

さて, q 次調和スピノール多項式の空間を $\ker_q D := \{\psi \in H^q \otimes W_n | D\psi = 0\}$ とする. Trautamn のアイデアは, 次のスピノール複体を考えることにある.

$$\cdots \xrightarrow{D} H^{q+1} \otimes W_n \xrightarrow{D} H^q \otimes W_n \xrightarrow{D} \cdots. \tag{3.2}$$

ここで $D^2 = \Delta$ より, この微分複体は well-defined. また $Dx + xD = -n - 2r\frac{\partial}{\partial r}$ から, この複体は完全であることがわかる. よって $\ker_q D$ の次元も計算できる.

命題 3.1 ($H^q \otimes W_n$ の分解)**.** 上のスピノール複体は完全系列であり, 各 $H^q \otimes W_n$ は次のように分解 (既約分解) できる.

$$H^q \otimes W_n = \ker_q D \oplus x(\ker_{q-1} D). \tag{3.3}$$

また $\ker_q D$ の次元は

$$\dim \ker_q D = 2^{[n/2]} = \binom{n+q-2}{q}. \tag{3.4}$$

3.2 球面上のディラック作用素のスペクトル

$n-1$ 次元球面 S^{n-1} は対称空間としては $Spin(n)/Spin(n-1)$ であり, スピン構造 (主 $Spin(n-1)$ 束) は $Spin(n) \to Spin(n)/Spin(n-1)$ となる. 特に, スピノール束は

$$\mathbf{S}(S^{n-1}) := Spin(n) \times_{\Delta_{n-1}} W_{n-1}. \tag{3.5}$$

ここで (Δ_{n-1}, W_{n-1}) は $Spin(n-1)$ のスピノール表現. $Spin(n-1) \subset Spin(n)$ に対する分岐則から, $Spin(n)$ のスピノール表現を $Spin(n-1)$ に制限すれば, 再びスピノール表現になる. 正確には

$$(\Delta^{\pm}_{2m}|_{Spin(2m-1)}, W^{\pm}_{2m}) = (\Delta_{2m-1}, W_{2m-1}), \tag{3.6}$$

$$(\Delta_{2m+1}|_{Spin(2m)}, W_{2m+1}) = (\Delta_{2m}, W_{2m}) = (\Delta^+_{2m} \oplus \Delta^-_{2m}, W^+_{2m} \oplus W^-_{2m}). \tag{3.7}$$

これより, 球面上のスピノール束は自然と自明化できる (ただし $\mathbf{S}^{\pm}(S^{2m})$ は自明なく, $\mathbf{S}(S^{2m}) = \mathbf{S}^+(S^{2m}) \oplus \mathbf{S}^-(S^{2m})$ が自明束である). さらに(2.5) により次を得る.

命題 3.2. $Spin(n)$ の表現空間として次の同型が成立する.

$$L^2(\mathbf{S}(S^{2m})) = \sum_q H^q \otimes W_{2m+1}, \quad L^2(\mathbf{S}(S^{2m-1})) = \sum_q H^q \otimes W^{\pm}_{2m+1}. \tag{3.8}$$

この同一視のもとで球面上のディラック作用素 D_S は

$$D_S = \frac{n-1}{2} + \sum_{1\le k<l\le n} e_k e_l \left(x_k \frac{\partial}{\partial x_l} - x_l \frac{\partial}{\partial x_k} \right). \tag{3.9}$$

系 3.3. $\mathbf{R}^n$ 上のディラック作用素 D に対して, 次のような極分解が成立.

$$D = \frac{x}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - D_S + \frac{2m}{2} \right) \quad on\ \mathbf{R}^{2m+1}\ , \tag{3.10}$$

$$D^+ = \frac{x^+}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - D_S + \frac{2m-1}{2} \right) \quad on\ \mathbf{R}^{2m}\ , \tag{3.11}$$

$$D = \frac{x^-}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - D_S + \frac{2m-1}{2} \right) \quad on\ \mathbf{R}^{2m}\ . \tag{3.12}$$

この極分解の公式から球面上のディラック作用素のスペクトル分解を得ることができる. 例えば $n = 2m+1$ として,

$$\phi \in \ker_q D \Rightarrow D_S\phi = (q+m)\phi,$$
$$\phi \in x\ker_q D \Rightarrow D_S\phi = -(q+m)\phi,$$

となるので, $\sum H^q \otimes W_n$ の分解 $\sum \ker_q D \oplus x(\ker_q D)$ は D_S のスペクトル分解に対応している. 特に, $\sum \ker_q D$ が正の固有値を持つ固有スピノールの空間 $H_+ \subset L^2(\mathbf{S}(S^{n-1}))$ に対応している.

命題 3.4. S^{n-1} 上のディラック作用素の固有値とその重複度は

$$\pm(q + \frac{n-1}{2}), \quad \text{重複度} = 2^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{(n-1)+q-1}{q}. \tag{3.13}$$

逆に D_S の正の固有値をもつ固有スピノールは $\mathbf{R}^n$ 上調和スピノール多項式へ拡張できる. 例えば, $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ において, $D_S = -i\partial/\partial\theta$ の固有分解は $\{(m, e^{im\theta})\}_{m\in\mathbf{Z}}$ であるが, $e^{im\theta}$ ($m \ge 0$) は $z^m = r^m e^{im\theta}$ へ自然に拡張できる.

Remark 3.1. S^n の上半球面 B^n (境界は S^{n-1}) を考える. ただし $n = 2m$ とする. B^n は $\mathbf{R}^n$ の単位円板と見なせるが, 計量は r に依存した関数で共形変形したものになる. このとき, 上と同様に S^{n-1} 上の正の固有値を持つ固有スピノールを B^n 上調和スピノールへ拡張できる. 一方, 負の固有値を持つ固有スピノールは下半球面上の調和スピノールへ拡張できる. この事実から, B^n 上でのディラック作用素に関する APS 型境界値問題の解は $\{0\}$ のみであることがわかり, APS 型境界条件でのディラック作用素の指数はゼロである ([Ko] の結果の高次元化) .

4　調和多項式ドラーム複体

この section では外積代数値調和多項式 (微分形式値調和多項式) を考える. $\mathbf{R}^n$ 上の p 次微分形式値 q 次多項式の空間を $S^q_p := S^q \otimes \Lambda^p$, p 次微分形式値 q 次調和多項式の空間を $H^q_p := H^q \otimes \Lambda^p$ とする. これらを解析する道具は, 次の $SO(n)$ 不変作用素である.

$$\begin{aligned} d = \sum e_{i\wedge}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad d^* = \sum -i(e_i)\frac{\partial}{\partial x_i}, \\ x_\wedge = \sum x_i e_{i\wedge}, \quad i(x) = \sum x_i i(e_i). \end{aligned} \tag{4.1}$$

スピノール複体のように次の多項式ドラーム複体を考える.

$$(S^{q-*}_*, d) \ : \ 0 \xrightarrow{d} S^q_0 \xrightarrow{d} S^{q-1}_1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} S^{q-n}_n \xrightarrow{d} 0 \tag{4.2}$$

$$(S^{q-*}_{n-*}, d^*) \ : \ 0 \xrightarrow{d^*} S^q_n \xrightarrow{d^*} S^{q-1}_{n-1} \xrightarrow{d^*} \cdots \xrightarrow{d^*} S^{q-n}_0 \xrightarrow{d^*} 0 \tag{4.3}$$

$$(S^{q+*}_*, x_\wedge) \ : \ 0 \xrightarrow{x_\wedge} S^q_0 \xrightarrow{x_\wedge} S^{q+1}_1 \xrightarrow{x_\wedge} \cdots \xrightarrow{x_\wedge} S^{q+n}_n \xrightarrow{x_\wedge} 0 \tag{4.4}$$

$$(S^{q+*}_{n-*}, i(x)) \ : \ 0 \xrightarrow{i(x)} S^q_n \xrightarrow{i(x)} S^{q+1}_{n-1} \xrightarrow{i(x)} \cdots \xrightarrow{i(x)} S^{q+n}_0 \xrightarrow{i(x)} 0 \tag{4.5}$$

これらの複体は $di(x) + i(x)d = p + q$ on S^q_p などから, すべて完全系列である. 特に, 多項式に対するポアンカレの補題が成立.

命題 4.1. 上の複体(4.2), (4.3), (4.4), (4.5) は完全系列である. S^q_p 上の $\ker d$, $\ker d^*$ を, それぞれ $\ker^q_p d$, $\ker^p_q d^*$ とすれば

$$\dim \ker^q_p d = \binom{n+q}{p+q}\binom{p+q-1}{p-1} \quad \textit{for } p \neq 0, \tag{4.6}$$

$$\dim \ker^q_p d^* = \binom{n+q}{p}\binom{n+q-p+1}{q} \quad \textit{for } p \neq n, \tag{4.7}$$

$$\dim \ker^q_o d = \dim \ker^q_n d^* = 1, \tag{4.8}$$

$$\dim \ker^q_p d \cap \ker^q_p d^* = \frac{(n+q-1)!}{(n-p-1)!(p-1)!q!}\frac{n+2q}{(p+q)(n+q-p)}. \tag{4.9}$$

さらに, 調和多項式ドラーム複体を考える.

$$(H^{q-*}_*, d) \ : \ 0 \xrightarrow{d} H^q_0 \xrightarrow{d} H^{q-1}_1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} H^{q-n}_n \xrightarrow{d} 0, \tag{4.10}$$

$$(H^{q-*}_{n-*}, d^*) \ : \ 0 \xrightarrow{d^*} H^q_n \xrightarrow{d^*} H^{q-1}_{n-1} \xrightarrow{d^*} \cdots \xrightarrow{d^*} H^{q-n}_0 \xrightarrow{d^*} 0. \tag{4.11}$$

先ほどと同様に $di(x) + i(x)d$ を用いて, 複体の完全性が示せればよいが, $i(x)$ と Δ は可換でない. そこで, 多項式ドラーム複体の完全性と $S^q = H^q \oplus r^2 S^{q-2}$ を用いて H^q_p を分解し, その系として調和多項式ドラーム複体の完全性を示す.

命題 4.2. $I_p^q := \ker_p^q d \cap \ker_p^q d^*$ とすると

$$H_p^q = I_p^q \oplus x_\wedge I_{p-1}^{q-1} \oplus i(x) I_{p+1}^{q-1} \oplus h_p^{q-2}(I_p^{q-2}). \tag{4.12}$$

ここで, h_p^q は $h_p^q(I_p^q) \subset H_p^{q+2}$ を満たす次で定義される作用素.

$$h_p^q := (q+n-p)x_\wedge i(x) - (q+p)i(x)x_\wedge : S_p^q \to S_p^{q+2}. \tag{4.13}$$

系 4.3 (調和多項式ポアンカレの補題). 調和多項式ドラーム複体 (H_*^{q-*}, d), (H_{n-*}^{q-*}, d^*) は完全系列.

5 高スピンディラック作用素と調和多項式

この section では $Spin(n)$ の既約表現空間 V_ρ に値をもつ調和多項式を考える. ここで ρ は $Spin(n)$ の既約表現 (π_ρ, V_ρ) の highest weight を表してる. 例えば, スピノール空間 $W_n = V_\Delta$ の highest weight は $\Delta = (1/2, \cdots, \pm 1/2)$ であり, $V_{\Lambda^p} = \Lambda^p$ なら $\Lambda^p = (1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ (1 は p 個) . さて, $\mathbf{R}^n$ 上 V_ρ 値多項式空間 $\sum S^q \otimes V_\rho$, V_ρ 値調和多項式空間 $\sum H^q \otimes V_\rho$ を解析するには高スピンディラック作用素を用いる. 高スピンとは, スピノール表現以外の既約表現も考えることを意味する (Stein-Weiss 作用素, generalized gradient とも呼ばれる) .

5.1 高スピンディラック作用素

高スピンディラック作用素をリーマン (スピン) 多様体 M 上で定義しよう. (π_ρ, V_ρ) を $Spin(n)$ の既約ユニタリ表現. $\mathbf{S}_\rho$ を M 上の対応する同伴束とする. またレビチビタ接続から決まる共変微分を ∇ とする. このとき,

$$D_{\lambda_k}^\rho : \Gamma(\mathbf{S}_\rho) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\mathbf{S}_\rho \otimes T^*(M)) \xrightarrow{\Pi_{\lambda_k}^\rho} \Gamma(\mathbf{S}_{\lambda_k}) \tag{5.1}$$

により, 一階微分作用素 $D_{\lambda_k}^\rho : \Gamma(\mathbf{S}_\rho) \to \Gamma(\mathbf{S}_{\lambda_k})$ を得る. ここで $\Pi_{\lambda_k}^\rho$ は $\mathbf{S}_\rho \otimes T^*(M) = \sum_{k=0}^N \mathbf{S}_{\lambda_k}$ から, 既約同伴束 $\mathbf{S}_{\lambda_k}$ への直交射影を表す.

Remark 5.1. $\mathbf{S}_\rho$ 上の高スピンディラック作用素の数を $N+1$ としているが, N はもちろん highest weight ρ に依存.

Remark 5.2. $\{\lambda_k\}$ に重複度はない. そこで, これら highest weight を辞書式順序により $\lambda_0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_N$ と並べておく.

Remark 5.3. 高スピンディラック作用素は共形共変一階微分作用素である. リーマン計量 g を $g' = e^{2\sigma(x)} g$ と共形変形したとき, g から定まる $D_{\lambda_k}^\rho$ と g' から定まる $D'^\rho_{\lambda_k}$ は

$$D'^\rho_{\lambda_k} = e^{-(m(\lambda_k)+1)\sigma} D_{\lambda_k}^\rho e^{m(\lambda_k)\sigma} \tag{5.2}$$

という関係にある. ここで $m(\lambda_k)$ は ρ および λ_k から表現論的に決まる共形重みという定数である.

クリフォード積の一般化である, クリフォード準同型を定義しよう. 既約表現空間 V_ρ と $\mathbf{R}^n$ のテンソル積の既約分解を $V_\rho \otimes \mathbf{R}^n = \sum_{k=0}^N V_{\lambda_k}$ とする. $\psi \in V_\rho$, $u \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$p^\rho_{\lambda_k}(u) : V_\rho \ni \psi \to \Pi^\rho_{\lambda_k}(\psi \otimes u) \in V_{\lambda_k} \tag{5.3}$$

を V_ρ から V_{λ_k} へのクリフォード準同型という. またその随伴を $(p^\rho_{\lambda_k}(u))^* : V_{\lambda_k} \to V_\rho$ とする. このクリフォード準同型に対して, 次の関係式が成立.

$$\sum_k (p^\rho_{\lambda_k}(e_i))^* p^\rho_{\lambda_k}(e_j) = \delta_{ij}, \tag{5.4}$$

$$\sum_k m(\lambda_k)(p^\rho_{\lambda_k}(e_i))^* p^\rho_{\lambda_k}(e_j) = -\frac{1}{4}\pi_\rho(e_{i\wedge}e_j). \tag{5.5}$$

ここで $e_{i\wedge}e_j \in \Lambda^2$ は $\mathfrak{so}(n) \simeq \Lambda^2$ の元と見なしている.

このクリフォード準同型は, 定義からわかるように高スピンディラック作用素の表象である. つまり, $\{e_i\}$ を M 上の局所正規直交フレームとすれば, 次が成立.

$$D^\rho_{\lambda_k} = \sum p^\rho_{\lambda_k}(e_i)\nabla_{e_i}. \tag{5.6}$$

また, クリフォード準同型の関係式から, 高スピンディラック作用素に対するボホナーワイゼンベック公式の一般化を得る.

$$\Delta_\rho := \sum_{1\le k\le N}\left(1 - \frac{m(\lambda_k)}{m(\lambda_0)}\right)(D^\rho_{\lambda_k})^* D^\rho_{\lambda_k} = \nabla^*\nabla + \text{曲率} \quad \text{on } \Gamma(\mathbf{S}_\rho). \tag{5.7}$$

5.2 V_ρ 値調和多項式

高スピンディラック作用素を用いて $\sum S^q \otimes V_\rho$, $\sum H^q \otimes V_\rho$ を解析しよう. $\mathbf{R}^n$ 上の高スピンディラック作用素と対応した代数的作用素は

$$\begin{aligned}
x^\rho_{\lambda_k} &:= \sum x_i p^\rho_{\lambda_k}(e_i) : S^q \otimes V_\rho \to S^{q+1} \otimes V_{\lambda_k},\\
(x^\rho_{\lambda_k})^* &:= \sum x_i (p^\rho_{\lambda_k}(e_i))^* : S^q \otimes V_{\lambda_k} \to S^{q+1} \otimes V_\rho,\\
D^\rho_{\lambda_k} &:= \sum p^\rho_{\lambda_k}(e_i)\frac{\partial}{\partial x_i} : S^q \otimes V_\rho \to S^{q-1} \otimes V_{\lambda_k},\\
(D^\rho_{\lambda_k})^* &:= -\sum (p^\rho_{\lambda_k}(e_i))^*\frac{\partial}{\partial x_i} : S^q \otimes V_{\lambda_k} \to S^{q-1} \otimes V_\rho.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

となる (これらは $Spin(n)$ 不変な作用素である) .

命題 5.1. ボホナーワイゼンベック公式の(5.7) において, $(D^{\rho}_{\lambda_k})^*$ を $(x^{\rho}_{\lambda_k})^*$ に置き換えることにより, 次の作用素 E を考える,

$$E := \sum_{1\leq k\leq N}(1-\frac{m(\lambda_k)}{m(\lambda_0)})(x^{\rho}_{\lambda_k})^* D^{\rho}_{\lambda_k}. \tag{5.9}$$

このとき次が成立.

1. E は Δ と可換で次数を変えない. よって $H^q\otimes V_\rho$ 上不変作用素.
2. $H^q\otimes V_\rho=\sum_i V_{\mu_i}$ を既約分解として, 既約成分の *highest weight* を $\mu_0>\mu_1\geq\cdots$ と辞書式順序で並べる. このとき E の固有値は $0=e(\mu_0)<e(\mu_1)\leq\cdots$ となり,

$$E=q+\frac{m(\mu_i,q)}{-m(\lambda_0)}\qquad on\ V_{\mu_i}. \tag{5.10}$$

   ここで $m(\mu_i,q)$ は ρ, μ_i, q に依存して表現論的に決まる定数 ($q=1$ のときは共形重み) .
3. E は非負の作用素. ゼロ固有空間 $\ker E$ は必ず存在し,

$$\ker E=V_{h^q+\rho}=V_{\mu_0}=\bigcap_{1\leq k\leq N}\ker D^{\rho}_{\lambda_k}. \tag{5.11}$$

Example 5.1. スピノール調和多項式 $H^q\otimes V_\Delta$ は二つの既約成分に分解された.

$$E=-xD=\begin{cases}0 & \text{on } V_{\mu_0}\\ n+2q-2 & \text{on } V_{\mu_1}.\end{cases} \tag{5.12}$$

特に $\ker D=V_{\mu_0}$ であり, クリフォード解析における調和スピノール多項式.

Example 5.2. 外積代数値調和多項式 $H^q\otimes\Lambda^p$ は四つの既約成分に分解された.

$$E=i(x)d-x_\wedge d^*=\begin{cases}0 & \text{on } V_{\mu_0}\\ q+p & \text{on } V_{\mu_1}\\ n+q-p & \text{on } V_{\mu_2}\\ n+2q-2 & \text{on } V_{\mu_3}.\end{cases} \tag{5.13}$$

特に $\ker^q_p d\cap\ker^q_p d^*=V_{\mu_0}$ である.

Remark 5.4. $H^q\otimes V_\rho$ 上 $\ker D^{\rho}_{\lambda_k}$ やそれらの共通部分が, どのような表現空間になるかを調べることは今後の課題の一つである.

参考文献

[Bo-Wo] B. Booss-Bavnbek and K-P. Wojciechowski, *Elliptic boundary problems for Dirac operators,* Birkhäuser Verlag, Basel-boston, 1993.

[Br] T. Branson *Stein-Weiss Operators and Ellipticity,* J. Funct. Anal. **151**, (1997), 334-383.

[Bu] J. Bureš, *The higher spin Dirac operators,* Differential geometry and applications (Brno. 1998), 319-334, Masaryk Univ., Brno, 1999.

[DSS] R. Delanghe, F. Sommen, and V. Souček, *Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions,* Kluwer Ac. Publishers, 1992.

[Feg] H. D. Fegan, *Conformally invariant first order differential operators,* Quat. J. Math. Oxford, **27** (1976), 371-378.

[GiMu] J. E. Gilbert and M. A.M. Murray, *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis,* Cambridge Studies in Adv. Math. **26**, Cambridge Uni. Press, Cambridge, 1991.

[Hom0] Y. Homma, *A representation of $Spin(4)$ on the eigenspinors of the Dirac operator on S^3,* Tokyo J. Math. **23** No. 2 (2000), 453-472.

[Hom1] Y. Homma, *Spinor-valued and Clifford Algebra-valued Harmonic Polynomials,* J. Geom. Phys. **37** No. 3 (2001), 201-215.

[Hom2] Y. Homma, *The Higher Spin Dirac Operator on 3-Dimensional Manifolds,* to appear in Tokyo Journal of Math.

[Hom3] Y. Homma, *Clifford Homomorphisms and Higher Spin Dirac operators,* submitted to a journal. (math. DG/0007052)

[Hom4] Y. Homma, *Spherical harmonic polynomials for higher bundles,* to appear in "Clifford analysis and its applications" kluwer.

[Hom5] Y. Homma, *Dirac operators, Clifford algebras, and their generalization* doctoral dissertation at Waseda University, 2001.

[Ko] T. Kori, *Index of the Dirac operator on S^4 and the infinite dimensional Grassmannian,* Japan. J. Math. **22**-1 (1996), 1-36.

[LM] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, *Spin Geometry,* Princeton Univ. Press, Princeton, 1989.

[T] A. Trautman, *The Dirac operator on hypersurfaces,* Acta Physica Polonica **B26** (1995), no. 7, 1283-1310.

[Z] D. P. Zelobenko *Compact Lie Groups and Their Representations,* Trans. Math. Monographs. vol **40**, A.M.S. 1973.