クライン群と共形平坦計量

納谷 信 (名大・多元数理)

序

研究会での講演の内容は、筆者と井関裕靖氏 (東北大) が 1992 年頃から行ってきた研究の初期の考察に基づくものであった。このような話をする機会を与えて下さった郡敏昭先生に感謝します。また、この原稿の提出が大変遅れましたことを、この場を借りましてお詫びいたします。

1 クライン群

H^{n+1} で $n+1$ 次元双曲空間を表す。その等長変換群は $\mathrm{Isom}(H^{n+1}) = O^+(n+1,1)$ によって与えられる。H^{n+1} のモデルとして、ポアンカレの球体モデル

$$H^{n+1} = \left(B^{n+1}, \frac{4}{(1-|x|^2)^2} \sum_{i=1}^{n+1} (dx^i)^2 \right)$$

(B^{n+1} は $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の原点を中心とする単位球体) がしばしば用いられる。このとき、H^{n+1} の等長変換は、単位球面 $S^n = \partial B^{n+1}$ まで延びて、その共形変換 (角度を保つ変換) を与える。この対応により、$\mathrm{Isom}(H^{n+1}) = \mathrm{Conf}(S^n)$ と同一視できるので、以下両者を共通の記号 G で表す。

G の離散部分群 Γ のことを クライン群 という。簡単のため、本稿を通じて、我々の扱うクライン群はねじれをもたない (すなわち、有限位数の元を含まない) と仮定する。このとき $Y = H^{n+1}/\Gamma$ は完備な双曲多様体であり、逆にすべての双曲多様体はこのように表される。

Γ の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ は、$x \in H^{n+1}$ の Γ-軌道 $\Gamma \cdot x$ の $\overline{B^{n+1}}$ における集積点全体の集合として定義される。$\Lambda(\Gamma)$ は点 x のとり方によらない S^n の閉部分集合である。S^n における $\Lambda(\Gamma)$ の補集合 $\Omega(\Gamma) = S^n \setminus \Lambda(\Gamma)$ は不連続領域とよばれる。Γ の $\Omega(\Gamma)$ への作用は自由かつ固有であり、$\Omega(\Gamma) \subset S^n$ の共形構造は、商多様体 $X = \Omega(\Gamma)/\Gamma$ におち

て、X は共形平坦多様体となる。

例. (1) Γ を G の格子 (lattice) とする。すなわち、Γ は G の離散部分群で、H^{n+1}/Γ の双曲的体積が有限となるものである。このとき $\Lambda(\Gamma) = S^n$、よって $\Omega(\Gamma) = \emptyset$ となる。我々は $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$ となる場合に興味があるので、この例はこのままでは面白くない。
(2) $k < n$ とし、 $H = \mathrm{Isom}(H^{k+1})$ とおく。Γ を H の格子とすると、全測地的な埋め込み $H^{k+1} \to H^{n+1}$ から定まる埋め込み $H \to G$ により、Γ を G の離散部分群とみなすことができる。このとき、$\Lambda(\Gamma) = S^k$ である[1] 。また、Y は $H^{k+1}/\Gamma \times B^{n-k}$ に微分同相、X は $H^{k+1}/\Gamma \times S^{n-k-1}$ に共形的に微分同相である。
(3) H を (2) のとおりとする。Γ_0 を H のココンパクト格子とし、$\rho : \Gamma_0 \to G$ を忠実な表現で、像 $\rho(\Gamma_0)$ $(=: \Gamma)$ が離散的かつ凸ココンパクト[2] なものとする。このような Γ のことを擬フックス群、 ρ のことを擬フックス表現とよぶ。このとき、$\Lambda(\Gamma)$ は $\Lambda(\Gamma_0)$ と同相であることが示せるので、「ハウスドルフ次元 $\geq$ 位相的次元」という事実と合わせて

$$\dim_H \Lambda(\Gamma) \geq \dim_H \Lambda(\Gamma_0) (= k)$$

という不等式が得られる。Tukia は次のように予想した：

$\Lambda(\Gamma) = S^k$ でなければ、必ず $\dim_H \Lambda(\Gamma) > k$ であろう。

この予想は、井関 [5]、Bourdon [2]、Yue [14] によって、それぞれ異なる手法によって証明された。

2 標準計量

(コンパクト) 多様体上に共形構造 (リーマン計量の共形類) $c = \{\lambda g \mid \lambda \in C^\infty(M), \lambda > 0\}$ が与えられたとき、c から何らかの意味で標準的で、c の特徴をよく反映する計量を取り出すというのは基本的な問題である。そのような計量としては、山辺計量、すなわち c 上の山辺汎関数を最小にする計量や、Kulkarni-Pinkall [7]、Apanasov [1] による計量 (構成は、小林擬距離の構成の類似である) が知られている。山辺計量は (必ずしも共形平坦とは限らない) 任意の共形類に存在することが知られているが、具体的に調べるのは容易でない。一方、Kulkarni-Pinkall、Apanasov の計量はすべての共形平坦

[1] 実際、$\Lambda(\Gamma)$ は $x \in H^{n+1}$ の取り方に依らないから、$x \in H^{k+1}$ にとれば、Γ を H、G のいずれの離散部分群と考えても $\Lambda(\Gamma)$ は変わらないことがわかる。
[2] $\Lambda(\Gamma)$ の凸胞の Γ による商がコンパクト。これは、商多様体 (境界付き) $(H^{n+1} \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$ がコンパクトということと同値である。

な共形類に対して定義されるが、$C^{1,1}$ 級の滑らかさしか持たず、とくに曲率はすべての点で定義されるわけではない。

以下に述べる計量は、クライン群から得られる共形平坦多様体 (前節の X) に対してしか定義されないが、曲率が極限集合のハウスドルフ次元をよく反映し、曲率を通じて極限集合に関する情報がある程度得られるという利点がある。

以下しばらく $n \geq 3$ と仮定する。まず、次の問題を考えてみよう：

> Σ を S^n の閉部分多様体とし、$S^n \setminus \Sigma$ 上で g_0 を共形変形して、スカラー曲率をいたるところ零にせよ。

g_0 に共形的な計量 g を

$$g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0 \quad (u \in C^\infty(S^n \setminus \Sigma),\ u > 0)$$

と書くと、そのスカラー曲率は

$$S = u^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u + S_0 u \right)$$

によって与えられる。ここで、Δ は g_0 に関するラプラシアン、S_0 は g_0 のスカラー曲率 (一定) で、具体的には $S_0 \equiv n(n-1)$ である。楕円型微分作用素

$$L = -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta + S_0$$

は g_0 に関する共形不変ラプラシアン、あるいは山辺作用素とよばれる。

$G(x,y)$ を L のグリーン関数とする。すなわち、$G(x,y)$ は

$$LG(\cdot, y) = \delta_y \quad (\delta_y \text{ は } y \text{ におけるディラック測度})$$

の解である。$g = G(\cdot, y)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ とおくと、g は $S^n \setminus \{y\}$ 上の計量で、そのスカラー曲率は恒等的に零となる。実際、g は $S^n \setminus \{y\} \cong \mathbf{R}^n$ 上のユークリッド計量に他ならない。

さて、$u \in S^n \setminus \Sigma$ を

$$u(x) = \int_{\Lambda(\Gamma)} G(x,y)\, d\sigma(y), \quad x \in S^n \setminus \Sigma$$

によって定め、$g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$ とする。$Lu = 0$ であるから、g のスカラー曲率はやはり恒等的に零となる。一方、g が完備であるための条件は $\dim \Sigma \leq \frac{n-2}{2}$ で与えられる。

以上述べた構成は、Σ が必ずしも部分多様体でない、より一般の閉集合であっても、その上にしかるべき測度 (部分多様体の体積要素に代わるもの) があれば実行できる。

とくに、Σ がクライン群 Γ の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ である場合には、その上にはパターソン・サリヴァン測度 [11, 13] とよばれる標準的な測度 μ がある。これは、$\Lambda(\Gamma)$ 上のボレル測度であって、変換則

$$\gamma^*\mu = {j_\gamma}^\delta \mu, \quad \gamma \in \Gamma \tag{1}$$

をみたすものである。ここで、j_γ は

$$\gamma^* g_0 = {j_\gamma}^2 g_0$$

によって定義される S^n 上の関数であり、具体的には $j_\gamma = e^{-b(\gamma^{-1}\mathbf{0},\,\cdot\,)}$ によって与えられる[3] 。また、$\delta = \delta(\Gamma)$ は Γ の臨界指数 (critical exponent) とよばれる不変量で、

$$\delta(\Gamma) = \inf\left\{ s \;\middle|\; \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-s\,d(x,\gamma y)} < \infty \right\}$$

($x, y \in H^{n+1}$, d は H^{n+1} の距離) によって定義されるものである。$\delta(\Gamma)$ は x, y の取り方に依らず、Γ が性質のよい群 (例えば凸ココンパクト) ならば、$\dim_H \Lambda(\Gamma) = \delta(\Gamma)$ が成り立つ。

さて、パターソン・サリヴァン測度を用いて、$\Omega(\Gamma)$ 上にスカラー曲率が恒等的に零である計量を構成することができが、この計量は Γ の作用で不変ではない。そこで、上の構成を修正して、得られる計量が Γ-不変になるようにすることを考える。そのためにまず、$G(x, y)$ が変換則

$$G(\gamma x, \gamma y) = j_\gamma(x)^{-\frac{n-2}{2}} j_\gamma(y)^{-\frac{n-2}{2}} G(x, y), \quad \gamma \in G$$

をみたすことに注意する。一方、μ は

$$\gamma^*\mu = {j_\gamma}^\delta \mu, \quad \gamma \in \Gamma$$

という変換則をみたすのであった。以上の変換則を用いて、$\Omega(\Gamma)$ 上の計量

$$g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0, \quad u(x) = \left(\int_{\Lambda(\Gamma)} G(x, y)^p \, d\mu(y) \right)^q, \; x \in \Omega(\Gamma)$$

が Γ-不変になるための p, q に関する条件を求めると、簡単な計算によって

$$p = \frac{1}{q} = \frac{2\delta}{n-2}$$

となることが分かる (読者の練習問題)。$G(x, y)$ が具体的に

$$G(x, y) = c\,|x - y|^{2-n} \quad (c \text{ は } n \text{ のみに依存する定数})$$

[3] j_γ はすべての $\gamma \in G$ に対して定義される。

によって与えられることを考慮すると、g の表示は最終的に

$$g_x = \left(\int_{\Lambda(\Gamma)} \varphi(x,y)^{-\delta} \, d\mu(y) \right)^{2/\delta} (g_0)_x, \quad x \in \Omega(\Gamma) \tag{2}$$

と簡略化される。ここで

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2 (= 1 - x \cdot y)$$

とおいた。これまで $n \geq 3$ としてきたが、式 (2) は $n = 2$ の場合にも意味をもつことに注意しておく。g は Γ-不変であるから、$X = \Omega(\Gamma)/\Gamma$ 上の計量 (同じ記号で表す) におちる。g のことを標準計量とよぶ。

計量 g の曲率の計算結果を見易く表示するために、$\Omega(\Gamma)$ 上の $(0,2)$ 型テンソル場 A を次の式で定義する：
$x \in \Omega(\Gamma)$ において

$$\begin{aligned} A_x \quad = \quad & \int_{\Lambda(\Gamma)} ({\varphi_y}^{-2} d\varphi_y \otimes d\varphi_y)(x) \, d\nu_x(y) \\ & - \int_{\Lambda(\Gamma)} ({\varphi_y}^{-1} d\varphi_y)(x) \, d\nu_x(y) \otimes \int_{\Lambda(\Gamma)} ({\varphi_y}^{-1} d\varphi_y)(x) \, d\nu_x(y) \end{aligned}$$

ここで、$\varphi_y = \varphi(\,\cdot\,, y)$ であり、ν_x は

$$\nu_x(E) = \frac{\displaystyle\int_E \varphi(x,y)^{-\delta} \, d\mu(y)}{\displaystyle\int_{\Lambda(\Gamma)} \varphi(x,y)^{-\delta} \, d\mu(y)}, \quad E \subset \Lambda(\Gamma)$$

によって定義される $\Lambda(\Gamma)$ 上のボレル測度である。A は対称かつ半正値であり、さらに次の性質をもつ。

> $x \in \Omega(\Gamma)$ における接空間の k 次元部分空間 Π 上で $A = 0$ ならば、x を含み Π に直交する $n-k$ 次元球面[4] C で、$\Lambda(\Gamma)$ を (真に) 含むものが存在する。とくに、$x \in \Omega(\Gamma)$ において A が完全に退化していれば、$\Lambda(\Gamma)$ は 1 点からなる。

例. $\Lambda(\Gamma) = S^k$ のとき、適当な正規直交基底に関して

$$A = \operatorname{diag}\left(0, \ldots, 0, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right)$$

(0 は $n-k-1$ 個、$1/(k+1)$ は $k+1$ 個) となる。

[4] S^n と $\mathbf{R}^{n+1}$ の $n-k+1$ 次元アフィン部分空間との交わり

計量 g は共形平坦であるから、その曲率はリッチ曲率によって完全に決まる。g のリッチ曲率は次で与えられる：

$$\mathrm{Ric} = -(n-2)(\delta+1)A + (n-2-\delta)\,(\mathrm{tr}_g\, A)\, g$$

ここで、tr_g は g に関するトレースを表す。両辺の g に関するトレースをとることにより、g のスカラー曲率の表示を得る：

$$S = (n-1)(n-2-2\delta)\,\mathrm{tr}_g\, A$$

上で述べたように、$\Lambda(\Gamma)$ が 1 点からなる集合でなければいたるところ $\mathrm{tr}_g\, A > 0$ である。($\Lambda(\Gamma)$ が 1 点ならば g は平坦になる。) よってこの場合に

$$S \ > (=, >)\ 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta(\Gamma) \ < (=, >)\ \frac{n-2}{2}$$

が成り立つ。この結果は Schoen-Yau [12] の Theorem 4.7 を改善したものになっている。一方、リッチ曲率については次のことが成り立つ。

> $\delta(\Gamma) \geq n-2$ ならば Ric は半負値である。さらに $\Lambda(\Gamma)$ が S^n の $n-1$ 次元球面に真に含まれていなければ、Ric は負定値である。

以下、商多様体 $X = \Omega(\Gamma)\,/\Gamma$ はコンパクトであると仮定する。このとき、ド・ラムの定理と調和積分論の主張するところによれば、X の各コホモロジー類は調和形式によって実現される。我々の標準計量に対してワイツェンベックの公式の曲率項を計算することにより、次が得られる。

定理 1 Γ を上のとおりとするとき次が成り立つ。

(i) $\delta + 1 < k < n - \delta - 1 \quad \Rightarrow \quad H^k(X, \mathbf{R}) = \{0\}$

(ii) δ が整数で $\delta \leq \frac{n-2}{2}$ のとき、もし $H^{\delta+1}(X, \mathbf{R}) \neq \{0\}$ ならば $\Lambda(\Gamma)$ は δ 次元球面である[5] 。

3 応用

前節の定理 1 の応用として、井関裕靖氏 [5] によるボウエンの定理の高次元化 (ツキアの予想) について述べておこう。

[5] この場合、X はコンパクト $k+1$ 次元双曲多様体上の平坦な S^{n-k-1}-束となる。

定理 2 ([5]) Γ_0 を $H = \mathrm{Isom}(H^{k+1})$ のココンパクト格子とし、

$$\rho : \Gamma_0 \to G = \mathrm{Isom}(H^{n+1}), \quad n > k$$

を擬フックス表現とする[6] 。このとき、$\Gamma = \rho(\Gamma_0)$ について $\dim_H \Lambda(\Gamma) \geq k$ が成り立つ。等号が成立するための必要十分条件は $\Lambda(\Gamma)$ が k 次元球面になることである。

$k = 1, n = 2$ のとき、定理は Bowen [3] によって示されていた。

定理 2 の証明の概略は次のとおりである。まず、$k \leq \frac{n-2}{2}$ としても一般性を失わない。$\dim_H \Lambda(\Gamma) \leq k$ と仮定する。Γ が凸ココンパクトであるから、これは $\delta(\Gamma) \leq k$ と言い換えられる。このとき定理 1 により、$\Lambda(\Gamma)$ が k 次元球面でない限り $H^{k+1}(X, \mathbf{R}) = \{0\}$ となる。ところが、次の補題によれば $H^{k+1}(X, \mathbf{R}) \neq \{0\}$ でなければならず、結局 $\Lambda(\Gamma)$ は k 次元球面となる。

補題 3 ([5]) $k \leq \frac{n-2}{2}$ とし、Γ_0, Γ を定理 2 のとおりとする。もし $\dim_H \Lambda(\Gamma) \leq k$ ならば、$H^{k+1}(X, \mathbf{R}) \neq \{0\}$ である。

4 結び

最後に、今後の課題[7] と参考文献について少し述べる。

まず、標準計量 g の幾何学的な性質はほとんど分かっていない。たとえば、商多様体 X が非コンパクトな場合に、g はいつ完備になるだろうか？クライン群 Γ が幾何学的有限の場合には、Maubon [8] によって解答が与えられているが、Γ が幾何学的無限の場合には何も分かっていない。g の測地流の性質などもまったく未知である。

(調和) 1 形式に対するワイツェンベックの公式を、(調和) 写像の微分に対して非線型化することにより、1 次元のコホモロジーの消滅の証明は、超剛性の証明へと昇華させられた。高次の微分形式について類似した何かが期待できるであろうか？そもそも高次の微分形式の非線型化とは何であろうか？

参考文献としては、末尾の文献表にあげたもの以外に、日本語で書かれたものとして、平成 8 年度の山形での幾何学シンポジウムの講演予稿と、平成１３年度秋の学会の特別講演予稿がある。前者を英語に直したものが、[6] の納谷の担当部分に大体対応している。また、最近 Habermann によるモノグラフ [4] が出版された。そこには我々の

[6] すなわち、ρ は忠実な表現で、像 $\rho(\Gamma_0)$ が離散的かつ凸ココンパクトなものである。

[7] 時間がない (原稿の〆切の〆切を大幅に過ぎてしまっている) ので、書いている時点で思いついたことに留める

計量についての解説もある。後者では、階数 1 の場合への一般化についても述べられている。一方、そこでの主題である Harbermann-Jost の計量は、正質量予想という深い結果を用いて構成されており、非常に興味深い。是非一読されたい。

5 補遺

講演で説明しなかったパターソン・サリヴァン測度 μ の構成について、簡単に説明しておこう。

$a \in H^{n+1} \cong B^{n+1}$ と $s > \delta$ に対して、$\overline{B^{n+1}}$ 上の測度 $\mu_{a,s}$ を

$$\mu_{a,s} = \frac{1}{\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-s\,d(\mathbf{0},\gamma\mathbf{0})}} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-s\,d(a,\gamma\mathbf{0})}\delta_{\gamma\mathbf{0}}$$

によって定義する。ここで $\delta_{\gamma\mathbf{0}}$ は $\gamma\mathbf{0}$ におけるディラック測度を表す。三角不等式により

$$e^{-s\,d(\mathbf{0},a)} \le \mu_{a,s}(\overline{B^{n+1}}) \le e^{s\,d(\mathbf{0},a)}$$

が成り立つ。とくに $\mu_{a,s}(\overline{B^{n+1}})$ は $\delta < s < \delta + 1$ に対して有界であり、よって 列 $s_j \searrow \delta$ が存在して、測度の列 μ_{a,s_j} は $\overline{B^{n+1}}$ 上のある測度 μ_a に弱収束する。各 μ_a は $\Lambda(\Gamma)$ に台を持ち[8]

$$\mu_a = e^{-\delta\,b(a,\,\cdot\,)}\mu_{\mathbf{0}}, \quad a \in H^{n+1}$$

および

$$\gamma^*\mu_a = \mu_{\gamma^{-1}a}, \quad a \in H^{n+1},\ \gamma \in \Gamma$$

をみたす。よって $\mu = \mu_{\mathbf{0}}$ は (1) をみたす。

参考文献

[1] B. N. Apanasov, *Kobayashi conformal metric on manifolds, Chern-Simons and η-invariants*, International J. Math. **2** (1991), 361–382.

[2] M. Bourdon, *Sur le birapport au bord des CAT(-1)-espaces*, I.H.E.S. Publ. Math. **83** (1996), 95–104.

[8] 一般には $\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\delta\,d(\mathbf{0},\gamma\mathbf{0})} < \infty$ となることが起こり得る。このとき、μ_a は再び $\mathbf{0}$ の Γ-軌道の各点にウェイト付きのディラック測度をおいたものにすぎない。この場合に $\Lambda(\Gamma)$ 上に台を持つ測度を得るためには、$\mu_{a,s}$ の定義を少し修正する必要がある。

[3] R. Bowen, *Hausdorff dimension of quasi-circles*, I.H.E.S. Publ. Math. **50** (1979), 11–25.

[4] L. Habermann, *Riemannian metrics of constant mass and moduli spaces of conformal structures*, LNM 1743, Springer.

[5] H. Izeki, *Limit sets of Kleinian groups and conformally flat Riemannian manifolds*, Invent. Math. **122** (1995), 603–625.

[6] H. Izeki and S. Nayatani, *Canonical metric on the domain of discontinuity of a Kleinian group*, Sémin. Théor. Spectr. Géom. **16** (1997–1998), 9–32.

[7] R. S. Kulkarni and U. Pinkall, *A canonical metric for Möbius structures and its applications*, Math. Z. **216** (1994), 89–129.

[8] J. Maubon, *Geometrically finite Kleinian groups: the completeness of Nayatani's metric*, C. R. Acad. Sci. Paris **325** (1997), 1065–1070.

[9] S. Nayatani, *Kleinian groups and conformally flat metrics*, Geometry and Global Analysis, Report of the First MSJ International Research Institute, Kotake et al. ed., Tohoku University, 1993, 341–349.

[10] S. Nayatani, *Patterson-Sullivan measure and conformally flat metrics*, Math. Z. **225** (1997), 115–131.

[11] S. J. Patterson, *The limit set of a Fuchsian group*, Acta Math. **136** (1976), 241–273.

[12] R. Schoen and S. T. Yau, *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature*, Invent. Math. **92** (1998), 47–71.

[13] D. Sullivan, *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, I.H.E.S. Publ. Math. **50** (1979), 171–202.

[14] C.-B. Yue, *Dimension and rigidity of quasi-Fuchsian representations*, Ann. Math. **143** (1996), 331–355.