Integrable Submodels of Nonlinear σ-models and Their Generalization *

鈴木 達夫 (早稲田大学理工学部) †

1　研究の背景・目的

KdV 方程式、KP 方程式など (1+1) 次元可積分系については豊かな理論が展開されている．そこで次の目標は高次元可積分系の研究であり，様々な試みがなされている．そのひとつとして，1997 年に Alvarez, Ferreira, Guillen [AFG1] によって「可積分サブモデル理論」が提唱された．

可積分 submodel 理論とは，高次元の model に対しある可積分条件を付加することで，無限個の保存カレントや広いクラスの厳密解を持つ高次元可積分 model (可積分な submodel と呼ばれる) を見つけ，それを解析することで元の高次元 model の可積分な側面を研究する理論である (ここでいう可積分な model とは，無限個の保存カレントを持つ model を意味し，以後もこの意味で使うことにする .) submodel 理論の研究は始まったばかりであり，その発展には数多くの可積分な submodel を定義すること，さらに無限個の保存カレントや解を構成し，その性質を研究することが必要と考えられる．

本研究は，任意次元の非線型 σ-model に対する可積分な submodel とその一般化に関するものである．詳細は [Suz2] を参考．

2　AFG による $(1+2)$ 次元 $\mathbf{C}P^1$ submodel の定義

$M = M^{1+2}$ を $(1+2)$ 次元ミンコフスキー空間，$x = (x_0, x_1, x_2) \in M$ に対し，$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2)$ とする．また，μ に関する和はアインシュタ

*藤井一幸氏 (横市大総合理学)，本間泰史氏 (早大理工) との共同研究

†*E-mail address*: suzukita@mn.waseda.ac.jp

インの規約を用いる．よく知られているように，$(1+2)$ 次元 $\mathbf{C}P^1$-model は次の作用積分で定義される;

$$\mathcal{A}(u) \equiv \int_M d^3x \frac{\partial^\mu \bar{u} \partial_\mu u}{(1+|u|^2)^2},$$

ここで　$u : M^{1+2} \to \mathbf{C}$. その運動方程式は

$$(1+|u|^2)\partial^\mu \partial_\mu u - 2\bar{u}\partial^\mu u \partial_\mu u = 0$$

である．次に $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ の生成元を $\{T_+, T_-, T_3\}$ とし，$\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ とその spin j 表現 P の直和に次の交換関係を入れる (Abelian extension);

$$\begin{aligned}
&[T_3, T_+] = T_+, \quad [T_3, T_-] = -T_-, \quad [T_+, T_-] = 2T_3, \\
&[T_3, P_m^{(j)}] = m P_m^{(j)}, \\
&[T_\pm, P_m^{(j)}] = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} P_{m\pm 1}^{(j)}, \\
&[P_m^{(j)}, P_n^{(j)}] = 0,
\end{aligned}$$

ここで，$\{P_m^{(j)} | -j \le m \le j\}$ は P の基底とする．

さらに

$$\begin{aligned}
W &\equiv \frac{1}{\sqrt{1+|u|^2}} \begin{pmatrix} 1 & iu \\ i\bar{u} & 1 \end{pmatrix}, \\
A_\mu &\equiv -\partial_\mu W W^{-1} \\
&= \frac{-1}{1+|u|^2}\{i\partial_\mu u T_+ + i\partial_\mu \bar{u} T_- + (\partial_\mu u \bar{u} - u\partial_\mu \bar{u}) T_3\}, \\
\tilde{B}_\mu^{(j)} &\equiv \frac{1}{1+|u|^2}(\partial_\mu u P_1^{(j)} - \partial_\mu \bar{u} P_{-1}^{(j)}) \qquad (j = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}$$

と定義する .(spin j が整数でないとき，すなわち $j = 1/2, 3/2, \cdots$ は $\mathbf{C}P^1$-model を再現できないので以後考えない .)

AFG による $(1+2)$ 次元の local な可積分条件
$F_{\mu\nu} = (A_\mu \text{ の曲率}) = 0, \quad D_\mu \tilde{B}^\mu = 0$

より，可算無限個の方程式

$$D_\mu \tilde{B}^{\mu(j)} \equiv \partial_\mu \tilde{B}^{\mu(j)} + [A_\mu, \tilde{B}^{\mu(j)}] = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots)$$

を仮定すると，実はこの条件は次の 2 本の方程式と同値であることがわかる;

$$(1+|u|^2)\partial^\mu\partial_\mu u - 2\bar{u}\partial^\mu u\partial_\mu u = 0, \quad \partial^\mu u\partial_\mu u = 0.$$

第 1 式は $(1+2)$ 次元 $\mathbf{C}P^1$-model の運動方程式そのものである．この 2 本の式と同値な方程式系として次が得られる；

$$\partial^\mu\partial_\mu u = 0, \quad \partial^\mu u\partial_\mu u = 0. \tag{1}$$

定義 1. *(1)* を $\mathbf{C}P^1$*-submodel* の方程式と呼ぶ．

このとき，各 j に対し，

$$J_\mu^{(j)} \equiv W^{-1}\tilde{B}_\mu^{(j)}W = \sum_{k=-j}^{j} J_\mu^{(j,k)}P_k^{(j)} \tag{2}$$

を求めることにより，$\mathbf{C}P^1$-submodel の無限個の保存カレントが計算できる．

3 任意次元 Grassmann model の submodel

AFG の方法を使わずに $(1+n)$ 次元 Grassmann submodel を定義し，無限個の解と，無限個の保存カレントを構成する．

$M = M^{1+n}$ を $(1+n)$ 次元ミンコフスキー空間，

$$G_{j,N}(\mathbf{C}) \equiv \{P \in M(N;\mathbf{C}) | P^2 = P, P^\dagger = P, \mathrm{tr}P = j\}$$

を Grassmann 多様体としたとき，$(1+n)$ 次元 Grassmann model は次の作用積分で定義される;

$$\mathcal{A}(P) \equiv \frac{1}{2}\int_M d^{1+n}x \ \mathrm{tr}\partial_\mu P\partial^\mu P, \qquad P : M^{1+n} \to G_{j,N}(\mathbf{C}).$$

その運動方程式は

$$[P, \Box P] = 0, \qquad \Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \cdots - \partial_n^2.$$

$P \in G_{j,N}(\mathbf{C})$ なら $P \otimes P \in G_{j^2,N^2}(\mathbf{C})$ であることに注目し，$(1+n)$ 次元 Grassmann submodel の定義に至る．

定義 2. 次の方程式系を $(1+n)$ 次元 *Grassmann submodel* の方程式と呼ぶ*;*

$$[P, \Box P] = 0, \quad [P \otimes P, \Box(P \otimes P)] = 0. \tag{3}$$

(3) は次と同値である．

$$[P, \Box P] = 0, \quad [P, \partial_\mu P] \otimes \partial^\mu P + \partial^\mu P \otimes [P, \partial_\mu P] = 0 \tag{4}$$

$I \in M(j; \mathbf{C})$ を単位行列，$O' \in M(N-j; \mathbf{C})$ を零行列とする．Grassmann 多様体の $\begin{pmatrix} I & \\ & O' \end{pmatrix}$ のまわりの局所座標表示

$$P = P(Z) = \begin{pmatrix} I & -Z^\dagger \\ Z & I' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \\ & O' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -Z^\dagger \\ Z & I' \end{pmatrix}^{-1}$$

$(Z \in M(N-j, j; \mathbf{C}))$ を用いると，(4) の第一式から元の Grassmann model の方程式

$$\partial^\mu \partial_\mu Z - 2\partial^\mu Z (I + Z^\dagger Z)^{-1} Z^\dagger \partial_\mu Z = 0. \tag{5}$$

が出る．一方 (4) の第二式より

$$\begin{pmatrix} & \partial_\mu Z^\dagger \\ -\partial_\mu Z & \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} & \partial^\mu Z^\dagger \\ \partial^\mu Z & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \partial^\mu Z^\dagger \\ \partial^\mu Z & \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} & \partial_\mu Z^\dagger \\ -\partial_\mu Z & \end{pmatrix}$$

$$= \quad 2 \left(\begin{array}{cc|c} & & \partial_\mu Z^\dagger \otimes \partial^\mu Z^\dagger \\ & & 0 \\ \hline & 0 & \\ -\partial_\mu Z \otimes \partial^\mu Z & & \end{array} \right) = 0,$$

すなわち，

$$\partial_\mu Z \otimes \partial^\mu Z = 0 \quad (\text{とその Hermite 共役}) \tag{6}$$

が出る．これらより，(4) を成分で書くと

$$\partial^\mu \partial_\mu z_{kl} = 0, \quad \partial^\mu z_{kl} \partial_\mu z_{k'l'} = 0$$
$$(1 \le k, k' \le N-j,\ 1 \le l, l' \le j)$$

と表せる．特に $n = 2, j = 1, N = 2$ のときに $(1+2)$ 次元 $\mathbf{C}P^1$-submodel に一致している．

注意 **3.** この計算に現れた「和と差の積は 2 乗の差」の構造は，可積分な *submodel* の理論において重要と思われる．

この$(1+n)$次元 **Grassmann submodel** の持つ無限個の保存カレントを二通りの方法で構成する．まずひとつはネーターカレント $[\partial_\mu P, P]$ とテンソル積を用いる方法である．

定理 **4.** $k = 1, 2, \cdots$ に対し，

$$\begin{aligned} J^k_\mu &\equiv [\partial_\mu(\overset{k}{\otimes} P), \overset{k}{\otimes} P] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{P \otimes \cdots \otimes P}_{i} \otimes [\partial_\mu P, P] \otimes \underbrace{P \otimes \cdots \otimes P}_{k-1-i} \end{aligned} \tag{7}$$

は $(1+n)$ 次元 *Grassmann submodel* の保存カレントである．すなわち $\partial^\mu J^k_\mu = 0$ を満たす.

もうひとつの方法を述べる．Grassmann 多様体 $G_{j,N}(\mathbf{C})$ の局所座標表示を縦ベクトルの形に書き，

$$Z = (z_i)_{1 \le i \le N'} : M^{1+n} \to \mathbf{C}^{N'}$$

(ただし $N' = j(N-j)$) によって Grassmann 多様体上の 1-form を M に引き戻した 1 次微分多項式が Grassmann submodel の保存カレントになるための必要十分条件を求める．

定理 **5.** $C^2(\mathbf{C}^{N'}, \mathbf{C})$ を係数とする斉次の 1 次微分多項式

$$\sum_{j=1}^{N'} \{f_j(Z, \bar{Z})\partial_\mu z_j + g_j(Z, \bar{Z})\partial_\mu \bar{z}_j\} \qquad (\mu = 1, \cdots, n)$$

が *Grassmann submodel* の保存カレントになるための必要十分条件は，f_j, g_j が次の方程式を満たすことである；

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} + \frac{\partial g_k}{\partial z_j} = 0 \qquad 1 \le j, k \le N'.$$

特に $\mathbf{C}P^1$-submodel の場合，上の定理とポアンカレの補題を使い，さらに微分多項式の次数に注目して次の系を得る．

系 **6.** $C^2(\mathbf{C},\mathbf{C})$ を係数とする微分多項式で $\mathbf{C}P^1$-*submodel* の保存カレントとなるものは，次の形のみである．

$$\frac{\partial f}{\partial z}\partial_\mu z - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\partial_\mu \bar{z} \tag{8}$$

ここで，$f = f(z,\bar{z})$ は C^2 級の任意関数．

これより，今まで求めてきた $\mathbf{C}P^1$-submodel の保存カレントは‘ 原始関数 ” f を適当に選んですべてこの形に書ける．例えば，$\mathbf{C}P^1$ に作用する $SU(2)$ の対称性に付随するネーターカレントもこの形である．

ここで submodel と系 6 を少し別な視点で考えてみる．もとの $(1+n)$ 次元 $\mathbf{C}P^1$-model の action$\mathcal{A}(u)$ がある群 G の作用で不変と仮定し，そのネーターカレントを考える．その無限小作用を記述するベクトル場を

$$X = X_u(u,\bar{u})\frac{\partial}{\partial u} + X_{\bar{u}}(u,\bar{u})\frac{\partial}{\partial \bar{u}} \tag{9}$$

とすると，ネーターカレントは次で与えられる．

$$\begin{aligned} J_\mu &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}X_u(u,\bar{u}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{u})}X_{\bar{u}}(u,\bar{u}) \\ &= \frac{\partial_\mu \bar{u}}{(1+|u|^2)^2}X_u(u,\bar{u}) + \frac{\partial_\mu u}{(1+|u|^2)^2}X_{\bar{u}}(u,\bar{u}) \end{aligned}$$

ただし，

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\partial^\mu \bar{u}\partial_\mu u}{(1+|u|^2)^2}.$$

これが保存される条件を求めると，$\mathbf{C}P^1$-model の運動方程式のもとで

$$\partial^\mu J_\mu = 0 \iff$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1+|u|^2)^2}\frac{\partial X_{\bar{u}}}{\partial u}\partial^\mu u\partial_\mu u + \frac{1}{(1+|u|^2)^2}\frac{\partial X_u}{\partial \bar{u}}\partial^\mu \bar{u}\partial_\mu \bar{u} \\ &+ \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{X_u}{(1+|u|^2)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{u}}\left(\frac{X_{\bar{u}}}{(1+|u|^2)^2}\right)\right\}\partial^\mu \bar{u}\partial_\mu u = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

ここで submodel の条件 $\partial^\mu u\partial_\mu u = 0$ を課すと，
(10) は，

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{X_u}{(1+|u|^2)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{u}}\left(\frac{X_{\bar{u}}}{(1+|u|^2)^2}\right) = 0 \tag{11}$$

となるので，系 6 と同様に，ある $f = f(u, \bar{u})$ が存在して

$$\frac{X_u}{(1+|u|^2)^2} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{u}},$$
$$\frac{X_{\bar{u}}}{(1+|u|^2)^2} = \frac{\partial f}{\partial u}$$

と書ける．従って，この場合のネーターカレント J_μ は次の形になる．

$$J_\mu = \frac{\partial f}{\partial u}\partial_\mu u - \frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\partial_\mu \bar{u} \tag{12}$$

注意 7. *(11)* は，ベクトル場 *(9)* に対応する群 G が，$\mathbf{C}P^1 = S^2$ の面積要素

$$\frac{du \wedge d\bar{u}}{(1+|u|^2)^2}$$

を不変にする微分同相写像群であることを意味する．*[FR]*

次に**Grassmann submodel** の持つ対称性について述べる．

定理 8. *Grassmann submodel* は次の対称性を持つ．$z_{\alpha\beta}$ $(1 \leq \alpha \leq N-j, 1 \leq \beta \leq j)$ が *Grassmann submodel* の解のとき, $\mathbf{C}^{j(N-j)}$ 上の正則関数 f_{kl} $(1 \leq k \leq N-j, 1 \leq l \leq j)$ に対し，

$$f_{kl}(z_{\alpha\beta}) = f_{kl}(z_{11}, \cdots, z_{N-j,j}) \tag{13}$$

も *Grassmann submodel* の解である．

この対称性により，何かひとつの簡単な解から無限に多くの解を作り出すことができる．

4 任意次元 Grassmann submodel の可積分な高階化

Grassmann submodel の方程式

$$\partial^\mu \partial_\mu z_{kl} = 0, \quad \partial^\mu z_{kl} \partial_\mu z_{k'l'} = 0$$

は座標の番号を一列に付けなおせば $\mathbf{C}P^N$-submodel の方程式

$$\partial^\mu \partial_\mu u_i = 0 \quad \text{and} \quad \partial^\mu u_i \partial_\mu u_j = 0 \quad \text{for} \quad i, j = 1, \cdots, N.$$

と同じなので，$\mathbf{C}P^N$-submodel について考える．
これは

$$\Box_2 u_i = 0 \quad \text{and} \quad \Box_2(u_i u_j) = 0 \quad \text{for} \quad i,j = 1,\cdots,N.$$

と書きなおすことができる．ここで，

$$\Box_p \equiv \partial_0^p - \partial_1^p - \cdots - \partial_n^p.$$

定義 **9.** $p = 2,3,\cdots$ に対し，次の方程式系を
$\mathbf{C}P^N$*-p-submodel* の方程式と呼ぶ*;*

$$\Box_p(\mathbf{u}^{\mathbf{k}}) = \Box_p(u_1^{k_1}\cdots u_N^{k_n}) = 0 \quad \textit{for} \quad 1 \le |\mathbf{k}| \le p. \tag{14}$$

$\mathbf{C}P^N$-p-submodel は，「一般化された Bell 多項式」を用いて表示することができ、系 6 で求まった保存カレントや定理 8 の一般化として次の定理が成り立つ．

定理 **10.**

$$V_{p,\mu}(f) \equiv \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k : F_{p-1-k,\mu}\bar{F}_{k,\mu} : (f) \tag{15}$$

は $\mathbf{C}P^N$*-p-submodel* の保存カレント，ここで
$f = f(u_1,\cdots,u_N,\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_N)$ は C^p-級の任意関数*,*
$F_{p,\mu}$ は一般化された *Bell* 多項式 $F_p = F_{p0\cdots0}[\mathbf{z}\cdot\mathbf{u}]$ において，z_i に $\frac{\partial}{\partial u_i}$ を代入した微分作用素．

（一般化された Bell 多項式の定義は後ほど）

定理 **11.** $u_1,\cdots,u_N$ を $\mathbf{C}P^N$*-p-submodel* の解とする．このとき任意の正則関数 $f_1,\cdots,f_N$ に対して，$f_1(u_1,\cdots,u_N),\cdots,f_N(u_1,\cdots,u_N)$ も $\mathbf{C}P^N$-*p-submodel* の解である．

以下，これらの定理について説明する．

5　準備：Bell 多項式

滑らかな関数 $g(x)$ と複素数のパラメータ z に対し，$g_r \equiv \partial_x^r g(x)$ と置く．次数 n の Bell 多項式とは，変数 $g_1,\cdots,g_n$ に対して次で定義される多項式のことである：

$$F_n[zg] = F_n(zg_1,\cdots,zg_n) \equiv \mathrm{e}^{-zg(x)}\partial_x^n \mathrm{e}^{zg(x)}. \tag{16}$$

- 母関数表示

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n[zg]}{n!}t^n &= \mathrm{e}^{z\{g(x+t)-g(x)\}}\\ &= \exp\left\{z\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_j}{j!}t^j\right\}.\end{aligned}$$

これより具体的には次のように書ける．

$$\begin{aligned}&F_n(zg_1,\cdots,zg_n)\\ =&\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n\\ k_1\geq 0,\cdots,k_n\geq 0}}\frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{zg_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{zg_2}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{zg_n}{n!}\right)^{k_n}.\end{aligned}$$

例えば

$$F_1=zg_1,\qquad F_2=zg_2+z^2g_1^2.$$

注意 **12.** *Bell*多項式は合成関数の高階導関数の計算に使われる（*di Bruno* の公式）例えば，

$$\partial_x(f(g(x))=g_1\frac{\partial f}{\partial g},\qquad \partial_x^2(f(g(x))=g_2\frac{\partial f}{\partial g}+g_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial g^2}.$$

Bell 多項式 F_n をパラメータ z に関して展開し，

$$F_n(zg_1,\cdots,zg_n)=\sum_{j\geq 0}z^jB_{nj}(g_1,\cdots,g_{n-j+1})$$

により定まる $B_{ij}[g]$ を Bell 行列（またはこれも Bell 多項式）と呼ぶ．sub-model の可積分構造に関係するのは，次の二つの補題である．

補題 **13.** 次の漸化式が成り立つ．

$$F_{n+1}[zg]=\left\{\sum_{r=1}^{n}g_{r+1}\frac{\partial}{\partial g_r}+zg_1\right\}F_n[zg].$$

補題 **14.** *Bell*行列は関数の合成に対して反準同型である，すなわち次が成り立つ．

$$B_{pj}[f(g(x))]=\sum_{n=j}^{p}B_{pn}[g]B_{nj}[f].$$

次に一般化された Bell 多項式について述べる．滑らかな関数 $\mathbf{u}(\mathbf{y}) = (u_1(y_1, \cdots, y_s), \cdots, u_N(y_1, \cdots, y_s))$ と複素数のパラメータ $\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_N)$ に対し，
一般化された Bell 多項式を次で定義する：

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{p}}[\mathbf{z}\cdot\mathbf{u}] &= F_{p_1,\cdots,p_s}[\sum_{i=1}^{N} z_i u_i(y_1,\cdots,y_s)] \\ &\equiv \mathrm{e}^{-\mathbf{z}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{y})}\partial_{\mathbf{y}}^{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathbf{z}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{y})} \\ &\equiv \sum_{0\le|\mathbf{k}|\le|\mathbf{p}|} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} B_{\mathbf{p},\mathbf{k}}[\mathbf{u}], \end{aligned}$$

ここで，

$$\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N}, \quad |\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_N$$
$$\partial_{\mathbf{y}}^{\mathbf{p}} = \partial_{y_1}^{p_1}\cdots\partial_{y_s}^{p_s}, \quad |\mathbf{p}| = p_1 + \cdots + p_s.$$

母関数表示

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}}[\mathbf{z}\cdot\mathbf{u}]\frac{\mathbf{t}^{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}!} &= \exp(\mathbf{z}\cdot\{\mathbf{u}(\mathbf{y}+\mathbf{t}) - \mathbf{u}(\mathbf{y})\}) \\ &= \prod_{i=1}^{N}\exp(z_i\{u_i(\mathbf{y}+\mathbf{t}) - u_i(\mathbf{y})\}). \end{aligned}$$

特に最初の独立変数だけのものを使うので，簡単のため次のように書く．

$$F_p = F_{p0\cdots0}, \qquad (u_i)_r \equiv \partial_{y_1}^r u_i.$$

従属変数が 1 つの場合と同様に，次の二つの補題が可積分構造に関係する．

補題 15. 次の漸化式が成り立つ．

$$F_{p+1}[\mathbf{z}\cdot\mathbf{u}] = \sum_{i=1}^{N}\left\{\sum_{r=1}^{p}(u_i)_{r+1}\frac{\partial}{\partial(u_i)_r} + z_i(u_i)_1\right\}F_p[\mathbf{z}\cdot\mathbf{u}].$$

補題 16. 関数の合成に対し，次が成り立つ．

$$B_{\mathbf{p},\mathbf{j}}[\mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{y}))] = \sum_{|\mathbf{j}|\le|\mathbf{m}|\le|\mathbf{p}|} B_{\mathbf{p},\mathbf{m}}[\mathbf{u}]B_{\mathbf{m},\mathbf{j}}[\mathbf{f}],$$

ここで

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (f_1(u_1,\cdots,u_N),\cdots,f_N(u_1,\cdots,u_N)),$$
$$\mathbf{p} = (p_1,\cdots,p_s), \quad \mathbf{m} = (m_1,\cdots,m_N), \quad \mathbf{j} = (j_1,\cdots,j_N).$$

注意 17. 定理 *10* の証明には補題 *15* が，定理 *11* の証明には補題 *16* が本質的な役割を果たす．

6　$\mathbf{C}P^1$-submodelの高階化

簡単のため，以下 $\mathbf{C}P^1$ の場合に説明する．
$\mathbf{C}P^1$-submodel

$$\partial^\mu \partial_\mu u = 0, \quad \partial^\mu u \partial_\mu u = 0$$

は波動方程式 $\Box u = \partial^\mu \partial_\mu u = 0$ に非線型方程式 $\partial^\mu u \partial_\mu u = 0$ を連立させたものであり，

$$\Box u = 0, \quad \Box(u^2) = 0$$

と書きなおすことができる．そこで，次のような一般化（高階化）を考える．
$\sum_\mu{}'$ を　　$\sum_\mu{}' A_\mu \equiv A_0 - \sum_{j=1}^n A_j$　の記号とする．

定義 **18.** $p = 2, 3, \cdots$ に対し，次の方程式系を
p-submodel の方程式と呼ぶ*;*

$$\Box_p(u^k) = 0 \quad (k = 1, \cdots, p), \quad \Box_p \equiv \partial_0^p - \partial_1^p - \cdots - \partial_n^p.$$

$p = 2$ の場合が $\mathbf{C}P^1$-submodel である．

$\mathbf{C}P^1$-submodel の保存カレントの自然な拡張として p-submodel の保存カレントを求める．その原理は次の通りである：
p-submodel は Bell 多項式表示

$$\sum_\mu{}' F_{p,\mu} = 0$$

を持つ．例えば，

$$F_2 = g_2 z + g_1^2 z^2$$

を用いて，$\mathbf{C}P^1$-submodel の Bell 多項式表示は

$$\sum_\mu{}' F_{2,\mu} = \partial^\mu \partial_\mu u \frac{\partial}{\partial u} + \partial^\mu u \partial_\mu u \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 = 0$$

（とその複素共役）である．

ここで，Bell 多項式 F_n の symbol を ξ^n と定義すると，$\mathbf{C}P^1$-submodel は $\xi^2 = 0,\ \bar{\xi}^2 = 0$ となる．全微分作用素は $\xi + \bar{\xi}$ を掛けることに対応するので，

$$(\xi + \bar{\xi}) p(\xi, \bar{\xi}) = \xi^2 + \alpha \bar{\xi}^2 \qquad (\exists \alpha \in \mathbf{C})$$

を満たす多項式 $p(\xi,\bar{\xi})$ は $p(\xi,\bar{\xi})=\xi-\bar{\xi}$ となり，対応して

$$V_{2,\mu}=F_{1,\mu}-\bar{F}_{1,\mu}$$

が求まる．

$$F_1=g_1 z,\qquad F_{1,\mu}=\partial_\mu u\frac{\partial}{\partial u}$$

であるから，

$$\begin{aligned} V_{2,\mu}(f) &= F_{1,\mu}(f)-\bar{F}_{1,\mu}(f) \\ &= \partial_\mu u\frac{\partial f}{\partial u}-\partial_\mu\bar{u}\frac{\partial f}{\partial\bar{u}}, \end{aligned} \tag{17}$$

となり，系 6 で求めた $\mathbf{C}P^1$-submodel の保存カレントに一致する．このプロセスを一般化された Bell 多項式を用いて実行すれば，定理 10 が求まる．

7 まとめ

- 射影行列のテンソル積が再びある射影行列になることを用いて，任意次元 Grassmann model の可積分な submodel (Grassmann submodel) が定義できた．これは AFG が求めたものの一般化となっている．
- 任意次元 Grassmann submodel を高階化することにより，保存カレントや解の対称性の背後に，一般化された Bell 多項式で記述される構造があることがわかった．

参考文献

[AFG1] O. Alvarez, L. A. Ferreira and J. S. Guillen: *A New Approach to Integrable Theories in Any Dimension,* Nucl. Phys. B529(1998)689-736, hep-th/9710147.

[AFG2] O. Alvarez, L. A. Ferreira and J. S. Guillen: *Integrable theories in any dimension: a perspective,* hep-th/9903168.

[AFZ1] H. Aratyn, L. A. Ferreira and A. H. Zimerman: *Toroidal solitons in 3+1 dimensional integrable theories,* Phys. Lett. B456(1999) 162-170, hep-th/9902141.

[AFZ2] H. Aratyn, L. A. Ferreira and A. H. Zimerman: *Exact static soliton solutions of 3+1 dimensional integrable theory with nonzero Hopf numbers,* Phys. Rev. Lett. 83(1999) 1723-1726, hep-th/9905079.

[Al-Fre] R. Aldrovandi and L. P. Freitas: *Continuous iteration of dynamical maps,* J. Math. Phys. 39(1998), 5324-5336.

[Bell] E. T. Bell: *Exponential polynomials,* Ann. of Math. 35(1934), 258-277.

[F] D. Fujiwara: *Generalized Bell polynomials,* (Japanese) Sugaku 42(1990), no. 1, 89-90.

[FG] L. A. Ferreira and J. S. Guillen: *Infinite symmetries in the Skyrme model,* Phys. Lett. B504(2001) 195-200, hep-th/0010168.

[FHS1] K. Fujii, Y. Homma and T. Suzuki: *Nonlinear Grassmann Sigma Models in Any Dimension and An Infinite Number of Conserved Currents,* Phys. Lett. B438(1998)290-294, hep-th/9806084.

[FHS2] K. Fujii, Y. Homma and T. Suzuki: *Submodels of Nonlinear Grassmann Sigma Models in Any Dimension and Conserved Currents, Exact Solutions,* Mod. Phys. Lett. A14(1999)919-928, hep-th/9809149.

[FS1] K. Fujii and T. Suzuki: *Nonlinear Sigma Models in* $(1+2)$*-Dimensions and An Infinite Number of Conserved Currents,* Lett. Math. Phys. 46(1998)49-59, hep-th/9802105.

[FS2] K. Fujii and T. Suzuki: *Some Useful Formulas in Nonlinear Sigma Models in* $(1+2)$*-Dimensions,* hep-th/9804004.

[FL] L. A. Ferreira and E. E. Leite: *Integrable theories in any dimension and homogenous spaces,* Nucl. Phys. B547 (1999) 471-500, hep-th/9810067.

[FR] L. A. Ferreira and A. V. Razumov: *Hopf solitons and area preserving diffeomorphisms of the sphere,* Lett. Math. Phys. 55(2001) 143-148, hep-th/0012176.

[GMG] D. Gianzo, J. O. Madsen and J. S. Guillen: *Integrable Chiral Theories in 2+1 Dimensions,* Nucl. Phys. B537(1999)586-598, hep-th/9805094.

[Jac] N.Jacobson: *Lie Algebras,* Interscience Publishers, John Wiley & Sons(1962).

[KSG] N. S. Koshlyakov, M. M. Smirnov and E. B. Gliner: *Differential Equations of Mathematical Physics,* North-Holland Publishing Company, Amsterdam(1964)

[Raj] R. Rajaraman: *Solitons and Instantons,* Elsevier(1982)

[Ri] J. Riordan: *Derivatives of Composite Functions,* Bull. Am. Math. Soc. 52(1946), 664-667.

[Ri1] J. Riordan: *An Introduction to Combinatorial Analysis,* John Wiley & Sons, New York(1958).

[Ri2] J. Riordan: *Combinatorial Identities,* John Wiley & Sons, New York, London, Sydney(1968).

[Suz1] T. Suzuki: *A Generalization of the Submodel of Nonlinear* $\mathbf{C}P^1$ *Models,* Nucl. Phys. B578(2000)515-523, hep-th/0002003.

[Suz2] T. Suzuki: *Integrable Submodels of Nonlinear* σ*-models and Their Generalization,* Ph.D. Dissertation at Waseda University (2001), hep-th/0103104

[Zak] W. J. Zakrzewski: *Low Dimensional Sigma Models,* Adam Hilger (1989).