完備 Riemann 多様体上の coarse 幾何と非可換幾何*

上村　新吾†
慶應義塾大学大学院理工学研究科数理

2001 年 9 月 26 日

1 Introduction

閉多様体上の楕円型擬微分作用素に対する Atiyah-Singer の指数定理 ([1]) の拡張は、これまで様々な方向へ向けて様々な方法論に基づいてなされてきた。特に Roe は解析的指数に対する作用素環論的な考察を経て、Atiyah-Singer の指数定理を完備 Riemann 多様体にまで拡張した ([9])。Roe の指数定理においては特に空間が非コンパクトあるいは奇数次元の場合が重要である。

しかしこのときの一般化された指数はもはや位相的不変量ではなく、空間の無限遠の状況に左右されるものとなってしまった。Roe はこのことを説明するために coarse 構造と呼ばれる計量空間上のある意味での長域的構造を導入した。

今回は講演者自身の結果や問題意識をいくつか織り交ぜながら、Roe の coarse 指数定理の入門的な解説を行う。

Coarse 指数定理の定式化は Connes の非可換幾何 ([4]) と Roe の coarse 幾何 ([9, 10]) というふたつの大きな枠組みの交わりにおいてなされる。大雑把に言うとまず前者の枠組みにおいては、空間 M に付随するある複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}(M)$ 上に M の幾何構造を反映させた作用素環 $\mathcal{A}(M) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}(M))$ を構成し (ここに $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体のなす C^* 環)、$\mathcal{A}(M)$ の解析的あるいは代数的構造と M の幾何的構造の対応を見ることになる。($\mathcal{H}(M)$ を経由しない場合もある。)。また後者においては計量空間の coarse 構造と呼ばれるある種の長域的な構造 (long-range, large-scale or delocalized structure)、あるいは無限遠の構造を見ることになる (したがって coarse 圏においては、有界集合上で起きていることは無視される)。この coarse 圏における不変量としては代数的位相幾何における Alexander-Spanier cohomology([11]) の delocalized 版とでも言われるべき coarse cohomology が、新たな cohomology 理論として登場する。coarse cohomology

*『量子化の幾何学』於早稲田大。この文章は『第４８回幾何学シンポジウム』(茨城大) のアブストラクトを加筆・訂正したものです。

†kamimura@math.keio.ac.jp

から Alexander-Spanier cohomology へは自然な準同型が存在するが、これが coarse 指数定理において幾何的不変量を与えることになる。

そしてこのふたつの幾何を結び付けるものとしては、完備 Riemann 多様体上の Dirac 熱作用素というものが極めて重要である。完備性の仮定から、解析的には完備 Riemann 多様体上の Dirac 作用素が本質的自己随伴作用素であるということが従い、また幾何的には計量連結性すなわち最短線が距離を実現するということが従うのだが、これらの事実はあとで見るように coarse 指数定理の定式化には不可欠なものとなる。

以下、定式化の粗筋を述べる。コンパクト Riemann 多様体上の楕円型擬微分作用素の Fredholm 指数は Atkinson の定理を経由して作用素環論的に捉え直すことが出来るのであるが、このときの作用素の Fredholm 指数はコンパクト作用素全体のなす C^* 環 $\mathcal{K}$ の K_0 群 $K_0(\mathcal{K})$ に値を取るという形で再定義される。実はこの $\mathcal{K}$ に対しては一見指数理論とは全く関係のないふたつの解釈を与えることが出来る ([9])。ひとつは、Dirac 熱作用素をある種の functional calculus map を経由して近似しているような有界線形作用素全体からなる C^* 環として見れるということ。もうひとつは、台が対角集合の近傍に局在化しているような核関数全体のなす $*$ 代数の C^* 閉包として見れるということである。

そしてこの議論は非コンパクトな場合にも適用出来、そのような C^* 環 $C^*(M)$ を Roe 代数と呼ぶ。勿論 M がコンパクトのときは常に $C^*(M) = \mathcal{K}$ となっているのであるが、M が非コンパクトのときはそのそも Dirac 熱作用素がコンパクト作用素ではないので $C^*(M) = \mathcal{K}$ とはならない。このことから Roe 代数は空間のなんらかの無限遠の情報を反映した作用素環であると考えられる。

完備非コンパクト Riemann 多様体上の Dirac 熱作用素は先にも述べたようにもはやコンパクト作用素ではないので、言わんや trace class などでは尚更ない。したがってなんらかの意味で trace の代用物なり一般化が必要になってくるのであるが、ここで Connes の巡回理論を使うことになる。巡回理論においては作用素の trace は de Rham current の非可換版とでも言うべき形で一般化されるのであるが、この一般化 trace たちは我々の文脈においては coarse cohomology により径数付けられることになる。その結果として、coarse cohomology の次元分だけ多くの指数定理が出来上がることになる。したがってそこから意味のある指数定理が取り出せるかどうかは、coarse cocycle の選び方いかんにかかってくる。

2 解析的指数の作用素環論的考察

Atiyah-Singer の指数定理における解析的指数を、作用素環の枠組みにおいて捉え直すことから始める。まずは Atiyah-Singer の指数定理を簡単に復習しておこう。

2.1 Atiyah-Singer の指数定理

Theorem 2.1.1 (Atiyah-Singer) M を閉 Riemann 多様体、E, F を M 上の Hermite ベクトル束、D を $W^r(E) := \overline{C^\infty(E)}^{\|\cdot\|_{W^r}}$ から $W^{r-d}(F) := \overline{C^\infty(F)}^{\|\cdot\|_{W^{r-d}}}$ への d 階の楕円

型擬微分作用素の Sobolev 拡張とし、$a\text{-ind}(D)$ 及び $t\text{-ind}(D)$ を

$$a\text{-ind}(D) := \dim(\ker(D)) - \dim(\mathrm{coker}(D))$$

$$t\text{-ind}(D) := \langle \pi_!(ch^*(\sigma_D)) \cup td(T^*M \otimes \mathbf{C}), [M] \rangle$$

で定義する。このとき、

$$a\text{-ind}(D) = t\text{-ind}(D)$$

が成り立つ。

ここに $\pi_!$ は射影

$$\pi : T^*M \longrightarrow M$$

の Gysin 準同型であり、td は零切断

$$\iota : M \longrightarrow T^*M \otimes \mathbf{C}$$

による Chern 指標欠損を表す Todd 類のことである。 ∎

2.2 Fredholm 作用素 (の指数) と C^* 環 (の K_* 理論)

閉 Riemann 多様体上の楕円型擬微分作用素の Sobolev 拡張は、parametrix の存在により Fredholm 作用素である。まず Fredholm 作用素の定義を述べる。ただし今回は有界なものしか扱わない。

Definition 2.2.1 (Fredholm 作用素) $F \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が

$$\mathrm{ran}(F) : closed$$

及び

$$\dim(\ker(F)),\ \dim(\mathrm{coker}(F)) < \infty$$

を満たすとき、F を Fredholm 作用素であると言う。 ∎

この定義を C^* 環の言葉に翻訳する。その前に C^* 環の定義を述べておく。参考文献としては [2] をあげておく。

Definition 2.2.2 (C^* 環) $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の $*$ 部分環 $\mathcal{A}$ が作用素 norm に関して閉じているとき、$\mathcal{A}$ を C^* 環と言う。 ∎

Remark 2.2.3 (Gel'fand-Naĭmark の定理) 作用素環論においては $\mathcal{H}$ を持ち出さずにより抽象的に C^* 環を定義するのが普通であるが、そのようにして定義された C^* 環も結局は上記で定義したものと等距離 $*$ 同型、すなわち C^* 環として同型になる。 ∎

Example 2.2.4 (C^* 環の例) $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 自身は定義より明らか。また $\mathcal{H}$ 上の compact 作用素全体 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ も重要である。ちなみに $\dim(\mathcal{H}) = \aleph_0$ のときは、$\mathcal{K}(\mathcal{H})$ が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ における唯一の非自明な閉イデアルである。このときの $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は、C^* 環の帰納系

$$M_n(\mathbf{C})\ (=\mathcal{B}(\mathbf{C}^n)) \hookrightarrow \begin{pmatrix} M_n(\mathbf{C}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset M_{n+1}(\mathbf{C})\ (=\mathcal{B}(\mathbf{C}^{n+1}))$$

の帰納極限 C^* 環

$$M_\infty(\mathbf{C}) = \varinjlim M_n(\mathbf{C})$$

としても得られる。この帰納系はあとで C^* 環の K_0 関手を定義するときにも使う。

また可換な例としては、局所コンパクト Hausdorff 空間 M 上の無限遠で消える連続関数全体

$$C_0(M) := \{\ f \in C(M) \mid f(\infty) = 0\ \}$$

が重要である。このときは上限 norm が C^*-norm を与え、作用素としては $L^2(M)$ 上の掛け算作用素として実現される。 ∎

Theorem 2.2.5 (Atkinson) $F \in \mathcal{B}$ (以下 $\mathcal{H}$ は省略する) が Fredholm 作用素であるということは、C^* 環の短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

において

$$\pi(F) \in GL_1(\mathcal{Q})$$

であることと同値である。ここに $\mathcal{Q} := \mathcal{B}/\mathcal{K}$ は Calkin 環と呼ばれる商 C^* 環で、

$$\|\pi(A)\|_{\mathcal{Q}} := \inf\{\ \|A + K\|_{\mathcal{B}}\ ;\ K \in \mathcal{K}\ \}$$

がその C^*-norm を与える。 ∎

次に Fredholm 指数が C^* 環の K_* 群の言葉に翻訳出来ることを見よう。まずは Fredholm 指数の定義から述べよう。

Definition 2.2.6 (Fredholm 指数) Fredholm 作用素 $F \in \mathcal{B}$ に対してその Fredholm 指数を

$$\mathrm{ind}(F) := \dim(\ker(F)) - \dim(\mathrm{coker}(F))$$

で定義する。 ∎

そしてこの Fredholm 指数の重要な性質として次のようなものがある。

Proposition 2.2.7 (Fredholm 指数の homotopy 不変性 I)

$$\mathrm{ind}(F_1) = \mathrm{ind}(F_2) \Longleftrightarrow F_1 \overset{p.c.}{\sim} F_2\ in\ \mathcal{F}$$

ここに $p.c.$ は、$\mathcal{H}$ 上の Fredholm 作用素全体 $\mathcal{F}$ における弧状連結を表す。 ∎

この性質を Atkinson の定理の延長線上で考えることが出来る。すなわち、

Proposition 2.2.8 (Fredholm 指数の homotopy 不変性 II) 位相群の帰納系

$$GL_n(\mathcal{Q}) \hookrightarrow \begin{pmatrix} GL_n(\mathcal{Q}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subset GL_{n+1}(\mathcal{Q})$$

の帰納極限位相群を

$$GL_\infty(\mathcal{Q}) := \varinjlim GL_n(\mathcal{Q})$$

とすると、

$$F_1 \overset{p.c.}{\sim} F_2 \ \ in\ \mathcal{F} \iff \pi(\underrightarrow{F_1}) \overset{p.c.}{\sim} \pi(\underrightarrow{F_2}) \ \ in\ GL_\infty(\mathcal{Q})$$

が成り立つ。 ∎

このことから結局 $\pi_0(GL_\infty(\mathcal{Q}))$ を考えればよいということになり、実はこれが $K_1(\mathcal{Q})$ の定義そのものなのである。したがってここが Fredholm 作用素の本質的な棲家であると言える。

ではどうやってそこから Fredholm 指数

$$\mathrm{ind}(F) = \dim(\ker(F)) - \dim(\mathrm{coker}(F))$$

という数を取り出すのか？それを視覚化するためには、C^* 環の短完全系列から K_* 群の長完全系列に話しを進めなければならない。その前に C^* 環の K_* 関手の定義をしておこう。

Definition 2.2.9 (C^* 環の K_0 関手) 単位的 C^* 環 $\mathcal{A}$ に対して、位相群の帰納系

$$M_n(\mathcal{A})\ (= M_n(\mathbf{C})\otimes\mathcal{A}) \hookrightarrow \begin{pmatrix} M_n(\mathcal{A}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset M_{n+1}(\mathcal{A})\ (= M_{n+1}(\mathbf{C})\otimes\mathcal{A})$$

の帰納極限位相群

$$\varinjlim M_n(\mathcal{A}) = \mathcal{K}\otimes\mathcal{A} \quad (\mathbf{2.2.4})$$

として出てくる tensor 積 C^* 環の中の射影元全体を

$$P(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})$$

とおく。このとき、その連結成分全体のなす可換 monoid

$$\pi_0(P(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})$$

の Grothendieck 群

$$G(\pi_0(P(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}))$$

を、単位的 C^* 環 $\mathcal{A}$ の K_0 群と言う。

$\mathcal{A}$ が非単位的 C^* 環の場合は、その単位化 C^* 環 $\mathcal{A}^{+1}(:= \mathcal{A}\otimes\mathbf{C})$ が自然に誘導する C^* 環の短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}^{+1} \xrightarrow{\pi} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

が分裂することから、π の K_0 関手

$$\pi_* : K_0(\mathcal{A}^{+1}) \longrightarrow K_0(\mathbf{C})$$

の核で $\mathcal{A}$ の K_0 群を定義する。

$$K_0(\mathcal{A}) := \ker(\pi_*)$$

∎

Definition 2.2.10 (C^* 環の K_1 関手) $\mathcal{A}$ が単位的 C^* 環のときは

$$K_1(\mathcal{A}) := \pi_0(GL_\infty(\mathcal{A})) = \pi_0(U_\infty(\mathcal{A})) \quad (\mathbf{2.2.8})、$$

非単位的のときは K_0 のときと同様に

$$K_1(\mathcal{A}) := \ker(\pi_*) \quad (\mathbf{2.2.9})$$

で定義する。 ∎

では K_* 群の長完全系列を見てみよう。C^* 環の短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

は、その K_* 群の長完全系列を誘導する。しかし位相的 K 理論同様に Bott 周期性が言えてしまうので、結局 6 項完全系列に収まる。

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(\mathcal{Q}) \\ {\scriptstyle \partial_{ind}}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{exp}} \\ K_1(\mathcal{Q}) & \xleftarrow[\pi_*]{} & K_1(\mathcal{B}) & \xleftarrow[\iota_*]{} & K_1(\mathcal{K}) \end{array}$$

ここで ∂_{ind} は、Fredholm 作用素 $F \in \mathcal{B}$ に対して $\ker(F)$ 及び $\mathrm{coker}(F)$ への射影をそれぞれ P, Q とすると、

$$\partial_{ind} : K_1(\mathcal{Q}) \ni [\pi(\underrightarrow{F})] \longmapsto [P] - [Q] \in K_0(\mathcal{K})$$

で与えられるのもである。

このことより

$$\mathrm{ind}(F) = \mathrm{Tr}(\partial_{ind}([\pi(\underrightarrow{F})]))$$

であることが判る。それで、この準同型 (実は同型) は index map と呼ばれている。

2.3 Dirac 熱作用素の super trace

では与えられた F に対して $\ker(F)$ 及び $\mathrm{coker}(F)$ への射影は具体的にどのような形をしているのだろうか？

偶数次元閉 Riemann 多様体 M 上の Clifford 束 S 上の Dirac 作用素 D は、次数付け作用素 ϵ により分裂していた。

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad where\ D^{\pm} : C^{\infty}(S^{\pm}) \to C^{\infty}(S^{\mp})$$

このとき、先の射影の具体的表示は Dirac 熱作用素が与えていたことを思い出そう。すなわち

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(D^+) &= \dim(\ker(D^+)) - \dim(\mathrm{coker}(D^+)) \\ &= \dim(\ker(D^+)) - \dim(\ker(D^-)) \end{aligned}$$

において、$\ker(D^+)$ 及び $\ker(D^-)$ への射影をそれぞれ P^+ 及び P^- とすると、

$$\lim_{t \to +\infty} \epsilon e^{-tD^2} = \begin{pmatrix} P^+ & 0 \\ 0 & -P^- \end{pmatrix}$$

となっていたのであった。

元々は $0 < t < \infty$ に対して

$$a\text{-ind}(D^+) = \mathrm{Tr}(\epsilon e^{-tD^2})$$

が成り立つのであったが ([7])、上述の考察から $t = \infty$ でも正しいと言える。

さて、compact Riemann 多様体上の Dirac 熱作用素は有界線形作用素で、特に compact 作用素です。

$$e^{-tD^2} \in \mathcal{K}$$

この有界線形作用素であるという部分に関しては、多様体を完備非 compact Riemann 多様体にしても変わりませんが、後半の性質は残念ながら失われてしまいます。そこでは $\mathcal{K}$ に代わり得るものとして Roe 代数というものを導入するのですが、ここで一旦、解析的指数に対する考察を中断します。Introduction で指摘したように、空間の長域的構造に対する考察が必要だからです。

3 Coarse 幾何

3.1 Coarse 構造

Definition 3.1.1 (close map) (M, d) をある計量空間、S を任意の集合とする。このとき、$m_1, m_2 \in \mathrm{Map}(S, M)$ が close であるとは、

$$\sup_{x \in S} \{d(m_1(x), m_2(x))\} < \infty$$

が成り立つときをいう。これにより、$\mathrm{Map}(S, M)$ に同値関係 $\sim$ が入る。 ∎

Definition 3.1.2 (coarse 構造) 計量空間 (M,d) 上の coarse 構造とは、任意の集合 S に対して $\mathrm{Map}(S,M)/\sim$ を与えることである。 ∎

Remark 3.1.3 直径が有限ならば coarse 構造は自明である。 ∎

計量の定める位相構造は、実は計量の情報を著しく損っている。一方 coarse 構造は計量に関しては次のような意味で位相構造と双対的と言える。つまり、

Remark 3.1.4 (位相構造と coarse 構造) 計量空間 (M,d) に対して、

$$d^n(x,y) := \min\{d(x,y), 1/n\}$$

なる計量が同じ位相構造を定めるのに対して、

$$d_n(x,y) := \max\{d(x,y), n)\} \quad (x \neq y)$$

なる計量は同じ coarse 構造を定める。

位相構造が計量の短域的構造を取り出しているのに対し、coarse 構造の方は計量の長域的構造を取り出していると言える。これが coarse 構造と言われる所以である。 ∎

Definition 3.1.5 (coarse 写像) 2 つの coarse 空間 M,N の間の metric proper な写像 q が coarse 構造を保つとき、q を coarse 写像と言う。すなわち、

$$B \subset N : bounded \Longrightarrow q^{-1}(B) \subset M : bounded$$

かつ

$$m_1 \sim m_2 \text{ in } \mathrm{Map}(S,M)/\sim \Longrightarrow q \circ m_1 \sim q \circ m_2 \text{ in } \mathrm{Map}(S,N)/\sim$$

∎

Example 3.1.6 $\mathbf{R}^2$ の norm 写像は coarse 写像であるが、座標射影は *coarse* 写像にはならない。

Definition 3.1.7 (coarse 同型) 2 つの coarse 空間 M,N の間に、

$$q' \circ q \sim id_M, \quad q \circ q' \sim id_N$$

を満たす coarse 写像

$$q : M \longrightarrow N, \quad q' : N \longrightarrow M$$

が存在するとき、M,N は互いに coarse 同型であると言う。 ∎

3.2 Coarse cohomology

位相構造との比較から、coarse 構造というのは計量構造のうち scale の小さい部分を切り落としたものだ、ということが直観的に了解出来たと思います。coarse 構造上で cohomology 理論を展開する際にもこの直観が重要です。つまり coarse cohomology とは一言で言えば、Alexander-Spanier cohomology の計量に関する双対的な対応物である、ということになります。

Definition 3.2.1 (制御集合) 計量空間 (M,d) の $(n+1)$ 重直積空間 M^{n+1} における部分集合 S が制御集合であるとは、M^{n+1} における各第 i 座標射影たち

$$\pi_i : M^n \ni (x_0,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \longmapsto x_i \in M \quad (0\leq i\leq n)$$

の S への制限たち $\pi_i|_S$ が互いに close であることと定義する。∎

Definition 3.2.2 (Alexander-Spanier cohomology) (M,d) を計量空間とする。M^{q+1} から $\mathbf{R}$ への関数で台が制御集合になっているもの全体のなす $\mathbf{R}$ 上の線形空間 $CA^q(M)$ を cochain 群とし、

$$(\delta_A\varphi)(x_0,\ldots,x_{q+1}) = \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j\varphi(x_0,\ldots,\hat{x_j},\ldots,x_{q+1})$$

を $CA^q(M)$ から $CA^{q+1}(M)$ への coboundary 作用素とする *cochain* 複体の *cohomology* を Alexander-Spanier cohomology と言い、$HA^*(M)$ と書く。これはまさに計量空間の短域的構造しか見ていないような cohomology である。∎

Remark 3.2.3 (位相的 Alexander-Spanier cohomology) 実は Alexander-Spanier cohomology はもっと一般に位相空間 M に対して定義される。そのときは制御集合の代わりに局所零という概念を用意する。ここに関数 $\varphi : M^{q+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ が局所零であるとは、M のある開被覆 $\mathcal{U}$ があって、φ が

$$\mathcal{U}^{q+i} := \bigcup_{U\in\,\mathcal{U}} U^{q+1} \subset M^{q+1}$$

上で消えるときをいう。∎

Remark 3.2.4 $HA^*(M)$ は $\check{H}^*(M)$ や $H^*_{dR}(M)$ と同型である。∎

これに対して対角集合とは横断的な方向において同様なことをやってやれば、長域的な構造を反映した cohomology が得られるのではないか？と考えるのは自然であろう。

Definition 3.2.5 (coarse cohomology) M^{q+1} から $\mathbf{R}$ への関数で、その台を任意の制御集合で切り落としたものが相対 *compact* になっているようなものを $CX^{q+1}(M)$ と書く。$CX^{q+1}(M)$ と Alexander-Spanier coboundary 作用素からなる cochain 複体から得られる cohomology を、coarse cohomology と言い、$HX^*(M)$ と書く。∎

Remark 3.2.6 先の定義において、CA^* や CX^* の cochain に対しては何の regularity も課されていなかった。実は、smooth, continuous, Borel といった regularity のもとで得られる cohomology たちは全て元のものと同型になる。 ∎

Definition 3.2.7 (位相的指標) $HX^q(M)$ の台を任意の制御集合 S で切り落としてやることにより[1]、$HA_c^q(M)$ すなわち $H_{dR,c}^q(M)$ への準同型が得られる。この準同型を位相的指標と言い、χ^t と書く。すなわち χ^t は、

$$\chi^S : CX^q(M) \ni \varphi \longmapsto \varphi|_S \in CA_c^q(M)$$

と

$$\chi^{dR} : CA_c^q(M) \cong \widehat{\bigotimes_{q+1}} C_c^\infty(M) \ni f_0 \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_q \longmapsto f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_q \in \Omega^q(M)$$

の合成である。 ∎

4 Roe 代数

以後、簡単のため話しを Dirac 作用素に限る。

Definition 4.0.8 (**Roe** 代数) M を完備 Riemann 多様体、S を Clifford 加群束とする。このとき $L^2(S)$ 上の有界線形 C^∞ 級積分作用素でその核関数の台が制御集合であるものを制御作用素と言い、その全体を $Cont(M)$ と書く。また $Cont(M)$ の C^* 閉包を Roe 代数と言い、$C^*(M)$ と書く。 ∎

Remark 4.0.9 (コンパクト **Riemann** 多様体上の **Roe** 代数) コンパクト Riemann 多様体 M の Roe 代数 $C^*(M)$ は $\mathcal{K}(L^2(S))$ に他ならない。

Proposition 4.0.10 (有限伝播性 [3]) M, S, D を上記の通りとする。このとき M 上の波動作用素 e^{itD} は有限伝播性を有する。すなわちある定数 $c > 0$ が存在し任意の t に対して、

$$\mathrm{supp}(s_t) \subset N_{c|t|}(\mathrm{supp}(s_0))$$

ここに、初期条件 $s_0 \in C_c^\infty(S)$ に対して $s_t := e^{itD} s_0$ である。つまり、時間発展は一定である。 ∎

[1] この言い方は誤解を招くと思われる。正確な記述は煩雑になるので要点だけを述べる。制御集合 S の代わりに空間の良い被覆 $\mathcal{U}_i$ をひとつ取り、$\mathcal{U}_i$ に対するコンパクト台を持つ実係数コホモロジーを $H_c^*(\mathcal{U}_i; \mathbf{R})$ とする。そして S を動かす代わりに良い被覆の帰納極限

$$\varinjlim H_c^*(\mathcal{U}_i; \mathbf{R})$$

を取る。これがコンパクト台を持つ実係数Čech コホモロジー $\check{H}_c^*(M; \mathbf{R})$ であり、これは多様体の場合は $HA_c^q(M; \mathbf{R})$ や $H_{dR,c}^q(M; \mathbf{R})$ と同型となる。ちなみに射影極限の方は $HX^*(M; \mathbf{R})$ 自身と関係してくる。

Proposition 4.0.11 (functional calculus map[8]) 先の有限伝播性より、$\mathcal{S}(\mathbf{R})$ 上の Fourier 反転公式を使った次の functional calculus map

$$\rho_{odd} : C_c^\infty(\widehat{\mathbf{R}}) \longrightarrow Cont(M)$$

$$f \longmapsto \rho_{odd}(f) := f(D) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi D} d\xi$$

が存在し、更に、

$$\overline{\rho_{odd}} : C_0(\mathbf{R}) \longrightarrow C^*(M)$$

まで拡張する。ここに、

$$C_c^\infty(\widehat{\mathbf{R}}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset C_0(\mathbf{R})$$

であり、前の 2 つは最後のものに上限 norm に関して稠密に入っている。偶数次元の場合は、

$$\overline{\rho_{even}} : C_0(\mathbf{R}) \times_\alpha \mathbf{Z}_2 \cong \mathcal{E} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathcal{O} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow C^*(M)$$

が、$f_e, f_\epsilon \in C_c^\infty(\widehat{\mathbf{R}})$ に対して

$$\begin{aligned} \rho_{even}(f_e U_e + f_\epsilon U_\epsilon) &:= f_e(D)\rho_{even}(U_e) + f_\epsilon(D)\rho_{even}(U_\epsilon) \\ &= f_e(D)e + f_\epsilon(D)\epsilon, \end{aligned}$$

で定義される。ここに、$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり、U_e, U_ϵ はそれぞれ e, ϵ に対応するユニタリー作用素である。 ∎

Definition 4.0.12 (coarse 指数) 先の functional calculus map を K_* 群に持ち上げたものも同じ記号で書き、それを指数準同型と言う。$K_*(C_0(\mathbf{R}) \times \mathbf{Z}_2), K_*(C_0(\mathbf{R}))$ のそれぞれの生成元 P_0, U_0 の像を D の coarse 指数 $c\text{-ind}(D)$ を定義する。すなわち、

$$c\text{-ind}(D) := \begin{cases} \overline{\rho_{even}}(P_g) \in K_0(C^*(M)) \\ \overline{\rho_{odd}}(U_g) \in K_1(C^*(M)). \end{cases}$$

ここに、$C_0(\mathbf{R}) \times_\alpha \mathbf{Z}$ の射影作用素 $\frac{1}{1+x^2} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して

$$P_g := [\frac{1}{1+x^2} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}] \in K_0(C_0(\mathbf{R}) \times_\alpha \mathbf{Z})$$

が、また $C_0(\mathbf{R})$ のユニタリー作用素 $\frac{x \pm i}{x - i} - 1$ に対して

$$U_g := [\frac{x+i}{x-i} - 1] \in K_1(C_0(\mathbf{R}))$$

がそれぞれ生成元となる。幾何学的には、

$$\frac{1}{1+x^2} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix}$$

は、x を $\mathbf{R}$ 上の線形変換と見なしたときの x の $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ におけるグラフ射影であり、

$$\frac{x+i}{x-i}$$

は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{C}$ への写像度 $+1$ の Cayley 写像に他ならない。 ∎

Definition 4.0.13 (巡回 cohomology) Connes は任意の C^* 代数 $\mathcal{A}$ に対して trace の一般化を試み、巡回 cohomology $HC^*(\mathcal{A})$ を導入した。それは trace を巡回的多重線形汎関数として捉え直すことにより得られる。cohomology の次数付けは線形汎関数の多重性で付けてやる。代数上の多重線形写像の cohomology としては Hochschild cohomology が知られているが、標語的には巡回 cohomology とは「Hochschild cohomology+ 巡回不変性」ということになる。つまり、巡回不変性

$$\tau(A_q,A_0,A_1,\ldots,A_{q-1})=(-1)^q\tau(A_0,A_1,\ldots,A_{q-1},A_q)$$

を満たす $\mathcal{A}$ 上の $(q+1)$ 線形汎関数全体のなす cochain 群を $CC^{q+1}(\mathcal{A})$、coboundary 作用素を

$$(\delta\tau)(A_0,\ldots,A_{q+1})=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\tau(A_0,\ldots,A_iA_{i+1},\ldots,A_{q+1})+(-1)^{q+1}\tau(A_{q+1}A_0,A_1,\ldots,A_q)$$

と定義した複体 $(CC^*(\mathcal{A}),\delta)$ の cohomology 群 $HC^*(\mathcal{A})$ として得られる。ちなみに $HC^0(\mathcal{A})$ の元は

$$\tau(BA)=\tau(AB)$$

を満たしていることに注意しよう。 ∎

Definition 4.0.14 (巡回的指標) $\varphi\in HX^q(M)$ に対して次のような $C^*(M)$ 上の巡回 cochain (trace の一般化) を

$$\tau_\varphi(A_0,\ldots,A_q):=\int_{M^{q+1}}k_{A_0}(x_0,x_1)\cdots k_{A_q}(x_q,x_0)\varphi(x_0,\ldots,x_q)dx_0\cdots dx_q$$

で定める。ここで φ を τ_φ に対応させる写像、

$$\chi^c:HX^q(M)\to HC^q(C^*(M))$$

を巡回的指標と言う。 ∎

Definition 4.0.15 (φ-coarse 指数) これを用いて D の $\varphi\in HX^q(M)$ による coarse 指数 $c\text{-ind}_\varphi(D)$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}c\text{-ind}_\varphi(D) &:= \langle c\text{-ind}(D),\chi^c(\varphi)\rangle\\ &= \begin{cases}\tau_\varphi(c\text{-ind}(D),\ldots,c\text{-ind}(D)) & if\quad q,\dim M:even\\ \tau_\varphi(c\text{-ind}(D)^{-1}-1,c\text{-ind}(D)-1,\ldots,c\text{-ind}(D)^{-1}-1,c\text{-ind}(D)-1) & \\ & if\quad q,\dim M:odd\end{cases}\end{aligned}$$

ここに $\langle,\rangle$ は Connes の pairing と呼ばれるものであるが、このままでは殆ど計算不可能である。 ∎

5 Coarse 指数定理とその応用

Theorem 5.0.16 (Coarse 指数定理 [9])

$$c\text{-ind}_{\varphi}(D) = c_q\langle \chi^t(\varphi) \cup \pi_!(ch^*(\sigma_D)) \cup td(M),\ [M]\rangle$$

ここに、左辺の c_q は $\varphi \in HX^q(M)$ の次数によって決まる定数であり、具体的には

$$c_q = \frac{(q/2)!}{q!(2\pi i)^{q/2}} \quad if \quad q,\ \dim M : even$$

または

$$c_q = \frac{\{(q+1)/2\}!}{q!(2\pi i)^{(q+1)/2}} \quad if \quad q,\ \dim M : odd$$

となっている。 ∎

証明は局所指数定理を使う ([5])。

Theorem 5.0.17 (自明ベクトル束に対する積公式 [6]) N を偶数次元閉 Riemann 多様体、$M := N \times \mathbf{R}^r$ を N 上の自明ベクトル束、D_M, D_N をそれぞれ M 及び N 上の Dirac 作用素とする。このとき次の積公式が成り立つ。

$$c\text{-ind}_{\varphi_N}(D_M) = c\text{-ind}_{\varphi_g}(D_{\mathbf{R}^r}) \cdot a\text{-ind}(D_N),$$

ここに φ_N は N の M における Poincaré 双対 $pd(N)$、右辺の a-ind は通常の Fredholm 指数である。また φ_g は $HX^r(\mathbf{R}^r)$ の生成元であり、$c\text{-ind}_{\varphi_g}(D_{\mathbf{R}^r}) = c_r$ である。 ∎

Theorem 5.0.18 ($HX^n(\mathbf{R}^n)$ の生成元と Riesz 変換 [6])

$$(R_j f)(x) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{2i}{\mathrm{vol}(S^n)} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{|x_j - y_j|}{|x-y|^{n+1}} f(y) dy$$

$$\mathrm{vol}(S^n) = 2\pi^{(n+1)/2}/\Gamma((n+1)/2)$$

を $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上の Riesz 変換 ([**12**])、c_j を $\mathbf{R}^n$ 上の標準的な Clifford 作用とする。このとき Clifford-Riesz 変換 $F := \sum c_j R_j$ に対して、

$$c\text{-ind}_{\varphi_g}(D_{\mathbf{R}^n}) = \langle \tau_{\sigma(F)}, c\text{-ind}(D_{\mathbf{R}^n})\rangle$$

ここに $\tau_{\sigma(F)}$ は Fredholm 加群 $(Cont(\mathbf{R}^n), F, L^2(\mathbf{R}^n))$ 上の標準的な巡回 cocycle である。∎

参考文献

[1] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators I*, Ann. Math., **87**(1968), 484-530

[2] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras. Second edition*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **5**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[3] E. H. Chernoff, *Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations*, J. Functional Anal.**12**(1973), 401-414.

[4] A. Connes, *Noncommutative differential geometry*, IHES **62** (1985), 257-360.

[5] A. Connes and H. Moscovici, *Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups*, Topology **29** (1990), 345-388.

[6] S. Kamimura, *Some remarks on the Roe index theorem*, preprint.

[7] H.P. McKean and I.M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Diff. Geom. **1** (1967), 43-69.

[8] J. Roe, *Partioning noncompact manifolds and the dual Toeplitz problem*, Operator algebras and applications Vol.1, 187-228, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **135** Cambridge Univ. Press, Cambrigde-Newyork, 1989.

[9] J. Roe, *Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds*, Memoires of AMS **497** (1993).

[10] J. Roe, *Index theory, coarse geometry and topology of manifolds.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics **90**, Pubrished for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by AMS Providence, R.I., 1996.

[11] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[12] E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.